



Estudio por Mínimos Cuadrados Ordinarios para el análisis de temperatura en la cuenca del Lago de Valencia

Hernández F. Franzuri F.^{1,3*}, Rodríguez Luis A.^{2,3}

¹Departamento de Matemática y Física, FaCE, Universidad de Carabobo, Venezuela.

²Departamento de Matemáticas, Facultad de Ciencias y Tecnología, Universidad de Carabobo. Naguanagua, Edo. Carabobo-Venezuela.

³Centro Multidisciplinario de Visualización y Cómputo Científico (CEMVICC).

*Autor de correspondencia: fhernan@uc.edu.ve

Recibido: 29/01/2025, Revisado: 22/02/2025, Aceptado: 06/05/2025

Resumen

En este estudio se propone un modelo de regresión como parte de la investigación de cuatro modelos teóricos para el ajuste de datos térmicos en la cuenca del Lago de Valencia. La estimación de parámetros se llevó a cabo mediante la resolución de un problema de regresión lineal, utilizando el método de “Mínimos Cuadrados Ordinarios” (MCO). Este método fue implementado en el lenguaje de programación GNU Octave, lo que permitió generar tanto los parámetros estimados como las curvas de ajuste correspondientes para cada nivel de profundidad. La metodología empleada consistió en resolver los sistemas de ecuaciones normales derivados de la aplicación del método de MCO en cada profundidad, con el fin de obtener los parámetros requeridos. Posteriormente, se evaluó la consistencia de dichos parámetros. Además, mostramos que las curvas de regresión se ajustan adecuadamente a los datos térmicos disponibles.

Palabras Claves: Limnología Física, Mínimos Cuadrados Ordinarios, Regresión Lineal.

Ordinary Least Squares Study for Temperature Analysis in the Lake Valencia Basin

Abstract

In this study, a regression model is proposed as part of the investigation of four theoretical models for fitting thermal data in the Lake Valencia basin. Parameter estimation was carried out by solving a linear regression problem, using the “Ordinary Least Squares” (OLS) method. This method was implemented in the programming language GNU Octave, which made it possible to generate both the estimated parameters and the corresponding adjustment curves for each depth level. The methodology used consisted of solving the systems of normal equations derived from the application of the OLS method at each depth, in order to obtain the required parameters. The consistency of these parameters was evaluated. It was also demonstrated that the regression curves adequately fit the available thermal data.

Keywords: Physical Limnology, Ordinary Least Squares, Linear Regression.

1. INTRODUCCIÓN

Con el advenimiento de la computadora, surgió la posibilidad de experimentar con modelos matemáticos complejos y por primera vez se encontró que se podían realizar experimentos controlados de laboratorio, usando para esto computadores en lugar de calculadoras primitivas. El fundamento racional para usar la simulación en cualquier disciplina, es la búsqueda constante del hombre por adquirir conocimientos relativos a la predicción del futuro.

Es por ello que, hoy en día, modelos matemáticos que representan sistemas físicos, pueden ser formulados con el uso del computador aunado a un software matemático que permita resolver los sistemas de ecuaciones que se generan. Por lo tanto, ahora el problema puede no radicar en resolver el sistema de ecuaciones generado, sino en utilizar las herramientas tecnológicas disponibles y más aún, poder formular con un criterio válido la descripción cuantitativa del problema.

En particular, en este trabajo, se usó un área científica llamada *Limnología*, siendo ésta el estudio del agua dulce superficial (del griego limne, divinidad asociada con el agua y de logos tratado o estudio, definición que abarca a los sistemas lóxicos —agua corriente— y a los léxicos —agua estancada—). La Sociedad Internacional de Limnología, SIL, define a esta ciencia como el estudio del conjunto de las aguas dulces o epicontinentales, ver [12].

Cabe mencionar que, el estudio sobre estos ambientes en Venezuela está representado en gran parte por los trabajos realizados en los grandes lagos (Lago de Valencia y Lago de Maracaibo) y grandes ríos (Río Orinoco y tributarios) [3]. A pesar de existir en el país más de 700.000 cuencas cubiertas por aguas embalsadas, el conocimiento limnológico de estos sistemas se encuentra aún en una fase temprana de desarrollo, y son muy pocos en los que se conocen las características físicas o químicas de sus aguas, ver [14].

Esta investigación centró toda su atención en el —*Lago de Valencia*—. Este lago es el fenómeno hidrográfico más importante del centro del país, tiene una longitud máxima de 30 km, una anchura que alcanza los 20 km, una profundidad máxima de 40 m y una profundidad media de 18 m. Adicionalmente,

es importante mencionar que el Lago de Valencia en sí mismo es un microclima, ya que, presenta un conjunto de condiciones climáticas que solo se dan en esa zona y que además pueden diferir de las del clima general de la región. En otras palabras, un microclima se forma por la influencia de factores como la altitud, la orientación, la vegetación, el relieve, el suelo, el agua o las construcciones humanas.

En ese orden de ideas, un microclima puede tener efectos positivos o negativos sobre el medio ambiente y la vida de las personas, los animales y las plantas que habitan en él. Un microclima puede favorecer la biodiversidad, la producción agrícola, el ahorro energético o el confort térmico. Por el contrario, un microclima puede provocar sequías, inundaciones, plagas, enfermedades o contaminación.

Además, un microclima es un fenómeno que se puede observar, medir y modificar, mediante el uso de instrumentos meteorológicos, mapas climáticos y técnicas de planificación y diseño. Un microclima es un recurso que se puede aprovechar o mejorar, mediante el conocimiento, la gestión y la adaptación al mismo (ver [9]).

Es bien sabido, por la comunidad de investigadores de estos ambientes cubiertos por aguas embalsadas, que los lagos son cuerpos de agua, generalmente dulce, de una extensión considerable, que se encuentran separados del mar y el aporte de agua a estos viene de los ríos. La energía solar que llega a la superficie de los lagos causa el calentamiento de las masas de agua, de tal manera que a mayor o menor radiación solar, la temperatura del agua sube o baja.

De acuerdo a lo anterior, uno de los efectos del calor que acompaña a la radiación solar sobre las propiedades físico-químicas del sustrato (agua), es la estratificación vertical de cuerpos de agua cerrados, que permanecen en un mismo lugar sin correr, ni fluir, por diferencias en densidad y temperatura. La luz solar calienta las aguas cercanas a la superficie, generando una capa de agua tibia y menos densa sobre una capa de agua más fría y densa. Según la radiación solar penetra en un cuerpo de agua, su absorción es casi exponencial, razón por la cual sería de esperar que la distribución de calor a lo largo de la columna exhibiera un patrón similar.

De la mano con lo anterior, el área de la Limno-

logía que estudia estos cambios de temperatura a lo largo de columnas de agua en lagos se conoce como —*Limnología Física*— y una de las herramientas imprescindibles para este estudio es el uso de modelos matemáticos. El interés o propósito del presente trabajo es proporcionar información sobre algunos aspectos de la Limnología Física caracterizando la propagación de calor, que se genera por radiación solar, en cuatro (4) puntos diferentes de la columna de agua del Lago de Valencia, usando modelos de regresión convenientes para el caso térmico de estudio.

En otras palabras, la investigación desde un punto de vista general se centró en la *caracterización de cambios de temperaturas, producidos por radiación solar, a lo largo de la columna de agua en la cuenca del Lago de Valencia*, usando para ello cuatro (4) modelos teóricos de regresión, de los cuales; dos (2) provienen de la solución de un sistema de EDPs cuya ecuación principal está gobernada por la *Ecuación de Propagación de Calor de Fourier* y los otros dos (2) presentan una estructura matemática que se acopla perfectamente a las condiciones del fenómeno térmico de estudio.

La metodología utilizada, en este trabajo, consistió en resolver el —problema inverso— de los modelos teóricos, para ello, fue necesario usar una —data térmica bruta— obtenida entre los años 2007-2008 en una investigación cuyo nombre es “*Alternativas de Saneamiento para el Lago de Valencia a través de un Modelo Matemático Tridimensional*” (ver [10]), la misma estuvo dirigida por el Dr. Germán Larrazábal (Ciencias-UC) y entre los investigadores de relevancia que la conformaban estuvo el Dr. José Rafael León (Ciencias-UCV).

El artículo está organizado en cinco (5) partes. En la sección 1, se tiene una breve introducción del trabajo. En la sección 2, se presentan las características del entorno de estudio y todo lo referente a los datos térmicos. En la sección 3, se realiza el análisis de regresión para el problema lineal. En la sección 4, se muestran los resultados para los ajustes a la data del problema lineal. Por último, en la sección 5, se muestran las conclusiones de este estudio.

