



La Ecuación de Calor Estocástica con Ruido Aditivo en Python

Guzmán R. Víctor A.^{1*}, Rodríguez Luis A.²

¹Departamento de Física, Facultad de Ciencias y Tecnología, Universidad de Carabobo. Naguanagua, Edo. Carabobo-Venezuela

²Departamento de Matemáticas, Facultad de Ciencias y Tecnología, Universidad de Carabobo. Naguanagua, Edo. Carabobo-Venezuela

*Autor de correspondencia: guzmanvictor1993@gmail.com

Recibido: 29/01/2025, Revisado: 22/02/2025, Aceptado: 06/05/2025

Resumen

La ecuación de calor estocástica unidimensional con ruido aditivo es resuelta débilmente y modelada numéricamente en Python variando el nivel de ruido con condiciones de frontera homogéneas de Dirichlet. Se plantea una extensión homogénea de un modelo unidimensional con fuente de radiación determinista que se ha usado previamente para modelar la estratificación vertical de la temperatura en un lago, con la finalidad de aplicar el modelo al Lago de Valencia.

Palabras Claves: Calor, Estocástico, Lago de Valencia.

The Stochastic Heat Equation with Additive Noise in Python

Abstract

The one-dimensional stochastic heat equation with additive noise is weakly solved and numerically simulated in Python, with varying noise levels under homogeneous Dirichlet boundary conditions. A homogeneous extension of a one-dimensional model, previously used to describe vertical temperature stratification in a lake with a deterministic radiation source, is proposed for potential application to Lake Valencia.

Keywords: Heat, Stochastic, Lake Valencia.

1. Introducción

La ecuación de calor (EC) es una ecuación de difusión que puede ser usada para describir la distribución de temperatura en el espacio y su evolución en el tiempo. La misma ha sido usada con múltiples propósitos los cuales abarcan desde estimaciones del coeficiente de difusión molecular en el contexto de la extracción de petróleo [1] al modelado de la estratificación térmica en lagos [2].

Esta ecuación suele ser aplicada con ciertas variaciones que pueden incluir términos fuente para modelar las entradas o salidas de energía, efectos estocásticos, variaciones en las condiciones de contorno tomando en algunos casos extremos fijos o aislados así como términos que involucren la contribución del viento transformándola en una ecuación integro-diferencial [2].

En esta investigación se trabaja con la Ecuación de Calor Estocástica (ECE) con Ruido Aditivo unidimensional, con la finalidad de evaluar la aplicabilidad de un modelo estocástico de transporte de energía que incorpore ruido aditivo unidimensional para el estudio de la distribución de temperaturas en el Lago de Valencia. El procedimiento consiste en simplificar algunos elementos del modelo unidimensional de [2], incorporar un término para modelar el ruido generado por múltiples efectos y crear un problema equivalente homogeneizado; el cual se resolverá en una investigación posterior de manera numérica.

2. Ecuación de Calor Estocástica con Ruido Aditivo

La ECE con ruido aditivo es:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \sigma \dot{W} \quad (1)$$

donde σ es una constante que cuantifica la influencia del ruido $\dot{W}$ en la solución u . A esta constante se le conoce como el nivel de ruido [3] y su valor puede cambiar significativamente las propiedades de la variable u . Al término $\dot{W}$ se le conoce como un ruido blanco espacio-temporal. Esta ecuación puede ser escrita como:

$$du = k \partial_{xx} u dt + \sigma dW(t), \quad u(0) = u_0 \in L^2(D), \quad (2)$$

donde $k > 0$, ∂_{xx} denotará al operador derivada segunda con respecto a la variable espacial, las condiciones de contorno son de Dirichlet sobre el dominio $D = (0, L) \subset \mathbb{R}$ y $W(t)$ es un proceso de Q -Wiener, el cual se definirá en la siguiente sección.

