

SIMULACIÓN DE PRESIÓN NO ESTÁTICA EN YACIMIENTOS MEDIANTE SOLUCIONES FUNDAMENTALES

Simulation Of Transient Reservoir Pressure Based On Fundamental Solutions

CARMEN M. DA SILVA R. y JUAN M. GUEVARA J.

Universidad Central de Venezuela, Facultad de Ciencias, Escuela de Matemáticas, Caracas, Venezuela.
carmen.dasilva@ciens.ucv.ve, jmguevarajordan@gmail.com

Fecha de recepción: 05/10/2007, **Fecha de Revisión:** 20/05/2008, **Fecha de Aceptación:** 05/06/2008

Resumen

Se presenta un nuevo método numérico estructurado en múltiples pasos de tiempo, denominado esquema multipaso, el cual permite aproximar la solución de la ecuación no estática de difusión y simular la evolución de la presión en problemas relacionados con ingeniería de yacimientos. Este esquema combina el método de las soluciones fundamentales, el principio de superposición y la descomposición en valores singulares para obtener una aproximación de la presión en yacimientos homogéneos. Comparaciones con soluciones analíticas evidencian la convergencia numérica del nuevo método. La aplicación en el cálculo cuantitativo de áreas de drenaje asociadas a pozos productores distribuidos en un yacimiento petrolífero de forma irregular demuestra la versatilidad y alta precisión del esquema propuesto.

Palabras clave: descomposición en valores singulares, esquema multipaso, principio de superposición, soluciones fundamentales, yacimientos.

Abstract

A new numerical method based on multiple times steps is presented. It approximates the solution of the unsteady diffusion equation for the simulation of pressure in reservoir engineering. This scheme combines the fundamental solutions, superposition principle, and singular value decomposition to obtain pressure approximations in homogeneous reservoirs. A comparative study gives evidence that the new scheme is convergent. An application of the method for computing the drainage area generated by productions wells in an irregular reservoir shows its high accuracy and versatility.

Key words: singular value decomposition, multistep scheme, superposition principle, fundamental solution, reservoir.

1. Introducción

La simulación numérica y matemática de la presión en un yacimiento petrolífero viene dada por la ecuación de difusión que en el contexto de ingeniería de yacimientos recibe el nombre de ecuación de presión (Dake, 1991; Caudle, 1996). La solución de esta ecuación no puede ser generalmente obtenida por técnicas puramente analíticas y por ende se utilizan métodos numéricos para lograr su aproximación. Diversidad de métodos numéricos se han desarrollado para resolver la ecuación de presión (Carslaw & Jeager, 1959; Duchateau & Zachmann, 1992). Recientemente, han sido creados métodos numéricos que no dependen de mallas para aproximar la solución de ecuaciones diferenciales parciales elípticas, entre los cuales destaca el llamado método de las soluciones fundamentales (Fairweather & Karageorghis, 1998; Guevara & Rodríguez, 2001). En el caso de la ecuación de difusión se ha aplicado el método de las soluciones fundamentales empleando la transformada de Laplace (Chen & Golberg, 1999) en el tiempo. Sin embargo, la utilización de la transformada de Laplace para resolver ecuaciones en derivadas parciales posee ciertas deficiencias debido a que se necesitan algoritmos numéricos para obtener la transformada inversa de Laplace. El método numérico desarrollado en este artículo se basa en la solución fundamental para la ecuación de difusión y el principio de superposición para generar un esquema multipaso, que representa una original extensión de (Castillo *et al.*, 2006).

El contenido de este artículo está distribuido de la siguiente forma. Primero, se describe el método de las soluciones fundamentales para la ecuación de presión. Segundo, se presenta el nuevo método numérico denominado esquema multipaso. Tercero, el nuevo esquema es validado en

problemas de yacimientos de una y dos dimensiones. Cuarto, se implementa dicho esquema en un problema relacionado con un yacimiento de forma irregular. Finalmente, se exponen las conclusiones.

2. Método de Soluciones Fundamentales

Un yacimiento petrolífero puede ser visto como un yacimiento bidimensional en el cual su espesor es considerado relativamente pequeño en comparación con la verdadera dimensión del yacimiento. La evolución de la presión en un yacimiento bidimensional Ω , con una cantidad de npr pozos en su interior, y el valor de la presión en cualquier instante de tiempo están modelados por el siguiente problema de contorno (Dake, 1991)

$$\frac{\phi\mu c}{K} \frac{\partial P}{\partial t}(\bar{x}, t) - \Delta P(\bar{x}, t) = \frac{\mu}{Kh} \sum_{r=1}^{npr} q_r \delta(\bar{x} - \bar{x}_r), \quad \bar{x} = (x, y) \in \Omega \quad (1)$$

$$\frac{\partial P}{\partial n}(\bar{x}, t) = 0, \quad \text{si } \bar{x} = (x, y) \in \partial\Omega \quad (2)$$

$$P(\bar{x}, 0) = p_i, \quad (3)$$

donde P es la presión, Δ es el operador Laplaciano (Duchateau & Zachmann, 1992), q_r es la tasa de producción de un pozo situado en la coordenada $\bar{x}_r = (x_r, y_r) \in \Omega$ y δ es la función delta de Dirac (Haberman, 2003). Las constantes ϕ , μ , c , K y h representan la porosidad del medio, la viscosidad del fluido, la compresibilidad del fluido, la permeabilidad del medio poroso isotropico y el espesor del yacimiento respectivamente. La expresión (1) es la ecuación de presión con modelo de múltiples pozos, (2) es la condición de borde de tipo Neumann de no-flujo en la cual $\partial\Omega$ representa el borde de la región Ω y (3) es la presión inicial presente en Ω en el instante de tiempo $t = 0$, donde P_i es un valor constante.

