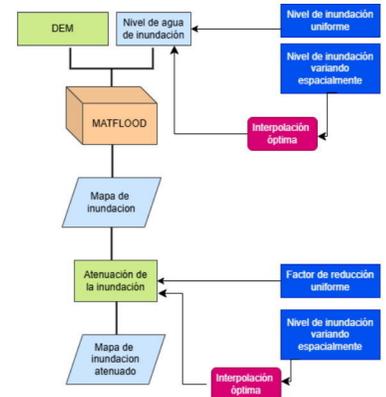
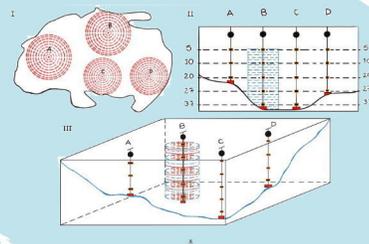
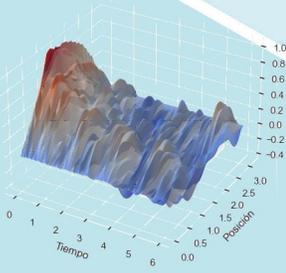


de Ciencias y Tecnología

Volumen especial sobre modelaje estadístico del Lago de Valencia



LA ECUACIÓN DE CALOR ESTOCÁSTICA CON RUIDO ADITIVO EN PYTHON

ESTUDIO POR MÍNIMOS CUADRADOS ORDINARIOS PARA EL ANÁLISIS DE TEMPERATURA EN LA CUENCA DEL LAGO DE VALENCIA

MODELADO MATEMÁTICO DE LA EXPANSIÓN DEL LAGO DE VALENCIA USANDO LA HERRAMIENTA MATFLOOD

SIGNIFICANCIA ESTADÍSTICA DE VARIABLES MORFOMÉTRICAS EN EL LAGO DE VALENCIA Y SUS RELACIONES CON LOS CAMBIOS EN EL NIVEL

ANÁLISIS DE COMPONENTES PRINCIPALES FUNCIONALES (FPCA) DE PRECIPITACIONES EN EL LAGO DE VALENCIA

DOS APLICACIONES DEL ANÁLISIS DE FOURIER AL ESTUDIO DE FORMAS. CASO DE ESTUDIO: BORDE DE UN LAGO



Print ISSN 1698-7418

Online ISSN 2542-3061

Depósito Legal PP200402CA1617

PUBLICACION SEMESTRAL

La revista FARAUTE de Ciencias y Tecnología es una publicación periódica y arbitrada de la Facultad Experimental de Ciencias y Tecnología de la Universidad de Carabobo, cuyo objetivo es divulgar los resultados de las investigaciones científicas y tecnológicas de la comunidad científica. Se publica un volumen anual en dos números.

Comité Editorial

Editor Jefe

Dr. José Gregorio Rodríguez-Quintal

Departamento de Biología, Facultad de Ciencias y Tecnología, Universidad de Carabobo, Venezuela

Junta Editorial

Dr. José Gregorio Marcano
Decano Facultad de Ciencias y Tecnología, Universidad de Carabobo, Venezuela.

Dra. Mariela Contreras
Departamento de Biología, Facultad de Ciencias y Tecnología, Universidad de Carabobo, Venezuela.

Dr. Luis Rodríguez
Departamento de Matemáticas, Facultad de Ciencias y Tecnología, Universidad de Carabobo, Venezuela.

Dr. Pedro Linares
Departamento de Computación, Facultad de Ciencias y Tecnología, Universidad de Carabobo, Venezuela.

Dr. Henry Labrador
Departamento de Química, Facultad de Ciencias y Tecnología, Universidad de Carabobo, Venezuela.

Dr. Reimer Romero
Departamento de Física, Facultad de Ciencias y Tecnología, Universidad de Carabobo, Venezuela.

M.Sc. Elvira Sánchez
Departamento de Biología, Facultad de Ciencias y Tecnología, Universidad de Carabobo, Venezuela.

Editor Fundador

Dr. Oscar Valbuena

Departamento de Biología, Facultad de Ciencias y Tecnología, Universidad de Carabobo, Venezuela.

Comité Asesor

Dr. José Rodríguez

Dra. Silvia Pérez

Dra. Sonia Ardito

Facultad de Ciencias y Tecnología, Universidad de Carabobo, Venezuela.

ENVIO DE ARTICULOS Y CORRESPONDENCIA: farautecienciauc@gmail.com

Acreditada en REVENCYT bajo el código RVF008 y en el Directorio Latindex con el número de folio 17789

La revista no se hace responsable ni solidaria de los juicios emitidos por los autores de los artículos publicados en la misma.

Editorial

Descubriendo el Lago de Valencia a través de modelos matemáticos

El presente número de la revista *Faraute* está dedicado a la presentación de una serie de trabajos de investigación correspondientes al proyecto 2024PGP142, financiado por el FONACIT y desarrollado por un equipo de académicos adscritos a la Universidad de Carabobo, específicamente por profesores del Departamento de Matemáticas de la FaCyT.



Figura 1: Toma satelital del Lago de Valencia.

La imagen que aparece arriba corresponde a una toma satelital del Lago de Valencia, el segundo cuerpo lacustre natural de mayor extensión en Venezuela, ubicado entre los estados Aragua y Carabobo. En sus inmediaciones se encuentran dos de las principales ciudades del país: Maracay y Valencia. Asimismo, se localizan numerosas poblaciones a lo largo de su ribera, lo que convierte a su zona de influencia en un área densamente poblada.

Esta elevada concentración urbana ha generado importantes impactos ambientales. Durante las décadas de 1970 y 1980, el lago experimentó un descenso progresivo en su nivel; sin embargo, en años recientes, se ha registrado un aumento significativo del volumen de agua. Este fenómeno se atribuye principalmente al vertido continuo de aguas residuales provenientes de los asentamientos humanos circundantes.

A lo largo del tiempo, este sistema lacustre ha sido objeto de diversos estudios orientados a caracterizar sus propiedades fisicoquímicas, modelar la circulación de sus aguas, estudiar su ambiente natural, determinar su grado de contaminación y establecer lineamientos técnicos que faciliten la formulación de políticas de recuperación ambiental. El objetivo final de estas acciones es restaurar el ecosistema del lago, promoviendo su aprovechamiento sostenible y su integración equilibrada al entorno regional.

Los temas abordados en este volumen son diversos, y es importante destacar que muchas de las investigaciones aquí presentadas se encuentran aún en una fase intermedia de desarrollo, con excelentes perspectivas de ampliación y profundización de los resultados obtenidos hasta el momento.

Los artículos incluidos pueden agruparse en dos grandes áreas temáticas. En primer lugar, se presentan estudios centrados en modelos fisicomatemáticos aplicados a la difusión del calor y la temperatura, así como análisis sobre la pluviosidad en las zonas circundantes al cuerpo de agua. En segundo lugar, se incluye un conjunto de investigaciones de carácter morfológico (o morfométrico) del Lago de Valencia, centradas en la evolución de su superficie. Este último enfoque responde a la preocupación generada por las frecuentes inundaciones que han afectado varias de las riberas del lago, especialmente en su margen oriental.

Paso entonces a describir de manera sucinta cada uno de los artículos, con el propósito de despertar el interés del lector.

El primer trabajo lleva por título “La Ecuación de Calor Estocástica con Ruido Aditivo en Python”. Este estudio consiste en la implementación de un modelo basado en la ecuación del calor perturbada por un ruido blanco definido en dos variables: el tiempo y el espacio. Dicho modelo constituye la base para el desarrollo de una propuesta más realista, que los autores denominan “Modelado numérico de la estratificación térmica en un lago meromítico”. Esta línea de investigación será continuada utilizando datos del Lago de Valencia, con el objetivo de determinar la difusión térmica en sus aguas y analizar la influencia de la temperatura sobre los organismos que habitan el ecosistema.

El segundo artículo aborda el estudio del comportamiento térmico del lago en función de la profundidad. Titulado “Estudio por Mínimos Cuadrados Ordinarios para el análisis de temperatura en la cuenca del Lago de Valencia”, se basa en datos recolectados mediante cadenas de termistores instaladas en distintos puntos del lago, como parte de un proyecto de monitoreo de variables climatológicas dirigido por Germán Larrazábal (FaCyT) durante los años 2007-2008. En el artículo se analizan dichos registros y se describe la evolución de la temperatura a medida que aumenta la profundidad. Dado que algunas cadenas presentan registros incompletos, en una primera etapa se desarrolla una técnica para completar la base de datos. Posteriormente, se implementa un modelo de regresión basado en el método de mínimos cuadrados, con el fin de estimar parámetros relevantes para la previsión térmica. Asimismo, se estudian las variaciones del comportamiento de la temperatura en función de las estaciones secas y lluviosas.

A continuación, se presenta el trabajo titulado “Modelado Matemático de la Expansión del Lago de Valencia usando la Herramienta MatFlood”. Este modelo permite describir la oscilación del nivel del agua mediante el estudio y la estimación de variables morfométricas extraídas de imágenes satelitales históricas. A través de este enfoque, es posible simular el aumento del nivel del lago y, con ello, determinar las áreas potencialmente afectadas por inundaciones. Se realizaron diversas simulaciones que fueron validadas posteriormente mediante la comparación con imágenes reales. Si bien se observó una correspondencia general entre los datos simulados y las imágenes, también se identificaron ciertas discrepancias. Estas diferencias han sido atribuidas a la ausencia de un parámetro específico, cuya incorporación se considera necesaria para mejorar la precisión del modelo.

Seguidamente, se presenta el artículo titulado “Significancia estadística de variables morfométricas en el Lago de Valencia y sus relaciones con los cambios en el nivel”. Este trabajo tiene como objetivo caracterizar, en función de su mayor o menor significancia, las variables morfométricas del lago. Para ello, se utilizan datos obtenidos mediante teledetección, en el marco de un estudio previo sobre la expansión del cuerpo de agua. Tras un análisis descriptivo de las variables consideradas, se realiza un estudio de correlación con el fin de determinar el grado de interdependencia lineal entre ellas. Luego se aplica un modelo de regresión lineal, complementado con criterios de información, para identificar las variables más relevantes en la explicación del nivel del agua. Finalmente, se analiza la evolución de estas variables en el tiempo y se determina el modelo que mejor explica su comportamiento. El artículo concluye con una discusión sobre el potencial uso de este enfoque para el monitoreo continuo del Lago de Valencia.

El quinto artículo se titula “Análisis de Componentes Principales Funcionales (FPCA) de Precipitaciones en el Lago de Valencia”. Se trata de un trabajo pionero, ya que utiliza técnicas de estadística funcional para modelar las series históricas de precipitación registradas en diversas estaciones pluviométricas ubicadas en el área circundante al lago. Los datos discretos obtenidos en las estaciones se suavizan mediante una serie de Fourier, lo que permite considerar cada serie como una función continua. A partir de allí, se aplica un análisis de Componentes Principales Funcionales. Tras identificar las dos componentes más

representativas, se establecen varios clusters que revelan elementos de gran interés para la clasificación y comprensión de los patrones de precipitación.

El volumen concluye con el trabajo titulado “Dos aplicaciones del análisis de Fourier al estudio de formas. Caso de estudio: bordes de lagos”. La motivación de este estudio surge a partir de los artículos morfométricos reseñados previamente. Se presentan dos enfoques metodológicos. En primer lugar, se analiza la morfometría de los bordes del lago mediante un estudio basado en la reconstrucción progresiva del contorno, utilizando componentes sucesivos de Fourier aplicados a una parametrización del borde, obtenida de imágenes satelitales. En segundo lugar, se introducen herramientas del análisis complejo que permiten calcular ciertas integrales de área sobre regiones del plano, transformadas al círculo unitario mediante una transformación conforme, aplicando el Teorema de la Aplicación Conforme de Riemann. Este trabajo constituye un punto de partida, ya que proporciona los fundamentos teóricos básicos y un esquema preliminar para su posible aplicación práctica.

Ahora solo queda desear al lector el placer de sumergirse en esta interesante y valiosa iniciativa.

Dr. José Rafael León Ramos.

Profesor Titular. IMERL, Universidad de la República. Uruguay

Profesor Titular. Facultad de Ciencias Universidad Central de Venezuela

Miembro Correspondiente de la ACFIMAN



La Ecuación de Calor Estocástica con Ruido Aditivo en Python

Guzmán R. Víctor A.^{1*}, Rodríguez Luis A.²

¹Departamento de Física, Facultad de Ciencias y Tecnología, Universidad de Carabobo. Naguanagua, Edo. Carabobo-Venezuela

²Departamento de Matemáticas, Facultad de Ciencias y Tecnología, Universidad de Carabobo. Naguanagua, Edo. Carabobo-Venezuela

*Autor de correspondencia: guzmanvictor1993@gmail.com

Recibido: 29/01/2025, Revisado: 22/02/2025, Aceptado: 06/05/2025

Resumen

La ecuación de calor estocástica unidimensional con ruido aditivo es resuelta débilmente y modelada numéricamente en Python variando el nivel de ruido con condiciones de frontera homogéneas de Dirichlet. Se plantea una extensión homogénea de un modelo unidimensional con fuente de radiación determinista que se ha usado previamente para modelar la estratificación vertical de la temperatura en un lago, con la finalidad de aplicar el modelo al Lago de Valencia.

Palabras Claves: Calor, Estocástico, Lago de Valencia.

The Stochastic Heat Equation with Additive Noise in Python

Abstract

The one-dimensional stochastic heat equation with additive noise is weakly solved and numerically simulated in Python, with varying noise levels under homogeneous Dirichlet boundary conditions. A homogeneous extension of a one-dimensional model, previously used to describe vertical temperature stratification in a lake with a deterministic radiation source, is proposed for potential application to Lake Valencia.

Keywords: Heat, Stochastic, Lake Valencia.

1. Introducción

La ecuación de calor (EC) es una ecuación de difusión que puede ser usada para describir la distribución de temperatura en el espacio y su evolución en el tiempo. La misma ha sido usada con múltiples propósitos los cuales abarcan desde estimaciones del coeficiente de difusión molecular en el contexto de la extracción de petróleo [1] al modelado de la estratificación térmica en lagos [2].

Esta ecuación suele ser aplicada con ciertas variaciones que pueden incluir términos fuente para modelar las entradas o salidas de energía, efectos estocásticos, variaciones en las condiciones de contorno tomando en algunos casos extremos fijos o aislados así como términos que involucren la contribución del viento transformándola en una ecuación integro-diferencial [2].

En esta investigación se trabaja con la Ecuación de Calor Estocástica (ECE) con Ruido Aditivo unidimensional, con la finalidad de evaluar la aplicabilidad de un modelo estocástico de transporte de energía que incorpore ruido aditivo unidimensional para el estudio de la distribución de temperaturas en el Lago de Valencia. El procedimiento consiste en simplificar algunos elementos del modelo unidimensional de [2], incorporar un término para modelar el ruido generado por múltiples efectos y crear un problema equivalente homogeneizado; el cual se resolverá en una investigación posterior de manera numérica.

2. Ecuación de Calor Estocástica con Ruido Aditivo

La ECE con ruido aditivo es:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \sigma \dot{W} \tag{1}$$

donde σ es una constante que cuantifica la influencia del ruido \dot{W} en la solución u . A esta constante se le conoce como el nivel de ruido [3] y su valor puede cambiar significativamente las propiedades de la variable u . Al término \dot{W} se le conoce como un ruido blanco espacio-temporal. Esta ecuación puede ser escrita como:

$$du = k \partial_{xx} u dt + \sigma dW(t), \quad u(0) = u_0 \in L^2(D), \tag{2}$$

donde $k > 0$, ∂_{xx} denotará al operador derivada segunda con respecto a la variable espacial, las condiciones de contorno son de Dirichlet sobre el dominio $D = (0, L) \subset \mathbb{R}$ y $W(t)$ es un proceso de Q -Wiener, el cual se definirá en la siguiente sección.

2.1 Solución débil

Al proceso estocástico predecible $\{u(t) : t \in [0, T]\}$ descrito por u que toma valores del espacio de Hilbert H llamado U con norma $\|\cdot\|_U$ y producto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle_U$ se le llama una solución débil de (2) si

$$\langle u(t), v \rangle = \langle u_0, v \rangle - k \int_0^t \langle u(s), Av \rangle ds + \sigma \int_0^t \langle dW(s), v \rangle, \tag{3}$$

se cumple $\forall t \in [0, T], v \in \mathcal{D}(A)$, donde $\mathcal{D}(A)$ es el dominio del operador lineal definido para el operador laplaciano unidimensional $\partial_{xx} = A$,

$$A : \mathcal{D}(a) \subset H \rightarrow H,$$

ver [4].

Definimos un proceso Q -Wiener por la representación:

$$W(t) = \sum_{j=1}^{\infty} \sqrt{q_j} \chi_j \beta_j(t) \tag{4}$$

los $\beta_j(t)$ son movimientos F_t -Brownianos independientes e idénticamente distribuidos. En [4] se prueba que esta serie converge en $L^2(\Omega, U)$ y que además la ecuación converge para $L^2(\Omega, C([0, T], U))$ para cualquier $T > 0$. Elegimos como en [4], $q_j = |j|^{-(2r+1+\epsilon)}$ y χ_j las autofunciones $\sqrt{2/a} \sin(j\pi x)$. Usando esta expresión para W

$$\begin{aligned} \int_0^t \langle dW(s), v \rangle &= \int_0^t \left\langle d \left[\sum_{j=1}^{\infty} \sqrt{q_j} \chi_j \beta_j(s) \right], v \right\rangle \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} \int_0^t \langle \sqrt{q_j} \xi_j, v \rangle d\beta_j(s). \end{aligned} \tag{5}$$

Se representa a $u(t)$ como una serie de Fourier en $L^2(0, \pi)$ en la base de autofunciones del Laplaciano con condiciones de Dirichlet en la frontera

$$u(t) = \sum_{j=1}^{\infty} \hat{u}_j(t) \phi_j \tag{6}$$

para $\hat{u}_j(t) := \langle u(t), \phi_j \rangle_{L^2(0,\pi)}$. Utilizando la ortogonalidad de la base y aplicando el diferencial, vemos que $\hat{u}_j(t)$ satisface la siguiente Ecuación Diferencial Estocástica Ordinaria

$$d\hat{u}_j = -kj^2\hat{u}_j dt + \sigma\sqrt{q_j}d\beta_j(t). \quad (7)$$

Esta ecuación se puede abordar como la ecuación de Itô unidimensional de manera que:

$$\hat{u}_j = \hat{u}_j(0)e^{-kj^2t} + \sigma\sqrt{q_j}e^{-kj^2t} \int_0^t e^{kj^2s} d\beta_j(s). \quad (8)$$

Es decir que la solución débil a la ECE con ruido aditivo se obtiene usando (8) en (6):

$$u(t) = \sum_{j=1}^{\infty} \hat{u}_j(0)e^{-kj^2t} \phi_j + \sigma \sum_{j=1}^{\infty} \sqrt{q_j} \phi_j e^{-kj^2t} \int_0^t e^{kj^2s} \xi_j \sqrt{ds} \quad (9)$$

con $\phi_j(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin(jx)$. Donde $\hat{u}_j(0)$ puede obtenerse de (6) para $t = 0$:

$$u(0, x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sum_{j=1}^{\infty} \hat{u}_j(0) \sin(jx) \quad (10)$$

usando la ortogonalidad de la base y fijando $u(0, x) = \sin(x)$:

$$\hat{u}_j(0) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\pi} \sin(x) \sin(jx) dx = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \delta_{j1} \quad (11)$$

donde δ_{j1} es la delta de kronecker. Usando esto la solución sería:

$$u(t, x) = \sin(x)e^{-kt} + \sigma \sum_{j=1}^{\infty} \sqrt{q_j} \phi_j(x) e^{-kj^2t} \int_0^t e^{kj^2s} \xi_j \sqrt{ds}. \quad (12)$$

2.2 Aproximación Numérica

Para realizar la aproximación numérica de la ecuación (12) se discretizará el dominio temporal y espacial y se aproximarán los caminos muestrales, el proceso se detalla en [4]. La discretización temporal consiste en hacer aproximaciones del camino muestral de manera tal que se pueda usar el mismo camino muestral en los distintos muestreos, por otro lado la

discretización del espacio se hace por medio de la transformada discreta de Fourier en seno. En esta sección se desarrollará el procedimiento.