2.1 Solución débil

Al proceso estocástico predecible $\{u(t) : t \in [0, T]\}$ descrito por u que toma valores del espacio de Hilbert H llamado U con norma $\|\cdot\|_U$ y producto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle_U$ se le llama una solución débil de (2) si

$$\langle u(t), v \rangle = \langle u_0, v \rangle - k \int_0^t \langle u(s), Av \rangle ds + \sigma \int_0^t \langle dW(s), v \rangle, \quad (3)$$

se cumple $\forall t \in [0, T]$, $v \in \mathcal{D}(A)$, donde $\mathcal{D}(A)$ es el dominio del operador lineal definido para el operador laplaciano unidimensional $\partial_{xx} = A$,

$$A : \mathcal{D}(A) \subset H \rightarrow H,$$

ver [4].

Definimos un proceso Q -Wiener por la representación:

$$W(t) = \sum_{j=1}^{\infty} \sqrt{q_j} \chi_j \beta_j(t) \quad (4)$$

los $\beta_j(t)$ son movimientos F_t -Brownianos independientes e idénticamente distribuidos. En [4] se prueba que esta serie converge en $L^2(\Omega, U)$ y que además la ecuación converge para $L^2(\Omega, C([0, T], U))$ para cualquier $T > 0$. Elegimos como en [4], $q_j = |j|^{-(2r+1+\epsilon)}$ y χ_j las autofunciones $\sqrt{2/a} \sin(j\pi x)$. Usando esta expresión para W

$$\begin{aligned} \int_0^t \langle dW(s), v \rangle &= \int_0^t \left\langle d \left[\sum_{j=1}^{\infty} \sqrt{q_j} \chi_j \beta_j(s) \right], v \right\rangle \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} \int_0^t \langle \sqrt{q_j} \xi_j, v \rangle d\beta_j(s). \end{aligned} \quad (5)$$

Se representa a $u(t)$ como una serie de Fourier en $L^2(0, \pi)$ en la base de autofunciones del Laplaciano con condiciones de Dirichlet en la frontera

$$u(t) = \sum_{j=1}^{\infty} \hat{u}_j(t) \phi_j \quad (6)$$

para $\hat{u}_j(t) := \langle u(t), \phi_j \rangle_{L^2(0,\pi)}$. Utilizando la ortogonalidad de la base y aplicando el diferencial, vemos que $\hat{u}_j(t)$ satisface la siguiente Ecuación Diferencial Estocástica Ordinaria

$$d\hat{u}_j = -kj^2\hat{u}_j dt + \sigma\sqrt{q_j}d\beta_j(t). \quad (7)$$

Esta ecuación se puede abordar como la ecuación de Itô unidimensional de manera que:

$$\hat{u}_j = \hat{u}_j(0)e^{-kj^2t} + \sigma\sqrt{q_j}e^{-kj^2t} \int_0^t e^{kj^2s} d\beta_j(s). \quad (8)$$

Es decir que la solución débil a la ECE con ruido aditivo se obtiene usando (8) en (6):

$$u(t) = \sum_{j=1}^{\infty} \hat{u}_j(0)e^{-kj^2t} \phi_j + \sigma \sum_{j=1}^{\infty} \sqrt{q_j} \phi_j e^{-kj^2t} \int_0^t e^{kj^2s} \xi_j \sqrt{ds} \quad (9)$$

con $\phi_j(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin(jx)$. Donde $\hat{u}_j(0)$ puede obtenerse de (6) para $t = 0$:

$$u(0, x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sum_{j=1}^{\infty} \hat{u}_j(0) \sin(jx) \quad (10)$$

usando la ortogonalidad de la base y fijando $u(0, x) = \sin(x)$:

$$\hat{u}_j(0) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\pi} \sin(x) \sin(jx) dx = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \delta_{j1} \quad (11)$$

donde δ_{j1} es la delta de kronecker. Usando esto la solución sería:

$$u(t, x) = \sin(x)e^{-kt} + \sigma \sum_{j=1}^{\infty} \sqrt{q_j} \phi_j(x) e^{-kj^2t} \int_0^t e^{kj^2s} \xi_j \sqrt{ds}. \quad (12)$$

2.2 Aproximación Numérica

Para realizar la aproximación numérica de la ecuación (12) se discretizará el dominio temporal y espacial y se aproximarán los caminos muestrales, el proceso se detalla en [4]. La discretización temporal consiste en hacer aproximaciones del camino muestral de manera tal que se pueda usar el mismo camino muestral en los distintos muestreos, por otro lado la

discretización del espacio se hace por medio de la transformada discreta de Fourier en seno. En esta sección se desarrollará el procedimiento.