La solución al problema dado por las ecuaciones (1), (2) y (3) estaría representada por series infinitas que no darían una buena comprensión de lo sucedido en $\vec{x} = (x, y) \in \Omega$ debido a las fuentes concentradas en $\vec{x}_r = (x_r, y_r)$ (Haberman, 2003). Por lo tanto, se considera la solución del problema de valor inicial definido por (1) y (3) sin condiciones de frontera, la cual es válida para todo punto $\vec{x} = (x, y) \in R^2$. Esta solución es denominada solución fundamental y viene dada por la siguiente expresión

$$P(\vec{x}, t) = p_i + \frac{Q\mu}{4\pi Kh} Ei\left(\frac{\phi\mu c\|\vec{x} - \vec{x}_0\|^2}{4Kt}\right), \quad (4)$$

en donde $Ei(r)$ representa la función exponencial integral definida por $Ei(r) = \int_r^\infty \frac{e^{-\eta}}{\eta} d\eta$, $\|\cdot\|$ es la norma Euclídea (Rudin, 1966) y Q es la tasa de producción de un pozo situado en la coordenada $\vec{x}_0 = (x_0, y_0)$. El método de las soluciones fundamentales (MSF) plantea, en principio, aproximar la presión P generada por el problema (1), (2) y (3), escribiéndola como una combinación lineal finita de soluciones fundamentales.

$$P(\vec{x}, t) = p_i + \frac{\mu}{4\pi Kh} \left[\sum_{r=1}^{npr} q_r Ei\left(\frac{\phi\mu c\|\vec{x} - \vec{x}_r\|^2}{4Kt}\right) + \sum_{j=1}^{npi} Q_j Ei\left(\frac{\phi\mu c\|\vec{x} - \vec{x}_j\|^2}{4Kt}\right) \right] \quad (5)$$

La primera sumatoria en (5) está asociada a npr pozos productores distribuidos en el interior del yacimiento Ω , denominados pozos reales, cuyas tasas de producción, q_r con $r = 1, \dots, npr$, son conocidas. Mientras que, la segunda sumatoria representa a la cantidad de npi pozos llamados imaginarios, cuyas tasas de producción son desconocidas y denotadas por Q_j con $j=1, \dots, npi$. Estos pozos imaginarios están dispuestos fuera del yacimiento Ω simulando su borde para ayudar a reforzar la condición de no-flujo dada en (2). Además, la distribución de los pozos imaginarios no depende de la posición de los pozos reales que están dentro del yacimiento. La Fig. 1 nos

proporciona un ejemplo de una región Ω en forma de elipse que posee ocho pozos reales en su interior y en la cual se puede apreciar la distribución de los pozos imaginarios asociados a este yacimiento.

Para determinar el valor de la tasa de producción de cada pozo imaginario, es necesario considerar una cierta cantidad de puntos en el borde del yacimiento, llamados puntos de colocación, tal como se muestra en la Fig. 1. Al aplicar la condición de Neumann dada en (2) utilizando la expresión (5) y evaluarla en cada punto de colocación se obtiene la siguiente ecuación

$$\sum_{j=1}^{npi} Q_j \frac{\langle \vec{x}_i - \vec{x}_j, \vec{n} \rangle}{\|\vec{x}_i - \vec{x}_j\|^2} e^{-\frac{\phi\mu c\|\vec{x}_i - \vec{x}_j\|^2}{4Kt}} = - \sum_{r=1}^{npr} q_r \frac{\langle \vec{x}_i - \vec{x}_r, \vec{n} \rangle}{\|\vec{x}_i - \vec{x}_r\|^2} e^{-\frac{\phi\mu c\|\vec{x}_i - \vec{x}_r\|^2}{4Kt}}. \quad (6)$$

donde $\langle \cdot, \cdot \rangle$ denota el producto interno en R^2 , $\vec{x}_r = (x_r, y_r) \in \partial\Omega$ representa la posición de los puntos de colocación y \vec{n} es el vector normal unitario exterior a la frontera del yacimiento en cada punto de colocación. Por cada punto de colocación que evaluemos en (6) obtenemos una ecuación lineal en función de las variables Q_j . De esta forma, se genera un sistema lineal de ecuaciones

$$AQ = B, \quad (7)$$

con la variable Q representando al vector columna $(Q_1, \dots, Q_{npi})^T$. Si npc es el número de puntos de colocación, el sistema lineal (7) posee npc ecuaciones y npi incógnitas.