2. ENTORNO DE ESTUDIO Y DATOS TÉRMICOS

El “Lago de Valencia” es el tercer lago más grande de Venezuela después, del Lago de Maracaibo y el Lago artificial del Guri. Su cuenca es de tipo *endorreica*, por lo cual, la cota de su cuerpo de agua depende de los aportes recibidos por ríos triburarios. Su cuenca tiene una extensión aproximada de 3150 km^2 la cual representa un 0.3% de la superficie del país, ver [7]. Este territorio está repartido de la siguiente manera: 12% de superficie de agua donde se encuentra el lago, 35% de áreas montañosas y 53% de tierras planas [4].

Geográficamente la cuenca del Lago de Valencia está situada entre los estados Aragua y Carabobo, en la región norte costera de Venezuela, entre los meridianos $67^{\circ}07'$ y $68^{\circ}12'$ de longitud oeste y $9^{\circ}57'$ y $10^{\circ}26'$ de latitud norte, y descansa sobre los valles delimitados por la Cordillera de la Costa, ver figura (1). La depresión del Lago de Valencia separa las serranías del litoral y del interior y, se extiende sobre piemontanos y extensas planicies de suelos aluviales y lacustrinos que rodean al lago [2, 6].

La figura (1) muestra tres perspectivas del Lago de Valencia: (A) una imagen satelital a partir de Google Earth, (B) el lago junto con las diferentes zonas urbanas que se encuentran a sus alrededores y, (C) su posición geográfica en el país.

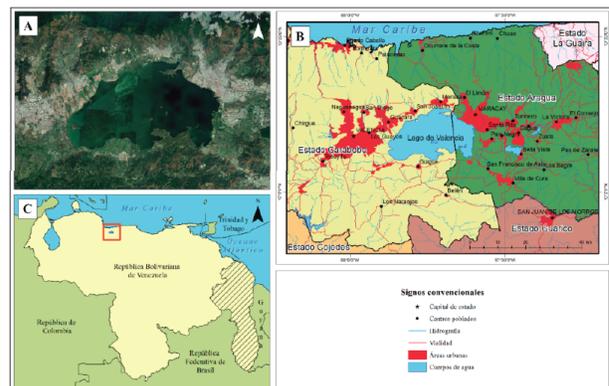


Figura 1. Ubicación del Lago de Valencia. Fuente: [5]

El cuerpo de agua dulce sin desagüe al mar (lago cerrado) del Lago de Valencia es el más grande de Venezuela y el segundo más extenso de América del Sur. Este lago es el fenómeno hidrográfico más importante del centro del país. En sus orillas se levantan dos

de las principales ciudades, a saber, Maracay y Valencia; además, de otros centros urbanos importantes, entre ellos: Mariara, San Joaquín, Güigüe, Guacara, Los Guayos y Palo Negro.

Su área de superficie está estimada en 350 km^2 , tiene un volumen aproximado de $6,3 \text{ km}^3$, su máxima profundidad es aproximadamente 40 m , presenta una profundidad promedio de 18 m , tiene una longitud máxima de 30 km , una anchura que alcanza los 20 km y la longitud de su línea costera es aproximadamente de 117 km .

La figura (2) muestra la batimetría de la cuenca del Lago de Valencia, con ella se puede visualizar las zonas más o menos profundas en el lago dependiendo de la tonalidad de colores que presenta. El color morado representa la zona de mayor profundidad, mientras que, el color amarillo las menos profundas.

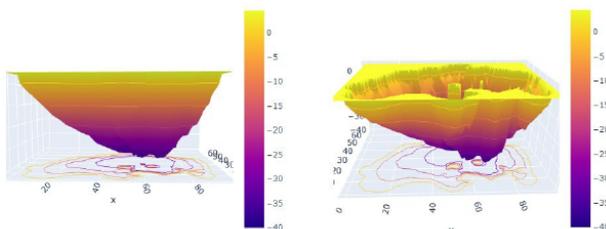


Figura 2. Batimetría del Lago de Valencia. Fuente: [8]

Existen 18 ríos tributarios a la cuenca del Lago de Valencia. A continuación se mencionan: Aragua, Cura, Ereigüe, Guacara, Güey, Los Guayos, Honda, Maracay, Mariara, Negra, Güigüe, Taiguaiguay, Tapatapa, Tocarón, Turmero, Yuma, Cabriales y Maruria [1].

Dentro de la cuenca del lago las aguas subterráneas representan la tercera fuente de suministro de agua a las poblaciones de la región, principalmente sirven de suministro a industrias, actividades agrícolas y poblaciones rurales. Este recurso hídrico es el menos conocido de la región por ser el más complejo para comprender y controlar. Los principales acuíferos en la cuenca del Lago de Valencia son: el acuífero de Valencia, el acuífero de Maracay, el acuífero de San Joaquín y el acuífero de Güigüe.

Con respecto a las variaciones estacionales del régimen termal del Lago de Valencia, éstas tienen efecto sobre el ciclo de vida de las criaturas en los cuerpos de agua sobre la tierra. El movimiento de los fluidos inducido por el viento, las variaciones de presión

atmosférica y el flujo de entrada y salida de los tributarios son muy diferentes cuando la densidad del agua es uniforme a cuando está estratificada.

La irradiación solar penetra al lago como una onda electromagnética. En el rango visible como luz, en el rango infrarrojo como calor y en el rango de onda corta como radiación ultravioleta. Estos procesos de irradiación son atenuados con la profundidad del lago dependiendo del grado de turbidez del agua. Es de hacer notar que la fotosíntesis del fitoplancton depende de la capacidad de penetración de la luz, así como de la vitalidad del zooplancton y otras especies vivientes, la cual se expresa en sus tasas de reproducción, que a su vez dependen de la *temperatura* del agua. Por esta razón, las cantidades de calor y luz en el agua son indicativos de ciclos de vida dentro de las aguas naturales. La descripción suscita anterior de los procesos físicos en los lagos nos provee de evidencia que la estructura de la temperatura del agua y, en consecuencia, la densidad del agua gobierna gran parte del acoplamiento entre la Biología y la Física.

De acuerdo a todo lo anterior, esta breve descripción de la *Limnología* da cuenta de cómo los procesos naturales asociados a los lagos deben ser estudiados en su complejidad con la interacción de tres ramas de la ciencia como son: la Biología, la Química y la Física. Procesos que a su vez son descritos por modelos *matemáticos* precisos.

2.1 Temperatura Analizada

Los datos de *temperatura* analizados en el presente trabajo fueron adquiridos para la elaboración del proyecto que lleva por nombre “*Alternativas de Saneamiento para el Lago de Valencia a través de un Modelo Matemático Tridimensional*” (ver [10]), la recolección de estos abarcó nueve meses y ocho días. Iniciando el 8 de noviembre del 2007 y culminando el 19 de agosto del 2008, y fueron agrupados en períodos de tres meses. El primer periodo estuvo comprendido desde el 08/11/2007 al 23/01/2008, el segundo desde el 24/01/2008 al 14/04/2008 y el tercero desde el 15/04/2008 hasta el 19/08/2008, ver [10].

Los lugares de muestreo para la recolección de datos estuvieron constituidos por cuatro puntos estratégicos en el lago, en cada uno se colocó una línea sosteniendo una serie de dispositivos electrónicos diseñados

para la captura de medidas de *temperatura*. La ubicación satelital de los puntos de muestreo se observa en la figura (3). Por otro lado, la figura (4) muestra como fueron ancladas las cadenas en los cuatro puntos de muestreo. En el anclaje de cada cadena, las boyas quedaron a 0,5 m bajo la superficie del lago (con el objetivo de camuflarlas), el primer sensor quedó ubicado a 5 m por debajo de la superficie, los demás sensores fueron colocados a 10, 20, 27 y 37 m, respectivamente. Se debe tomar en cuenta que, la cantidad de sensores en cada línea varía de acuerdo a la máxima profundidad de cada punto de muestreo, es decir, hay cadenas que presentaron más o menos sensores ya que, en ese punto es más o menos profundo que en el resto. En el anclaje, también, se observa que al final de cada cadena fue colocado un peso muerto con el objetivo de hacer llegar la cadena al fondo del lago y mantenerla lo más posible en posición vertical durante el período de recolección.

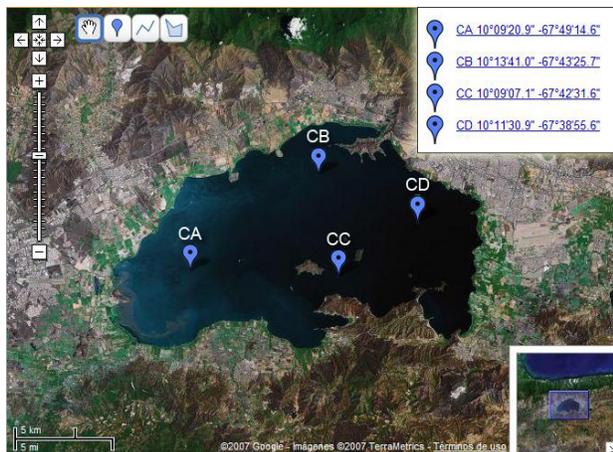


Figura 3. Vista satelital de los puntos de muestreo.

