



Dos aplicaciones del análisis de Fourier al estudio de formas. Caso de estudio: borde de un lago

León José R.³, Marcano José G.^{1,2}, Rodríguez Luis A.^{1,2}, Romero M. Mirba J.^{1,2*}

¹Departamento de Matemática, Facultad de Ciencias y Tecnología, Universidad de Carabobo. Naguanagua, Edo. Carabobo-Venezuela.

²Centro Multidisciplinario de Visualización y Cómputo Científico (CEMVICC).

³Instituto de Matemática y Estadística Ingeniero Rafael Laguardia (IMERL). Facultad de Ingeniería. Universidad de la República. Montevideo-Uruguay.

*Autor de correspondencia: mjromero@uc.edu.ve

Recibido: 29/01/2025, Revisado: 22/02/2025, Aceptado: 07/05/2025

Resumen

En este trabajo utilizamos el análisis de Fourier para analizar formas bidimensionales, en particular nos centramos en formas que corresponden al borde de un lago. Estudiamos la morfometría del borde, a través de una descomposición de Fourier de su forma y proponemos un algoritmo para el cálculo del área encerrada por el borde.

Palabras Claves: Morfometría, área, nivel, geometría del borde, análisis estadístico.

Two applications of Fourier analysis to the study of shapes. A Case Study: Lake Boundary

Abstract

In this work, we use Fourier analysis to analyze two-dimensional shapes, focusing in particular on shapes corresponding to the edge of a lake. We study the morphometry of the edge through a Fourier decomposition of the shape and propose an algorithm for calculating the area enclosed by the edge.

Keywords: Morphometry, area, level, edge geometry, statistical analysis.

1. Introducción

Si consideramos formas bidimensionales estas consisten en muchos casos de contornos de una única curva cerrada. Si no es el caso, la forma se puede dividir en varias curvas cerradas, además formas que se representan con curvas abiertas se pueden cerrar. En este trabajo nos centraremos en curvas cerradas individuales. Siguiendo la presentación de [5], describiremos formas correspondientes a curvas cerradas como una función periódica compleja.

Generalmente, la función no tiene una expresión analítica conocida, en lugar de eso solo disponemos de una discretización, es decir, un conjunto de puntos finitos cuyas coordenadas pertenecen a la forma que define el contorno. Este esquema puede tratarse como una función compleja periódica discretizada. Por lo tanto, es posible realizar un análisis de Fourier de los datos utilizando la transformada discreta de Fourier.

El análisis de Fourier es una rama de las matemáticas que estudia cómo las funciones pueden ser representadas o aproximadas por sumas de funciones trigonométricas simples (senos y cosenos). Esta técnica es fundamental en diversos campos como la física, la ingeniería, el procesamiento de señales y muchas otras áreas.

1.1 Serie de Fourier

La serie de Fourier permite descomponer una función periódica $f(t)$ de cualquier período T , en una suma infinita de senos y cosenos:

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos\left(\frac{2\pi nt}{T}\right) + b_n \sin\left(\frac{2\pi nt}{T}\right) \right] \quad (1)$$

donde:

- a_0 es el valor promedio de la función.
- a_n y b_n son los coeficientes de Fourier, que determinan la amplitud de las componentes seno y coseno.
- ω es la frecuencia fundamental.

Los coeficientes de Fourier se calculan mediante las siguientes fórmulas:

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos\left(\frac{2\pi nt}{T}\right) dt$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin\left(\frac{2\pi nt}{T}\right) dt$$

donde T es el período de la función.

1.2 Transformada de Fourier

La transformada de Fourier extiende el concepto de la serie de Fourier a funciones no periódicas. Transforma una función del dominio del tiempo $f(t)$ al dominio de la frecuencia $F(\omega)$:

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt$$

donde i es la unidad imaginaria.