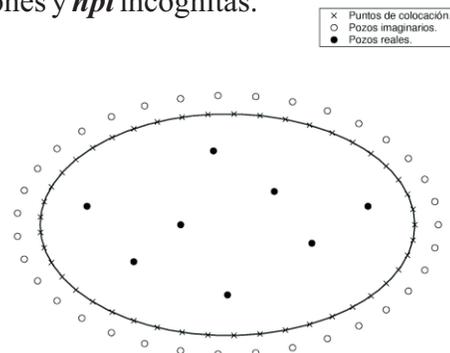


Fig. 1. Distribución de pozos reales, pozos imaginarios y puntos de colocación en el yacimiento.

El MSF establece considerar un número de puntos de colocación mayor o igual al de pozos imaginarios. Por lo tanto, el sistema de ecuaciones (7) puede ser cuadrado o sobredeterminado. En un sistema lineal sobredeterminado puede suceder que el sistema no tenga solución, tenga infinitas soluciones o tenga solución única (Hager, 1988). Para abordar estos tres casos de manera unificada consideramos que la solución al sistema sobredeterminado es la solución en mínimos cuadrados. Con el fin de obtener dicha solución usaremos la descomposición en valores singulares (SVD, por sus siglas en inglés), pues este método es uno de los algoritmos más robustos para producir siempre una adecuada solución en mínimos cuadrados (Hager, 1988; Flannery *et al.*, 1999). Si la matriz A tiene dimensión $m \times n$ con $m \geq n$ entonces el SVD factoriza la matriz A en un producto de tres matrices (Hager, 1988)

$$A = USV^r, \quad (8)$$

donde U y V son matrices cuadradas ortogonales y la matriz S , de igual dimensión que la matriz A , posee en su diagonal principal los valores singulares de A y ceros en el resto de sus elementos. Sea k el rango de la matriz A . Entonces, A posee k valores singulares positivos con $k \leq n$. Si representamos por S_+ a la matriz cuadrada diagonal con valores singulares positivos de A , podemos denotar a la matriz S mediante submatrices como

$$S = \begin{pmatrix} S_+ & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ si } k < n, \quad (9)$$

$$S = \begin{pmatrix} S_+ \\ 0 \end{pmatrix} \text{ si } k = n.$$

A la matriz S se le asocia la noción de pseudoinversa S^{-1} definida por

$$S^{-1} = \begin{pmatrix} S_+^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ si } k < n, \quad (10)$$

$$S^{-1} = \begin{pmatrix} S_+^{-1} & 0 \end{pmatrix} \text{ si } k = n.$$

De esta forma, la solución del sistema lineal (7) es obtenida por la relación

$$Q = VS^{-1}U^T B, \quad (11)$$

con S^{-1} definida como en (10). La solución (11) junto con la expresión (5) representa la aproximación de la presión mediante el MSF.

3. Esquema Multipaso

El MSF establecido en la sección previa está desarrollado para un solo paso de tiempo y su algoritmo numérico modela satisfactoriamente la presión en períodos de tiempo muy cortos (Castillo *et al.*, 2006). Sin embargo, en el área de ingeniería de petróleo se necesita conocer la evolución y el valor de la presión en intervalos de tiempo largos. Por lo tanto, se presenta el esquema multipaso que combina el MSF, el principio de superposición y el SVD en un nuevo esquema numérico que permite aproximar la presión a lo largo de cualquier período de tiempo.

Sin pérdida de generalidad se puede suponer que la tasa de producción Q de un pozo es una función constante a trozos en el intervalo de tiempo de producción $[0, t]$. Es conocido que las funciones continuas y diferenciables pueden ser aproximadas mediante funciones constantes a trozos con cualquier grado de exactitud tomando particiones suficientemente pequeñas (Dake, 1991; Haberman, 2003; Rudin, 1966). Por ello, es siempre posible realizar una partición uniforme al intervalo $[0, t]$ en n pasos de tiempo, denotando por t^k con $k=0, \dots, n$ a los $n+1$ nodos, $t_0=0$, $t_n=t$ y tal que $Q^{(k)}$ denotará el valor constante de producción del pozo en el k -ésimo paso de tiempo $[t_{k-1}, t_k]$. Se supondrá por conveniencia que la producción del pozo es $Q^{(0)}=0$ en $t=0$

Mediante el principio de superposición desarrollado en (Dake, 1991) se sabe que la presión generada por el pozo con tasa variable Q se puede descomponer en n subproblemas cuya

solución fundamental viene dada por (4), pero considerando que el pozo produce a la tasa $Q^{(k)} - Q^{(k-1)}$ en el período de tiempo $t_n - t_{k-1}$ en lugar de Q y t tal como aparece en la ecuación (4). En consecuencia, se tiene que el valor de la presión en el instante de tiempo $t = t_n$ es, agrupando convenientemente, de la siguiente forma

$$P(\vec{x}, t) = p_i + \frac{\mu}{4\pi Kh} \sum_{k=1}^{n-1} Q^{(k)} \left[Ei \left(\frac{\phi\mu c \|\vec{x} - \vec{x}_0\|^2}{4K(t_n - t_{k-1})} \right) + Ei \left(\frac{\phi\mu c \|\vec{x} - \vec{x}_0\|^2}{4K(t_n - t_k)} \right) \right] + \frac{\mu}{4\pi Kh} Q^{(n)} Ei \left(\frac{\phi\mu c \|\vec{x} - \vec{x}_0\|^2}{4K(t_n - t_{n-1})} \right), \quad (12)$$