La simulación temporal se aborda incorporando unos intervalos temporales Δt y unos subintervalos temporales auxiliares Δt_{ref} . Aproximando la integral en el tiempo:

$$u(t, x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sum_{j=1}^{\infty} \hat{u}_j(0) e^{-kj^2t} \sin(jx) + \sigma \sum_{j=1}^{\infty} b_j \sin(jx) e^{-kj^2t} \times \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \sqrt{\Delta t} \sum_{n=0}^{t/\Delta t} e^{kj^2n\Delta t} \xi_j^n, \quad (13)$$

donde $b_j = \sqrt{\frac{2}{\pi j^{2r+1+\varepsilon}}}$. Para el muestreo temporal al no tener una forma explícita de W se crean subintervalos de tiempo que sirven para generar los incrementos, definidos como $\Delta t_{\text{ref}} := t/N_{\text{ref}}$. Los ξ_j^n que aparecen en la ecuación (13) se definen como $\xi_j^n := (\beta_j(t_{n+1}) - \beta_j(t_n)) / \sqrt{\Delta t_{\text{ref}}}$, estas variables aleatorias son $\xi_j^n \sim N(0, 1)$ iid.

Para introducir la parte espacial se relacionan las autofunciones de la base con la transformada seno de Fourier discreta (DST-1) de un vector aleatorio de la forma

$$y_k^{J-1} := \sum_{j=1}^{J-1} \sin\left(\frac{\pi jk}{J}\right) b_j \xi_j, \quad k = 1, \dots, J-1 \quad (14)$$

de manera que:

$$u(t, x) \approx e^{-kt} \sin(x) + \sigma \sum_{j=1}^{\infty} b_j \sin(jx) \times \sum_{n=0}^{t/\Delta t_{\text{ref}}} e^{kj^2(n\Delta t_{\text{ref}}-t)} \xi_j^n \quad (15)$$

si ahora discretizamos el espacio haciendo $x_k = k\pi/J$ con $k = 1, \dots, J$, y truncamos la serie hasta $J-1$, podemos interpretar la serie como una transformada seno discreta de Fourier como en la ecuación (14):

$$u_k(t) \approx e^{-kt} \sin\left(\frac{k\pi}{J}\right) + \sigma \sum_{j=1}^{J-1} b_j \sin\left(\frac{jk\pi}{J}\right) \times \sum_{n=0}^{t/\Delta t_{\text{ref}}} e^{kj^2(n\Delta t_{\text{ref}}-t)} \xi_j^n,$$

la suma se trunca en $J - 1$ porque el término J en la suma es cero. Usando el método de Euler-Maruyama podemos discretizar el tiempo $t = N\Delta t$ y como $t = \Delta t_{\text{ref}} N_{\text{ref}} = N\Delta t$, los $t_m = m\Delta t$ y además como $\Delta t = (N_{\text{ref}}/N)\Delta t_{\text{ref}} = \kappa\Delta t_{\text{ref}}$, entonces $t_m = m\kappa\Delta t_{\text{ref}}$ y con $t = T$ entonces:

$$u_{km} \approx e^{-m\kappa k\Delta t_{\text{ref}}} \sin\left(\frac{k\pi}{J}\right) + \sigma \sum_{j=1}^{J-1} b_j \sin\left(\frac{jk\pi}{J}\right) \sum_{n=0}^{m\kappa} e^{-kj^2\Delta t_{\text{ref}}(m\kappa-n)} \xi_j^n. \tag{16}$$

La ecuación (16) puede ser simulada especificando sus parámetros.

2.3 Simulación en Python

El procedimiento descrito en la sección anterior nos permite modelar la hoja Browniana como un proceso de Q -Wiener. Los incrementos en la hoja serían

$$W^{J-1}(t_{n+1}, x_k) - W^{J-1}(t_n, x_k) = \sum_{j=1}^{J-1} b_j \sin\left(\frac{\pi jk}{J}\right) \xi_j^n \tag{17}$$

usando este hecho simulamos el proceso Q -Wiener y se puede apreciar en la figura:

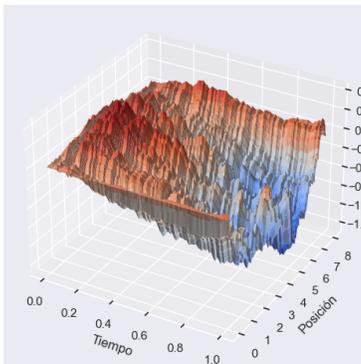


Figura 1. Hoja Browniana usada para describir el ruido aditivo. Fuente: Propia, (2025).

Graficando la temperatura en (16) y variando la semilla no se observaron cambios significativos en el comportamiento de la solución, ver Figura 2.

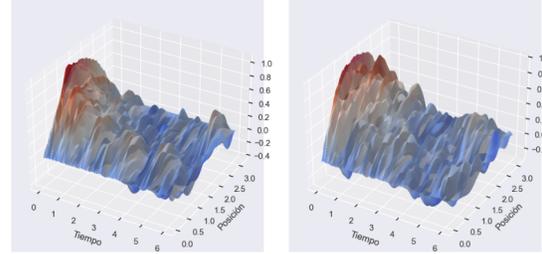


Figura 2. $u(t,x)$ cambiando la semilla. Fuente: Propia, (2025).

Por otro lado cambiando el parámetro de regularidad r en la definición de los coeficientes q_j se puede ver como aumentando el parámetro de regularidad la contribución del ruido va disminuyendo significativamente

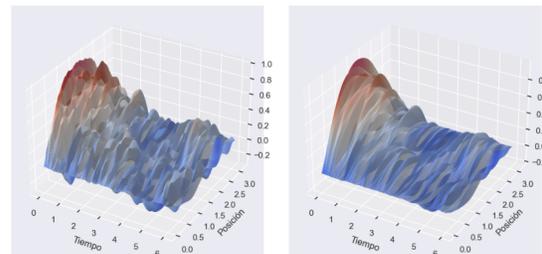


Figura 3. regularidad del ruido r . Izquierda $r = 0,4$. Derecha $r = 1$. Fuente: Propia, (2025).

Finalmente cambiando el nivel de ruido σ entre 0.1, 1 y 2 se observó que el nivel de ruido puede hacer que la solución pierda sus propiedades.

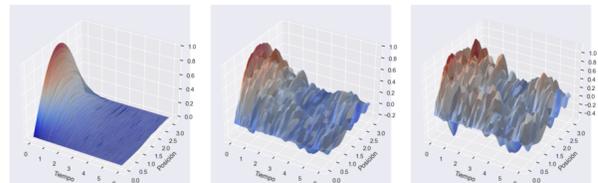


Figura 4. nivel de ruido σ . De izquierda a derecha el nivel de ruido aumenta entre 0,1, 1 y 2 respectivamente. Nótese como al aumentar el nivel de ruido se van perdiendo las propiedades de la función u . Fuente: Propia, (2025).

3. Modelado numérico de la estratificación térmica en un lago meromórfico

En esta sección se buscan identificar los elementos necesarios para modelar el perfil de temperaturas en un lago. Como un primer acercamiento se pretende identificar las condiciones de contorno necesarias para la ecuación diferencial y se sugerirá una condición inicial para el modelo.

En el trabajo [2] se usa un modelo determinístico para estudiar el Lago Shira ubicado en Siberia. Este lago tiene un área superficial de 34,7km², una profundidad máxima de 24m y una profundidad media de 21m. Las temperaturas en el epilimnion están entre 15-20°C y en el hipolimnion está alrededor de los 2-3°C en el verano.

En la investigación sobre el Lago Shira se realizan dos modelos matemáticos uno unidimensional y otro bidimensional en el cual se incorporan ecuaciones para las corrientes turbulentas. Para esta investigación se tomará de referencia el modelo unidimensional

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \iota \beta \frac{F_I e^{-\beta x}}{c_p \rho_0} \quad (18)$$

con las siguientes condiciones de contorno de Neumann:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = - \frac{F_n}{c_p \rho_0 k}, \quad \text{para } x = 0 \quad (19a)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad \text{para } x = L \quad (19b)$$

donde

- k := Coeficiente de difusión turbulenta vertical / Difusividad Térmica.
- F_I := Radiación solar de onda corta incidente en la superficie.
- F_n := Flujo de calor completo a través de la superficie de agua libre.
- ι := Fracción de la radiación de onda corta absorbida en la superficie.
- β := Coeficiente de atenuación/absorción de la radiación solar en el agua.
- c_p := Calor específico del agua.

- ρ_0 := Densidad del agua.

En [2] los investigadores trabajan con una difusividad térmica que cambia con la profundidad x , el modelo de la difusividad se hizo utilizando la relación de la difusividad con la densidad del agua y luego parametrizando la densidad del lago con la profundidad.

El modelo usado en [2] incorpora una parametrización del flujo de calor utilizando investigaciones previas sobre el flujo de calor en el Lago Shira y su relación con la radiación de onda corta y larga en la superficie del mismo.

En el modelo matemático precedente se usan muchos parámetros que son conocidos en el Lago Shira y que no se tienen para el Lago de Valencia. En una primera aproximación a la ecuación (18), se puede suponer que k es constante, la densidad es constante, el calor específico el mismo que en el modelo del Lago Shira y los demás parámetros físicos pertinentes serán tomados de la literatura. Por otro lado se puede generalizar la ecuación (18) introduciendo como fuente el término de ruido aditivo:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \iota \beta \frac{F_I e^{-\beta z}}{c_p \rho_0} + \sigma \dot{W}. \quad (20)$$

Se pueden homogeneizar las condiciones de contorno usando el cambio

$$v(t, x) = u(t, x) + \frac{F_n}{c_p \rho_0 k} x - \frac{F_n}{2L c_p \rho_0 k} x^2. \quad (21)$$

La ECE equivalente sería:

$$\frac{\partial v}{\partial t} = k \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \iota \beta \frac{F_I}{c_p \rho_0} e^{-\beta x} + \frac{F_n}{c_p \rho_0 L} + \sigma \dot{W} \quad (22)$$

con las siguientes condiciones de contorno de Neumann homogéneas:

$$\frac{\partial v}{\partial x} = 0, \quad \text{para } x = 0 \quad (23a)$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = 0 \quad \text{para } x = L \quad (23b)$$

y la siguiente condición inicial:

$$g(x) = f(x) - \frac{F_n}{c_p \rho_0 k} x + \frac{F_n}{2L c_p \rho_0 k} x^2. \quad (24)$$

4. Procedimiento numérico

El esquema a utilizar sería el de diferencias finitas centradas en la parte espacial y las diferencias adelantadas para la parte temporal verificando que $k\Delta t/\Delta x^2 \leq 1/2$.

4.1 Esquema de diferencias finitas

- La derivada espacial se discretiza como:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right) \approx \frac{v_{i+1}^n - 2v_i^n + v_{i-1}^n}{\Delta x^2}.$$

- La derivada temporal se discretiza como:

$$\frac{\partial v}{\partial t} \approx \frac{v_i^{n+1} - v_i^n}{\Delta t}.$$

4.2 Condiciones de contorno

Las condiciones de contorno en la superficie ($x = 0$) y en el fondo ($x = L$) serían:

$$\frac{\partial v}{\partial x}(t, 0) \approx \frac{v_1^n - v_0^n}{\Delta x} = 0 \implies v_1^n = v_0^n, \quad (25a)$$

$$\frac{\partial v}{\partial x}(t, L) \approx \frac{v_N^n - v_{N-1}^n}{\Delta x} = 0 \implies v_N^n = v_{N-1}^n. \quad (25b)$$

4.3 Ruido aditivo

El ruido aditivo $\dot{W}(t, x)$ puede modelarse como una hoja browniana usando un proceso de Q -Wiener como se hizo para la ECE. Para la simulación se pueden usar los incrementos del proceso de Q -Wiener entre dos instantes de tiempo y el intervalo temporal asociado:

$$\dot{W}(t, x) \approx \frac{W_i^{n+1} - W_i^n}{\Delta t}. \quad (26)$$

El modelado de la estratificación térmica en el Lago de Valencia requiere además encontrar los valores correspondientes a los parámetros físicos, los cuales en una primera aproximación se pueden modelar como constantes tomando un valor estimado para el rango de temperaturas de interés y la ubicación específica.

4.4 Condición inicial

En relación a la condición inicial se puede abordar el problema de múltiples maneras, por ejemplo modelando $u(0, x) = f(x)$ como una función definida a trozos en tres regiones, el epilimnion, metalimnion e hipolimnion. De la siguiente manera

$$f(x) = \begin{cases} u_{epi}, & 0 \leq x < x_{epi} \\ u_{epi} - m(x - x_{epi}), & x_{epi} \leq x \leq x_{hipo} \\ u_{hipo}, & x_{hipo} < x \leq L. \end{cases} \quad (27)$$

Este comportamiento caracterizado por una temperatura constante en el epilimnion, con cambios significativos en el metalimnion y nuevamente una estabilización en el hipolimnion, ha sido documentado en numerosos lagos [5]. Por lo tanto, la función $f(x)$ puede ser usada como un primer acercamiento para modelar el perfil inicial de temperaturas. Alternativamente, también es posible estimar $f(x)$ a partir de datos batimétricos obtenidos en el lago [6].

5. Conclusiones

La ECE con ruido aditivo fue modelada en Python, observando que la influencia del ruido puede ser introducida de dos maneras; por medio del parámetro de regularidad r que modifica la solución u de mayor manera cuanto más pequeño sea y por medio del nivel de ruido σ el cual modifica a u de mayor manera cuanto más grande sea.

Se identificaron los elementos físicos necesarios para modelar en futuros trabajos el comportamiento térmico del Lago de Valencia a partir de elementos desarrollos seguido en [2], para ello sería suficiente como un primer acercamiento, estimar las propiedades térmicas del Lago de Valencia, establecer una condición inicial del perfil de temperatura y discretizar el problema asegurando que se respete la condición de estabilidad $k\Delta t/\Delta x^2 \leq 1/2$.

6. Agradecimientos

Los autores agradecen a los árbitros la lectura minuciosa del documento, lo que mejoró considerablemente la presentación del trabajo. Esta investigación ha sido financiada por el FONACIT bajo la subvención 2024PGP142.

Referencias

- [1] M. Khalifi, “On experimental estimation of molecular diffusion coefficient of gaseous solvents in bitumen,” *Fuel*, vol. 302, pp. 121-126, 2021.
- [2] P. V. Belolipetsky et al., “Numerical modeling of vertical stratification of Lake Shira in summer,” *Aquatic Ecology*, vol. 44, pp. 561-570, 2010.
- [3] D. Khosnevisan, *Analysis of stochastic partial differential equations*. Providence, RI: American Mathematical Society, 2014.
- [4] G. J. Lord, C. E. Powell, and T. Shardlow, *An introduction to computational stochastic PDEs*, vol. 50. Cambridge, U.K.: Cambridge University Press, 2014.
- [5] B. Boehrer and M. Schultze, “Stratification of lakes,” *Rev. Geophys.*, vol. 46, no. 2, 2008.
- [6] G. Larrazábal, *Alternativas de Saneamiento para el Lago de Valencia a través de un Modelo Matemático Tridimensional*. Valencia, Venezuela: Universidad de Carabobo, Facultad Experimental de Ciencias y Tecnología, 2007.



Estudio por Mínimos Cuadrados Ordinarios para el análisis de temperatura en la cuenca del Lago de Valencia

Hernández F. Franzuri F.^{1,3*}, Rodríguez Luis A.^{2,3}

¹Departamento de Matemática y Física, FaCE, Universidad de Carabobo, Venezuela.

²Departamento de Matemáticas, Facultad de Ciencias y Tecnología, Universidad de Carabobo. Naguanagua, Edo. Carabobo-Venezuela.

³Centro Multidisciplinario de Visualización y Cómputo Científico (CEMVICC).

*Autor de correspondencia: fhernan@uc.edu.ve

Recibido: 29/01/2025, Revisado: 22/02/2025, Aceptado: 06/05/2025

Resumen

En este estudio se propone un modelo de regresión como parte de la investigación de cuatro modelos teóricos para el ajuste de datos térmicos en la cuenca del Lago de Valencia. La estimación de parámetros se llevó a cabo mediante la resolución de un problema de regresión lineal, utilizando el método de “Mínimos Cuadrados Ordinarios” (MCO). Este método fue implementado en el lenguaje de programación GNU Octave, lo que permitió generar tanto los parámetros estimados como las curvas de ajuste correspondientes para cada nivel de profundidad. La metodología empleada consistió en resolver los sistemas de ecuaciones normales derivados de la aplicación del método de MCO en cada profundidad, con el fin de obtener los parámetros requeridos. Posteriormente, se evaluó la consistencia de dichos parámetros. Además, mostramos que las curvas de regresión se ajustan adecuadamente a los datos térmicos disponibles.