La transformada inversa de Fourier permite recuperar la función original del dominio de la frecuencia al dominio del tiempo:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{i\omega t} d\omega.$$

2. Estudio de formas bidimensionales

Se puede utilizar una función exponencial para describir un círculo en el plano complejo. La función es

$$ae^{i\theta t} = a(\cos(\theta t) + i\text{sen}(\theta t))$$

es decir, un círculo centrado en el origen con radio a . Si a es complejo, el círculo tendrá radio $|a|$.

La parametrización compleja del círculo puede ser modificada para describir una elipse. En ese sentido, distinguimos en una elipse su eje menor y su eje mayor, el de mayor longitud, estos ejes son ortogonales. En el conjunto de todas las elipses posibles, los círculos forman el subconjunto de elipse con ejes de igual longitud. Para convertir un círculo en una elipse, simplemente cambiamos la longitud de un eje, para $a \neq b \neq 0$, tenemos que

$$a \cos(\theta t) + ib \sin(\theta t),$$

elegimos $r_1 = (a+b)/2$, $r_2 = (a-b)/2$ entonces

$$\begin{aligned} & (r_1 + r_2) \cos(\theta t) + (r_1 - r_2)(i \sin(\theta t)) \\ &= r_1 e^{i\theta t} + r_2 e^{-i\theta t}. \end{aligned}$$

Si $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$ y multiplicamos la ecuación por un complejo z entonces obtenemos una rotación de la elipse de ángulo $\arg(z)$, además si sumamos un complejo z_0 a la ecuación obtenemos una elipse cuya intersección de sus ejes principales está en z_0 en lugar del origen. Por lo tanto, la expresión general de una elipse es descrita por la ecuación $r_1 e^{i\theta t} + r_2 e^{-i\theta t} + z_0$, donde $r_1, r_2, z_0 \in \mathbb{C}$.

¿Cómo se relacionan el modelado de formas, las elipses representadas como funciones compleja y el análisis de Fourier?

La serie de Fourier para una función periódica f dada por (1), se puede escribir en forma compleja por el desarrollo

$$f(t) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} c_l e^{il \frac{2\pi n t}{T}} \quad (2)$$

donde los coeficientes están dados por

$$c_l = \frac{1}{T} \int_0^T e^{-il \frac{2\pi n t}{T}} f(t) dt. \quad (3)$$

En la representación de Fourier de f si reagrupamos los coeficientes tenemos

$$f(t) = \sum_{l=0}^{\infty} \left(c_l e^{il \frac{2\pi n t}{T}} + c_{-l} e^{-il \frac{2\pi n t}{T}} \right)$$

es decir, la función f es representada por una suma de elipses representadas en forma compleja, vemos que en el análisis de Fourier una función compleja periódica da como resultado una suma de elipses. La curva se genera como la suma de elipses en distintas frecuencias o niveles de detalle.

Los componentes de la transformada de Fourier permiten la representación de la forma con un nivel de detalle dado por el rango de frecuencias. Las bajas frecuencias representan la estructura gruesa de un objeto, mientras que las frecuencias más altas añaden los detalles. Una determinada frecuencia depende de todas las frecuencias siguientes para aproximarse a una forma. El centro de gravedad u origen de la forma se muestra como un punto.

2.1 Transformada discreta de Fourier

La transformada discreta de Fourier (en adelante, TDF) es una aproximación a los coeficientes de la serie de Fourier c_l , describimos un bosquejo de su derivación.

En aplicaciones prácticas, $f(t)$ está dada por un conjunto de muestras, en el momento k se denota $f_k = f(t_k)$. Suponemos que f es una tabla de N muestras obtenidas a lo largo del intervalo T en puntos de tiempo igualmente espaciados $t_k = k\Delta t$, $k = 0, \dots, N-1$ y $\Delta t = T/N$. En intervalos fuera del elegido, se supone que la función se repite una extensión periódica de f .