Fuente: [10]

La profundidad máxima, medida en metros, para cada punto de muestreo es la siguiente: cadena **A** 23 m, cadena **B** 37,7 m, cadena **C** 42,4 m y cadena **D** 33,5 m.

En la figura (5) se muestra un dibujo a mano alzada caracterizando la parte experimental de recolección de *temperatura*.

El mismo fue diseñado para tres vistas y tiene como única finalidad colaborar con la imaginación del lector. Parte (I); esta vista es desde arriba y refleja el espectro (o rango) que pudiesen tener los dispositivos electrónicos para captar las medidas de temperatura, cubriendo así una gran parte del lago. Parte (II); la segunda vista muestra un corte transversal del lago

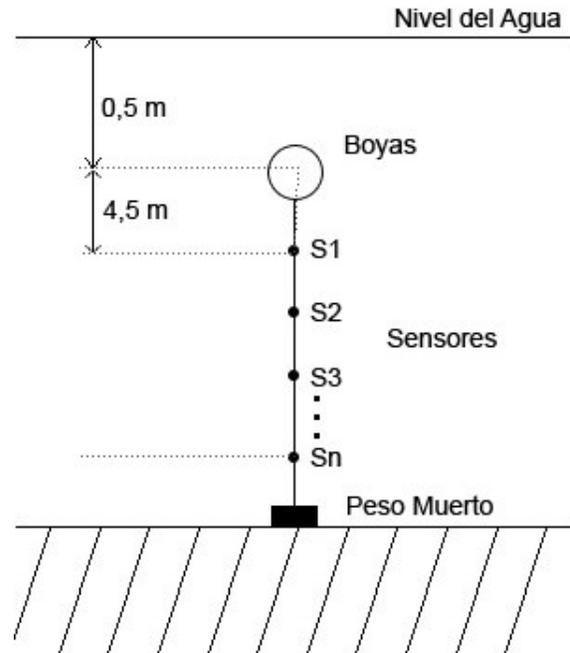


Figura 4. Puntos de muestreo y su anclaje. Fuente: [10]

para generar una postura en 2D, reflejando la ubicación de los dispositivos electrónicos en los diferentes niveles de profundidad, la acción de los mismos a lo largo de una línea arbitraria (cadena **B**) y la profundidad máxima del último sensor ubicado en cada línea del experimento. Parte (III); la última vista da una postura en 3D mostrando una línea cualquiera (cadena **B**) como producto del espectro de acción de los dispositivos a lo largo de la misma.

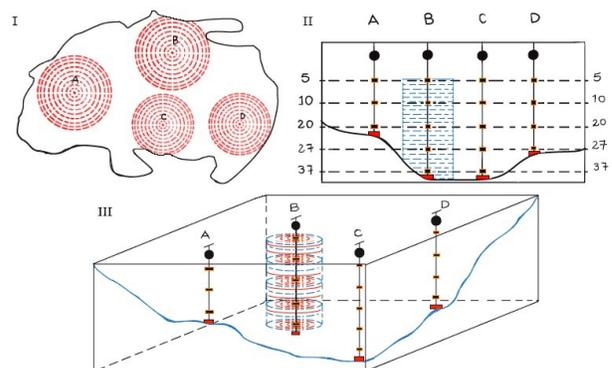


Figura 5. Tres vistas para las cadenas. Fuente: Propia

2.1.1 Metodología usada para la captura de datos

Una vez seleccionados los puntos de muestreo (ver figura (3)) y los horarios para la captura térmica, se realizaron mediciones para obtener perfiles de tem-

Cadena B										
m	Turno	Primer Período			Segundo Período			Tercer Período		
		2007-2008			2008			2008		
		NOV	DIC	ENE	FEB	MAR	ABR	MAY	JUN	JUL
5	Mañana	28,03	27,25	26,55	S.I.	S.I.	S.I.	27,61	27,90	23,30
	Tarde	28,63	27,43	26,71	S.I.	S.I.	S.I.	27,63	28,00	27,93
	Noche	28,48	27,49	26,88	S.I.	S.I.	S.I.	27,87	28,15	28,08
10	Mañana	28,00	27,24	26,54	27,60	26,89	23,25	27,60	27,95	24,37
	Tarde	28,31	27,22	26,49	27,57	26,86	26,55	27,56	27,91	27,91
	Noche	28,11	27,27	26,55	27,57	26,86	26,54	27,62	27,98	27,95
20	Mañana	S.I.	S.I.	S.I.	S.I.	S.I.	S.I.	27,03	27,60	26,12
	Tarde	S.I.	S.I.	S.I.	S.I.	S.I.	S.I.	27,09	27,65	27,63
	Noche	S.I.	S.I.	S.I.	S.I.	S.I.	S.I.	27,13	27,63	27,63
27	Mañana	27,79	27,23	26,54	S.I.	S.I.	S.I.	26,40	26,68	26,91
	Tarde	28,09	27,22	26,50	S.I.	S.I.	S.I.	26,57	26,78	26,94
	Noche	27,78	27,22	26,50	S.I.	S.I.	S.I.	26,60	26,77	26,94
37	Mañana	27,19	27,13	26,46	25,69	25,62	27,98	25,95	26,08	26,11
	Tarde	27,55	27,14	26,46	25,70	25,63	25,73	25,97	26,10	26,11
	Noche	27,21	27,13	26,46	25,67	25,63	25,73	25,97	26,08	26,11

Tabla 1. Promedio mensual de temperatura ($^{\circ}\text{C}$) para cada turno del día entre los años 2007-2008

peratura de la columna de agua. Las mediciones se hicieron utilizando sondas con sensores electrónicos para medir temperatura y profundidad. En cada punto se programó un muestreo no supervisado o desatendido con intervalos de tiempo. Una vez programada la sonda, se sujetó a una guaya, se sumergió en el agua y se hizo descender lentamente hasta que tocó fondo (ver figura (4)). Los datos que midió la sonda quedaron almacenados en la memoria interna del dispositivo. Finalizada la recolección de datos, *in situ*, se procedió a recuperar los registros almacenados en la memoria de cada dispositivo, conectando la sonda a un computador que tenía instalado el software necesario para tal fin y posteriormente se almacenaron como base de datos en Excel.

En el presente trabajo, una vez obtenida la base de datos *térmicos*, se diseñaron tablas para la presentación y organización de los datos registrados en cada cadena, conteniendo el promedio mensual de la temperatura (registrada en grados centígrados $^{\circ}\text{C}$) durante un lapso de medición de nueve meses. En algunas tablas se organizaron los datos en función de tres turnos, a saber; mañana (1:00 - 6:30), tarde (10:00 - 16:30) y noche (17:00 - 21:00). A continuación, se muestran las tablas para las cadenas **B** y **C**.

La tabla (1) muestra el promedio mensual de la temperatura (medida en $^{\circ}\text{C}$) organizada en tres turnos del día. Ésta se recolectó durante tres períodos distribuidos en nueve meses de muestreo para la cadena **B** a

una profundidad máxima de 37,7 m.

Es de hacer notar que en algunos lugares de la tabla se presentan las siglas S.I., con ésto se quiere especificar “Sin Información”, es decir, en esas posiciones de la tabla para esa cadena no se presentaron datos registrados.

La tabla (2) muestra el promedio mensual de la temperatura medida en grados centígrados ($^{\circ}\text{C}$). La misma fue organizada para el turno de mañana, tarde y noche, ésta se recolectó durante nueve meses de muestreo distribuidos en tres períodos para la cadena **C**. Esta cadena es una de las que tiene mayor nivel de profundidad (a saber, 42,4 m) y, además, presenta la información térmica completa a diferencia de las cadenas **B** y **D**.

La ausencia de información térmica presentada en las cadenas **B** y **D** es un fenómeno que aún no está clarificado por los autores del presente trabajo, se tienen varias hipótesis al respecto como, por ejemplo, la pérdida de una línea de muestreo ya sea por hurto o por algún tipo de animal acuático que de alguna manera se enredó en la misma. También, pudiese ser por fallas de los dispositivos electrónicos.