La simulación temporal se aborda incorporando unos intervalos temporales Δt y unos subintervalos temporales auxiliares Δt_{ref} . Aproximando la integral en el tiempo:

$$u(t, x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sum_{j=1}^{\infty} \hat{u}_j(0) e^{-kj^2t} \sin(jx) + \sigma \sum_{j=1}^{\infty} b_j \sin(jx) e^{-kj^2t} \times \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \sqrt{\Delta t} \sum_{n=0}^{t/\Delta t} e^{kj^2n\Delta t} \xi_j^n, \quad (13)$$

donde $b_j = \sqrt{\frac{2}{\pi j^{2r+1+\varepsilon}}}$. Para el muestreo temporal al no tener una forma explícita de W se crean subintervalos de tiempo que sirven para generar los incrementos, definidos como $\Delta t_{\text{ref}} := t/N_{\text{ref}}$. Los ξ_j^n que aparecen en la ecuación (13) se definen como $\xi_j^n := (\beta_j(t_{n+1}) - \beta_j(t_n))/\sqrt{\Delta t_{\text{ref}}}$, estas variables aleatorias son $\xi_j^n \sim N(0, 1)$ iid.

Para introducir la parte espacial se relacionan las autofunciones de la base con la transformada seno de Fourier discreta (DST-1) de un vector aleatorio de la forma

$$y_k^{J-1} := \sum_{j=1}^{J-1} \sin\left(\frac{\pi jk}{J}\right) b_j \xi_j, \quad k = 1, \dots, J-1 \quad (14)$$

de manera que:

$$u(t, x) \approx e^{-kt} \sin(x) + \sigma \sum_{j=1}^{\infty} b_j \sin(jx) \times \sum_{n=0}^{t/\Delta t_{\text{ref}}} e^{kj^2(n\Delta t_{\text{ref}}-t)} \xi_j^n \quad (15)$$

si ahora discretizamos el espacio haciendo $x_k = k\pi/J$ con $k = 1, \dots, J$, y truncamos la serie hasta $J-1$, podemos interpretar la serie como una transformada seno discreta de Fourier como en la ecuación (14):

$$u_k(t) \approx e^{-kt} \sin\left(\frac{k\pi}{J}\right) + \sigma \sum_{j=1}^{J-1} b_j \sin\left(\frac{jk\pi}{J}\right) \times \sum_{n=0}^{t/\Delta t_{\text{ref}}} e^{kj^2(n\Delta t_{\text{ref}}-t)} \xi_j^n,$$

la suma se trunca en $J - 1$ porque el término J en la suma es cero. Usando el método de Euler-Maruyama podemos discretizar el tiempo $t = N\Delta t$ y como $t = \Delta t_{\text{ref}} N_{\text{ref}} = N\Delta t$, los $t_m = m\Delta t$ y además como $\Delta t = (N_{\text{ref}}/N)\Delta t_{\text{ref}} = \kappa\Delta t_{\text{ref}}$, entonces $t_m = m\kappa\Delta t_{\text{ref}}$ y con $t = T$ entonces:

$$u_{km} \approx e^{-m\kappa k\Delta t_{\text{ref}}} \sin\left(\frac{k\pi}{J}\right) + \sigma \sum_{j=1}^{J-1} b_j \sin\left(\frac{jk\pi}{J}\right) \sum_{n=0}^{m\kappa} e^{-kj^2\Delta t_{\text{ref}}(m\kappa-n)} \xi_j^n. \quad (16)$$

La ecuación (16) puede ser simulada especificando sus parámetros.