La integral (3) que define los c_k se puede aproximar utilizando la regla del trapecio,

$$\begin{aligned} c_l &= \frac{1}{T} \int_0^T e^{-il \frac{2\pi n t}{T}} f(t) dt \\ &\approx \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{(e^{-il \frac{2\pi n t_k}{T}} f(t_k) + e^{-il \frac{2\pi n t_{k+1}}{T}} f(t_{k+1}))}{2} \Delta t \\ &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} e^{-2\pi i l k / N} f(t_k). \end{aligned}$$

Si definimos $f(t_k)$ la TDF esta dada por,

$$F_l = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} e^{-2\pi i l k / N} f_k \quad (4)$$

y su inversa por

$$f_l = \sum_{k=0}^{N-1} e^{2\pi i l k / N} F_k.$$

Es posible realizar un análisis de Fourier de los datos de una forma utilizando la TDF. Un código en MATLAB sencillo a partir de la ecuación (4) es el siguiente

```
f = complex(xCoordinates, yCoordinates);
N = length(f);
k = 0:N - 1;
j = 0:N - 1;
F = 1/N*exp(-2*pi*i*1*k'/N)*f;
```

F ahora tiene los coeficientes de Fourier F_l de la forma f . Ahora intentemos relacionarlos con los coeficientes de Fourier c_l de las ecuaciones (2) y (3). El

F_0	F_1	F_2	F_3	...	F_k	F_{k+1}	...	F_{N-3}	F_{N-2}	F_{N-1}
c_0	c_1	c_2	c_3	...	c_k	c_{-k}	...	c_{-3}	c_{-2}	c_{-1}

Tabla 1. Relación entre la transformada discreta y los coeficientes de Fourier

primer coeficiente, F_0 , es el resultado de establecer $j = 0$, lo que reduce la ecuación TDF a

$$F_0 = 1/N \sum_{k=0}^{N-1} f_k = \bar{f}.$$

El primer componente es claramente el centroide de los puntos en f , es decir, $F_0 = c_0$. La Tabla 1 muestra las correspondencias.

El orden, aparentemente extraño, es el resultado de la sumatoria de la TDF de 0 a $N - 1$. Esto es equivalente a considerar el rango de la definición de transformada de Fourier en $(-\infty, \infty)$ truncado entre $-N/2 + 1 : N/2$ (N par). Las frecuencias fuera de 0 a $N/2 - 1$ se pliegan y vienen como las frecuencias negativas. Este efecto se llama solapamiento, (en inglés, aliasing). Se prefiere el rango 0 a $N - 1$ ya que maneja un número par o impar de puntos de manera similar, dado que el primer coeficiente F_0 siempre será una traslación pura.

La transformada de Fourier de f consta del centroide de f juntos con coeficientes $[c_l, c_{-l}]$ de una serie de elipses de frecuencia creciente, ver Tabla 1.

3. Aplicaciones al estudio de la morfología de lagos

En la tesis de Jurado [4] se realiza un estudio de la morfometría de un conjunto de lagos de la región europea de los Pirineos. Entre las características estudiadas en la tesis tenemos la forma del contorno. El autor define el contorno del lago de manera operativa, esto es, utiliza la línea en el mapa, o en la batimetría, como representación de la costa o límite del lago. Cuanto menor sea la pendiente de la franja litoral de un lago, mayor es la probabilidad de que pequeñas variaciones en el nivel de la superficie del agua del lago lleguen a traducirse en cambios significativos en el tamaño y la forma de su contorno.

El autor obtiene los contornos a partir del tratamiento de imágenes que contienen la cuenca de estudio. Los contornos son obtenidos por binarización de la imagen, lo que permite la segmentación del borde.

Los coeficientes de Fourier sirven como una descripción abreviada de la forma del contorno de un lago. Esta técnica es utilizada para el análisis de los lagos pirenaicos, para la mayoría se obtiene un ajuste aceptable con los primeros 12 a 24 armónicos, debido a que sus contornos suelen tener una irregularidad moderada. Ver Figura 1 para un ejemplo, en este el gráfico de la columna izquierda corresponde al lago original, el primer contorno se ha construido a partir únicamente del primer armónico de Fourier; el segundo contorno, a partir de los dos primeros armónicos, y así sucesivamente hasta llegar a la aproximación final del borde del lago, la cual está basada en 32 armónicos, y que aparentemente es un buen ajuste al original.