donde, en este caso, \vec{x}_0 representa la posición del pozo productor con tasa de producción variable Q . Aplicando el MSF y extendiendo las ideas expuestas en los párrafos precedentes, se combinarán las expresiones (12) y (4) para aproximar la presión generada por varios pozos a tasas constantes en un yacimiento. Para ello, consideremos la situación en que se tiene npr pozos reales con tasa de producción constante, q_r , en el período total de producción $[0, t]$ y npi pozos imaginarios con tasa de producción variable, Q_j , sobre el mismo intervalo de tiempo de producción. Entonces, denotando por $Q_j^{(k)}$ al valor constante de la tasa del j -ésimo pozo imaginario en el k -ésimo paso de tiempo entonces se tendrá que la representación de la presión en el instante $t = t_n$ con n pasos de tiempo es

$$P(\vec{x}, t) = p_i + \frac{\mu}{4\pi Kh} \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{j=1}^{npi} Q_j^{(k)} \left[Ei \left(\frac{\phi\mu c \|\vec{x} - \vec{x}_j\|^2}{4K(t_n - t_{k-1})} \right) - Ei \left(\frac{\phi\mu c \|\vec{x} - \vec{x}_j\|^2}{4K(t_n - t_k)} \right) \right] + \frac{\mu}{4\pi Kh} \sum_{j=1}^{npi} Q_j^{(n)} Ei \left(\frac{\phi\mu c \|\vec{x} - \vec{x}_j\|^2}{4K(t_n - t_{n-1})} \right) + \frac{\mu}{4\pi Kh} \sum_{r=1}^{npr} q_r Ei \left(\frac{\phi\mu c \|\vec{x} - \vec{x}_r\|^2}{4K(t_n - t_0)} \right). \quad (13)$$

Esta expresión representa la aproximación de la presión mediante el MSF. Para determinar el valor de las tasas de producción de los pozos imaginarios en (13) se ensambla un sistema lineal de ecuaciones procediendo de forma inductiva. Para ello se considera $P(\vec{x}, t_1)$ con $n = 1$ en (13), se ejecuta el MSF sólo hasta obtener el sistema de ecuaciones que lo denotamos en este caso por npc ecuaciones pero con $2 \cdot npi$ incógnitas correspondientes a las tasas $Q^{(1)}$ y $Q^{(2)}$ del primer y segundo paso de tiempo respectivamente. Estas ecuaciones tienen la siguiente forma matricial, $A_2 Q^{(1)} + A_1 Q^{(2)} = B^{(2)}$. Este procedimiento se repite consecutivamente hasta alcanzar el último paso tiempo, en donde se considera la expresión $P(\vec{x}, t_1)$, dada por (13), para luego aplicar el MSF y obtener un sistema de ecuaciones representado por $A_n Q^{(1)} + A_1 Q^{(n)} = B^{(n)}$ con npc ecuaciones y $n \cdot npi$ incógnitas. Agrupando las ecuaciones lineales obtenidas de esta forma se obtiene el siguiente sistema lineal de ecuaciones para las tasas de los pozos imaginarios,

$$\begin{pmatrix} A_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ A_2 & A_1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ A_{n-1} & A_{n-2} & \dots & A_1 & 0 \\ A_n & A_{n-1} & \dots & A_2 & A_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q^{(1)} \\ Q^{(2)} \\ \vdots \\ Q^{(n-1)} \\ Q^{(n)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B^{(1)} \\ B^{(2)} \\ \vdots \\ B^{(n-1)} \\ B^{(n)} \end{pmatrix}, \quad (14)$$

Este sistema lineal contiene $n \cdot npc$ ecuaciones y $n \cdot npi$ incógnitas. Debido a su forma triangular puede ser resuelto de forma secuencial o de manera global utilizando el algoritmo SVD, obteniéndose los valores de las tasas de producción de los pozos imaginarios en cada paso de tiempo. En la Fig. 2 se muestra la representación geométrica de la construcción del sistema lineal (14) para un yacimiento Ω .

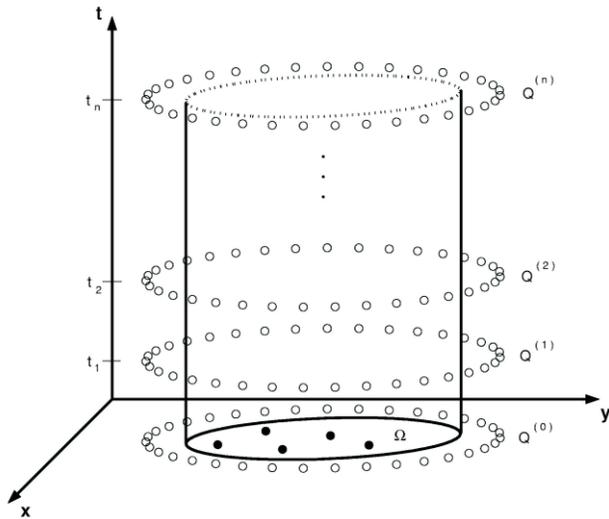


Fig. 2. Representación gráfica del esquema multipaso de n pasos de tiempo.