En las tablas (3) y (4) se muestran las temperaturas medidas en grados centígrados (promediadas mensualmente en base a los tres turnos del día) recolectadas para la cadena **B** durante los meses de sequía (a saber: diciembre, enero, febrero, marzo y abril) y llu-

Cadena C										
m	Turno	Primer Período			Segundo Período			Tercer Período		
		2007-2008			2008			2008		
		NOV	DIC	ENE	FEB	MAR	ABR	MAY	JUN	JUL
5	Mañana	28,03	27,20	26,37	25,68	25,80	21,83	27,55	27,90	23,28
	Tarde	27,99	27,16	26,36	25,65	25,75	26,00	27,51	27,86	27,84
	Noche	28,04	27,23	26,48	25,77	25,84	26,15	27,48	27,90	27,88
10	Mañana	28,08	27,26	26,46	25,78	25,83	22,84	27,42	27,80	24,26
	Tarde	28,00	27,22	26,44	25,70	25,77	25,98	27,43	27,80	27,83
	Noche	28,00	27,23	26,46	25,72	25,77	25,99	27,34	27,78	27,84
20	Mañana	27,79	27,18	26,38	25,66	25,63	24,62	26,58	26,83	25,54
	Tarde	27,72	27,16	26,36	25,61	25,63	25,78	26,62	26,83	26,97
	Noche	27,73	27,16	26,36	25,62	25,63	25,78	26,48	26,71	26,85
27	Mañana	27,51	27,15	26,41	25,65	25,65	26,02	26,11	26,23	26,45
	Tarde	27,48	27,15	26,39	25,63	25,66	25,80	26,10	26,26	26,36
	Noche	27,45	27,14	26,39	25,63	25,65	25,80	26,04	26,18	26,24
37	Mañana	27,19	27,09	26,42	25,64	25,62	27,99	25,98	26,07	28,29
	Tarde	27,19	27,08	26,39	25,64	25,62	25,75	25,98	26,08	26,12
	Noche	27,19	27,07	26,38	25,63	25,62	25,75	25,97	26,07	26,12

Tabla 2. Promedio mensual de temperatura ($^{\circ}\text{C}$) para cada turno del día entre los años 2007-2008

via (a saber: mayo, junio, julio y noviembre). En las

Cadena B					
m	Meses de Sequía				
	DIC	ENE	FEB	MAR	ABR
	2007	2008			
5	27,390	26,713	S.I.	S.I.	S.I.
10	27,243	26,527	27,580	26,870	25,447
20	S.I.	S.I.	S.I.	S.I.	S.I.
27	27,223	26,513	S.I.	S.I.	S.I.
37	27,133	26,460	25,687	25,627	26,480

Tabla 3. Media mensual de temperatura ($^{\circ}\text{C}$) para el período de sequía en los años 2007-2008

Cadena B				
m	Meses de Lluvia			
	MAY	JUN	JUL	NOV
	2008			2007
5	27,703	28,017	26,437	28,380
10	27,593	27,947	26,743	28,140
20	27,083	27,627	27,127	S.I.
27	26,523	26,743	26,930	27,887
37	25,963	26,087	26,110	27,317

Tabla 4. Media mensual de temperatura ($^{\circ}\text{C}$) para el período de lluvia en los años 2007-2008

figuras (6) y (7) se muestran las gráficas desarrolladas en GNU Octave de la “temperatura vs profundidad” para la cadena B, durante los meses de sequía y lluvia.

En la figura (6) la tendencia en los meses de diciem-

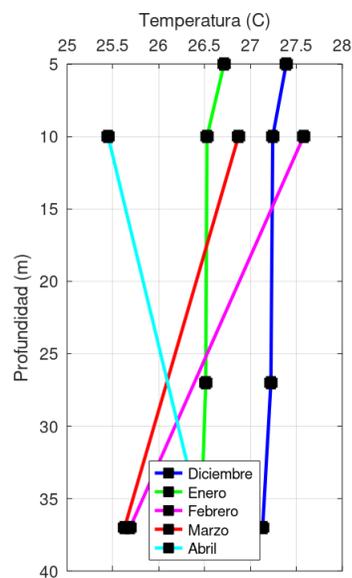


Figura 6. Meses de sequía para la cadena B

bre a marzo, para la cadena B, es de caída de temperatura conforme aumenta la profundidad y solo en el mes de abril es contraria la tendencia. En la figura (7) de los meses de lluvia, para la cadena B, se observa una tendencia de caída de temperatura en todos los meses a excepción del mes de julio.

En las tablas (5) y (6) se muestran las temperaturas (promediadas mensualmente en base a los tres turnos del día) recolectadas para la cadena C, en los meses de sequía y lluvia.

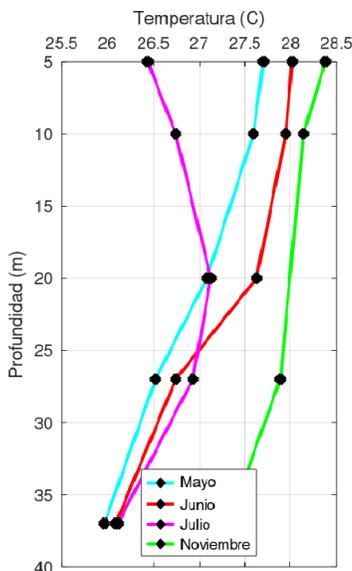


Figura 7. Meses de lluvia para la cadena B

Cadena C					
m	Meses de Sequía				
	DIC	ENE	FEB	MAR	ABR
	2008				
5	27,197	26,403	25,700	25,797	24,660
10	27,237	26,453	25,733	25,790	24,937
20	27,167	26,367	25,630	25,630	25,393
27	27,147	26,397	25,637	25,653	25,873
37	27,080	26,397	25,637	25,620	26,497

Tabla 5. Media mensual de temperatura (°C) para el período de sequía en los años 2007-2008

Cadena C				
m	Meses de Lluvia			
	MAY	JUN	JUL	NOV
	2008			2007
5	27,513	27,887	26,333	28,020
10	27,397	27,793	26,643	28,027
20	26,560	26,790	26,453	27,747
27	26,083	26,223	26,350	27,480
37	25,977	26,073	26,843	27,190

Tabla 6. Media mensual de temperatura (°C) para el período de lluvia en los años 2007-2008

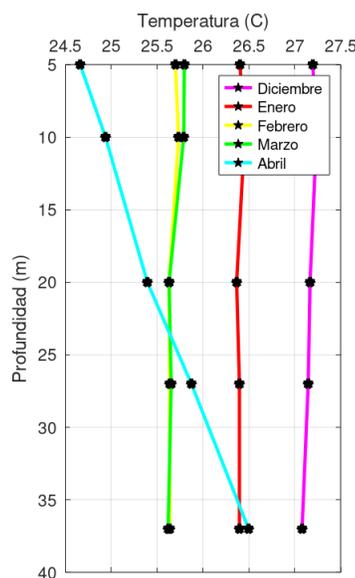


Figura 8. Meses de sequía para la cadena C

En las figuras (8) y (9) se muestran las gráficas generadas con GNU Octave de “temperatura vs profundidad” para la cadena C, en los meses de sequía y lluvia.

En la figura (8) la tendencia en los meses de diciembre a marzo, para la cadena C, es de caída de temperatura conforme aumenta la profundidad y solo en el mes de abril es contraria la tendencia. En la figura (9) de los meses de lluvia, para la cadena C, se observa una tendencia de caída de temperatura en todos los meses a excepción de julio.

Las tablas (7) y (8) muestran, para cada cadena (a saber: B y C), el promedio de la temperatura en base a los meses de los períodos de sequía (diciembre, enero, febrero, marzo y abril) y lluvia (mayo, junio, julio y noviembre) respectivamente. Junto con cada una de esas tablas, se muestran en las figuras (10) y (11) las representaciones gráficas de

“temperatura vs profundidad” durante los meses de sequía y lluvia; éstas fueron realizadas a partir de los datos de las tablas antes mencionadas y diseñadas en el lenguaje de programación GNU Octave.

En la figura (10) se observa que la variación de temperatura tanto en la época de lluvia como en la época de sequía es decreciente en profundidades a partir de 25 m.

Las figuras (10) y (11) presentan variaciones de temperatura muy pequeñas con leve tendencia al aumento de temperatura en el periodo de sequía. La figura (11) tiene tendencia a la caída de temperatura en el periodo de lluvia.