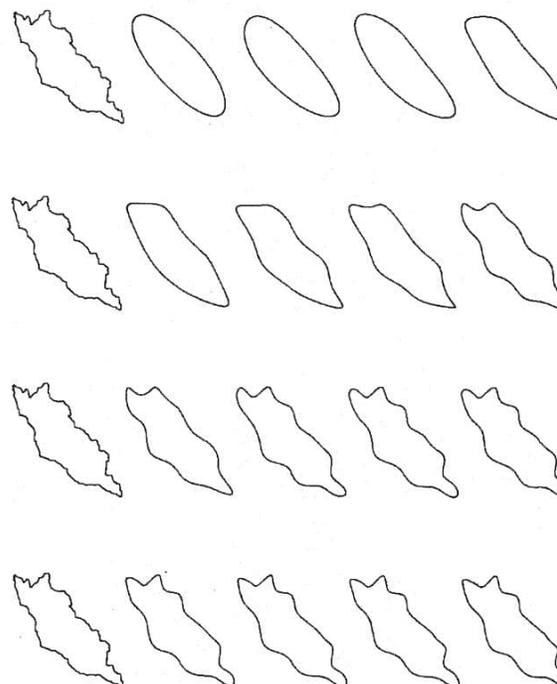


Figura 1. Reconstrucciones del contorno del Lago Mar de Valarties (Garona, Val d’Aran) a partir de los coeficientes de Fourier. Fuente: Jurado [4]

4. Área de regiones cerradas

Sea Ω un dominio en el plano complejo z y sea f una función analítica y biunívoca en Ω . Entonces, f define una aplicación de Ω sobre un dominio $\hat{\Omega}$ en el plano w . Las siguientes propiedades son consecuencias directas del supuesto biunívoco:

1. $f'(z) \neq 0, z \in \Omega$.
2. La función f tiene una inversa f^{-1} , de modo que cada punto $w \in \hat{\Omega}$ puede relacionarse con un único punto $z \in \Omega$ por medio de $z = f^{-1}(w)$.
3. La aplicación se caracteriza por la propiedad geométrica de que si γ_1, γ_2 son dos arcos diferenciables que se cortan en un punto $z_0 \in \Omega$ y forman allí un ángulo α , entonces el ángulo formado por las imágenes de γ_1 y γ_2 en el punto $w_0 = f(z_0)$ es nuevamente α . Es decir, la aplicación preserva ángulos.

Una aplicación que satisface la propiedad de conservación de ángulos en un punto z_0 se dice que es “conforme” en z_0 . Una aplicación f que satisface las propiedades anteriores se dice que es una “aplicación conforme de Ω sobre $\hat{\Omega}$ ”.

Transformaciones conformes. Sea $f : D \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ una aplicación holomorfa, inyectiva de D a un conjunto E contenido en la imagen de f . Sea $\phi(x, y)$ una función real valuada, identificamos $\phi(x, y) = \phi(z)$ que está definida en D . Definimos,

$$\psi(w) := \phi(f^{-1}(w)) = \phi(x(u, v), y(u, v)).$$

La función ψ es la transformación conforme de ϕ bajo f .

El siguiente teorema permite el cálculo de integrales de ϕ , ver Henrici [2], pág 339.