4. Validación

Para evidenciar la convergencia del nuevo esquema multipaso se resuelven dos problemas sintéticos que poseen solución analítica. En este contexto se entiende por convergencia a la disminución de la diferencia entre la solución numérica y la analítica medida en norma infinito cuando se incrementa el número de pasos de tiempo. Específicamente se considerarán dos casos correspondientes a modelos de yacimientos unidimensionales y bidimensionales respectivamente. El caso unidimensional resalta el efecto de esquema multipaso sobre la solución. Mientras que el caso bidimensional muestra que existen múltiples parámetros que afectan la convergencia, siendo el incremento en el número de pasos de tiempo uno de los más influyentes.

4.1. Caso Problema Unidimensional

Se considera un segmento de recta de longitud uno con un pozo real situado en x_0 producido a una tasa q en el período de tiempo $[0,1]$. El problema que describe dicha situación geométrica está planteado por la siguiente ecuación de presión $\partial_t P - \partial_{xx} P = q \delta(x - x_0)$ en una dimensión, las condiciones de borde de tipo Neumann $\partial_x P(0,t) = \partial_x P(1,t) = 0$ y la condición

inicial $P(x,t)=0$ para la presión. La solución analítica para este problema unidimensional se obtuvo mediante el método de separación de variables (Duchateau & Zachmann, 1992; Haberman, 2003). La Fig. 3 describe la posición del pozo real, así como también la distribución de los puntos de colocación y de los pozos imaginarios. Estos últimos dispuestos a una distancia ε medida desde cada extremo del segmento hacia el exterior del intervalo que representa el yacimiento unidimensional. Para el problema sintético se colocó el pozo real en $x_0 = 0.5$, con una tasa constante $q = -1$ y un período total de producción dado por el intervalo $[0,1]$.

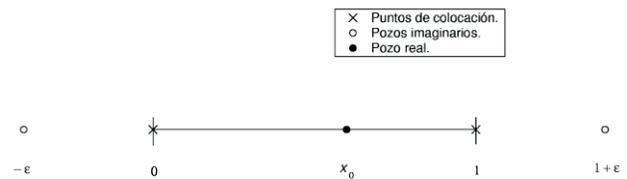
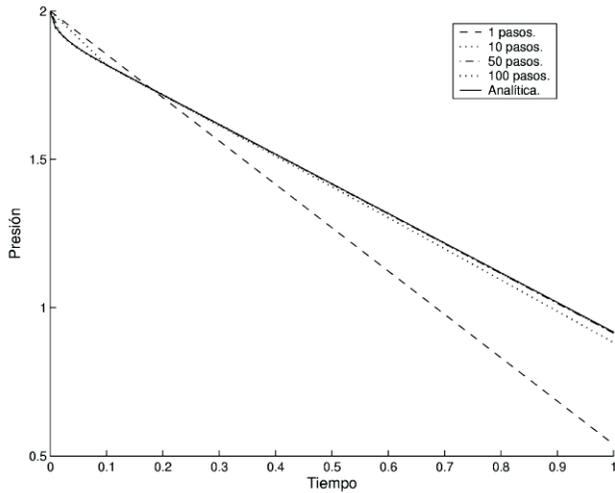


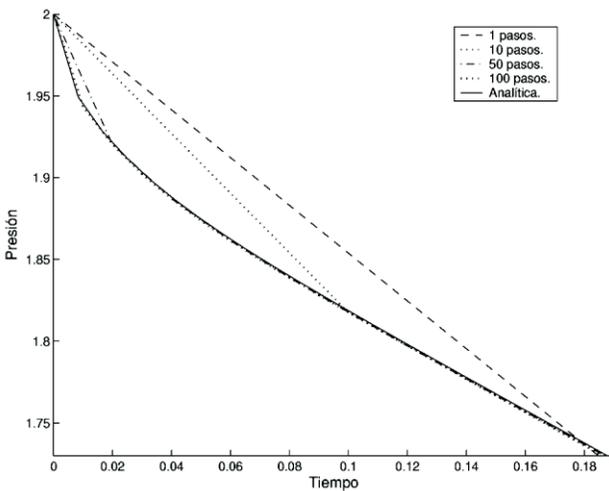
Fig. 3. Configuración del segmento de recta para el problema de validación unidimensional.

Se realizaron varias pruebas comparando soluciones numéricas obtenidas por el esquema multipaso con la solución analítica para verificar la convergencia del método con el aumento de los pasos de tiempo. Los mejores resultados fueron obtenidos para los pozos imaginarios dispuestos a una distancia $\varepsilon=0.1$ del borde. La Fig. 4.a despliega la evolución de la presión en las cercanías del pozo en función del tiempo para distintos tamaños de paso de tiempo considerados. Se observan cuatro soluciones numéricas y la solución analítica representada por la curva continua más gruesa. Los resultados numéricos fueron obtenidos con 1, 10, 50 y 100 pasos de tiempo. La Fig. 4.b es una ampliación de la sección superior izquierda de la Fig. 4.a. En ambas gráficas se evidencia el efecto producido por el esquema multipaso en la solución del problema. La solución generada con un solo paso de tiempo posee forma recta, la cual no corresponde a la solución analítica. A medida que

se incrementa el número de pasos de tiempo, estas soluciones numéricas se aproximan cada vez más a la verdadera solución del problema, llegando a confundirse con la curva originada para refinamientos superiores a 100 pasos de tiempo.