En las tablas (9) y (10) se presenta la temperatura (media mensual) dada por el promedio de todos los meses de muestreo obtenida en cada una de las profundidades de estudio, la temperatura mínima (media

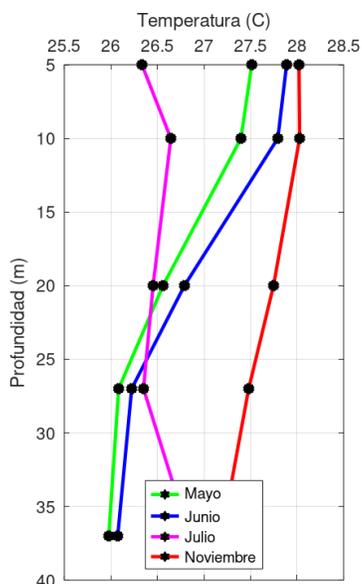


Figura 9. Meses de lluvia para la cadena C

Cadena B		
m	Temperatura (en °C)	
	Período de Sequía	Período de Lluvia
	2007-2008	2007-2008
5	27,052	27,634
10	26,733	27,606
20	S.I.	27,279
27	26,868	27,021
37	26,277	26,369

Tabla 7. Media de temperatura (°C) para los períodos de sequía y lluvia en los años 2007-2008

mínima mensual) entre todos los meses obtenida en cada profundidad de estudio, la temperatura máxima (*media máxima mensual*) entre todos los meses obtenida en cada profundidad de estudio y la *desviación estandar* entre todos los meses obtenida en cada profundidad de estudio.

En las tablas (11) y (12) se presenta la temperatura dada por el promedio en todas las profundidades obtenido en cada uno de los meses de muestreo, la temperatura mínima entre todas las profundidades obtenida en cada mes de estudio, la temperatura máxima entre todas las profundidades obtenida en cada mes de estudio y la desviación estandar entre todas las profundidades obtenida en cada mes de estudio.

La tabla (13) muestra para cada cadena el *promedio* de la temperatura, calculado entre todos los meses y todas las profundidades de estudio, la temperatura *mínima* obtenida entre todos los meses y todas las

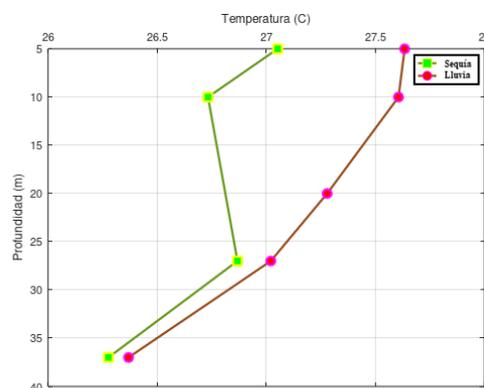


Figura 10. Temperatura vs profundidad durante los períodos de sequía y lluvia para la cadena B

Cadena C		
m	Temperatura (en °C)	
	Período de Sequía	Período de Lluvia
	2007-2008	2007-2008
5	25,951	26,938
10	26,030	27,465
20	26,037	26,888
27	26,141	26,534
37	26,246	26,521

Tabla 8. Media de temperatura (°C) para los períodos de sequía y lluvia en los años 2007-2008

profundidades, la temperatura *máxima* obtenida entre todos los meses y todas las profundidades, la *desviación estandar* obtenida entre todos los meses y todas las profundidades y, los *promedios totales*.

Como observación general; las gráficas muestran poca variación de temperatura en la época de sequía y una tendencia a la caída de temperatura en el período de lluvia.

2.1.2 Datos faltantes

Existen múltiples causas por las que se pueden tener registros “Sin Información” en una base de datos, o bien, el registro contiene un valor infactible o fuera de rango que debe eliminarse para no afectar (o sesgar) los estudios que se apoyen en esa data. Cuando esto sucede se dice que existen *datos faltantes* o valores perdidos en el archivo estadístico.

Los datos faltantes forman parte de un conjunto de observaciones con características especiales que incluyen a los datos agrupados, agregados, redondeados, censurados o truncados; es decir, a datos con

Cadena B				
Profundidad	2007-2008			
	Promedios con Base en los Meses			
	Media Mensual	Media Mínima Mensual	Media Máxima Mensual	Desviación Estandar
5 m	27,440 °C	26,437 °C	28,380 °C	0,751
10 m	27,121 °C	25,447 °C	28,140 °C	0,831
20 m	27,279 °C	27,083 °C	27,627 °C	0,302
27 m	26,970 °C	26,513 °C	27,887 °C	0,523
37 m	26,318 °C	25,627 °C	27,317 °C	0,592

Tabla 9. Datos térmicos por profundidad para la estadística entre los años 2007-2008

Cadena C				
Profundidad	2007-2008			
	Promedios con Base en los Meses			
	Media Mensual	Media Mínima Mensual	Media Máxima Mensual	Desviación Estandar
5 m	26,612 °C	24,660 °C	28,020 °C	1,129
10 m	26,668 °C	24,937 °C	28,027 °C	1,040
20 m	26,415 °C	25,393 °C	27,747 °C	0,773
27 m	26,316 °C	25,637 °C	27,480 °C	0,634
37 m	26,368 °C	25,620 °C	27,190 °C	0,587

Tabla 10. Datos térmicos por profundidad para la estadística entre los años 2007-2008

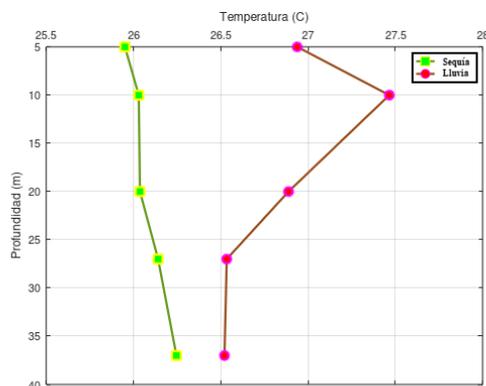


Figura 11. Temperatura vs profundidad durante los períodos de sequía y lluvia para la cadena C

información especial.

En los últimos cien años ha sido enorme el desarrollo de métodos estadísticos para estimar datos incompletos. El algoritmo EM y sus extensiones, la imputación y el método de “Monte Carlo” proporcionan un conjunto de herramientas flexibles y confiables para hacer inferencias en una gran cantidad de problemas de datos faltantes.

Las alternativas de solución al problema de datos faltantes básicamente siguen dos enfoques fundamentales:

- Descartar o eliminar los individuos o variables con valores perdidos.

- Estimar los valores perdidos utilizando algún método de imputación.

En esta sección se van a tratar los valores de temperatura que toman las líneas de muestreo en la superficie del lago. Como se pudo observar en las tablas previas a este apartado, la temperatura en la superficie no está presente en la data usada para el presente estudio. La razón de ello es por la manera como fueron distribuidos los sensores en cada una de las líneas de muestreo. Esta situación se observa con más detalle en la figura (4). Ahí se visualiza al primer sensor de cada cadena ubicado a 5 m bajo la superficie, limitando ésto la captura de temperatura por esta vía en el nivel de 0 m de profundidad (o superficie).

Para resolver la situación expuesta en el párrafo anterior, se recurrió a una imagen presentada en el artículo [11]. En esa investigación, el autor realiza un análisis de régimen termal para el *Lago de Valencia*, con una data que fue recogida durante un período de dos años (a saber, enero de 1977 a diciembre de 1978). La imagen de interés muestra que la temperatura en la superficie del lago, coincide con la temperatura obtenida en los primeros 5 m de profundidad de la columna de agua durante todos los meses de muestreo en esa investigación. Ésto llevó a suponer, sin pérdida de generalidad, que en la presente investigación se puede repetir la temperatura del nivel de 5 m, profundidad de cada cadena, en el nivel de 0 m, con lo cual se logró llenar el dato faltante para la superficie del

Cadena B				
Mes/Año	Promedios Mensuales de Temperaturas (en °C) con Base en las Profundidades (m)			
	Media Mensual	Media Mínima Mensual	Media Máxima Mensual	Desviación Estandar
Dic 2007	27,247	27,133	27,390	0,107
Ene 2008	26,553	26,460	26,713	0,110
Feb 2008	26,634	25,687	27,580	1,339
Mar 2008	26,249	25,627	26,870	0,879
Abr 2008	25,964	25,447	26,480	0,730
May 2008	26,973	25,963	27,703	0,733
Jun 2008	27,284	26,087	28,017	0,840
Jul 2008	26,669	26,110	27,127	0,403
Nov 2007	27,931	27,317	28,380	0,456

Tabla 11. Datos térmicos (en °C) mensuales para la estadística entre los años 2007-2008

Cadena C				
Mes/Año	Promedios Mensuales de Temperaturas (en °C) con Base en las Profundidades (m)			
	Media Mensual	Media Mínima Mensual	Media Máxima Mensual	Desviación Estandar
Dic 2007	27,166	27,080	27,237	0,059
Ene 2008	26,403	26,367	26,453	0,031
Feb 2008	25,667	25,630	25,733	0,046
Mar 2008	25,698	25,620	25,797	0,088
Abr 2008	25,472	24,660	26,497	0,735
May 2008	26,706	25,977	27,513	0,719
Jun 2008	26,953	26,073	27,887	0,853
Jul 2008	26,524	26,333	26,843	0,217
Nov 2007	27,693	27,190	28,027	0,360

Tabla 12. Datos térmicos (en °C) mensuales para la estadística entre los años 2007-2008

lago.