Teorema 1 Si ψ es la transformación conforme a través de $w = f(z)$, entonces

$$\int_D \phi(z) dx dy = \int_E \psi(w) |f^{-1}(w)|^2 du dv.$$

Demostración. Por la identificación $\phi(z) = \phi(x, y)$, usamos el teorema de cambio de variables en su forma real,

$$\int_D \phi(x, y) dx dy = \int_E \psi(w) \left| \frac{\delta(x, y)}{\delta(u, v)} \right| du dv \quad (5)$$

donde $\frac{\delta(x, y)}{\delta(u, v)}$ es la expresión del Jacobiano de la aplicación $w \rightarrow f^{-1}(w)$. Las ecuaciones de Cauchy-Riemann aplicadas a f^{-1} implican,

$$\left| \frac{\delta(x, y)}{\delta(u, v)} \right| = |f^{[-1]'}|^2.$$

ver [1] ecuación (72), al sustituir en la integral (5)

$$\int_E \psi(w) \left| \frac{\delta(x, y)}{\delta(u, v)} \right| du dv = \int_E \psi(w) |f^{[-1]'}|^2 du dv$$

■

Aplicación al cálculo del área. Si $\phi = 1$, el área de D , viene dada por

$$A(D) = \int_D dx dy.$$

Si utilizamos la expresión de la integral dada por el teorema anterior, suponiendo que E es el disco unitario y $g(w) = f^{-1}(w)$, al desarrollar en serie de potencia g (en el círculo), se obtiene la expresión de la serie de Fourier

$$g(w) = b_0 + b_1 w + b_2 w^2 + \dots$$

tal que la serie g' converge para $|w| < 1$. En coordenadas polares la integral está dada por la expresión

$$A(D) = \int_0^1 d\rho \int_0^{2\pi} |g'(\rho e^{i\theta})|^2 d\theta$$

desarrollando $|g'(\rho e^{i\theta})|^2$ e integrando se obtiene

$$A(D) = 2\pi \int_0^1 \sum_{k=1}^{\infty} k^2 b_k \bar{b}_k \rho^{2k-1} d\rho$$

o

$$A(D) = \pi \sum_{k=1}^{\infty} k |b_k|^2,$$

esto permite enunciar el siguiente teorema.

Teorema 2 Bajo las condiciones del teorema 1. Se tiene la fórmula,

$$A(D) = \pi \sum_{k=1}^{\infty} k |b_k|^2.$$

La existencia de una aplicación conforme entre el dominio D y el disco unitario E está garantizada por el célebre teorema de la aplicación de Riemann. El cual se incluye para claridad del lector.

Teorema 3 (Aplicación de Riemann) *Cualquier dominio simplemente conexo Ω , cuya frontera consiste en más de un punto, puede aplicarse conformemente al disco unitario $E := \{z : |z| < 1\}$. Es decir, para $a \in D$ existe f tal que*

$$f(a) = 0 \text{ y } f'(a) > 0$$

y toma exactamente un único valor en el disco E .

En el siguiente ejemplo escribimos para el dominio D encerrado por la elipse de ecuación,

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

la correspondencia conforme con el disco E . Para este fin, definimos la transformación de Joukowski, $z = \alpha w + \frac{\beta}{w} = \alpha w + \beta \bar{w}$, donde $z = x + iy$ y $w = u + iv$

$$z = x + iy = (\alpha + \beta)u + i(\alpha - \beta)v$$

ahora si $w \in \delta E$ entonces $u^2 + v^2 = 1$, por lo tanto

$$\frac{x^2}{(\alpha + \beta)^2} + \frac{y^2}{(\alpha - \beta)^2} = 1$$

$$a = (\alpha + \beta), b = (\alpha - \beta).$$

Se define $g : E \rightarrow D$ por

$$g(w) = \alpha w + \frac{\beta}{w}.$$

Para desarrollar la serie de potencia de la función g , consideramos la función $1/w$ y la escribimos como una serie geométrica,

$$\frac{1}{w} = \sum_{n=0}^{\infty} (1-w)^n$$

al sustituir en la expresión que define a g , obtenemos

$$\begin{aligned} \alpha w + \frac{\beta}{w} &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k w^k \\ &= c_0 + c_1 w + \dots + c_n w^n \\ &\quad + \sum_{j=n+1}^{\infty} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k w^k \end{aligned}$$

donde $c_0 = \beta(n+1)$, $c_1 = -(\alpha - \beta \sum_{j=1}^n \binom{n}{j})$ y para $k = 2, \dots, n$

$$c_k = (-1)^k \beta \sum_{j=k}^n \binom{j}{k}.$$

Para aplicar el método de cálculo de área a dominios discretizados que representen, por ejemplo, contornos de lagos, necesitamos disponer de la función $g = f^{-1}$. En este caso es necesario obtener aproximaciones numéricas de g . Un estudio comparativo de métodos para aproximar g se encuentra en M. Badreddine [3].