Palabras Claves: Limnología Física, Mínimos Cuadrados Ordinarios, Regresión Lineal.

Ordinary Least Squares Study for Temperature Analysis in the Lake Valencia Basin

Abstract

In this study, a regression model is proposed as part of the investigation of four theoretical models for fitting thermal data in the Lake Valencia basin. Parameter estimation was carried out by solving a linear regression problem, using the “Ordinary Least Squares” (OLS) method. This method was implemented in the programming language GNU Octave, which made it possible to generate both the estimated parameters and the corresponding adjustment curves for each depth level. The methodology used consisted of solving the systems of normal equations derived from the application of the OLS method at each depth, in order to obtain the required parameters. The consistency of these parameters was evaluated. It was also demonstrated that the regression curves adequately fit the available thermal data.

Keywords: Physical Limnology, Ordinary Least Squares, Linear Regression.

1. INTRODUCCIÓN

Con el advenimiento de la computadora, surgió la posibilidad de experimentar con modelos matemáticos complejos y por primera vez se encontró que se podían realizar experimentos controlados de laboratorio, usando para esto computadores en lugar de calculadoras primitivas. El fundamento racional para usar la simulación en cualquier disciplina, es la búsqueda constante del hombre por adquirir conocimientos relativos a la predicción del futuro.

Es por ello que, hoy en día, modelos matemáticos que representan sistemas físicos, pueden ser formulados con el uso del computador aunado a un software matemático que permita resolver los sistemas de ecuaciones que se generan. Por lo tanto, ahora el problema puede no radicar en resolver el sistema de ecuaciones generado, sino en utilizar las herramientas tecnológicas disponibles y más aún, poder formular con un criterio válido la descripción cuantitativa del problema.

En particular, en este trabajo, se usó un área científica llamada *Limnología*, siendo ésta el estudio del agua dulce superficial (del griego limne, divinidad asociada con el agua y de logos tratado o estudio, definición que abarca a los sistemas lóxicos —agua corriente— y a los léxicos —agua estancada—). La Sociedad Internacional de Limnología, SIL, define a esta ciencia como el estudio del conjunto de las aguas dulces o epicontinentales, ver [12].

Cabe mencionar que, el estudio sobre estos ambientes en Venezuela está representado en gran parte por los trabajos realizados en los grandes lagos (Lago de Valencia y Lago de Maracaibo) y grandes ríos (Río Orinoco y tributarios) [3]. A pesar de existir en el país más de 700.000 cuencas cubiertas por aguas embalsadas, el conocimiento limnológico de estos sistemas se encuentra aún en una fase temprana de desarrollo, y son muy pocos en los que se conocen las características físicas o químicas de sus aguas, ver [14].

Esta investigación centró toda su atención en el —*Lago de Valencia*—. Este lago es el fenómeno hidrográfico más importante del centro del país, tiene una longitud máxima de 30 km, una anchura que alcanza los 20 km, una profundidad máxima de 40 m y una profundidad media de 18 m. Adicionalmente,

es importante mencionar que el Lago de Valencia en sí mismo es un microclima, ya que, presenta un conjunto de condiciones climáticas que solo se dan en esa zona y que además pueden diferir de las del clima general de la región. En otras palabras, un microclima se forma por la influencia de factores como la altitud, la orientación, la vegetación, el relieve, el suelo, el agua o las construcciones humanas.

En ese orden de ideas, un microclima puede tener efectos positivos o negativos sobre el medio ambiente y la vida de las personas, los animales y las plantas que habitan en él. Un microclima puede favorecer la biodiversidad, la producción agrícola, el ahorro energético o el confort térmico. Por el contrario, un microclima puede provocar sequías, inundaciones, plagas, enfermedades o contaminación.

Además, un microclima es un fenómeno que se puede observar, medir y modificar, mediante el uso de instrumentos meteorológicos, mapas climáticos y técnicas de planificación y diseño. Un microclima es un recurso que se puede aprovechar o mejorar, mediante el conocimiento, la gestión y la adaptación al mismo (ver [9]).

Es bien sabido, por la comunidad de investigadores de estos ambientes cubiertos por aguas embalsadas, que los lagos son cuerpos de agua, generalmente dulce, de una extensión considerable, que se encuentran separados del mar y el aporte de agua a estos viene de los ríos. La energía solar que llega a la superficie de los lagos causa el calentamiento de las masas de agua, de tal manera que a mayor o menor radiación solar, la temperatura del agua sube o baja.

De acuerdo a lo anterior, uno de los efectos del calor que acompaña a la radiación solar sobre las propiedades físico-químicas del sustrato (agua), es la estratificación vertical de cuerpos de agua cerrados, que permanecen en un mismo lugar sin correr, ni fluir, por diferencias en densidad y temperatura. La luz solar calienta las aguas cercanas a la superficie, generando una capa de agua tibia y menos densa sobre una capa de agua más fría y densa. Según la radiación solar penetra en un cuerpo de agua, su absorción es casi exponencial, razón por la cual sería de esperar que la distribución de calor a lo largo de la columna exhibiera un patrón similar.

De la mano con lo anterior, el área de la Limno-

logía que estudia estos cambios de temperatura a lo largo de columnas de agua en lagos se conoce como —*Limnología Física*— y una de las herramientas imprescindibles para este estudio es el uso de modelos matemáticos. El interés o propósito del presente trabajo es proporcionar información sobre algunos aspectos de la Limnología Física caracterizando la propagación de calor, que se genera por radiación solar, en cuatro (4) puntos diferentes de la columna de agua del Lago de Valencia, usando modelos de regresión convenientes para el caso térmico de estudio.

En otras palabras, la investigación desde un punto de vista general se centró en la *caracterización de cambios de temperaturas, producidos por radiación solar, a lo largo de la columna de agua en la cuenca del Lago de Valencia*, usando para ello cuatro (4) modelos teóricos de regresión, de los cuales; dos (2) provienen de la solución de un sistema de EDPs cuya ecuación principal está gobernada por la *Ecuación de Propagación de Calor de Fourier* y los otros dos (2) presentan una estructura matemática que se acopla perfectamente a las condiciones del fenómeno térmico de estudio.

La metodología utilizada, en este trabajo, consistió en resolver el —problema inverso— de los modelos teóricos, para ello, fue necesario usar una —data térmica bruta— obtenida entre los años 2007-2008 en una investigación cuyo nombre es “*Alternativas de Saneamiento para el Lago de Valencia a través de un Modelo Matemático Tridimensional*” (ver [10]), la misma estuvo dirigida por el Dr. Germán Larrazábal (Ciencias-UC) y entre los investigadores de relevancia que la conformaban estuvo el Dr. José Rafael León (Ciencias-UCV).

El artículo está organizado en cinco (5) partes. En la sección 1, se tiene una breve introducción del trabajo. En la sección 2, se presentan las características del entorno de estudio y todo lo referente a los datos térmicos. En la sección 3, se realiza el análisis de regresión para el problema lineal. En la sección 4, se muestran los resultados para los ajustes a la data del problema lineal. Por último, en la sección 5, se muestran las conclusiones de este estudio.

2. ENTORNO DE ESTUDIO Y DATOS TÉRMICOS

El “Lago de Valencia” es el tercer lago más grande de Venezuela después, del Lago de Maracaibo y el Lago artificial del Guri. Su cuenca es de tipo *endorreica*, por lo cual, la cota de su cuerpo de agua depende de los aportes recibidos por ríos triburarios. Su cuenca tiene una extensión aproximada de 3150 km^2 la cual representa un 0.3% de la superficie del país, ver [7]. Este territorio está repartido de la siguiente manera: 12% de superficie de agua donde se encuentra el lago, 35% de áreas montañosas y 53% de tierras planas [4].

Geográficamente la cuenca del Lago de Valencia está situada entre los estados Aragua y Carabobo, en la región norte costera de Venezuela, entre los meridianos $67^{\circ}07'$ y $68^{\circ}12'$ de longitud oeste y $9^{\circ}57'$ y $10^{\circ}26'$ de latitud norte, y descansa sobre los valles delimitados por la Cordillera de la Costa, ver figura (1). La depresión del Lago de Valencia separa las serranías del litoral y del interior y, se extiende sobre piemontanos y extensas planicies de suelos aluviales y lacustrinos que rodean al lago [2, 6].

La figura (1) muestra tres perspectivas del Lago de Valencia: (A) una imagen satelital a partir de Google Earth, (B) el lago junto con las diferentes zonas urbanas que se encuentran a sus alrededores y, (C) su posición geográfica en el país.

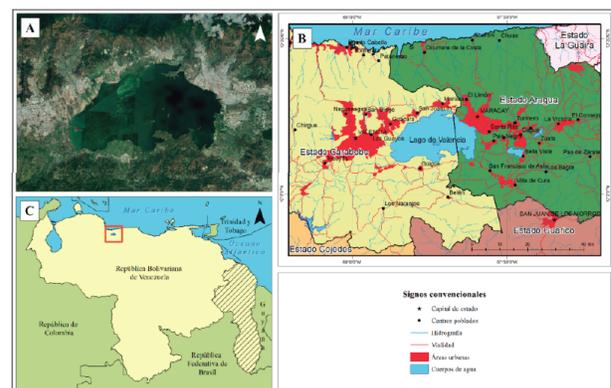


Figura 1. Ubicación del Lago de Valencia. Fuente: [5]

El cuerpo de agua dulce sin desagüe al mar (lago cerrado) del Lago de Valencia es el más grande de Venezuela y el segundo más extenso de América del Sur. Este lago es el fenómeno hidrográfico más importante del centro del país. En sus orillas se levantan dos

de las principales ciudades, a saber, Maracay y Valencia; además, de otros centros urbanos importantes, entre ellos: Mariara, San Joaquín, Güigüe, Guacara, Los Guayos y Palo Negro.

Su área de superficie está estimada en 350 km^2 , tiene un volumen aproximado de $6,3 \text{ km}^3$, su máxima profundidad es aproximadamente 40 m , presenta una profundidad promedio de 18 m , tiene una longitud máxima de 30 km , una anchura que alcanza los 20 km y la longitud de su línea costera es aproximadamente de 117 km .

La figura (2) muestra la batimetría de la cuenca del Lago de Valencia, con ella se puede visualizar las zonas más o menos profundas en el lago dependiendo de la tonalidad de colores que presenta. El color morado representa la zona de mayor profundidad, mientras que, el color amarillo las menos profundas.

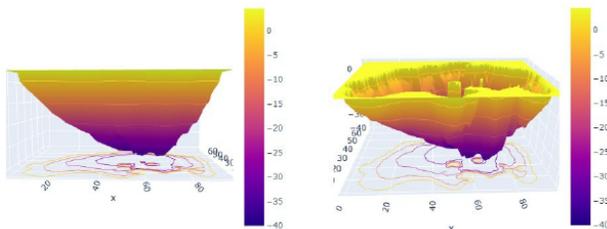


Figura 2. Batimetría del Lago de Valencia. Fuente: [8]

Existen 18 ríos tributarios a la cuenca del Lago de Valencia. A continuación se mencionan: Aragua, Cura, Ereigüe, Guacara, Güey, Los Guayos, Honda, Maracay, Mariara, Negra, Güigüe, Taiguaiguay, Tapatapa, Tocarón, Turmero, Yuma, Cabriales y Maruria [1].

Dentro de la cuenca del lago las aguas subterráneas representan la tercera fuente de suministro de agua a las poblaciones de la región, principalmente sirven de suministro a industrias, actividades agrícolas y poblaciones rurales. Este recurso hídrico es el menos conocido de la región por ser el más complejo para comprender y controlar. Los principales acuíferos en la cuenca del Lago de Valencia son: el acuífero de Valencia, el acuífero de Maracay, el acuífero de San Joaquín y el acuífero de Güigüe.

Con respecto a las variaciones estacionales del régimen termal del Lago de Valencia, éstas tienen efecto sobre el ciclo de vida de las criaturas en los cuerpos de agua sobre la tierra. El movimiento de los fluidos inducido por el viento, las variaciones de presión

atmosférica y el flujo de entrada y salida de los tributarios son muy diferentes cuando la densidad del agua es uniforme a cuando está estratificada.

La irradiación solar penetra al lago como una onda electromagnética. En el rango visible como luz, en el rango infrarrojo como calor y en el rango de onda corta como radiación ultravioleta. Estos procesos de irradiación son atenuados con la profundidad del lago dependiendo del grado de turbidez del agua. Es de hacer notar que la fotosíntesis del fitoplancton depende de la capacidad de penetración de la luz, así como de la vitalidad del zooplancton y otras especies vivientes, la cual se expresa en sus tasas de reproducción, que a su vez dependen de la *temperatura* del agua. Por esta razón, las cantidades de calor y luz en el agua son indicativos de ciclos de vida dentro de las aguas naturales. La descripción suscita anterior de los procesos físicos en los lagos nos provee de evidencia que la estructura de la temperatura del agua y, en consecuencia, la densidad del agua gobierna gran parte del acoplamiento entre la Biología y la Física.

De acuerdo a todo lo anterior, esta breve descripción de la *Limnología* da cuenta de cómo los procesos naturales asociados a los lagos deben ser estudiados en su complejidad con la interacción de tres ramas de la ciencia como son: la Biología, la Química y la Física. Procesos que a su vez son descritos por modelos *matemáticos* precisos.

2.1 Temperatura Analizada

Los datos de *temperatura* analizados en el presente trabajo fueron adquiridos para la elaboración del proyecto que lleva por nombre “*Alternativas de Saneamiento para el Lago de Valencia a través de un Modelo Matemático Tridimensional*” (ver [10]), la recolección de estos abarcó nueve meses y ocho días. Iniciando el 8 de noviembre del 2007 y culminando el 19 de agosto del 2008, y fueron agrupados en períodos de tres meses. El primer periodo estuvo comprendido desde el 08/11/2007 al 23/01/2008, el segundo desde el 24/01/2008 al 14/04/2008 y el tercero desde el 15/04/2008 hasta el 19/08/2008, ver [10].

Los lugares de muestreo para la recolección de datos estuvieron constituidos por cuatro puntos estratégicos en el lago, en cada uno se colocó una línea sosteniendo una serie de dispositivos electrónicos diseñados

para la captura de medidas de *temperatura*. La ubicación satelital de los puntos de muestreo se observa en la figura (3). Por otro lado, la figura (4) muestra como fueron ancladas las cadenas en los cuatro puntos de muestreo. En el anclaje de cada cadena, las boyas quedaron a 0,5 m bajo la superficie del lago (con el objetivo de camuflarlas), el primer sensor quedó ubicado a 5 m por debajo de la superficie, los demás sensores fueron colocados a 10, 20, 27 y 37 m, respectivamente. Se debe tomar en cuenta que, la cantidad de sensores en cada línea varía de acuerdo a la máxima profundidad de cada punto de muestreo, es decir, hay cadenas que presentaron más o menos sensores ya que, en ese punto es más o menos profundo que en el resto. En el anclaje, también, se observa que al final de cada cadena fue colocado un peso muerto con el objetivo de hacer llegar la cadena al fondo del lago y mantenerla lo más posible en posición vertical durante el período de recolección.



Figura 3. Vista satelital de los puntos de muestreo.

Fuente: [10]

La profundidad máxima, medida en metros, para cada punto de muestreo es la siguiente: cadena **A** 23 m, cadena **B** 37,7 m, cadena **C** 42,4 m y cadena **D** 33,5 m.

En la figura (5) se muestra un dibujo a mano alzada caracterizando la parte experimental de recolección de *temperatura*.

El mismo fue diseñado para tres vistas y tiene como única finalidad colaborar con la imaginación del lector. Parte (I); esta vista es desde arriba y refleja el espectro (o rango) que pudiesen tener los dispositivos electrónicos para captar las medidas de temperatura, cubriendo así una gran parte del lago. Parte (II); la segunda vista muestra un corte transversal del lago

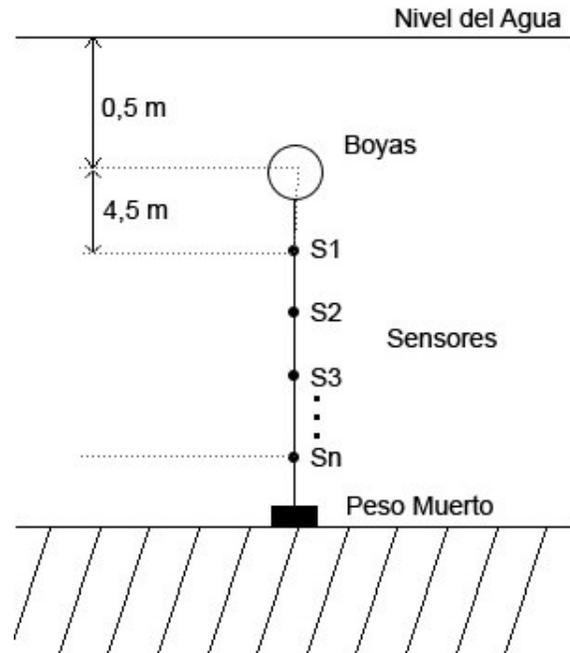


Figura 4. Puntos de muestreo y su anclaje. Fuente: [10]

para generar una postura en 2D, reflejando la ubicación de los dispositivos electrónicos en los diferentes niveles de profundidad, la acción de los mismos a lo largo de una línea arbitraria (cadena **B**) y la profundidad máxima del último sensor ubicado en cada línea del experimento. Parte (III); la última vista da una postura en 3D mostrando una línea cualquiera (cadena **B**) como producto del espectro de acción de los dispositivos a lo largo de la misma.