2.3 Simulación en Python

El procedimiento descrito en la sección anterior nos permite modelar la hoja Browniana como un proceso de Q -Wiener. Los incrementos en la hoja serían

$$W^{J-1}(t_{n+1}, x_k) - W^{J-1}(t_n, x_k) = \sum_{j=1}^{J-1} b_j \sin\left(\frac{\pi jk}{J}\right) \xi_j^n \quad (17)$$

usando este hecho simulamos el proceso Q -Wiener y se puede apreciar en la figura:

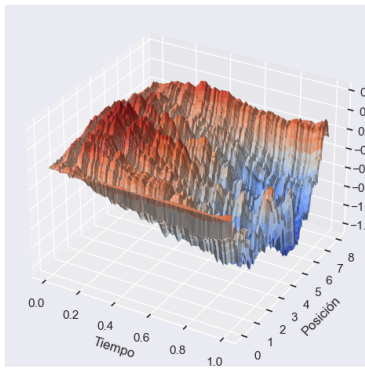


Figura 1. Hoja Browniana usada para describir el ruido aditivo. Fuente: Propia, (2025).

Graficando la temperatura en (16) y variando la semilla no se observaron cambios significativos en el comportamiento de la solución, ver Figura 2.

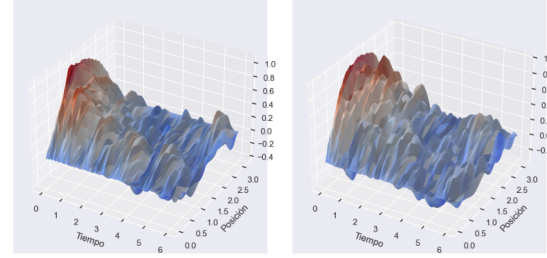


Figura 2. $u(t, x)$ cambiando la semilla. Fuente: Propia, (2025).

Por otro lado cambiando el parámetro de regularidad r en la definición de los coeficientes q_j se puede ver como aumentando el parámetro de regularidad la contribución del ruido va disminuyendo significativamente

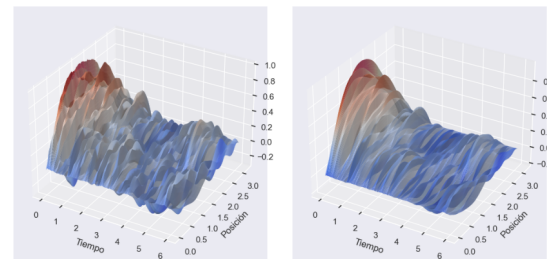


Figura 3. regularidad del ruido r . Izquierda $r = 0,4$. Derecha $r = 1$. Fuente: Propia, (2025).

Finalmente cambiando el nivel de ruido σ entre 0.1, 1 y 2 se observó que el nivel de ruido puede hacer que la solución pierda sus propiedades.

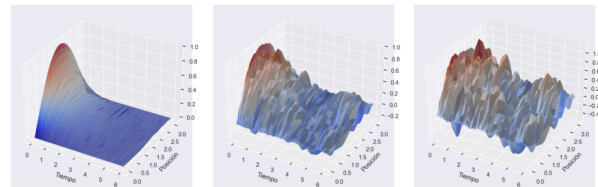


Figura 4. nivel de ruido σ . De izquierda a derecha el nivel de ruido aumenta entre 0.1, 1 y 2 respectivamente. Nótese como al aumentar el nivel de ruido se van perdiendo las propiedades de la función u . Fuente: Propia, (2025).

3. Modelado numérico de la estratificación térmica en un lago meromítico

En esta sección se buscan identificar los elementos necesarios para modelar el perfil de temperaturas en un lago. Como un primer acercamiento se pretende identificar las condiciones de contorno necesarias para la ecuación diferencial y se sugerirá una condición inicial para el modelo.

En el trabajo [2] se usa un modelo determinístico para estudiar el Lago Shira ubicado en Siberia. Este lago tiene un área superficial de 34,7km², una profundidad máxima de 24m y una profundidad media de 21m. Las temperaturas en el epilimnion están entre 15-20°C y en el hipolimnion está alrededor de los 2-3°C en el verano.