5. Aproximación numérica a g vía núcleo Szego

Introducimos a continuación el algoritmo de aproximación a g , ver apéndice C en Baricco *et. al.* [1]. Sea g el polinomio,

$$g(w) = \sum_{j=0}^{m-1} c_j w^j.$$

Denotamos por $z(t)$ una parametrización de la frontera de D , $t \in [0, \beta]$, por ejemplo podemos utilizar la expansión de Fourier de δD que obtuvimos en la sección 2.1.

Algoritmo

- P1 Definimos n puntos equidistantes en el círculo unitario $\theta_j = 2\pi i j/m$.
- P2 Calculamos los valores de los parámetros $\theta^{-1}(\theta_j)$, utilizando la aproximación de Newton,

$$\tau_j^{(k+1)} = \tau_j^{(k)} + \frac{\theta_j - \theta(\tau_j^{(k)})}{\dot{\theta}(\tau_j^{(k)})}$$

calculamos $\dot{\theta}(\tau_j^{(k)})$, de la ecuación

$$\dot{\theta}(t) = \frac{2\pi}{S(a, a)} |\Omega^2(t)|$$

con $S(a, a) = \int_0^\beta |Y^2(t)| dt$ donde $Y(t)$ y $\Omega(t)$, satisfacen la relación

$$Y(t) + \int_0^\beta k(t, s) dt = \Omega(t), t \in [0, \beta].$$

- P3 Obtenemos preimagenes de los puntos equidistantes sobre el círculo

$$z(t_j) = f^{-1}(e^{2\pi i j/m}).$$

P4 Calculamos los coeficientes c_l , tal que g interpola f^{-1} en los puntos $e^{2\pi ij/m}$

$$c_l = \int_0^{2\pi} g(e^{i\theta}) e^{-il\theta} d\theta$$

y esto puede hacerse a través de la TDF.

[5] Karl Skoglund. Fourier Series, the DFT and Shape Modelling. Prepublicación 2004.

6. Conclusiones

En este trabajo presentamos dos métodos para el estudio del borde de un lago. El primero descompone en formas sencillas, a través de la descomposición elíptica de Fourier el borde, separando en armónicos que se aproximan a la forma original y que posiblemente contengan información sobre los cambios de la forma en el tiempo. El segundo método presenta un algoritmo para calcular el área del borde, utilizando la aproximación de la aplicación de Riemann por una descomposición de Fourier. Para trabajos futuros proponemos desarrollar e implementar algoritmos que utilicen estos métodos de manera que nos permitan analizar cambios temporales en el borde del Lago de Valencia.

Agradecimientos

Esta investigación ha sido financiada por el FONACIT bajo la subvención 2024PGP142.

Referencias

- [1] Baricco, G. A., Olivero, A. M., Rodríguez, E. J., Safar, F. G., y Sanz, J. L., Conformal mapping-based image processing: Theory and applications., *Journal of Visual Communication and Image Representation*, 6(1), 35-51, 1995.
- [2] Peter Henrici, *Applied and computational complex analysis*, Wiley-Interscience, 1973.
- [3] Mohamed Badreddine, *A Comparison Of Some Numerical Conformal Mapping Methods For Simply And Multiply Connected Domains*, Tesis de doctorado, Wichita State University, 2009.
- [4] Marcos del Castillo Jurado, *Morfometría de lagos una aplicación a los lagos del Pirineo*, Tesis de doctorado, Universidad de Barcelona, 1992.