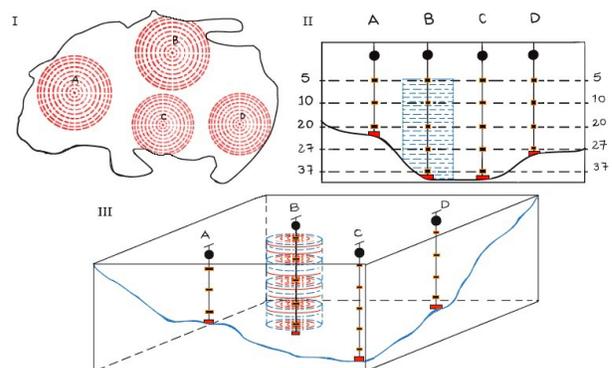


Figura 5. Tres vistas para las cadenas. Fuente: Propia

2.1.1 Metodología usada para la captura de datos

Una vez seleccionados los puntos de muestreo (ver figura (3)) y los horarios para la captura térmica, se realizaron mediciones para obtener perfiles de tem-

Cadena B										
m	Turno	Primer Período			Segundo Período			Tercer Período		
		2007-2008			2008			2008		
		NOV	DIC	ENE	FEB	MAR	ABR	MAY	JUN	JUL
5	Mañana	28,03	27,25	26,55	S.I.	S.I.	S.I.	27,61	27,90	23,30
	Tarde	28,63	27,43	26,71	S.I.	S.I.	S.I.	27,63	28,00	27,93
	Noche	28,48	27,49	26,88	S.I.	S.I.	S.I.	27,87	28,15	28,08
10	Mañana	28,00	27,24	26,54	27,60	26,89	23,25	27,60	27,95	24,37
	Tarde	28,31	27,22	26,49	27,57	26,86	26,55	27,56	27,91	27,91
	Noche	28,11	27,27	26,55	27,57	26,86	26,54	27,62	27,98	27,95
20	Mañana	S.I.	S.I.	S.I.	S.I.	S.I.	S.I.	27,03	27,60	26,12
	Tarde	S.I.	S.I.	S.I.	S.I.	S.I.	S.I.	27,09	27,65	27,63
	Noche	S.I.	S.I.	S.I.	S.I.	S.I.	S.I.	27,13	27,63	27,63
27	Mañana	27,79	27,23	26,54	S.I.	S.I.	S.I.	26,40	26,68	26,91
	Tarde	28,09	27,22	26,50	S.I.	S.I.	S.I.	26,57	26,78	26,94
	Noche	27,78	27,22	26,50	S.I.	S.I.	S.I.	26,60	26,77	26,94
37	Mañana	27,19	27,13	26,46	25,69	25,62	27,98	25,95	26,08	26,11
	Tarde	27,55	27,14	26,46	25,70	25,63	25,73	25,97	26,10	26,11
	Noche	27,21	27,13	26,46	25,67	25,63	25,73	25,97	26,08	26,11

Tabla 1. Promedio mensual de temperatura ($^{\circ}\text{C}$) para cada turno del día entre los años 2007-2008

peratura de la columna de agua. Las mediciones se hicieron utilizando sondas con sensores electrónicos para medir temperatura y profundidad. En cada punto se programó un muestreo no supervisado o desatendido con intervalos de tiempo. Una vez programada la sonda, se sujetó a una guaya, se sumergió en el agua y se hizo descender lentamente hasta que tocó fondo (ver figura (4)). Los datos que midió la sonda quedaron almacenados en la memoria interna del dispositivo. Finalizada la recolección de datos, *in situ*, se procedió a recuperar los registros almacenados en la memoria de cada dispositivo, conectando la sonda a un computador que tenía instalado el software necesario para tal fin y posteriormente se almacenaron como base de datos en Excel.

En el presente trabajo, una vez obtenida la base de datos *térmicos*, se diseñaron tablas para la presentación y organización de los datos registrados en cada cadena, conteniendo el promedio mensual de la temperatura (registrada en grados centígrados $^{\circ}\text{C}$) durante un lapso de medición de nueve meses. En algunas tablas se organizaron los datos en función de tres turnos, a saber; mañana (1:00 - 6:30), tarde (10:00 - 16:30) y noche (17:00 - 21:00). A continuación, se muestran las tablas para las cadenas **B** y **C**.

La tabla (1) muestra el promedio mensual de la temperatura (medida en $^{\circ}\text{C}$) organizada en tres turnos del día. Ésta se recolectó durante tres períodos distribuidos en nueve meses de muestreo para la cadena **B** a

una profundidad máxima de 37,7 m.

Es de hacer notar que en algunos lugares de la tabla se presentan las siglas S.I., con ésto se quiere especificar “Sin Información”, es decir, en esas posiciones de la tabla para esa cadena no se presentaron datos registrados.

La tabla (2) muestra el promedio mensual de la temperatura medida en grados centígrados ($^{\circ}\text{C}$). La misma fue organizada para el turno de mañana, tarde y noche, ésta se recolectó durante nueve meses de muestreo distribuidos en tres períodos para la cadena **C**. Esta cadena es una de las que tiene mayor nivel de profundidad (a saber, 42,4 m) y, además, presenta la información térmica completa a diferencia de las cadenas **B** y **D**.

La ausencia de información térmica presentada en las cadenas **B** y **D** es un fenómeno que aún no está clarificado por los autores del presente trabajo, se tienen varias hipótesis al respecto como, por ejemplo, la pérdida de una línea de muestreo ya sea por hurto o por algún tipo de animal acuático que de alguna manera se enredó en la misma. También, pudiese ser por fallas de los dispositivos electrónicos.

En las tablas (3) y (4) se muestran las temperaturas medidas en grados centígrados (promediadas mensualmente en base a los tres turnos del día) recolectadas para la cadena **B** durante los meses de sequía (a saber: diciembre, enero, febrero, marzo y abril) y llu-

Cadena C										
m	Turno	Primer Período			Segundo Período			Tercer Período		
		2007-2008			2008			2008		
		NOV	DIC	ENE	FEB	MAR	ABR	MAY	JUN	JUL
5	Mañana	28,03	27,20	26,37	25,68	25,80	21,83	27,55	27,90	23,28
	Tarde	27,99	27,16	26,36	25,65	25,75	26,00	27,51	27,86	27,84
	Noche	28,04	27,23	26,48	25,77	25,84	26,15	27,48	27,90	27,88
10	Mañana	28,08	27,26	26,46	25,78	25,83	22,84	27,42	27,80	24,26
	Tarde	28,00	27,22	26,44	25,70	25,77	25,98	27,43	27,80	27,83
	Noche	28,00	27,23	26,46	25,72	25,77	25,99	27,34	27,78	27,84
20	Mañana	27,79	27,18	26,38	25,66	25,63	24,62	26,58	26,83	25,54
	Tarde	27,72	27,16	26,36	25,61	25,63	25,78	26,62	26,83	26,97
	Noche	27,73	27,16	26,36	25,62	25,63	25,78	26,48	26,71	26,85
27	Mañana	27,51	27,15	26,41	25,65	25,65	26,02	26,11	26,23	26,45
	Tarde	27,48	27,15	26,39	25,63	25,66	25,80	26,10	26,26	26,36
	Noche	27,45	27,14	26,39	25,63	25,65	25,80	26,04	26,18	26,24
37	Mañana	27,19	27,09	26,42	25,64	25,62	27,99	25,98	26,07	28,29
	Tarde	27,19	27,08	26,39	25,64	25,62	25,75	25,98	26,08	26,12
	Noche	27,19	27,07	26,38	25,63	25,62	25,75	25,97	26,07	26,12

Tabla 2. Promedio mensual de temperatura ($^{\circ}\text{C}$) para cada turno del día entre los años 2007-2008

via (a saber: mayo, junio, julio y noviembre). En las

Cadena B					
m	Meses de Sequía				
	DIC	ENE	FEB	MAR	ABR
	2007	2008			
5	27,390	26,713	S.I.	S.I.	S.I.
10	27,243	26,527	27,580	26,870	25,447
20	S.I.	S.I.	S.I.	S.I.	S.I.
27	27,223	26,513	S.I.	S.I.	S.I.
37	27,133	26,460	25,687	25,627	26,480

Tabla 3. Media mensual de temperatura ($^{\circ}\text{C}$) para el período de sequía en los años 2007-2008

Cadena B				
m	Meses de Lluvia			
	MAY	JUN	JUL	NOV
	2008			2007
5	27,703	28,017	26,437	28,380
10	27,593	27,947	26,743	28,140
20	27,083	27,627	27,127	S.I.
27	26,523	26,743	26,930	27,887
37	25,963	26,087	26,110	27,317

Tabla 4. Media mensual de temperatura ($^{\circ}\text{C}$) para el período de lluvia en los años 2007-2008

figuras (6) y (7) se muestran las gráficas desarrolladas en GNU Octave de la “temperatura vs profundidad” para la cadena B, durante los meses de sequía y lluvia.

En la figura (6) la tendencia en los meses de diciem-

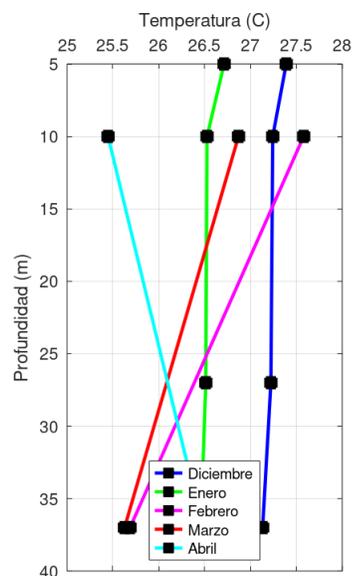


Figura 6. Meses de sequía para la cadena B

bre a marzo, para la cadena B, es de caída de temperatura conforme aumenta la profundidad y solo en el mes de abril es contraria la tendencia. En la figura (7) de los meses de lluvia, para la cadena B, se observa una tendencia de caída de temperatura en todos los meses a excepción del mes de julio.

En las tablas (5) y (6) se muestran las temperaturas (promediadas mensualmente en base a los tres turnos del día) recolectadas para la cadena C, en los meses de sequía y lluvia.

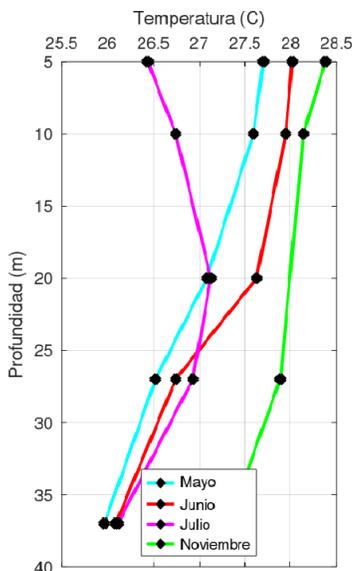


Figura 7. Meses de lluvia para la cadena B

Cadena C					
m	Meses de Sequía				
	DIC	ENE	FEB	MAR	ABR
	2008				
5	27,197	26,403	25,700	25,797	24,660
10	27,237	26,453	25,733	25,790	24,937
20	27,167	26,367	25,630	25,630	25,393
27	27,147	26,397	25,637	25,653	25,873
37	27,080	26,397	25,637	25,620	26,497

Tabla 5. Media mensual de temperatura (°C) para el período de sequía en los años 2007-2008

Cadena C				
m	Meses de Lluvia			
	MAY	JUN	JUL	NOV
	2008			2007
5	27,513	27,887	26,333	28,020
10	27,397	27,793	26,643	28,027
20	26,560	26,790	26,453	27,747
27	26,083	26,223	26,350	27,480
37	25,977	26,073	26,843	27,190

Tabla 6. Media mensual de temperatura (°C) para el período de lluvia en los años 2007-2008

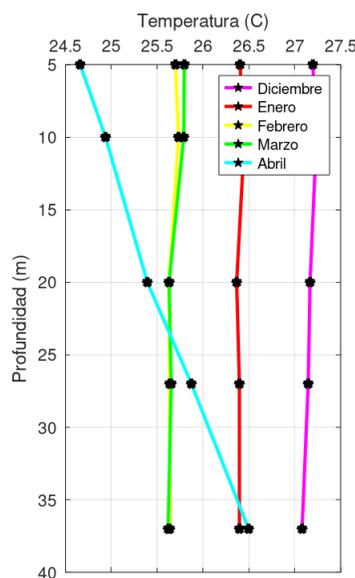


Figura 8. Meses de sequía para la cadena C

En las figuras (8) y (9) se muestran las gráficas generadas con GNU Octave de “temperatura vs profundidad” para la cadena C, en los meses de sequía y lluvia.

En la figura (8) la tendencia en los meses de diciembre a marzo, para la cadena C, es de caída de temperatura conforme aumenta la profundidad y solo en el mes de abril es contraria la tendencia. En la figura (9) de los meses de lluvia, para la cadena C, se observa una tendencia de caída de temperatura en todos los meses a excepción de julio.

Las tablas (7) y (8) muestran, para cada cadena (a saber: B y C), el promedio de la temperatura en base a los meses de los períodos de sequía (diciembre, enero, febrero, marzo y abril) y lluvia (mayo, junio, julio y noviembre) respectivamente. Junto con cada una de esas tablas, se muestran en las figuras (10) y (11) las representaciones gráficas de

“temperatura vs profundidad” durante los meses de sequía y lluvia; éstas fueron realizadas a partir de los datos de las tablas antes mencionadas y diseñadas en el lenguaje de programación GNU Octave.

En la figura (10) se observa que la variación de temperatura tanto en la época de lluvia como en la época de sequía es decreciente en profundidades a partir de 25 m.

Las figuras (10) y (11) presentan variaciones de temperatura muy pequeñas con leve tendencia al aumento de temperatura en el periodo de sequía. La figura (11) tiene tendencia a la caída de temperatura en el periodo de lluvia.

En las tablas (9) y (10) se presenta la temperatura (media mensual) dada por el promedio de todos los meses de muestreo obtenida en cada una de las profundidades de estudio, la temperatura mínima (media

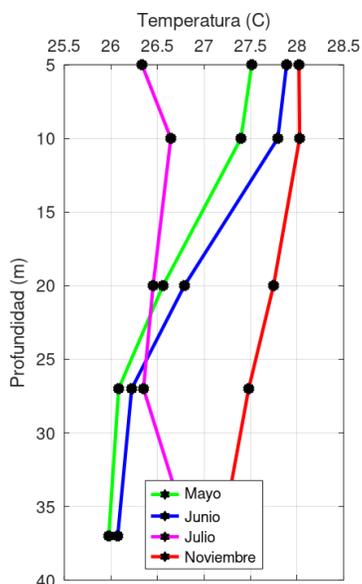


Figura 9. Meses de lluvia para la cadena C

Cadena B		
m	Temperatura (en °C)	
	Período de Sequía	Período de Lluvia
	2007-2008	2007-2008
5	27,052	27,634
10	26,733	27,606
20	S.I.	27,279
27	26,868	27,021
37	26,277	26,369

Tabla 7. Media de temperatura (°C) para los períodos de sequía y lluvia en los años 2007-2008

mínima mensual) entre todos los meses obtenida en cada profundidad de estudio, la temperatura máxima (*media máxima mensual*) entre todos los meses obtenida en cada profundidad de estudio y la *desviación estandar* entre todos los meses obtenida en cada profundidad de estudio.

En las tablas (11) y (12) se presenta la temperatura dada por el promedio en todas las profundidades obtenido en cada uno de los meses de muestreo, la temperatura mínima entre todas las profundidades obtenida en cada mes de estudio, la temperatura máxima entre todas las profundidades obtenida en cada mes de estudio y la desviación estandar entre todas las profundidades obtenida en cada mes de estudio.

La tabla (13) muestra para cada cadena el *promedio* de la temperatura, calculado entre todos los meses y todas las profundidades de estudio, la temperatura *mínima* obtenida entre todos los meses y todas las

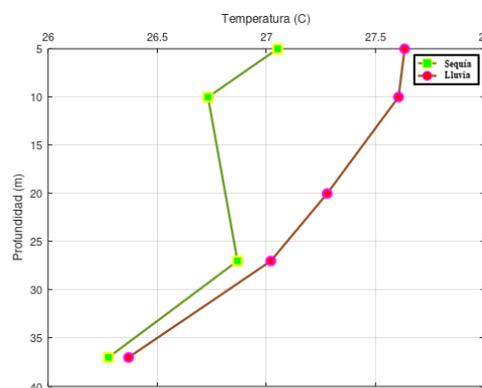


Figura 10. Temperatura vs profundidad durante los períodos de sequía y lluvia para la cadena B

Cadena C		
m	Temperatura (en °C)	
	Período de Sequía	Período de Lluvia
	2007-2008	2007-2008
5	25,951	26,938
10	26,030	27,465
20	26,037	26,888
27	26,141	26,534
37	26,246	26,521

Tabla 8. Media de temperatura (°C) para los períodos de sequía y lluvia en los años 2007-2008

profundidades, la temperatura *máxima* obtenida entre todos los meses y todas las profundidades, la *desviación estandar* obtenida entre todos los meses y todas las profundidades y, los *promedios totales*.

Como observación general; las gráficas muestran poca variación de temperatura en la época de sequía y una tendencia a la caída de temperatura en el período de lluvia.

2.1.2 Datos faltantes

Existen múltiples causas por las que se pueden tener registros “Sin Información” en una base de datos, o bien, el registro contiene un valor infactible o fuera de rango que debe eliminarse para no afectar (o sesgar) los estudios que se apoyen en esa data. Cuando esto sucede se dice que existen *datos faltantes* o valores perdidos en el archivo estadístico.

Los datos faltantes forman parte de un conjunto de observaciones con características especiales que incluyen a los datos agrupados, agregados, redondeados, censurados o truncados; es decir, a datos con

Cadena B				
Profundidad	2007-2008			
	Promedios con Base en los Meses			
	Media Mensual	Media Mínima Mensual	Media Máxima Mensual	Desviación Estandar
5 m	27,440 °C	26,437 °C	28,380 °C	0,751
10 m	27,121 °C	25,447 °C	28,140 °C	0,831
20 m	27,279 °C	27,083 °C	27,627 °C	0,302
27 m	26,970 °C	26,513 °C	27,887 °C	0,523
37 m	26,318 °C	25,627 °C	27,317 °C	0,592

Tabla 9. Datos térmicos por profundidad para la estadística entre los años 2007-2008

Cadena C				
Profundidad	2007-2008			
	Promedios con Base en los Meses			
	Media Mensual	Media Mínima Mensual	Media Máxima Mensual	Desviación Estandar
5 m	26,612 °C	24,660 °C	28,020 °C	1,129
10 m	26,668 °C	24,937 °C	28,027 °C	1,040
20 m	26,415 °C	25,393 °C	27,747 °C	0,773
27 m	26,316 °C	25,637 °C	27,480 °C	0,634
37 m	26,368 °C	25,620 °C	27,190 °C	0,587

Tabla 10. Datos térmicos por profundidad para la estadística entre los años 2007-2008

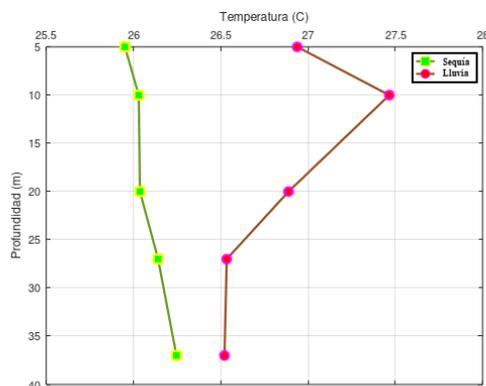


Figura 11. Temperatura vs profundidad durante los períodos de sequía y lluvia para la cadena C

información especial.