La metodología utilizada para completar los “datos faltantes” en la tabla de la cadena **B** fue la siguiente: **1.- Cálculo de la temperatura a 20 m de profundidad para los meses: enero, noviembre y diciembre.** Para este cálculo, se promediaron los valores ubicados en el mes respectivo de la cadena **B** a 10 m y 27 m de profundidad, dando como resultado: para enero a 20 m un valor de 26,52 °C, para noviembre a 20 m un valor de 28,013 °C y para diciembre a 20 m un valor de 27,233 °C. **2.- Cálculo de la temperatura a 20 m de profundidad para los meses: febrero, marzo y abril.** En este caso, se hicieron los cálculos de manera similar para los tres meses, es decir, para cada mes se promediaron los valores de temperatura del mes en cuestión, ubicados a la misma profundidad en cada una de las cadenas, dando como resultado: para febrero a 20 m un valor de 25,659 °C, para marzo a 20 m un valor de 25,683 °C y para abril a 20 m un valor de 25,453 °C. **3.- Cálculo de la temperatura a 27 m de profundidad para los meses: febrero, marzo y abril.** En esta cuenta, se promediaron los valores ubicados en el mes respectivo de la cadena **B** a 20 m y 37 m de profundidad, dando como resultado: para

febrero a 27 m un valor de 25,673 °C, para marzo a 27 m un valor de 25,655 °C y para abril a 27 m un valor de 25,966 °C. **4.- Cálculo de la temperatura a 5 m de profundidad para los meses: febrero, marzo y abril.** Las cuentas se realizaron de manera similar al inciso (2) y se obtuvo como resultado: para febrero a 5 m un valor de 25,769 °C, para marzo a 5 m un valor de 25,875 °C y para abril a 5 m un valor de 24,721 °C. **5.- Cálculo de la temperatura a 0 m de profundidad (superficie del lago) para los meses: febrero, marzo y abril.** Para estos valores nos apoyamos en los resultados del artículo [11]; repitiendo los valores de temperatura del nivel de 5 m de profundidad en el nivel de 0 m de profundidad.

La tabla (14) muestra la distribución de temperatura actualizada para la cadena **B** después, de haber completado los datos faltantes con los valores obtenidos en los cálculos del párrafo anterior.

3. ANÁLISIS DE REGRESIÓN

En el siguiente apartado, se muestra la formulación del problema de identificación de parámetros que se investigó en este artículo, ver [8]. En ese sentido; a

Cadena	Media Total	Media Mínima Total	Media Máxima Total	Desviación Estandar
A	26,701 °C	24,897 °C	28,117 °C	0,920
B	26,947 °C	25,447 °C	28,380 °C	0,757
C	26,476 °C	24,660 °C	28,027 °C	0,832
D	26,296 °C	24,607 °C	27,980 °C	0,973
Promedio Total	26,605 °C	24,903 °C	28,126 °C	0,871

Tabla 13. Datos térmicos (en °C) para la estadística, usando todos los niveles de profundidad (m) en cada cadena y todos los meses invertidos para la recolección entre los años 2007-2008

Cadena B									
Profundidad (m)	2008							2007	
	ENE	FEB	MAR	ABR	MAY	JUN	JUL	NOV	DIC
0	26,713	25,769	25,875	24,721	27,703	28,017	26,437	28,380	27,390
5	26,713	25,769	25,875	24,721	27,703	28,017	26,437	28,380	27,390
10	26,527	27,580	26,870	25,447	27,593	27,947	26,743	28,140	27,243
20	26,520	25,659	25,683	25,453	27,083	27,627	27,127	28,013	27,233
27	26,513	25,673	25,655	25,966	26,523	26,743	26,930	27,887	27,223
37	26,460	25,687	25,627	26,480	25,963	26,087	26,110	27,317	27,133

Tabla 14. Temperatura (en °C) media mensual para los años 2007-2008

[Por el artículo [11] se incorpora a la tabla la temperatura en la superficie del lago]

partir de los datos experimentales, se construyó la siguiente tabla:

$$\mathbf{T} = \{(t_j, z_i, T_{ij}) \in [t_0, t_f] \times \mathbb{R}^+ \cup \{0\} \times \mathbb{R}^+ / T_{ij} = T(t_j, z_i, x) + \varepsilon_{ij}\},$$

con $i = 1 : n$ y $j = 1 : m$ de valores observados para la función $T(t, z, x)$, que modela las variaciones de temperatura en la columna de agua del Lago de Valencia. Donde, $\varepsilon_{ij} \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ son errores de observaciones, t es la variable temporal (medida en meses), z es la variable espacial (profundidad del lago, medida en metros) y x es el vector cuyas componentes son los parámetros a estimar.

La pretención final de este trabajo es realizar el análisis de regresión en cuatro (4) modelos teóricos. Para uno (1) de los modelos se logra este análisis resolviendo un problema de regresión lineal y en los otros tres (3) se requiere resolver problemas de regresión no lineal. A continuación, se presenta el modelo teórico de regresión lineal que se desarrolló en este avance para el ajuste de la data en la función de temperatura $T(t, z, x)$.

3.1 Modelo trigonométrico para profundidad fija

Este modelo supone que la función temperatura se escribe como;

$$\mathbf{T}(z, t) = T_0(z) + \beta_0(z) \cos(\omega t) + \beta_1(z) \sen(\omega t)$$

donde $x = (T_0, \beta_0, \beta_1)$ es el vector de parámetros a estimar y ω es un valor conocido (a saber, la frecuencia). De ahí que; $\cos(\omega t)$ y $\sen(\omega t)$ son cantidades conocidas luego, los parámetros se estimarán por regresión *lineal*.

Seguidamente, se muestra el proceso de estimación. Primero, se introducen los detalles para llevar a cabo la estimación en el caso que se supone un modelo trigonométrico para las variaciones de temperatura a profundidad fija.

$$\mathbf{T}(z, t) = T_0(z) + \cos(\omega t) \beta_0(z) + \sen(\omega t) \beta_1(z). \quad (1)$$

Dados los datos experimentales; $\mathbf{T} = \{T(z_i, t_j) = T_{ij} : i = 1, \dots, n \wedge j = 1, \dots, m\}$ y el modelo teórico (1), se considera el *modelo de regresión* para i fijo, dado por:

$$T_{ij} = \underbrace{T_0(z_i) + \cos(\omega t_j) \beta_0(z_i) + \sen(\omega t_j) \beta_1(z_i)}_{g[(z_i, t_j), x]} + e_{ij} \quad (2)$$

Cadena C									
Profundidad (m)	2008							2007	
	ENE	FEB	MAR	ABR	MAY	JUN	JUL	NOV	DIC
0	26,403	25,700	25,797	24,660	27,513	27,887	26,333	28,020	27,197
5	26,403	25,700	25,797	24,660	27,513	27,887	26,333	28,020	27,197
10	26,453	25,733	25,790	24,937	27,397	27,793	26,643	28,027	27,237
20	26,367	25,630	25,630	25,393	26,560	26,790	26,453	27,747	27,167
27	26,397	25,637	25,653	25,873	26,083	26,223	26,350	27,480	27,147
37	26,397	25,637	25,620	26,497	25,977	26,073	26,843	27,190	27,080

Tabla 15. Temperatura (en °C) media mensual para los años 2007-2008

[Por el artículo [11] se incorpora a la tabla la temperatura en la superficie del lago]

donde, ω y t_j son conocidos y, z_i es una profundidad fija que se toma a partir de la superficie del lago. Se estima el vector, $x = [T_0(z), \beta_0(z), \beta_1(z)]^T$, de parámetros del modelo (2) por el criterio de *Mínimos Cuadrados Ordinarios*;

$$\begin{aligned} \mathbf{SCR}(x) = \sum_{j=1}^m \{ & T_{ij} - [T_0(z_i) + \cos(\omega t_j) \beta_0(z_i) \\ & + \sin(\omega t_j) \beta_1(z_i)] \}^2. \end{aligned} \quad (3)$$