En la investigación sobre el Lago Shira se realizan dos modelos matemáticos uno unidimensional y otro bidimensional en el cual se incorporan ecuaciones para las corrientes turbulentas. Para esta investigación se tomará de referencia el modelo unidimensional

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \iota \beta \frac{F_I e^{-\beta x}}{c_p \rho_0} \quad (18)$$

con las siguientes condiciones de contorno de Neumann:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{F_n}{c_p \rho_0 k}, \quad \text{para } x = 0 \quad (19a)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad \text{para } x = L \quad (19b)$$

donde

- k := Coeficiente de difusión turbulenta vertical / Difusividad Térmica.
- F_I := Radiación solar de onda corta incidente en la superficie.
- F_n := Flujo de calor completo a través de la superficie de agua libre.
- ι := Fracción de la radiación de onda corta absorbida en la superficie.
- β := Coeficiente de atenuación/absorción de la radiación solar en el agua.
- c_p := Calor específico del agua.

- ρ_0 := Densidad del agua.

En [2] los investigadores trabajan con una difusividad térmica que cambia con la profundidad x , el modelo de la difusividad se hizo utilizando la relación de la difusividad con la densidad del agua y luego parametrizando la densidad del lago con la profundidad.

El modelo usado en [2] incorpora una parametrización del flujo de calor utilizando investigaciones previas sobre el flujo de calor en el Lago Shira y su relación con la radiación de onda corta y larga en la superficie del mismo.

En el modelo matemático precedente se usan muchos parámetros que son conocidos en el Lago Shira y que no se tienen para el Lago de Valencia. En una primera aproximación a la ecuación (18), se puede suponer que k es constante, la densidad es constante, el calor específico el mismo que en el modelo del Lago Shira y los demás parámetros físicos pertinentes serán tomados de la literatura. Por otro lado se puede generalizar la ecuación (18) introduciendo como fuente el término de ruido aditivo:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \iota \beta \frac{F_I e^{-\beta x}}{c_p \rho_0} + \sigma \dot{W}. \quad (20)$$

Se pueden homogeneizar las condiciones de contorno usando el cambio

$$v(t, x) = u(t, x) + \frac{F_n}{c_p \rho_0 k} x - \frac{F_n}{2L c_p \rho_0 k} x^2. \quad (21)$$

La ECE equivalente sería:

$$\frac{\partial v}{\partial t} = k \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \iota \beta \frac{F_I}{c_p \rho_0} e^{-\beta x} + \frac{F_n}{c_p \rho_0 L} + \sigma \dot{W} \quad (22)$$

con las siguientes condiciones de contorno de Neumann homogéneas:

$$\frac{\partial v}{\partial x} = 0, \quad \text{para } x = 0 \quad (23a)$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = 0 \quad \text{para } x = L \quad (23b)$$

y la siguiente condición inicial:

$$g(x) = f(x) - \frac{F_n}{c_p \rho_0 k} x + \frac{F_n}{2L c_p \rho_0 k} x^2. \quad (24)$$

4. Procedimiento numérico

El esquema a utilizar sería el de diferencias finitas centradas en la parte espacial y las diferencias adelantadas para la parte temporal verificando que $k\Delta t/\Delta x^2 \leq 1/2$.

4.1 Esquema de diferencias finitas

- La derivada espacial se discretiza como:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right) \approx \frac{v_{i+1}^n - 2v_i^n + v_{i-1}^n}{\Delta x^2}.$$

- La derivada temporal se discretiza como:

$$\frac{\partial v}{\partial t} \approx \frac{v_i^{n+1} - v_i^n}{\Delta t}.$$

4.2 Condiciones de contorno

Las condiciones de contorno en la superficie ($x = 0$) y en el fondo ($x = L$) serían:

$$\frac{\partial v}{\partial x}(t, 0) \approx \frac{v_1^n - v_0^n}{\Delta x} = 0 \implies v_1^n = v_0^n, \quad (25a)$$

$$\frac{\partial v}{\partial x}(t, L) \approx \frac{v_N^n - v_{N-1}^n}{\Delta x} = 0 \implies v_N^n = v_{N-1}^n. \quad (25b)$$