En los últimos cien años ha sido enorme el desarrollo de métodos estadísticos para estimar datos incompletos. El algoritmo EM y sus extensiones, la imputación y el método de “Monte Carlo” proporcionan un conjunto de herramientas flexibles y confiables para hacer inferencias en una gran cantidad de problemas de datos faltantes.

Las alternativas de solución al problema de datos faltantes básicamente siguen dos enfoques fundamentales:

- Descartar o eliminar los individuos o variables con valores perdidos.

- Estimar los valores perdidos utilizando algún método de imputación.

En esta sección se van a tratar los valores de temperatura que toman las líneas de muestreo en la superficie del lago. Como se pudo observar en las tablas previas a este apartado, la temperatura en la superficie no está presente en la data usada para el presente estudio. La razón de ello es por la manera como fueron distribuidos los sensores en cada una de las líneas de muestreo. Esta situación se observa con más detalle en la figura (4). Ahí se visualiza al primer sensor de cada cadena ubicado a 5 m bajo la superficie, limitando ésto la captura de temperatura por esta vía en el nivel de 0 m de profundidad (o superficie).

Para resolver la situación expuesta en el párrafo anterior, se recurrió a una imagen presentada en el artículo [11]. En esa investigación, el autor realiza un análisis de régimen termal para el *Lago de Valencia*, con una data que fue recogida durante un período de dos años (a saber, enero de 1977 a diciembre de 1978). La imagen de interés muestra que la temperatura en la superficie del lago, coincide con la temperatura obtenida en los primeros 5 m de profundidad de la columna de agua durante todos los meses de muestreo en esa investigación. Ésto llevó a suponer, sin pérdida de generalidad, que en la presente investigación se puede repetir la temperatura del nivel de 5 m, profundidad de cada cadena, en el nivel de 0 m, con lo cual se logró llenar el dato faltante para la superficie del

Cadena B				
Mes/Año	Promedios Mensuales de Temperaturas (en °C) con Base en las Profundidades (m)			
	Media Mensual	Media Mínima Mensual	Media Máxima Mensual	Desviación Estandar
Dic 2007	27,247	27,133	27,390	0,107
Ene 2008	26,553	26,460	26,713	0,110
Feb 2008	26,634	25,687	27,580	1,339
Mar 2008	26,249	25,627	26,870	0,879
Abr 2008	25,964	25,447	26,480	0,730
May 2008	26,973	25,963	27,703	0,733
Jun 2008	27,284	26,087	28,017	0,840
Jul 2008	26,669	26,110	27,127	0,403
Nov 2007	27,931	27,317	28,380	0,456

Tabla 11. Datos térmicos (en °C) mensuales para la estadística entre los años 2007-2008

Cadena C				
Mes/Año	Promedios Mensuales de Temperaturas (en °C) con Base en las Profundidades (m)			
	Media Mensual	Media Mínima Mensual	Media Máxima Mensual	Desviación Estandar
Dic 2007	27,166	27,080	27,237	0,059
Ene 2008	26,403	26,367	26,453	0,031
Feb 2008	25,667	25,630	25,733	0,046
Mar 2008	25,698	25,620	25,797	0,088
Abr 2008	25,472	24,660	26,497	0,735
May 2008	26,706	25,977	27,513	0,719
Jun 2008	26,953	26,073	27,887	0,853
Jul 2008	26,524	26,333	26,843	0,217
Nov 2007	27,693	27,190	28,027	0,360

Tabla 12. Datos térmicos (en °C) mensuales para la estadística entre los años 2007-2008

lago.

La metodología utilizada para completar los “datos faltantes” en la tabla de la cadena **B** fue la siguiente: **1.- Cálculo de la temperatura a 20 m de profundidad para los meses: enero, noviembre y diciembre.** Para este cálculo, se promediaron los valores ubicados en el mes respectivo de la cadena **B** a 10 m y 27 m de profundidad, dando como resultado: para enero a 20 m un valor de 26,52 °C, para noviembre a 20 m un valor de 28,013 °C y para diciembre a 20 m un valor de 27,233 °C. **2.- Cálculo de la temperatura a 20 m de profundidad para los meses: febrero, marzo y abril.** En este caso, se hicieron los cálculos de manera similar para los tres meses, es decir, para cada mes se promediaron los valores de temperatura del mes en cuestión, ubicados a la misma profundidad en cada una de las cadenas, dando como resultado: para febrero a 20 m un valor de 25,659 °C, para marzo a 20 m un valor de 25,683 °C y para abril a 20 m un valor de 25,453 °C. **3.- Cálculo de la temperatura a 27 m de profundidad para los meses: febrero, marzo y abril.** En esta cuenta, se promediaron los valores ubicados en el mes respectivo de la cadena **B** a 20 m y 37 m de profundidad, dando como resultado: para

febrero a 27 m un valor de 25,673 °C, para marzo a 27 m un valor de 25,655 °C y para abril a 27 m un valor de 25,966 °C. **4.- Cálculo de la temperatura a 5 m de profundidad para los meses: febrero, marzo y abril.** Las cuentas se realizaron de manera similar al inciso (2) y se obtuvo como resultado: para febrero a 5 m un valor de 25,769 °C, para marzo a 5 m un valor de 25,875 °C y para abril a 5 m un valor de 24,721 °C. **5.- Cálculo de la temperatura a 0 m de profundidad (superficie del lago) para los meses: febrero, marzo y abril.** Para estos valores nos apoyamos en los resultados del artículo [11]; repitiendo los valores de temperatura del nivel de 5 m de profundidad en el nivel de 0 m de profundidad.

La tabla (14) muestra la distribución de temperatura actualizada para la cadena **B** después, de haber completado los datos faltantes con los valores obtenidos en los cálculos del párrafo anterior.

3. ANÁLISIS DE REGRESIÓN

En el siguiente apartado, se muestra la formulación del problema de identificación de parámetros que se investigó en este artículo, ver [8]. En ese sentido; a

Cadena	Media Total	Media Mínima Total	Media Máxima Total	Desviación Estandar
A	26,701 °C	24,897 °C	28,117 °C	0,920
B	26,947 °C	25,447 °C	28,380 °C	0,757
C	26,476 °C	24,660 °C	28,027 °C	0,832
D	26,296 °C	24,607 °C	27,980 °C	0,973
Promedio Total	26,605 °C	24,903 °C	28,126 °C	0,871

Tabla 13. Datos térmicos (en °C) para la estadística, usando todos los niveles de profundidad (m) en cada cadena y todos los meses invertidos para la recolección entre los años 2007-2008

Cadena B									
Profundidad (m)	2008							2007	
	ENE	FEB	MAR	ABR	MAY	JUN	JUL	NOV	DIC
0	26,713	25,769	25,875	24,721	27,703	28,017	26,437	28,380	27,390
5	26,713	25,769	25,875	24,721	27,703	28,017	26,437	28,380	27,390
10	26,527	27,580	26,870	25,447	27,593	27,947	26,743	28,140	27,243
20	26,520	25,659	25,683	25,453	27,083	27,627	27,127	28,013	27,233
27	26,513	25,673	25,655	25,966	26,523	26,743	26,930	27,887	27,223
37	26,460	25,687	25,627	26,480	25,963	26,087	26,110	27,317	27,133

Tabla 14. Temperatura (en °C) media mensual para los años 2007-2008

[Por el artículo [11] se incorpora a la tabla la temperatura en la superficie del lago]

partir de los datos experimentales, se construyó la siguiente tabla:

$$\mathbf{T} = \{(t_j, z_i, T_{ij}) \in [t_0, t_f] \times \mathbb{R}^+ \cup \{0\} \times \mathbb{R}^+ / T_{ij} = T(t_j, z_i, x) + \varepsilon_{ij}\},$$

con $i = 1 : n$ y $j = 1 : m$ de valores observados para la función $T(t, z, x)$, que modela las variaciones de temperatura en la columna de agua del Lago de Valencia. Donde, $\varepsilon_{ij} \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ son errores de observaciones, t es la variable temporal (medida en meses), z es la variable espacial (profundidad del lago, medida en metros) y x es el vector cuyas componentes son los parámetros a estimar.

La pretención final de este trabajo es realizar el análisis de regresión en cuatro (4) modelos teóricos. Para uno (1) de los modelos se logra este análisis resolviendo un problema de regresión lineal y en los otros tres (3) se requiere resolver problemas de regresión no lineal. A continuación, se presenta el modelo teórico de regresión lineal que se desarrolló en este avance para el ajuste de la data en la función de temperatura $T(t, z, x)$.

3.1 Modelo trigonométrico para profundidad fija

Este modelo supone que la función temperatura se escribe como;

$$\mathbf{T}(z, t) = T_0(z) + \beta_0(z) \cos(\omega t) + \beta_1(z) \sin(\omega t)$$

donde $x = (T_0, \beta_0, \beta_1)$ es el vector de parámetros a estimar y ω es un valor conocido (a saber, la frecuencia). De ahí que; $\cos(\omega t)$ y $\sin(\omega t)$ son cantidades conocidas luego, los parámetros se estimarán por regresión lineal.

Seguidamente, se muestra el proceso de estimación. Primero, se introducen los detalles para llevar a cabo la estimación en el caso que se supone un modelo trigonométrico para las variaciones de temperatura a profundidad fija.

$$\mathbf{T}(z, t) = T_0(z) + \cos(\omega t) \beta_0(z) + \sin(\omega t) \beta_1(z). \quad (1)$$

Dados los datos experimentales; $\mathbf{T} = \{T(z_i, t_j) = T_{ij} : i = 1, \dots, n \wedge j = 1, \dots, m\}$ y el modelo teórico (1), se considera el modelo de regresión para i fijo, dado por:

$$T_{ij} = \underbrace{T_0(z_i) + \cos(\omega t_j) \beta_0(z_i) + \sin(\omega t_j) \beta_1(z_i)}_{g[(z_i, t_j), x]} + e_{ij} \quad (2)$$

Cadena C									
Profundidad (m)	2008							2007	
	ENE	FEB	MAR	ABR	MAY	JUN	JUL	NOV	DIC
0	26,403	25,700	25,797	24,660	27,513	27,887	26,333	28,020	27,197
5	26,403	25,700	25,797	24,660	27,513	27,887	26,333	28,020	27,197
10	26,453	25,733	25,790	24,937	27,397	27,793	26,643	28,027	27,237
20	26,367	25,630	25,630	25,393	26,560	26,790	26,453	27,747	27,167
27	26,397	25,637	25,653	25,873	26,083	26,223	26,350	27,480	27,147
37	26,397	25,637	25,620	26,497	25,977	26,073	26,843	27,190	27,080

Tabla 15. Temperatura (en °C) media mensual para los años 2007-2008

[Por el artículo [11] se incorpora a la tabla la temperatura en la superficie del lago]

donde, ω y t_j son conocidos y, z_i es una profundidad fija que se toma a partir de la superficie del lago. Se estima el vector, $x = [T_0(z), \beta_0(z), \beta_1(z)]^T$, de parámetros del modelo (2) por el criterio de *Mínimos Cuadrados Ordinarios*;

$$\mathbf{SCR}(x) = \sum_{j=1}^m \{T_{ij} - [T_0(z_i) + \cos(\omega t_j) \beta_0(z_i) + \sin(\omega t_j) \beta_1(z_i)]\}^2. \quad (3)$$

Al derivar (3) con respecto al vector x se obtiene el gradiente de la \mathbf{SCR} , dado por:

$$\nabla \mathbf{SCR}(x) = \left(\frac{\partial \mathbf{SCR}}{\partial T_0}, \frac{\partial \mathbf{SCR}}{\partial \beta_0}, \frac{\partial \mathbf{SCR}}{\partial \beta_1} \right)$$

luego, haciendo $\nabla \mathbf{SCR}(x) = \vec{0}$ se obtiene un sistema lineal de ecuaciones *normales*, $Ax = b$ donde la matriz asociada al sistema viene dada por:

$$\begin{bmatrix} m & \sum_{j=1}^m \cos(\omega t_j) & \sum_{j=1}^m \sin(\omega t_j) \\ \sum_{j=1}^m \cos(\omega t_j) & \sum_{j=1}^m \cos^2(\omega t_j) & \sum_{j=1}^m \sin(\omega t_j) \cos(\omega t_j) \\ \sum_{j=1}^m \sin(\omega t_j) & \sum_{j=1}^m \cos(\omega t_j) \sin(\omega t_j) & \sum_{j=1}^m \sin^2(\omega t_j) \end{bmatrix},$$

el vector de términos independientes está dado por

$$b = \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^m T_{ij} \\ \sum_{j=1}^m T_{ij} \cos(\omega t_j) \\ \sum_{j=1}^m T_{ij} \sin(\omega t_j) \end{bmatrix},$$

y el vector de parámetros (la incognita)

$$x = \begin{bmatrix} \hat{T}_0(z_i) \\ \hat{\beta}_0(z_i) \\ \hat{\beta}_1(z_i) \end{bmatrix}$$

donde las componentes del vector solución, $\mathbf{SCR}(x) = \hat{x} = [\hat{T}_0(z_i), \hat{\beta}_0(z_i), \hat{\beta}_1(z_i)]^T$, vienen a ser los parámetros a estimar.

3.1.1 Consistencia del estimador

La ecuación (2) es equivalente a

$$T = \mathbb{X}x + e$$

donde T es un vector de temperaturas T_{ij} concatenadas, e el vector de errores formado por los e_{ij} concatenados y x el vector de parámetros. Escrito en esta forma el estimador \hat{x} satisface

$$\hat{x} = x + (\mathbb{X}^T \mathbb{X})^{-1} \mathbb{X}^T e$$

por lo tanto se puede demostrar que (ver Lema 2.2 [13]),

$$\|\hat{x} - x\|^2 \leq \rho((\mathbb{X}^T \mathbb{X})^{-1}) Z_n \|e\|^2, \text{ c.s.}$$

donde $\rho((\mathbb{X}^T \mathbb{X})^{-1})$ es el radio espectral de la matriz $(\mathbb{X}^T \mathbb{X})^{-1}$. Si se supone que $e \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2 I)$ entonces

$$Z_n \sim \text{Beta} \left(\frac{k}{2}, \frac{n-k}{2} \right),$$

donde k es el rango de la matriz de diseño \mathbb{X} . Por lo tanto, se puede demostrar que (ver Teorema 4.1, [13])

$$\hat{x} \rightarrow x, \text{ c.s.}$$

4. RESULTADOS DE LOS AJUSTES A LA DATA

En este apartado se muestran tablas con los parámetros estimados y las distintas curvas de ajuste obtenidas después de implementar el método de los Mínimos Cuadrados Ordinarios para cada profundidad de estudio.

Las ondas periódicas son aquellas que muestran periodicidad respecto de la variable temporal. Las temperaturas en la tierra en un punto dado y a una altura fija exhiben este comportamiento periódico con respecto al tiempo. Por esta razón, se pueden considerar las mediciones térmicas de la columna de agua de un lago como una combinación lineal de la función seno y la función coseno más un término de traslación (a saber, T_0). Sin embargo, el modelo trigonométrico que se presenta en este estudio tiene la limitación que, hay que calcular los parámetros del modelo para cada profundidad fija.

Cadena B					
Parámetro estimado	Profundidad (m)				
	5	10	20	27	37
$T_0(z)$	2,6956e+01	2,7160e+01	2,6756e+01	2,6681e+01	2,6471e+01
$\beta_0(z)$	-5,0551e-01	-2,0794e-01	-5,7787e-01	-2,9332e-01	4,2674e-02
$\beta_1(z)$	-8,6550e-01	-3,8862e-01	-7,8724e-01	-8,1788e-01	-6,6869e-01

Tabla 16. Modelo trigonométrico para profundidad fija

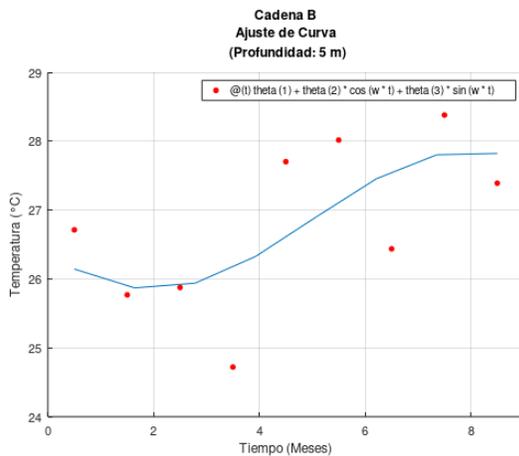


Figura 12. Cadena B a una profundidad de 5 m

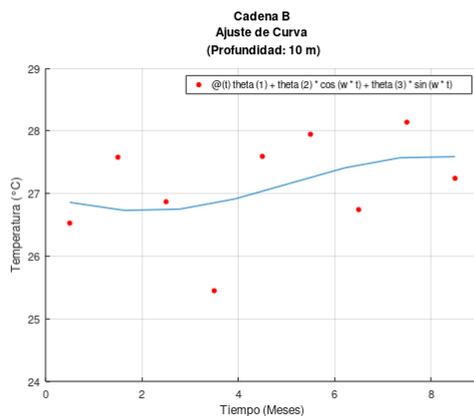


Figura 13. Cadena B a una profundidad de 10 m

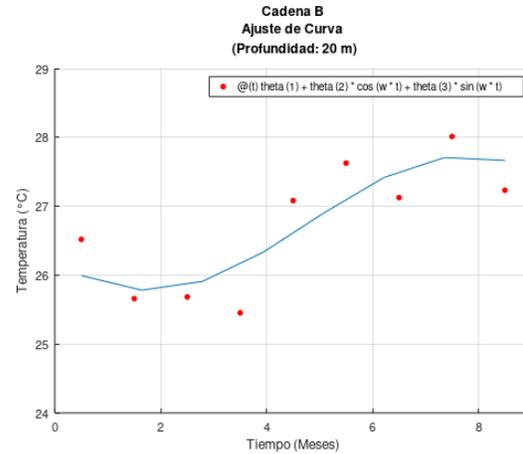


Figura 14. Cadena B a una profundidad de 20 m

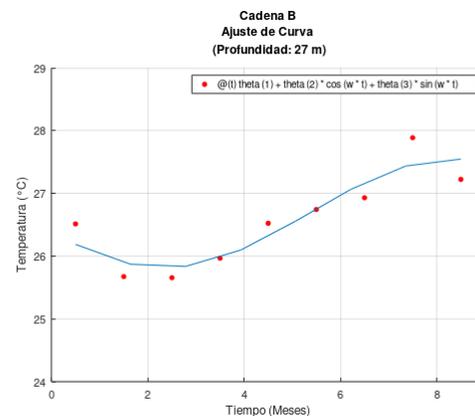


Figura 15. Cadena B a una profundidad de 27 m

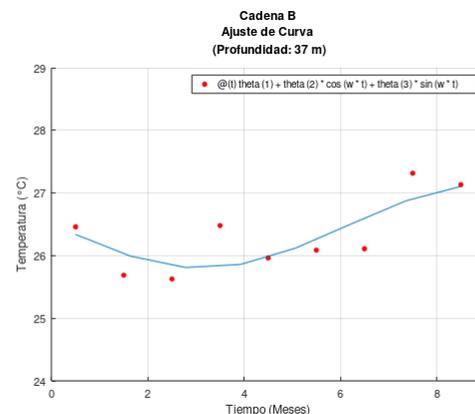


Figura 16. Cadena B a una profundidad de 37 m

Cadena C					
Parámetro estimado	Profundidad (m)				
	5	10	20	27	37
$T_0(z)$	2,6660e+01	2,6716e+01	2,6545e+01	2,6483e+01	2,6487e+01
$\beta_0(z)$	-5,4235e-01	-5,4860e-01	-2,4047e-01	-3,2035e-02	-1,0863e-01
$\beta_1(z)$	-7,6524e-01	-7,7297e-01	-8,4489e-01	-8,0907e-01	-6,6061e-01