Al derivar (3) con respecto al vector x se obtiene el gradiente de la \mathbf{SCR} , dado por:

$$\nabla \mathbf{SCR}(x) = \left(\frac{\partial \mathbf{SCR}}{\partial T_0}, \frac{\partial \mathbf{SCR}}{\partial \beta_0}, \frac{\partial \mathbf{SCR}}{\partial \beta_1} \right)$$

luego, haciendo $\nabla \mathbf{SCR}(x) = \vec{0}$ se obtiene un sistema lineal de ecuaciones *normales*, $Ax = b$ donde la matriz asociada al sistema viene dada por:

$$\begin{bmatrix} m & \sum_{j=1}^m \cos(\omega t_j) & \sum_{j=1}^m \sin(\omega t_j) \\ \sum_{j=1}^m \cos(\omega t_j) & \sum_{j=1}^m \cos^2(\omega t_j) & \sum_{j=1}^m \sin(\omega t_j) \cos(\omega t_j) \\ \sum_{j=1}^m \sin(\omega t_j) & \sum_{j=1}^m \cos(\omega t_j) \sin(\omega t_j) & \sum_{j=1}^m \sin^2(\omega t_j) \end{bmatrix},$$

el vector de términos independientes está dado por

$$b = \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^m T_{ij} \\ \sum_{j=1}^m T_{ij} \cos(\omega t_j) \\ \sum_{j=1}^m T_{ij} \sin(\omega t_j) \end{bmatrix},$$

y el vector de parámetros (la incognita)

$$x = \begin{bmatrix} \hat{T}_0(z_i) \\ \hat{\beta}_0(z_i) \\ \hat{\beta}_1(z_i) \end{bmatrix}$$

donde las componentes del vector solución, $\mathbf{SCR}(x) = \hat{x} = [\hat{T}_0(z_i), \hat{\beta}_0(z_i), \hat{\beta}_1(z_i)]^T$, vienen a ser los parámetros a estimar.

3.1.1 Consistencia del estimador

La ecuación (2) es equivalente a

$$T = \mathbb{X}x + e$$

donde T es un vector de temperaturas T_{ij} concatenadas, e el vector de errores formado por los e_{ij} concatenados y x el vector de parámetros. Escrito en esta forma el estimador \hat{x} satisface

$$\hat{x} = x + (\mathbb{X}^T \mathbb{X})^{-1} \mathbb{X}e$$

por lo tanto se puede demostrar que (ver Lema 2.2 [13]),

$$\|\hat{x} - x\|^2 \leq \rho((\mathbb{X}^T \mathbb{X})^{-1}) Z_n \|e\|^2, \text{ c.s.}$$

donde $\rho((\mathbb{X}^T \mathbb{X})^{-1})$ es el radio espectral de la matriz $(\mathbb{X}^T \mathbb{X})^{-1}$. Si se supone que $e \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2 I)$ entonces

$$Z_n \sim \text{Beta} \left(\frac{k}{2}, \frac{n-k}{2} \right),$$

donde k es el rango de la matriz de diseño \mathbb{X} . Por lo tanto, se puede demostrar que (ver Teorema 4.1, [13])

$$\hat{x} \rightarrow x, \text{ c.s.}$$

4. RESULTADOS DE LOS AJUSTES A LA DATA

En este apartado se muestran tablas con los parámetros estimados y las distintas curvas de ajuste obtenidas después de implementar el método de los Mínimos Cuadrados Ordinarios para cada profundidad de estudio.

Las ondas periódicas son aquellas que muestran periodicidad respecto de la variable temporal. Las temperaturas en la tierra en un punto dado y a una altura fija exhiben este comportamiento periódico con respecto al tiempo. Por esta razón, se pueden considerar las mediciones térmicas de la columna de agua de un lago como una combinación lineal de la función seno y la función coseno más un término de traslación (a saber, T_0). Sin embargo, el modelo trigonométrico que se presenta en este estudio tiene la limitación que, hay que calcular los parámetros del modelo para cada profundidad fija.

Cadena B					
Parámetro estimado	Profundidad (m)				
	5	10	20	27	37
$T_0(z)$	2,6956e+01	2,7160e+01	2,6756e+01	2,6681e+01	2,6471e+01
$\beta_0(z)$	-5,0551e-01	-2,0794e-01	-5,7787e-01	-2,9332e-01	4,2674e-02
$\beta_1(z)$	-8,6550e-01	-3,8862e-01	-7,8724e-01	-8,1788e-01	-6,6869e-01

Tabla 16. Modelo trigonométrico para profundidad fija

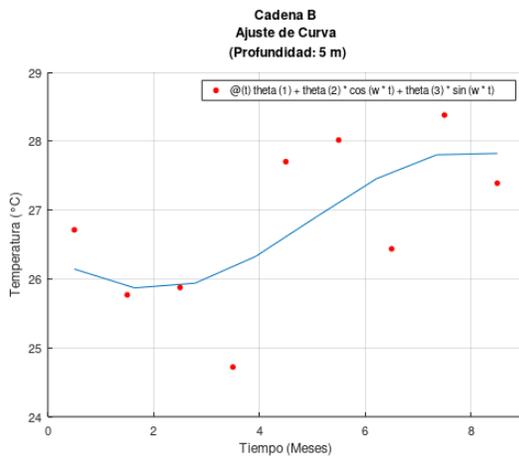


Figura 12. Cadena B a una profundidad de 5 m

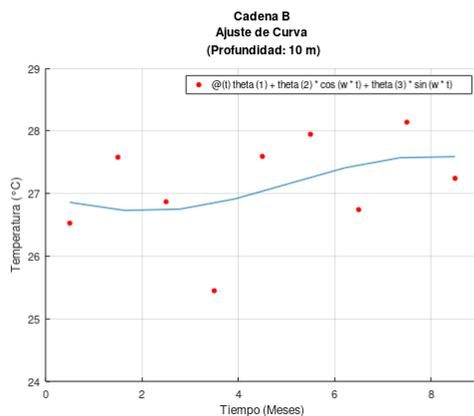


Figura 13. Cadena B a una profundidad de 10 m

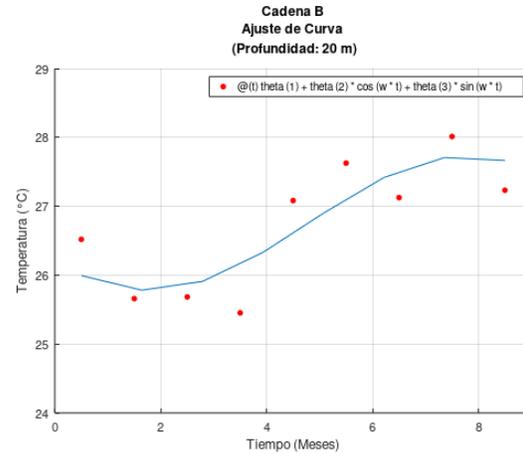


Figura 14. Cadena B a una profundidad de 20 m

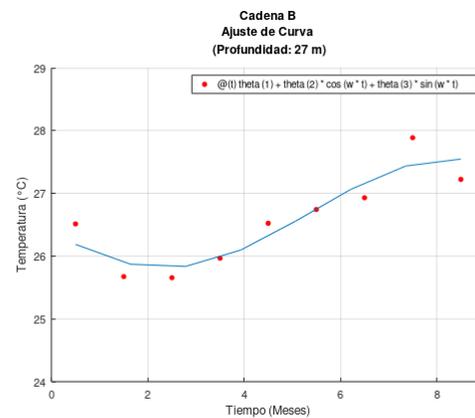


Figura 15. Cadena B a una profundidad de 27 m

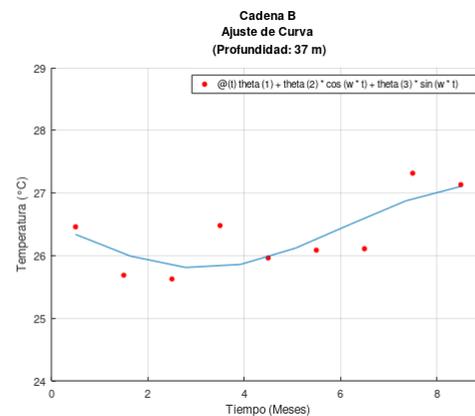


Figura 16. Cadena B a una profundidad de 37 m

Cadena C					
Parámetro estimado	Profundidad (m)				
	5	10	20	27	37
$T_0(z)$	2,6660e+01	2,6716e+01	2,6545e+01	2,6483e+01	2,6487e+01
$\beta_0(z)$	-5,4235e-01	-5,4860e-01	-2,4047e-01	-3,2035e-02	-1,0863e-01
$\beta_1(z)$	-7,6524e-01	-7,7297e-01	-8,4489e-01	-8,0907e-01	-6,6061e-01