(a)



(b)

Fig. 4. (a). Comparación de soluciones para $x_0 = 0.5$, $q = -1$ y $\varepsilon = 0.1$. (b) Ampliación de la parte superior izquierda de las curvas mostradas en (a).

La simplicidad del problema unidimensional permite destacar la importancia del nuevo esquema multipaso, pues el único parámetro que permite lograr la convergencia son los incrementos en pasos de tiempo.

4.2 Caso Problema Bidimensional

Para validar nuestro algoritmo numérico en dos dimensiones, consideramos un yacimiento en forma de cuadrado unitario con un pozo real ubicado en la coordenada $\vec{x}_0 = (0.25, 0.5)$ con una tasa de producción constante $q = -1$ durante el intervalo de tiempo $[0, 1]$. Se plantea entonces, el problema caracterizado por las expresiones (1), (2) y (3) con los valores $\phi = \mu = c = K = h = 1$, $npr = 1$, $q_1 = q$, $p_i = 2$ y Ω denotando a la región cuadrada unitaria. La solución analítica a este planteamiento fue calculada por el método de separación de variables (Duchateau & Zachmann, 1992; Haberman, 2003). La configuración de este yacimiento bidimensional, los puntos de colocación y los pozos imaginarios la podemos apreciar en la Fig. 5.

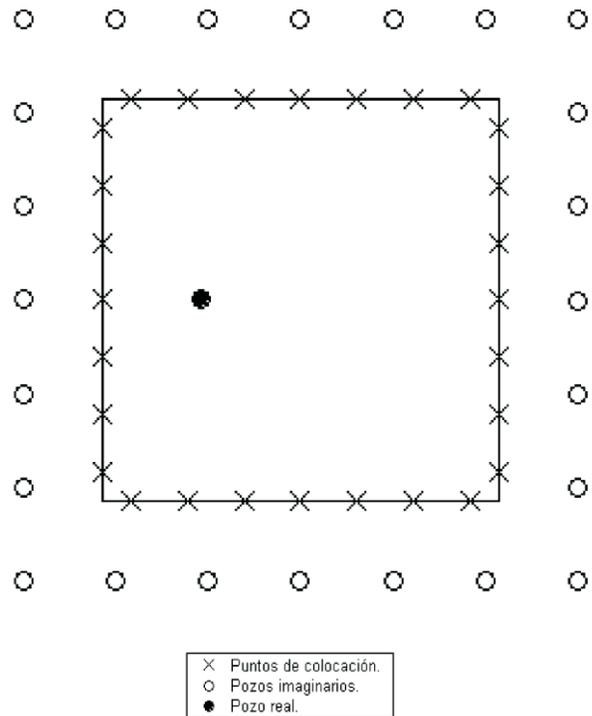


Fig. 5. Configuración del yacimiento cuadrado para la validación bidimensional.

En esta prueba ubicamos a los pozos imaginarios de tal manera que sobresalen del borde del yacimiento a una distancia equivalente a

la más pequeña entre el pozo real y el borde, obteniendo así $\varepsilon=0.25$. En la Fig. 6 se pueden apreciar dos curvas representando el error de aproximación al considerar la diferencia entre las soluciones numéricas y analítica en la norma infinito (Rudin, 1966). La curva punteada fue obtenida considerando un número de puntos de colocación igual al de los pozos imaginarios, específicamente $npc=npi=32$, resultando en ella un comportamiento no monótono a partir de veinte pasos de tiempo.

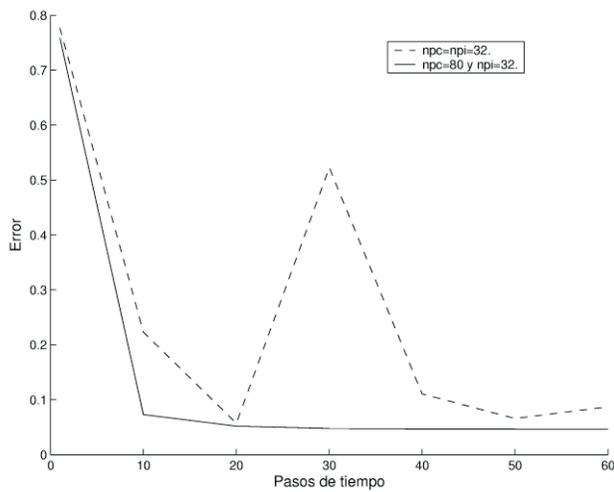


Fig. 6. Gráfica de errores para $\vec{x}_0 = (0.25, 0.5)$ y $\varepsilon = 0.25$.

En cambio, la curva continua, lograda con un número de puntos de colocación ($npc=80$) mayor al de pozos imaginarios ($npi=32$) presenta una estructura monótona decreciente en los errores de aproximación con el incremento del número de pasos de tiempo. Se realizaron diferentes pruebas y se encontró que, en general, el nuevo esquema multipaso en dos dimensiones produce soluciones numéricas cuyos errores se reducen monótonamente en función del número de pasos de tiempo cuando el sistema de ecuaciones es sobredeterminado ($npc > npi$).