Tabla 17. Modelo trigonométrico para profundidad fija

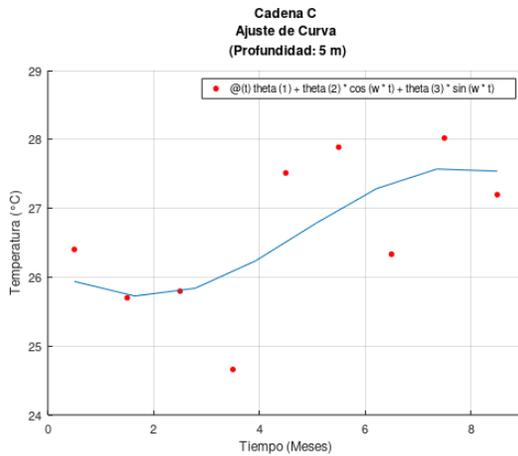


Figura 17. Cadena C a una profundidad de 5 m

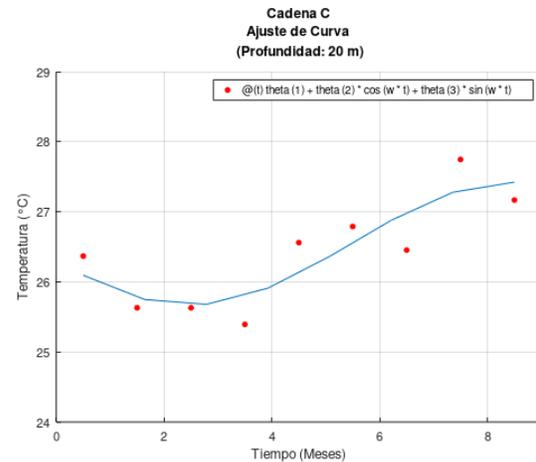


Figura 19. Cadena C a una profundidad de 20 m

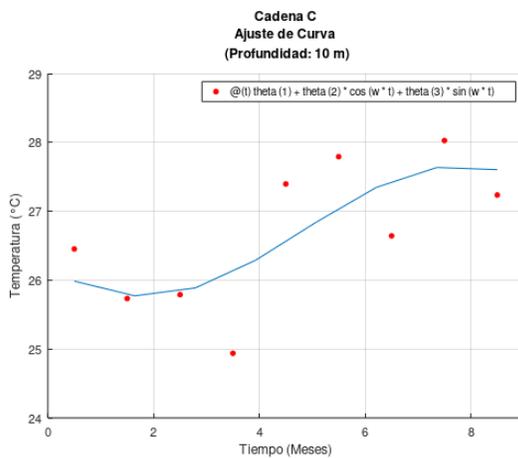


Figura 18. Cadena C a una profundidad de 10 m

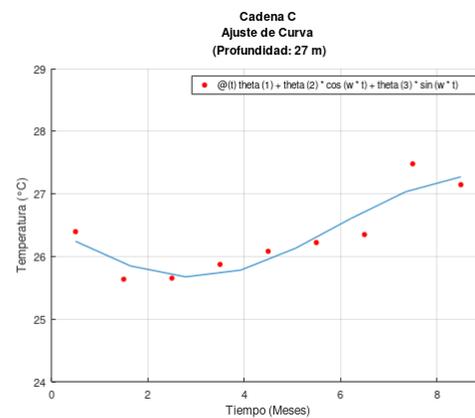


Figura 20. Cadena C a una profundidad de 27 m

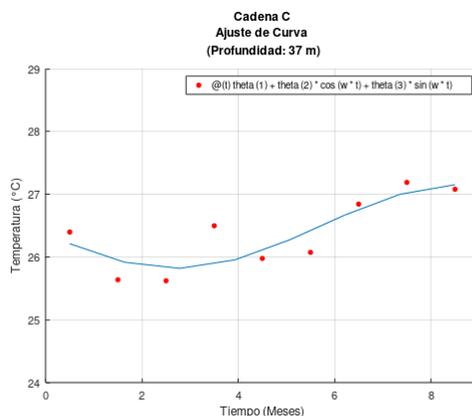


Figura 21. Cadena C a una profundidad de 37 m

5. CONCLUSIONES

Tras analizar y discutir los resultados obtenidos en este estudio en relación con los distintos modelos de ajuste utilizados para caracterizar la temperatura en el Lago de Valencia, los autores concluyen lo siguiente:

La aplicación de diversas regresiones a un mismo problema permite realizar comparaciones más allá del ámbito lineal. Las nuevas tecnologías facilitan la realización de estas comparaciones en un tiempo reducido, lo que conduce a la elección adecuada de un modelo que describa los datos en problemas de ingeniería. Además, proporcionan elementos de juicio suficientes para la toma de decisiones en condiciones de incertidumbre.

El criterio de estimación propuesto en este trabajo, basado en el modelo de regresión lineal descrito, se centra en la minimización de la suma residual. Sin embargo, mientras que las regresiones intrínsecamente lineales que cumplen con las hipótesis clásicas pueden estimarse directamente mediante mínimos cuadrados ordinarios, los modelos no lineales en sentido estricto requieren técnicas de estimación más sofisticadas y laboriosas, que emplean algoritmos matemáticos complejos para su resolución.

El método de mínimos cuadrados, al ser un procedimiento lineal, es notablemente rápido en comparación con procesos iterativos o aquellos que aproximan una matriz Hessiana. No obstante, este método, al intentar ajustar una función a los datos mediante la minimización de

residuos, no tiene la capacidad de detectar datos atípicos. Además, aunque en la mayoría de los casos se ajusta al error, este no siempre sigue una distribución normal, y el método funciona mejor cuando la distribución de los datos es aleatoria. Cabe destacar que los mínimos cuadrados pueden presentar sesgos y no garantizan una solución óptima en todos los escenarios.

Por otro lado, el modelo lineal (trigonométrico a profundidad fija) analizado en esta investigación presenta la dificultad de tener que desarrollarse de manera individual para cada profundidad lo cual puede convertirse en un trabajo engorroso. Finalmente, los tres modelos de regresión no lineal que se pretenden analizar para el estudio final de esta investigación se encuentran en proceso de desarrollo.

Agradecimientos

Esta investigación ha sido financiada por el FONACIT bajo la subvención 2024PGPI42.

Referencias

- [1] BC&A. (2012). Problemática de inundaciones de las riveras del Lago Tacarigua o Lago de Valencia. Visualización de soluciones y análisis de construcción de dique. Venezuela.
- [2] CORPOCENTRO (2002). Corporación de Desarrollo Región Central. República Bolivariana de Venezuela. Plan de Desarrollo de la Región Central. <http://corpocentro.vicepresidencia.gob.ve/actividades/archivos/plandesarrolloregional.pdf>
- [3] Cressa, C.; Velásquez, E.; Zoppi, E.; Rincón, J. y López, C. (1993). Aspectos generales de la limnología en Venezuela. *Interciencia*. 18: 237-248.
- [4] Díaz, E.; Pérez, R.; Armas, M. (2010). Propuesta de los actores claves del plan de educación ambiental en “la cuenca del Lago de Valencia”. *Observatorio Laboral Revista Venezolana*. Vol. 3, No. 5, pp. 43-59.
- [5] Fernandez, G. (2020). *Análisis de la Expansión del Lago de Valencia (1978-2020)*. Región centronorte de Venezuela.
- [6] Fundación Tierra Viva. (2005). *Atlas del Agua de la cuenca del Lago de Valencia*. Fundación Tierra Viva. Venezuela.
- [7] Fundacite. (1999). *Propuesta de uso turístico sostenible de la cuenca del Lago de Valencia*. Estado Aragua. Venezuela.
- [8] Hernández, Franzyuri. (2024). *Modelos de EDPs para caracterizar la temperatura en lagos. Lago de Valencia*. [Trabajo de Grado de Maestría]. Universidad Central de Venezuela. Facultad de Ciencias. Escuela de Matemática. Postgrado de Matemática. Caracas, Venezuela.
- [9] Hernández, José y Rodríguez, Luis. (2020). Is ENSO associated with Precipitation Patterns in Lake Valencia Venezuela? *Revista de Climatología*. Vol. 20, pp. 75-87.
- [10] Larrazábal, German. (2007). *Alternativas de Saneamiento para el Lago de Valencia a través de un Modelo Matemático Tridimensional*. Centro Multidisciplinario de Visualización y Cómputo Científico, Facultad Experimental de Ciencias y Tecnología, Universidad de Carabobo.
- [11] Lewis, William. (1983). Temperature, heat and mixing in Lake Valencia, Venezuela. *Limnology and Oceanography*. Vol. 28 (2), 273-286.
- [12] Margalef, R. (1983). *Limnología*. Ed. Omega. Barcelona, España.
- [13] Mexia, João y Da Silva, João (2006). Least Squares Estimator Consistency: A Geometric Approach. *Discussiones Mathematicae. Probability and Statistics*. Vol. 26, 19-45.
- [14] Soto, L.; López, C. y Bello, C. (1994). Química del Agua del Embalse Socuy. *Bol. Centro Invest. Biol*. Vol. 28, pp. 1-18. Edo. Zulia, Venezuela.



Modelado Matemático de la Expansión del Lago de Valencia usando la Herramienta MatFlood

Torres T. Lisbeth J. ^{1,2*}

¹ *Departamento de Matemática, Facultad de Ciencias y Tecnología, Universidad de Carabobo. Naguanagua, Edo. Carabobo-Venezuela*

² *Centro Multidisciplinario de Visualización y Cómputo Científico (CEMVICC)*

* **Autor de correspondencia:** ltorres17@uc.edu.ve

Recibido: 29/01/2025, Revisado: 22/02/2025, Aceptado: 07/05/2025

Resumen

En este estudio se simulan los cambios morfológicos en el borde del lago asociados a fluctuaciones en los niveles de agua, utilizando el algoritmo MatFlood. Se diseñó un algoritmo de preprocesamiento de imágenes obteniendo un modelo de elevación digital, usado para estimar la extensión y profundidad de las expansiones del lago. MatFlood evaluó la conectividad hidráulica entre distintas zonas del lago, simulando el flujo hídrico en inundaciones, calculando niveles de inundación variables espacialmente (considerando topografía local y dinámica hídrica), e incorporando un factor de reducción para procesos no resueltos (fricción e infiltración). MatFlood se utilizó para evaluar la extensión y profundidad de la inundación en el lago a diferentes niveles de agua, obteniendo datos sobre áreas propensas a inundaciones. La optimización del preprocesamiento permitió resultados más precisos, fundamentales para la toma de decisiones y la simulación de la expansión del lago, identificando zonas vulnerables y ofreciendo una representación más realista de la dinámica de inundación.

Palabras Claves: Expansión, MatFlood, Factor de Reducción, Resolución Espacial, Eficiencia.

Mathematical Modeling of the Expansion of Lake Valencia using the MatFlood Tool.

Abstract

In this study, the morphological changes at the lake's edge associated with fluctuations in water levels are simulated using the MatFlood algorithm. An image preprocessing algorithm was designed to obtain a digital elevation model, used to estimate the extent and depth of the expansions of the lake. MatFlood evaluated the hydraulic connectivity between different areas of the lake, accurately simulating water flow during floods, calculating spatially variable flood levels (considering local topography and hydrodynamics), and incorporating a reduction factor for unresolved processes (friction and infiltration). MatFlood was used to evaluate the extent and depth of flooding in the lake at different water levels, providing data on flood-prone areas. The optimization of preprocessing allowed for more accurate results, essential for decision-making and simulating the lake's expansion, identifying vulnerable zones and offering a more realistic representation of flooding dynamics.

Keywords: Expansion, MatFlood, Reduction Factor, Spatial Resolution, Efficiency.

1. Introducción

Los cuerpos de agua, como lagos y ríos, juegan un papel fundamental en el equilibrio ecológico y en el desarrollo de las sociedades humanas. A nivel global, estos ecosistemas enfrentan desafíos como la contaminación, el cambio climático y la presión por el crecimiento urbano. Estos factores no solo alteran su dinámica natural, sino que también generan impactos sociales, económicos y ambientales en las comunidades circundantes.

El fenómeno de la expansión de los lagos es un ejemplo de estos desafíos. Este fenómeno puede deberse a factores como el cambio en los patrones de precipitación, el aumento de las temperaturas globales y la intervención humana. La expansión de un lago puede traer consecuencias graves, como la modificación de los hábitats naturales, la pérdida de tierras agrícolas y la afectación de zonas urbanas debido a inundaciones.

En el contexto de Venezuela, el Lago de Valencia, también conocido como Lago Tacarigua, es un ejemplo alarmante de los efectos de estos fenómenos. El Lago de Valencia, es el segundo lago más importante de Venezuela. Con una superficie de más de 390 km² y un volumen de 8500 km³, su cota actual ronda los 414 msnm. Su origen geológico se remonta al Terciario y Cuaternario, y actualmente sirve como embalse para ciudades como Maracay y Valencia. Sin embargo, enfrenta problemas críticos como la degradación de la calidad del agua, pérdida de biodiversidad y expansión urbana en sus márgenes.

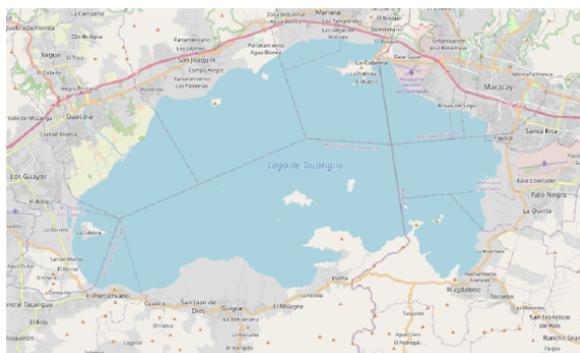


Figura 1. Límites del Lago de Valencia. Fuente: [3]

Las recurrentes inundaciones debido al aumento del nivel del lago amenazan a las poblaciones aledañas, causando pérdidas materiales, riesgos sanitarios y

desplazamiento poblacional. Este estudio busca cuantificar la relación entre la expansión del lago y las inundaciones mediante modelado matemático.

2. Datos

2.1 Modelos Digitales de Elevación (DEM)

Un modelo digital de elevaciones es una estructura numérica de datos que representa la distribución espacial de la altitud de la superficie del terreno.

Se emplearon tres DEM con resoluciones espaciales de 30 m (descargado desde USGS [2]), 12 m y 9 m (descargados desde LandViewer [3]). Estos permiten simular inundaciones con mayor precisión al capturar variaciones topográficas sutiles. Permitiendo de esta manera evaluar el impacto de la resolución espacial en la precisión de las simulaciones, se realizarán simulaciones de expansión utilizando los tres DEM.

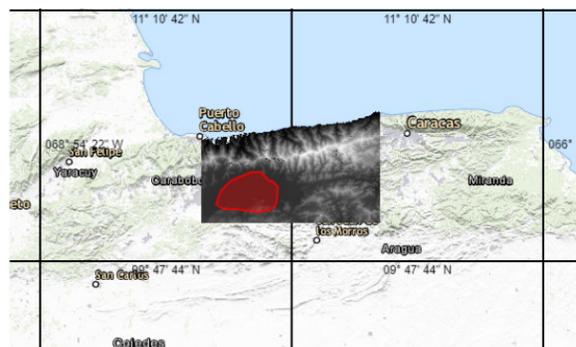


Figura 2. Modelo de Elevación. Fuente: Propia

2.2 Niveles de agua

La serie de datos históricos utilizada en este estudio se obtuvo a partir de una imagen publicada en un artículo de 2019 [4]. La imagen muestra la serie de niveles históricos que comprende el período 1727-2016. Para extraer la información numérica necesaria para el estudio, se llevó a cabo un proceso de digitalización y análisis de la imagen, ajustando los datos de manera que reflejaran con precisión la fuente original.

2.3 Imágenes Satelitales

Las imágenes satelitales son representaciones visuales y digitales de la superficie terrestre capturadas por

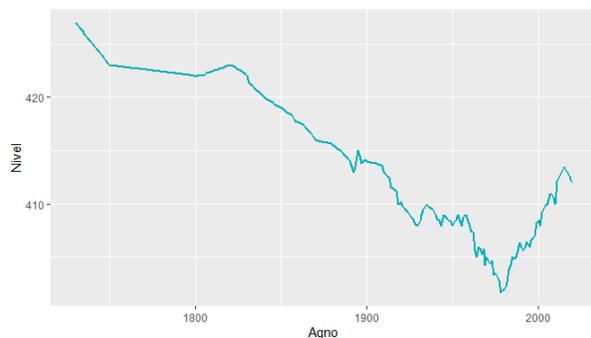


Figura 3. Serie histórica de niveles de agua en el Lago. Fuente: [4]

sensores remotos a bordo de satélites en órbita. Estas imágenes permiten analizar fenómenos geográficos y ambientales con alta precisión espacial y temporal. En el estudio de lagos, las imágenes satelitales son herramientas clave para monitorear su extensión, identificar cambios en su superficie a lo largo del tiempo y evaluar los impactos de fenómenos naturales o actividades humanas.