4.3 Ruido aditivo

El ruido aditivo $\dot{W}(t, x)$ puede modelarse como una hoja browniana usando un proceso de Q -Wiener como se hizo para la ECE. Para la simulación se pueden usar los incrementos del proceso de Q -Wiener entre dos instantes de tiempo y el intervalo temporal asociado:

$$\dot{W}(t, x) \approx \frac{W_i^{n+1} - W_i^n}{\Delta t}. \quad (26)$$

El modelado de la estratificación térmica en el Lago de Valencia requiere además encontrar los valores correspondientes a los parámetros físicos, los cuales en una primera aproximación se pueden modelar como constantes tomando un valor estimado para el rango de temperaturas de interés y la ubicación específica.

4.4 Condición inicial

En relación a la condición inicial se puede abordar el problema de múltiples maneras, por ejemplo modelando $u(0, x) = f(x)$ como una función definida a trozos en tres regiones, el epilimnion, metalimnion e hipolimnion. De la siguiente manera

$$f(x) = \begin{cases} u_{epi}, & 0 \leq x < x_{epi} \\ u_{epi} - m(x - x_{epi}), & x_{epi} \leq x \leq x_{hipo} \\ u_{hipo}, & x_{hipo} < x \leq L. \end{cases} \quad (27)$$

Este comportamiento caracterizado por una temperatura constante en el epilimnion, con cambios significativos en el metalimnion y nuevamente una estabilización en el hipolimnion, ha sido documentado en numerosos lagos [5]. Por lo tanto, la función $f(x)$ puede ser usada como un primer acercamiento para modelar el perfil inicial de temperaturas. Alternativamente, también es posible estimar $f(x)$ a partir de datos batimétricos obtenidos en el lago [6].

5. Conclusiones

La ECE con ruido aditivo fue modelada en Python, observando que la influencia del ruido puede ser introducida de dos maneras; por medio del parámetro de regularidad r que modifica la solución u de mayor manera cuanto más pequeño sea y por medio del nivel de ruido σ el cual modifica a u de mayor manera cuanto más grande sea.

Se identificaron los elementos físicos necesarios para modelar en futuros trabajos el comportamiento térmico del Lago de Valencia a partir de elementos desarrollos seguido en [2], para ello sería suficiente como un primer acercamiento, estimar las propiedades térmicas del Lago de Valencia, establecer una condición inicial del perfil de temperatura y discretizar el problema asegurando que se respete la condición de estabilidad $k\Delta t/\Delta x^2 \leq 1/2$.

6. Agradecimientos

Los autores agradecen a los árbitros la lectura minuciosa del documento, lo que mejoró considerablemente la presentación del trabajo. Esta investigación ha sido financiada por el FONACIT bajo la subvención 2024PGP142.

Referencias

- [1] M. Khalifi, “On experimental estimation of molecular diffusion coefficient of gaseous solvents in bitumen,” *Fuel*, vol. 302, pp. 121-126, 2021.
- [2] P. V. Belolipetsky et al., “Numerical modeling of vertical stratification of Lake Shira in summer,” *Aquatic Ecology*, vol. 44, pp. 561-570, 2010.
- [3] D. Khosnevisan, *Analysis of stochastic partial differential equations*. Providence, RI: American Mathematical Society, 2014.
- [4] G. J. Lord, C. E. Powell, and T. Shardlow, *An introduction to computational stochastic PDEs*, vol. 50. Cambridge, U.K.: Cambridge University Press, 2014.
- [5] B. Boehrer and M. Schultze, “Stratification of lakes,” *Rev. Geophys.*, vol. 46, no. 2, 2008.
- [6] G. Larrazábal, *Alternativas de Saneamiento para el Lago de Valencia a través de un Modelo Matemático Tridimensional*. Valencia, Venezuela: Universidad de Carabobo, Facultad Experimental de Ciencias y Tecnología, 2007.