La validación exhaustiva del problema bidimensional es compleja porque los parámetros que determinan la convergencia de la solución numérica no se reducen exclusivamente al incremento de pasos de tiempo. Sin embargo,

suponiendo que todos los parámetros que influyen la convergencia se mantienen fijos, excepto el número de pasos de tiempo, se obtiene que al incrementar éstos últimos el nuevo esquema multipaso produce sistemáticamente mejores soluciones.

5. Aplicación

Usaremos el nuevo esquema para determinar, en forma cuantitativa, las áreas de drenaje asociadas a ocho pozos productores distribuidos en un yacimiento de contorno irregular. La estructura de este yacimiento, la distribución y los nombres de los pozos productores son mostrados en la Fig. 7.a. Esta región petrolífera irregular presenta un área de 578.160 ft^2 , un espesor $h=150 \text{ ft}$ y una presión inicial $p_i = 3000 \text{ psi}$. Las propiedades geológicas del yacimiento están dadas en unidades de campo y se disponen en la Tabla 1.

Propiedad	Valor
ϕ	0.23
μ	0.72 <i>cp</i>
c	10^{-4} psi^{-1}
K	100 <i>mD</i>

Tabla 1. Propiedades geológicas del yacimiento.

Además, los ocho pozos reales son producidos a una misma tasa $q=-100 \text{ stb/d}$ el período de una hora. La Fig. 7.b presenta mediante curvas de nivel la distribución de la presión en el interior de la región petrolífera.

Dado que los pozos reales producen a una idéntica tasa, las depresiones logarítmicas (Dake, 1991) de la presión alrededor de cada pozo, abarcan una región de igual amplitud. Además, estas depresiones logarítmicas de cada pozo interactúan entre sí y alcanzan el borde del yacimiento. Esto indica que después de transcurrida una hora de haber comenzado a producir petróleo, la presión ha adquirido la

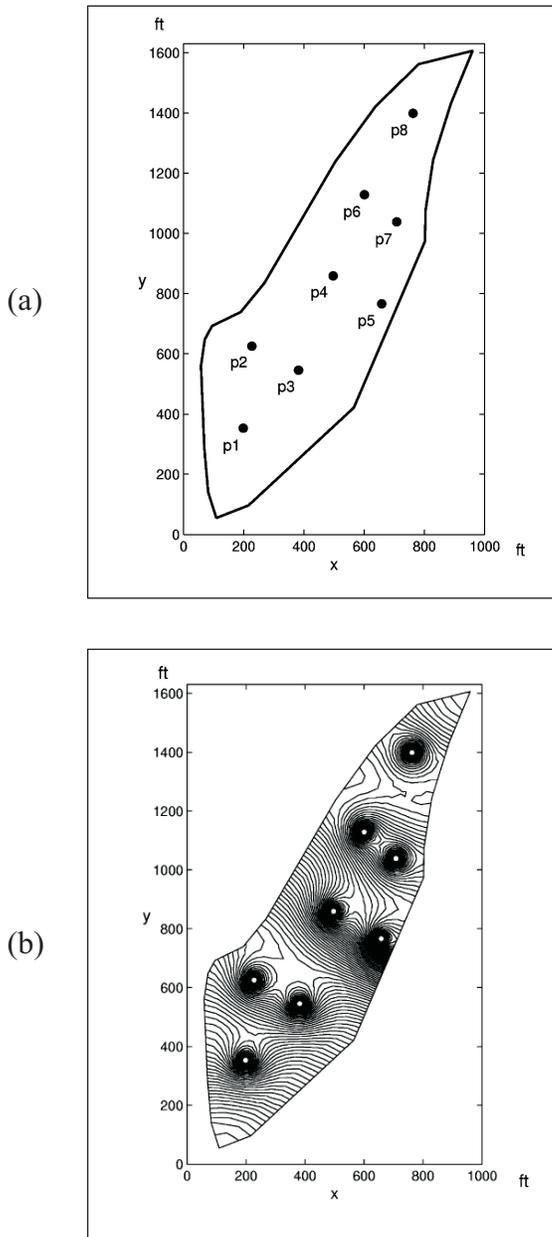


Fig. 7. (a) Yacimiento irregular con ocho pozos productores. (b) Distribución de presión semi-estacionaria.

condición de estado semi-estacionario (Dake, 1991), indispensable para la determinación cuantitativa de las áreas de drenaje. Este comportamiento de la presión se puede apreciar también en las curvas mostradas en la Fig. 8.

Esta figura contiene el trazo de ocho curvas correspondientes a la evolución de la presión en los ocho pozos productores. Vemos que a partir del instante de tiempo 0.05 horas de producción

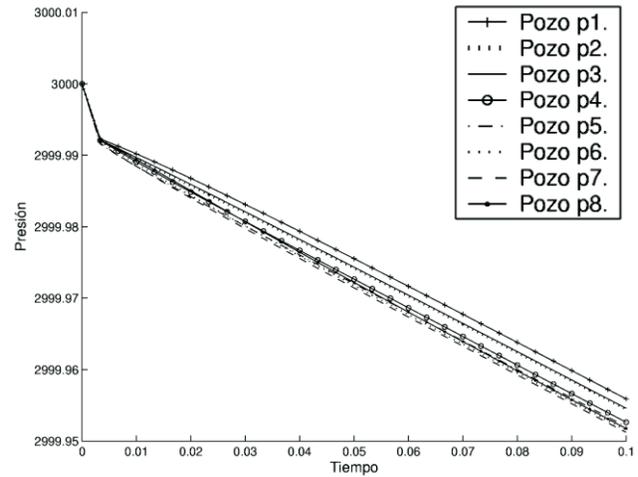


Fig. 8. Evolución de la presión en función del tiempo de cada pozo productor.