Como parte de la serie de datos históricos, se obtuvieron imágenes satelitales correspondientes a los años 2005 y 2012 con el objetivo de analizar las variaciones en la extensión del lago durante eventos extremos de precipitación. Estos años fueron seleccionados debido a que presentaron precipitaciones extraordinarias que resultaron en una significativa expansión del cuerpo de agua. Al comparar las simulaciones con las imágenes satelitales se podrá evaluar los cambios en la superficie del lago y su relación con los patrones hidrológicos extremos, proporcionando evidencia visual complementaria para respaldar los hallazgos del estudio.



Figura 4. Imagen satelital Octubre 2005. Fuente: [2]

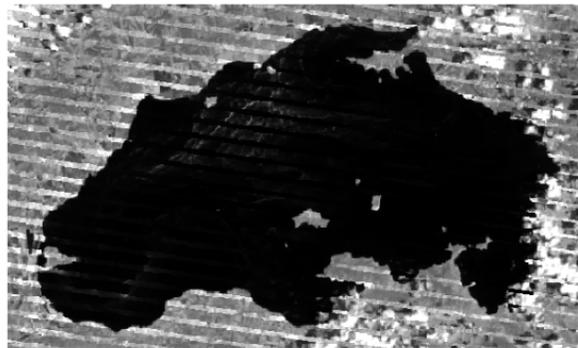


Figura 5. Imagen satelital septiembre 2012. Fuente: [2]

3. Metodología

En esta investigación, se llevaron a cabo simulaciones de los cambios morfológicos en el borde del lago, asociados a las variaciones en los niveles de agua.

A continuación, se describen los pasos implementados:

- Paso 1. Selección de Modelos de Elevación (DEM): Se seleccionaron tres modelos de elevación digital, correspondientes a altitudes de 30 metros, 12 metros y 9 metros, los cuales fueron descargados de la USGS.
- Paso 2. Preprocesamiento del Modelo de Elevación: Utilizando QGIS, se preprocesó el modelo de elevación digital para extraer una ventana que contuviera el lago. En este proceso, se obtuvieron las coordenadas de latitud y longitud de la ventana seleccionada.
- Paso 3. Modificación del Algoritmo MatFlood: Se adaptó el algoritmo MatFlood para que pudiera trabajar con la ventana extraída. Esto implicó cambiar el formato del modelo original de carga (archivo.mat) a un formato compatible (archivo.tif) utilizando la función `imread`.
- Paso 4. Incorporación de Datos de Elevación: Dado que MatFlood está diseñado para simular inundaciones a nivel del mar, se incluyó la elevación aproximada del lago, medida en metros sobre el nivel del mar (msnm.), utilizando información extraída de imágenes de niveles históricos.

Paso 5. Simulación de la Expansión del Lago: Se

utilizó el algoritmo MatFlood para simular la expansión del lago. Para ello, se necesitó el modelo de terreno, un punto específico (latitud, longitud) que identificara el cuerpo de agua y el nivel del lago (msnm.).

Paso 6. Generación de Imágenes de Simulación: El resultado de la simulación consistió en tres imágenes: la primera muestra la cuenca según el modelo de terreno; la segunda representa la simulación de la expansión del lago, asumiendo que esta se produce de manera uniforme; y la tercera imagen muestra la expansión utilizando un factor de reducción.

Paso 7. Procesamiento de Imágenes en QGIS: Las imágenes generadas (segunda y tercera) en formato.tif fueron procesadas en QGIS para asignarles una proyección adecuada. Esto permitió comparar la expansión simulada con la expansión real observada en imágenes satelitales.

Paso 8. Cuantificación de Diferencias: Se extrajeron los polígonos correspondientes al lago tanto de las simulaciones como de las imágenes satelitales. Posteriormente, se realizó una resta entre ambos polígonos para cuantificar correctamente la diferencia entre la expansión simulada y la real.

3.1 Algoritmo MatFlood

MatFlood [1] consta de dos componentes principales. El primer componente mapea la profundidad de la inundación en función del nivel del agua durante un evento de inundación. El segundo componente, el cual es opcional, emplea un factor de reducción para atenuar la extensión y profundidad de la inundación. MatFlood se ilustra con un diagrama de flujo de trabajo en la Figura 6.

MatFlood requiere tres entradas principales:

1. Modelo Digital de Elevación del Terreno (MDT) en formato ráster, incluyendo la elevación (z) y las coordenadas. Los MDE incluyen Modelos Digitales de Superficie (MDS) o Modelos Digitales del Terreno (MDT). Análisis previos han demostrado que la elección entre usar MDS o MDT tiene un impacto considerable en la precisión de los escenarios de

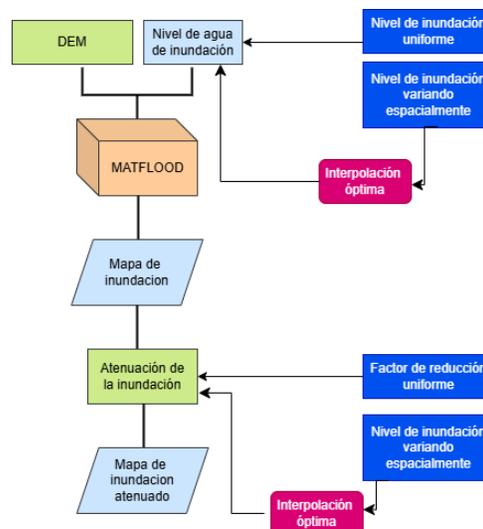


Figura 6. Diagrama de Flujo de MatFlood. Fuente: propia

inundación simulados (Williams y Lück-Vogel, 2020). Como se mencionó anteriormente, se recomienda utilizar un MDE de alta resolución para obtener resultados más precisos. Sin embargo, es importante destacar que MatFlood es compatible con ambos tipos de MDE, pudiendo adaptarse a diferentes resoluciones de datos MDE.

2. Nivel de agua de referencia para la inundación: El nivel del agua de inundación se refiere al nivel vertical del agua que produce la inundación y debe basarse en el mismo datum vertical del marco de referencia geodésico que el MDE.
3. Punto único que identifica el cuerpo de agua principal del que se produce la inundación, denominado en adelante lp (punto de localización). Utilizamos el término “cuerpo de agua principal” porque MatFlood se puede aplicar a cualquier interfaz agua-tierra (lagos, ríos y el océano). A continuación, nos referiremos al cuerpo de agua principal como “mar” para simplificar. El punto de localización, lp , es un punto único de longitud y latitud, indicado por el usuario, y ubicado dentro del mar (el polígono del mar se denomina polígono principal de agua, PPW1 en la Figura 7).

En la Figura 7 se muestra los datos elevación utilizados para ilustrar la metodología. Los colores azules representan el polígono principal de agua o mar, las

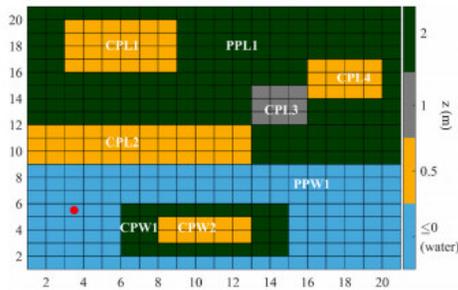


Figura 7. Datos de elevación z (en metros).

Fuente: [1]

áreas verdes son celdas con elevaciones de 2 m y, por lo tanto, están por encima del nivel de inundación (1 m). Las celdas amarillas (0,5 m) y grises (1 m) son áreas por debajo o al mismo nivel que el agua de la inundación, respectivamente, y por lo tanto están sujetas a inundaciones. El punto rojo muestra la ubicación (lp), utilizada para delimitar el polígono del mar. En las siguientes secciones se introduce el algoritmo para simular la inundación (Sección 3.2.1), la descripción de las características adicionales para obtener el nivel del agua de inundación espacialmente variable (Sección 3.2.2) y para atenuar la profundidad y extensión de la inundación mediante la aplicación de un factor de reducción (Sección 3.2.3). La metodología se ilustra considerando una topografía básica z de tierra/mar (Figura 7) y un nivel de agua de inundación de 1 m. La resolución horizontal es de 1 metro cuadrado (cada celda en la Figura 7). Dentro del mar (el polígono principal de agua, PPW1), hay dos polígonos que representan áreas terrestres de diferentes elevaciones (polígono hijo en agua 1 y 2, CPW1 y CPW2). En el área terrestre (PPL1), hay cuatro áreas encapsuladas de elevaciones más bajas (CPL1 a CPL4).

3.1.1 Algoritmo de Inundación

Una primera estimación del área inundada se obtiene restando el nivel del agua de inundación (fwl) de la elevación del terreno (z), obteniendo una cuadrícula de elevación inundada (z_F) de tamaño Yx [1].

$$z_F = z - fwl. \tag{1}$$

Dado que tanto el nivel del agua de inundación (fwl) como el MDE (z) se refieren al mismo datum vertical, los valores positivos en z_F representan áreas

terrestres/secas, mientras que los valores negativos y cero indican agua. En z_F , las elevaciones iguales o inferiores al nivel del agua de inundación están inundadas. En el ejemplo, el polígono del mar ahora incluye PPW1, CPL2, CPL3 y CPL4 (Figura 8). En este paso, la conectividad hidrológica aún no se ha considerado y, por lo tanto, z_F también incluye áreas inundadas no conectadas al mar (CPL1 y CPW2 en la Figura 8). Para tener en cuenta la hidroconectividad, el algoritmo debe identificar y separar el polígono del mar. Para ello, z_F se convierte en una matriz binaria en blanco y negro de unos (agua) y ceros (tierra), z_{BW} :

$$z_{BW} = \begin{cases} 0 & z_F > 0 \\ 1 & z_F \leq 0. \end{cases} \tag{2}$$

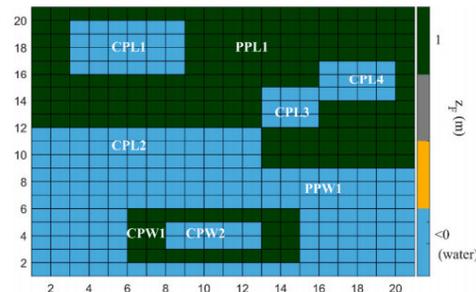


Figura 8. z_F : z inundada antes de considerar la hidroconectividad. Fuente: [1]

En la Figura 8 los colores azules indican áreas por debajo del nivel del agua de inundación y, por lo tanto, inundadas. El mar se ha extendido desde PPW1 para incluir también las áreas CPL2, CPL3 y CPL4. Tenga en cuenta que las conexiones hidrológicas aún no se han tenido en cuenta; por lo tanto, CPW2 y CPL1 están inundadas a pesar de no estar conectadas al mar.

Produciendo una matriz binaria que permite identificar cada polígono de agua y tierra, independientemente de la elevación. Para aislar los polígonos en z_{BW} , modificamos una función existente de procesamiento de imágenes de MATLAB, denominada *bwboundaries* (Gonzalez et al., 2004), que identifica los objetos más externos (“padres”) así como los polígonos sucesivos encerrados por ellos (“hijos”). La función modificada, *bwboundaries_SFM*, permite una forma más rápida de delinear todos los polígonos en z_{BW} . Usamos *bwboundaries_SFM* teniendo en cuenta la conectividad de 8 vecinos, es decir, los píxeles están

conectados si sus bordes o esquinas se tocan en la dirección horizontal, vertical o diagonal.

$$P = bwboundaries_SFM(z_{BW}). \tag{3}$$

La salida, P , es una matriz Yx que contiene un número de identificación (id) para cada polígono detectado (Figura 9). El polígono que incluye el mar y las áreas inundadas, $P_{mwb,Fl}$, lo identifica el algoritmo ya que incorpora lp . La profundidad de las áreas inundadas se calcula como la diferencia entre la topografía (z) y el nivel del agua de inundación (f_{wl}) para aquellas celdas dentro de $P_{mwb,Fl}$:

$$z_{FHC} = \begin{cases} z & id \neq P_{mwb,Fl} \\ z - f_{wl} & id = P_{mwb,Fl} \end{cases} \tag{4}$$

donde z_{FHC} (Topografía inundada teniendo en cuenta la Conectividad Hidrológica) es una matriz Yx donde solo las áreas debajo del nivel del agua de inundación e hidrológicamente conectadas al mar están inundadas (Figura 10).

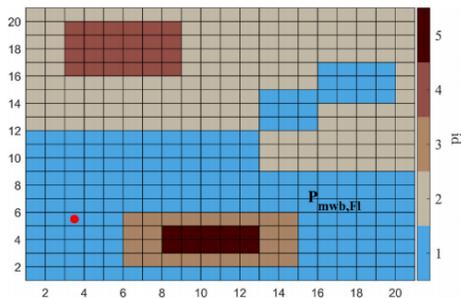


Figura 9. Polígonos (padres e hijos) encontrados en z_{BW} . Fuente: [1]

En la Figura 9 se identificaron cinco polígonos diferentes: los polígonos padre tienen $id = 1, 2$. Dentro de los polígonos padre, dos polígonos hijos ($id = 3, 5$) se encuentran dentro del polígono del mar, $P_{mwb,Fl}$, y un polígono hijo está en el área continental principal ($id = 4$). El punto rojo muestra el punto de ubicación, lp

En la Figura 10 los colores azules son áreas inundadas. Debido a que el polígono CPL3 está originalmente 1 m por encima del suelo (Figura 1), CPL3

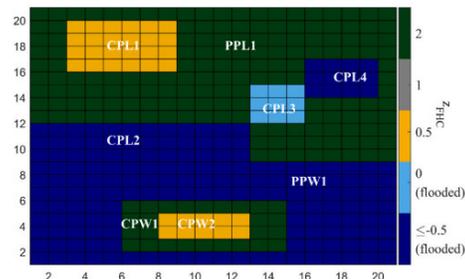


Figura 10. Mapa de inundación teniendo en cuenta la hidroconectividad, z_{FHC} . Fuente: [1]

es 0 m mientras que CPL4 es -0.5 m ya que la topografía de esa área tiene una elevación de 0.5 m. Las áreas con elevaciones por debajo del nivel del agua de inundación (1 m) pero no conectadas al mar (CPL1 y CPW2, en amarillo) no están inundadas, así como las áreas por encima del nivel del agua de inundación (CPW1 y PPL1, en verde). Las áreas no inundadas toman valores z .

3.1.2 Niveles de agua de entrada espacialmente variables

Normalmente, en el modelado de inundaciones estáticas, se asume que el nivel del agua de inundación es espacialmente uniforme en todo el dominio (como se hizo en la Sección 3.1.1). Al hacerlo, se descuida la variabilidad del nivel del agua a lo largo de la costa, lo que potencialmente conduce a una sobreestimación o subestimación de la inundación en algunas áreas. La consideración de niveles de agua espacialmente variables se vuelve particularmente pertinente en la simulación de inundaciones en áreas extensas, donde se anticipa una mayor variabilidad del nivel del agua. Por el contrario, las áreas más pequeñas a lo largo de la costa pueden presentar variaciones menos pronunciadas en los niveles del agua, lo que hace que la distinción entre emplear un nivel de agua de inundación uniforme o variable sea menos significativa.

La variabilidad espacial de los niveles del agua se puede capturar mediante un conjunto de niveles del agua observados/modelados dispersos por el área de estudio. Para simplificar, nos referimos a ellos como estaciones de monitoreo; $W_{i=1}^N = \{w_i, \dots, w_N\}$, siendo N el número de estaciones de monitoreo donde hay información disponible sobre el nivel del agua. Siguiendo a Agulles et al. (2020), aplicamos un método de interpolación óptima para interpolar la infor-

mación del nivel del agua (W) en las estaciones de monitoreo sobre toda el área de estudio. El nivel del agua de inundación espacialmente variable resultante (\widehat{Uwl}) consiste en una combinación lineal de los niveles del agua en las estaciones de monitoreo (W) y un campo de fondo (es decir, una primera suposición), con pesos determinados a partir de las covarianzas de W y el fondo. En nuestro caso, el fondo se determina como el promedio entre los niveles del agua contenidos en W . En otras palabras, \widehat{Uwl} es una cuadrícula bidimensional que contiene anomalías del nivel del agua por encima/por debajo del promedio, donde las celdas tienden a valores similares a la estación de monitoreo más cercana. Las celdas alejadas de la estación de monitoreo tienden al promedio de W .

La Figura 11 muestra el nivel del agua de inundación espacialmente variable, para el ejemplo ilustrativo, obtenido al aplicar el método de interpolación óptimo a cinco niveles de agua individuales; $W = 0.2, 0.7, 1, 0.7, 0.7, 0.5$ en metros. Los colores de la cara del triángulo indican los niveles de agua individuales. Las etiquetas del polígono se incluyen en la Figura 11 como referencia. Tenga en cuenta que la topografía, y por lo tanto la ruta de inundación, no se consideran al calcular el nivel del agua espacialmente variable. La formulación original del algoritmo de interpolación óptima se puede encontrar en otros lugares (por ejemplo, consulte Bretherton et al., 1976; Daley, 1993); aquí, sólo se resumen las características principales del algoritmo.

\widehat{Uwl} , de tamaño Yx , se obtiene mediante:

$$\widehat{Uwl} = BK + S^T \cdot D^{-1} \cdot d \tag{5}$$

donde BK es una matriz Yx que contiene la información de fondo. S es una matriz $M \times N$ que contiene la covarianza de las distancias euclidianas entre el modelo de elevación digital y las estaciones de monitoreo (W), que luego se modelan utilizando una función gaussiana:

$$PS = e^{-d1_{ij}^2/2L^2} \tag{6}$$

$d1_{ij}$ es la distancia entre cada punto j del modelo de elevación digital y cada estación de monitoreo contenida en W .

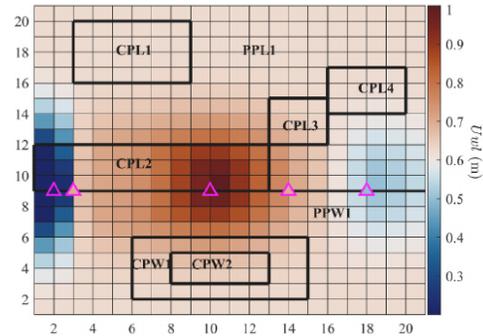


Figura 11. Nivel de inundación espacialmente variable (m). Fuente: [1]

L es la escala de longitud de correlación espacial. Valores menores de L dan como resultado una menor variabilidad espacial de los niveles del agua de inundación, lo que limita la influencia de cada valor individual del nivel del agua a la vecindad de la estación de monitoreo correspondiente. Simultáneamente, valores menores de L preservan mejor la magnitud del nivel del agua en la estación de monitoreo. Por el contrario, valores más altos de L generan una huella espacial más amplia para cada nivel del agua de inundación individual. Sin embargo, los niveles del agua en las estaciones de monitoreo se suavizan ligeramente cuando se usan valores más altos de L . El objetivo de utilizar el método de interpolación óptima es simular un nivel del agua de inundación espacialmente variable que represente con precisión la variabilidad máxima en toda el área de estudio, al tiempo que conserva los datos del nivel del agua de inundación en las estaciones de monitoreo. Por lo tanto, el algoritmo estima el valor óptimo de L como el valor máximo de la relación entre la desviación estándar del nivel del agua de inundación interpolado ($STD(\widehat{Uwl})$) y la diferencia media entre el nivel del agua de la cuadrícula interpolada en las estaciones de monitoreo y el nivel del agua registrado por las estaciones de monitoreo ($\widehat{Uwl} - W$):

$$L = \text{máx} \left(\frac{STD(\widehat{Uwl})}{\widehat{Uwl} - W} \right) \tag{7}$$

Se prueban valores de L de 0.5 a 100 con incrementos de 0.5.