Tabla 17. Modelo trigonométrico para profundidad fija

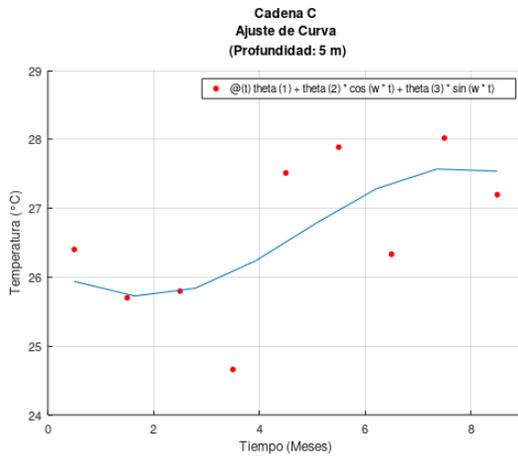


Figura 17. Cadena C a una profundidad de 5 m

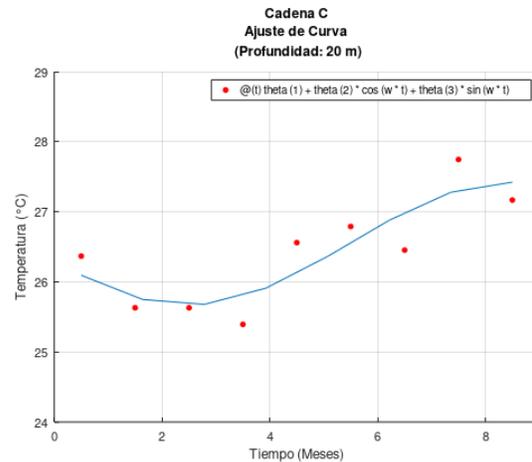


Figura 19. Cadena C a una profundidad de 20 m

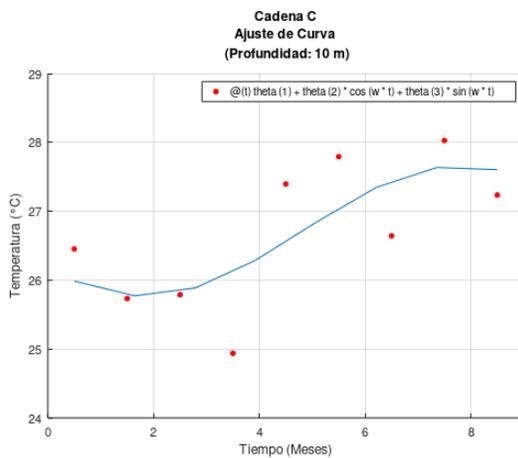


Figura 18. Cadena C a una profundidad de 10 m

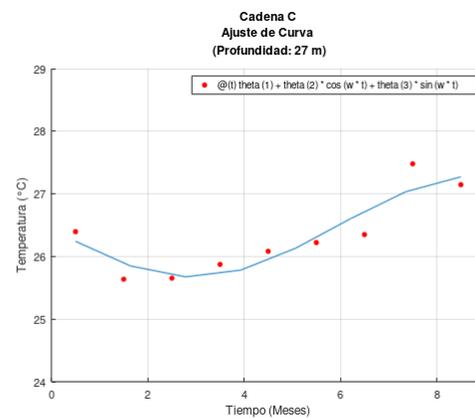


Figura 20. Cadena C a una profundidad de 27 m

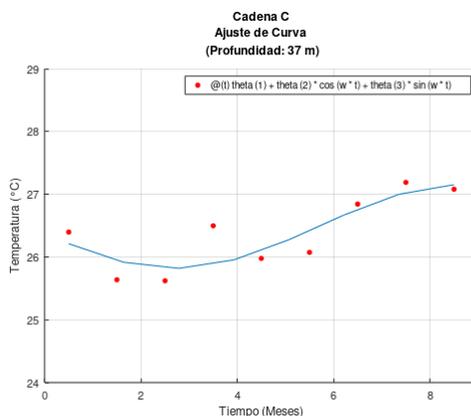


Figura 21. Cadena C a una profundidad de 37 m

5. CONCLUSIONES

Tras analizar y discutir los resultados obtenidos en este estudio en relación con los distintos modelos de ajuste utilizados para caracterizar la temperatura en el Lago de Valencia, los autores concluyen lo siguiente:

La aplicación de diversas regresiones a un mismo problema permite realizar comparaciones más allá del ámbito lineal. Las nuevas tecnologías facilitan la realización de estas comparaciones en un tiempo reducido, lo que conduce a la elección adecuada de un modelo que describa los datos en problemas de ingeniería. Además, proporcionan elementos de juicio suficientes para la toma de decisiones en condiciones de incertidumbre.

El criterio de estimación propuesto en este trabajo, basado en el modelo de regresión lineal descrito, se centra en la minimización de la suma residual. Sin embargo, mientras que las regresiones intrínsecamente lineales que cumplen con las hipótesis clásicas pueden estimarse directamente mediante mínimos cuadrados ordinarios, los modelos no lineales en sentido estricto requieren técnicas de estimación más sofisticadas y laboriosas, que emplean algoritmos matemáticos complejos para su resolución.

El método de mínimos cuadrados, al ser un procedimiento lineal, es notablemente rápido en comparación con procesos iterativos o aquellos que aproximan una matriz Hessiana. No obstante, este método, al intentar ajustar una función a los datos mediante la minimización de

residuos, no tiene la capacidad de detectar datos atípicos. Además, aunque en la mayoría de los casos se ajusta al error, este no siempre sigue una distribución normal, y el método funciona mejor cuando la distribución de los datos es aleatoria. Cabe destacar que los mínimos cuadrados pueden presentar sesgos y no garantizan una solución óptima en todos los escenarios.

Por otro lado, el modelo lineal (trigonométrico a profundidad fija) analizado en esta investigación presenta la dificultad de tener que desarrollarse de manera individual para cada profundidad lo cual puede convertirse en un trabajo engorroso. Finalmente, los tres modelos de regresión no lineal que se pretenden analizar para el estudio final de esta investigación se encuentran en proceso de desarrollo.

Agradecimientos

Esta investigación ha sido financiada por el FONACIT bajo la subvención 2024PGPI42.

Referencias

- [1] BC&A. (2012). Problemática de inundaciones de las riveras del Lago Tacarigua o Lago de Valencia. Visualización de soluciones y análisis de construcción de dique. Venezuela.
- [2] CORPOCENTRO (2002). Corporación de Desarrollo Región Central. República Bolivariana de Venezuela. Plan de Desarrollo de la Región Central. <http://corpocentro.vicepresidencia.gob.ve/actividades/archivos/plandesarrolloregional.pdf>
- [3] Cressa, C.; Velásquez, E.; Zoppi, E.; Rincón, J. y López, C. (1993). Aspectos generales de la limnología en Venezuela. *Interciencia*. 18: 237-248.
- [4] Díaz, E.; Pérez, R.; Armas, M. (2010). Propuesta de los actores claves del plan de educación ambiental en “la cuenca del Lago de Valencia”. *Observatorio Laboral Revista Venezolana*. Vol. 3, No. 5, pp. 43-59.
- [5] Fernandez, G. (2020). *Análisis de la Expansión del Lago de Valencia (1978-2020)*. Región centronorte de Venezuela.
- [6] Fundación Tierra Viva. (2005). *Atlas del Agua de la cuenca del Lago de Valencia*. Fundación Tierra Viva. Venezuela.
- [7] Fundacite. (1999). *Propuesta de uso turístico sostenible de la cuenca del Lago de Valencia*. Estado Aragua. Venezuela.
- [8] Hernández, Franzyuri. (2024). *Modelos de EDPs para caracterizar la temperatura en lagos. Lago de Valencia*. [Trabajo de Grado de Maestría]. Universidad Central de Venezuela. Facultad de Ciencias. Escuela de Matemática. Postgrado de Matemática. Caracas, Venezuela.
- [9] Hernández, José y Rodríguez, Luis. (2020). Is ENSO associated with Precipitation Patterns in Lake Valencia Venezuela? *Revista de Climatología*. Vol. 20, pp. 75-87.
- [10] Larrazábal, German. (2007). *Alternativas de Saneamiento para el Lago de Valencia a través de un Modelo Matemático Tridimensional*. Centro Multidisciplinario de Visualización y Cómputo Científico, Facultad Experimental de Ciencias y Tecnología, Universidad de Carabobo.
- [11] Lewis, William. (1983). Temperature, heat and mixing in Lake Valencia, Venezuela. *Limnology and Oceanography*. Vol. 28 (2), 273-286.
- [12] Margalef, R. (1983). *Limnología*. Ed. Omega. Barcelona, España.
- [13] Mexia, João y Da Silva, João (2006). Least Squares Estimator Consistency: A Geometric Approach. *Discussiones Mathematicae. Probability and Statistics*. Vol. 26, 19-45.
- [14] Soto, L.; López, C. y Bello, C. (1994). Química del Agua del Embalse Socuy. *Bol. Centro Invest. Biol*. Vol. 28, pp. 1-18. Edo. Zulia, Venezuela.