aproximadamente, las curvas toman la característica de líneas rectas, indicando así la condición de estado semi-estacionario alcanzada por la presión a partir de ese momento. Aunque la gráfica de estas ocho curvas en la Fig. 8 se dispone sobre el intervalo de tiempo $[0,0.1]$, la presión registra el mencionado comportamiento desde el instante en que comienza a producirlo hasta el tiempo final de producción $t=1$ hora. Las pendientes de las ocho rectas, mostradas en la Fig. 8, se encuentran tabuladas en la segunda columna de la Tabla 2 y son un dato fundamental para calcular cuantitativamente las áreas de drenaje asociadas a cada pozo productor. Las dimensiones de estas áreas de drenaje se pueden visualizar en la tercera columna de la Tabla 2, evidenciando valores muy próximos entre sí e indicando que los pozos drenan áreas de igual tamaño. Esto se debe a que los pozos producen a una misma tasa de -100 stb/d y porque el comportamiento de la presión en su estado semi-estacionario ocasiona rectas paralelas, arrojando pendientes negativas de igual magnitud en sus primeros tres decimales (ver Tabla 2).

En consecuencia, el esquema propuesto es una buena opción para el estudio y análisis del comportamiento de la presión en intervalos de tiempo largos y para la determinación cuantitativa de las áreas de drenaje de un yacimiento de estructura irregular con múltiples pozos

productores.

Pozo	Pendiente	Área
p1	-0.427666	67775.94
p2	-0.427692	67771.89
p3	-0.427691	67771.99
p4	-0.427691	67771.96
p5	-0.427696	67771.24
p6	-0.427647	67778.97
p7	-0.427660	67776.93
p8	-0.427542	67795.53

Tabla 2. Valor de la pendiente y área de drenaje asociada a cada pozo.

6. Conclusiones

El nuevo esquema presentado es un método libre de mallas, su implementación es sencilla, se adapta fácilmente a yacimientos de forma regular e irregular con múltiples pozos y produce soluciones numéricas precisas debido a la implementación de la descomposición en valores singulares para resolver los sistemas de ecuaciones lineales formados en la aplicación del método de las soluciones fundamentales. El estudio realizado en una dimensión evidencia que los pozos imaginarios muy próximos a la frontera producen óptimas soluciones numéricas con el incremento de pasos de tiempo. Para el caso bidimensional, una ubicación de los pozos imaginarios igual a la menor distancia existente entre el pozo real y la frontera del yacimiento, proporciona buenas aproximaciones numéricas como solución del problema, destacando que se debe considerar un número de puntos de colocación mayor que la cantidad de pozos imaginarios para que ello suceda al aumentar el número de pasos de tiempo. El esquema multipaso representa una nueva alternativa para calcular cuantitativamente el área de drenaje de pozos productores dispuestos en yacimientos petrolíferos irregulares. Esto permite, en el contexto de ingeniería de yacimientos, poder

realizar un estudio previo con el propósito de encontrar un adecuado posicionamiento de los pozos productores que garantice un mejor recobro de petróleo hacia la superficie.

7. Bibliografía

Carslaw, H. & J. Jeager. (1959). *Conduction of Heat in Solids*. Oxford University Press. England.

Castillo, M., J. Guevara & D. Villalta. (2006). A Mesh Free Method for the Pressure Equation in Oil Field Problems. *Simulación y Modelaje en Ingeniería y Ciencias*. TM 105-TM 112.

Caudle, B. (1996). *Mechanics of Fluids in Permeable Media*. The University of Texas. Texas. Notas de clase.

Chen, C. & M. Golberg. (1999). The Method of Fundamental Solutions for Potencial, Helmholtz and Diffusion Equations. *Boundary Integral Methods and Mathematical Aspects*. 103-176.

Dake, L. (1991). *Fundamentals of Reservoir Engineering*. Elsevier Science Publishers. New York.

Duchateau, P. & D. Zachmann. (1992). *Partial Differential Equations*. McGraw-Hill. New York.

Fairweather, G. & A. Karageorghis. (1998). The Method of Fundamental Solutions for Elliptic Boundary Value Problems. *Advances in Computational Mathematics*. 9: 69-95.

Flannery, B., W. Press, S. Teukolsky & W. Vetterling. (1999). *Numerical recipes: The art of Scientific Computing*. Cambridge University Press. Cambridge.

Guevara, J. & F. Rodríguez. (2001). Applications of Singular Value Decomposition Streamline Distribution in Sectionally Homogeneous Reservoir. *Society of Petroleum Engineers*. Paper N° 65414.

Haberman, R. (2003). *Ecuaciones en Derivadas*

Parciales con Series de Fourier y Problemas de Contorno. Prentice-Hall. New Jersey.

Hager, W. (1988). *Applied Numerical Linear Algebra*. Prentice Hall. New Jersey.

Rudin, W. (1966). *Principios de Análisis Matemático*. Editorial del Castillo. Madrid.