D_0^* es una matriz $N \times N$ que contiene la covarianza de las distancias euclidianas entre W . Nuevamente,

D_0^* se modela usando una función gaussiana:

$$D_0^* = e^{-d2_{ij}^2/2L^2}. \tag{8}$$

En este caso, $d2_{ij}$ es la distancia entre las estaciones de monitoreo i y j . Asumimos que los niveles del agua (de simulaciones u observaciones) son perfectos; sin embargo, los datos de los medidores del nivel del agua y las salidas del modelo tienen incertidumbre. Incluimos un error en la matriz de covarianza D^* . ϵ es una matriz diagonal $N \times N$ que contiene un error de observación de 0.01. La matriz de covarianza D^* se modifica entonces como:

$$D^* = D_0^* + \epsilon \tag{9}$$

d , en la Ecuación (5), es un vector $N \times 1$ que contiene las anomalías entre los niveles del agua en las estaciones de monitoreo (W) y el fondo:

$$d = W - BK. \tag{10}$$

El área inundada por un nivel de agua espacialmente variable ($z_{FHC,V}$) se obtiene aplicando el método descrito en la Sección 3.1.1 utilizando el nivel de agua espacialmente variable en lugar de un nivel de agua de inundación uniforme.

Siguiendo el ejemplo de la Sección 3.1.1, la Figura 10 muestra el nivel del agua de inundación espacialmente variable resultante obtenido de cinco estaciones de monitoreo diferentes, en metros, $W = 0,2,0,7,1,0,7,0,7,0,5$. La Figura 12 muestra el mapa de inundación resultante cuando se usa el nivel de agua de inundación espacialmente variable ($z_{FHC,V}$). Tenga en cuenta que tanto la profundidad como la extensión de la inundación se reducen en comparación con el uso de un nivel de agua de inundación uniforme (z_{FHC}). En comparación con la Figura 10, el uso de una superficie de agua variablemente espacial ha evitado la inundación de la región CPL3 y, por lo tanto, CPL4. Además, las celdas más cercanas a la $W = 0,2$ m (Figura 11), no están inundadas, ya que esas celdas de la cuadrícula tienen una elevación de 0.5 m.

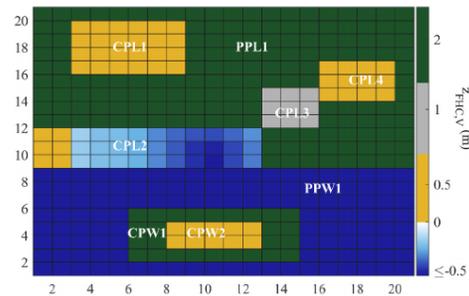


Figura 12. Mapa inundado después de usar un nivel de agua de inundación espacialmente variable .

Fuente: [1]

En la Figura 12 las áreas azules representan celdas inundadas. Las áreas no inundadas toman valores z . Se debe tomar en cuenta que los valores en el mar mantienen la elevación original (Sección 3.1.1).

3.1.3 Aplicación de un factor de reducción

El enfoque estático descuida la hidrodinámica de las inundaciones y, de hecho, asume que todas las regiones potencialmente inundables se inundarán instantáneamente cuando alcance su nivel máximo de agua. Sin embargo, una combinación de controles hidráulicos, resistencia aerodinámica y rugosidad hidráulica impide las corrientes de inundación e impone un lapso de tiempo para que ocurra la inundación en cada punto. Por lo tanto, un enfoque estático puede sobreestimar en gran medida la extensión y la profundidad de la inundación, como se menciona en la introducción.

Para abordar la sobreestimación esperada de la inundación, y siguiendo estudios previos (Ward et al., 2020; Williams y Lück-Vogel, 2020), MatFlood incorpora un factor de reducción que disminuye tanto la profundidad de la inundación (que representa la cantidad de agua en el eje vertical) como la extensión de la inundación (que se refiere a la zona inundada). La atenuación de la inundación depende de la distancia a la costa y de una tasa definida por el usuario, por lo que se puede ajustar a las particularidades del área de estudio. La reducción de la inundación se aplica como paso posterior al procesamiento después de generar el mapa de inundación (Figura 6). Cabe destacar que el uso del factor de reducción es opcional. Además, el factor de reducción puede ser uniforme o variable espacialmente, según los requisitos específicos del análisis. Se proporcionan explicaciones detalladas en

las secciones siguientes.

La metodología consiste en (a) delinear la línea de costa, (b) calcular la distancia de cada punto en los datos de elevación (DEM) a la línea de costa y (c) aplicar la tasa definida por el usuario. En este estudio, la línea de costa se refiere a la intersección del mar y la tierra en condiciones tranquilas, representando el estado previo a la inundación.

Para delinear la línea de costa, utilizamos la función MATLAB `edge`, que toma una imagen binaria como entrada y devuelve una imagen binaria del mismo tamaño, con 1's donde se encuentra el borde y 0's en otros lugares. Tenga en cuenta que la línea de costa se identifica utilizando los datos de elevación iniciales (z) y no el mapa de inundación. La matriz binaria de entrada (z_{BW0}) se define para tomar valores de 1 para las celdas ubicadas en el mar y 0 en caso contrario. Para obtener z_{BW0} , las ecuaciones (1)-(3) se aplican a z utilizando un nivel uniforme de agua de inundación de 0 m. Luego, la Ecuación (4) se modifica a:

$$z_{BW0} = \begin{cases} 0 & id \neq P_{mwb,Fl} \\ 1 & id = P_{mwb,Fl}. \end{cases} \quad (11)$$

Luego, `edge` se aplica a z_{BW0} :

$$SH = edge(z_{BW0}) \quad (12)$$

SH contiene las coordenadas de la línea de costa.

La tasa de reducción de inundación definida por el usuario (RF) se define como la profundidad vertical del agua reducida (v_{rwd}) sobre una distancia horizontal (h_d):

$$RF = v_{rwd}/h_d. \quad (13)$$

Esta tasa luego se aplica al mapa inundado (z_{FHC}) como:

$$z_{F,R} = z_{FHC} + (RF \times D^*) \quad (14)$$

D^* contiene la covarianza de las distancias euclidianas entre cada punto de la cuadrícula computacional

y la línea de costa. Este cálculo puede ser computacionalmente costoso en áreas grandes o cuando se usa una alta resolución espacial. Para mejorar la demanda computacional, las distancias se calculan sobre una cuadrícula computacional de resolución reducida y luego se vuelven a interpolar a la resolución original. Tenga en cuenta que solo las distancias se calculan sobre una cuadrícula de resolución reducida, el mapa inundado conserva su resolución original, por lo que la precisión de los mapas de inundación no se ve afectada. Las áreas que ya no están inundadas debido a la aplicación del factor de reducción toman valores de los datos de elevación iniciales (z):

$$z_{F,R} = \begin{cases} z_{F,R} & z_{F,R} \leq 0 \\ z & z_{F,R} > 0. \end{cases} \quad (15)$$

Por lo tanto, según la Ecuación (14), la cantidad de inundación atenuada por el factor de reducción depende de la distancia a la costa y la profundidad de la inundación, que en última instancia está determinada por la elevación topográfica. En algunos casos, la conectividad hidráulica podría no mantenerse después de aplicar el factor de reducción. Se refuerza la conectividad hidrológica ejecutando nuevamente el algoritmo de inundación estático (Sección 3.1.1) usando un nivel de agua de inundación de 0 m. Al hacerlo, obtenemos la profundidad y extensión de la inundación atenuada por el factor de reducción y teniendo en cuenta la hidroconectividad (denominada $z_{FHC,R}$). Tenga en cuenta que, en este caso, hemos aplicado el factor de reducción al mapa inundado por un nivel uniforme de agua de inundación (z_{FHC}), ya que hemos demostrado que el nivel de agua de inundación espacialmente variable ya reduce la extensión y profundidad de la inundación. Sin embargo, se puede usar el mapa inundado por un nivel de inundación espacialmente variable.

Siguiendo el método de interpolación óptima utilizado para obtener niveles de inundación espacialmente variables (Sección 3.1.2), el algoritmo permite calcular un factor de reducción espacialmente variable dado un conjunto de factores de reducción distribuidos por el área de estudio. El enfoque sigue los mismos pasos que en la Sección 3.1.2 utilizando un conjunto de tasas de reducción de inundación definidas por el usuario en lugar de niveles de inundación.

A fines de demostración, hemos empleado una tasa de 0.0417 al área inundada previamente simulada. Tenga en cuenta que este valor se elige para ilustrar la metodología pero no tiene ningún significado físico. En este ejemplo, 0.0417 reduce la profundidad de la inundación en 0.5 m cada 12 m en horizontal. La Figura 8 muestra los resultados después de tener en cuenta la conectividad del agua. La profundidad y extensión de la inundación se han atenuado como se puede ver al comparar el mapa de inundación antes (Figura 5) y después (Figura 8) de aplicar el factor de reducción: CPL3 y CPL4 ya no están inundadas. Además, la profundidad de la inundación se redujo en 0.5 m en la zona terrestre en CPL2.

3.2 Serie temporal de niveles

La serie de niveles anuales del Lago de Valencia, que recaba información de datos históricos desde el año 1730 hasta el año 2020, fue reconstruida a partir de la figura 3 proporcionada por [4]. En la figura 3 destacan las siguientes características sobre la serie de niveles:

- Nivel mínimo 401.7 (año 1978)
- Nivel máximo 427 (año 1726)
- Se nota una tendencia general a la disminución del nivel del lago hasta aproximadamente el año 1978
- A partir de 1978 se aprecia una tendencia al aumento del nivel del lago.

Inicialmente para reconstruir la serie, se emplearon técnicas manuales para extraer los valores de nivel visibles en la gráfica, digitalizando puntos clave y registrando sus correspondientes años y niveles. Debido a la naturaleza incompleta de la información visual, se recurrió a algoritmos de interpolación y extrapolación, se estimaron los niveles anuales en los periodos donde la información era ausente o ambigua, asegurando así una serie temporal continua y coherente.

En la Tabla 1 se muestran los niveles de algunos años seleccionados de la serie reconstruida. En rojo se resalta el nivel más bajo registrado hasta el momento del lago.

Esta serie de datos de niveles se utilizará en conjunto con MatFlood para realizar las estimaciones de expansión del lago.

Año	Nivel	Año	Nivel
1973	404.70	2009	410.54
1974	403.40	2010	410.00
1975	403.50	2011	412.19
1976	403.20	2012	412.52
1977	402.90	2013	412.84
1978	401.70	2014	413.17
1979	401.90	2015	413.50
1980	402.00	2016	413.20
1981	402.33	2017	412.90
1982	402.66	2018	412.60
1983	403.90	2019	412.30
1984	404.31	2020	412.00

Tabla 1. Serie de niveles históricos del lago

3.3 Representación de la cuenca

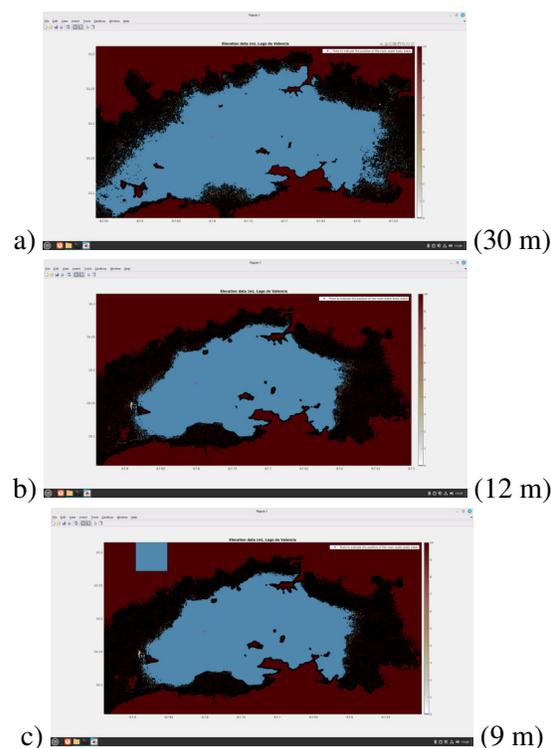


Figura 13. Representación topográfica del lago usando diferentes resoluciones. Fuente: Propia

En la Figura 13 a) se observa una representación general de la cuenca utilizando un DEM con resolución de 30 m. La forma del lago es reconocible, pero los detalles finos de la costa y la topografía circundante

son limitados. La resolución de 30 metros significa que cada píxel representa un área de 30x30 metros en el terreno. Esto puede suavizar los detalles y no capturar características pequeñas pero importantes. El algoritmo no logra captar detalles importantes del borde con esta resolución.

En la Figura 13 b) se tiene la representación topográfica del lago con resolución 12 m. Se aprecia un mayor detalle en la forma de la costa y la topografía. Las islas dentro del lago y las variaciones en la elevación son más visibles.

En la Figura 13 c) se observa la representación topográfica del lago con resolución 9 m. Se observa buen nivel de detalle, sin embargo a simple vista pareciera ser tan informativa como la de 12 m. Un detalle a resaltar es que la costa del lago muestra una mayor rugosidad y las variaciones en la topografía son más pronunciadas. Las islas y otros accidentes geográficos se definen con mayor claridad.

Observando la Figura 13 se puede afirmar que a medida que aumenta la resolución del DEM (de 30 m a 12 m y 9 m), la representación de la cuenca del Lago de Valencia se vuelve más detallada y precisa. Esto permite capturar características topográficas más finas y realizar análisis más detallados. esta información es de gran importancia al momento de seleccionar el DEM adecuado para las simulaciones.

3.4 Análisis del impacto de la Resolución del DEM

En la figura 14 se muestra tres simulaciones de la expansión del Lago de Valencia, cada una generada utilizando un DEM con diferente resolución espacial: 30 metros (a), 12 metros (b) y 9 metros (c). A partir de la imagen se puede visualizar cómo la resolución del DEM influye en la precisión de la simulación de inundación. La simulación de la expansión ha sido ubicada encima de una imagen actual del lago.

La simulación usando un DEM a 30 m se aleja significativamente del borde actual, resultando de esta simulación que desaparezcan bajo el agua localidades enteras como Barrio Brisas del Lago, Santa Rita y Paraparal entre otros, en la zona este del lago, hacia el estado Aragua. La simulación claramente sobreestima la inundación.

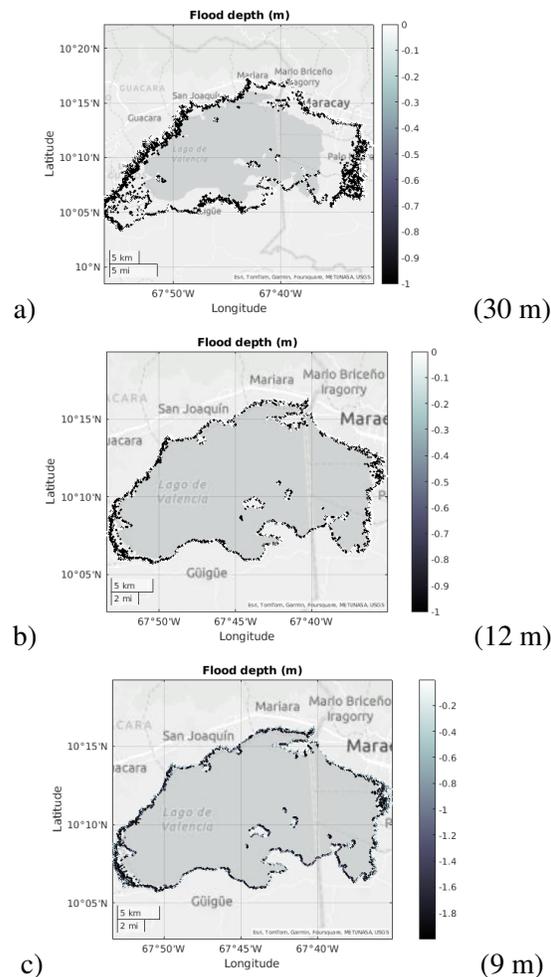


Figura 14. Simulación de expansión. Fuente Propia

La simulación a 12 m se ajusta mucho mejor al borde actual del lago y se evidencia que las zonas inundadas se corresponde con aquellas zonas que históricamente han sido afectadas por la expansión del lago, sin embargo la expansión del lago aún se ve sobre estimada en las zonas este y oeste .

La simulación a 9 m se ajusta aun mejor al borde del lago y la expansión del mismo no se nota tan agresiva como en las simulaciones anteriores, esto se evidencia en las zonas Este (Aragua) y Oeste (Carabobo) del lago.

A pesar de que el uso de un DEM de alta resolución involucra una cantidad considerable de cálculos, la expansión del lago se ve mejor reflejada en con un DEM de 9 m que con los de 12 m o 30 m.

En la figura 15 se han realizado acercamientos a dos áreas específicas para comparar el nivel de detalle y

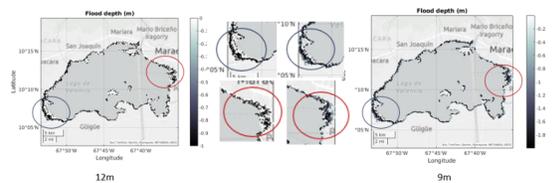


Figura 15. Diferencias entre simulaciones. Fuente: Propia

las diferencias entre las simulaciones. Se observan diferencias significativas en la extensión de la inundación simulada, especialmente al contrastar el Modelo Digital de Elevación (DEM) de 12 metros con el de 9 metros. Un análisis detallado de los acercamientos permite identificar una sobreestimación de la inundación más pronunciada en la simulación realizada con el DEM de 12 metros. Por lo antes descrito se decidió trabajar con el modelo de 9 metros, ya que muestra menor sobre estimación de la inundación en las áreas susceptibles a ser inundadas.

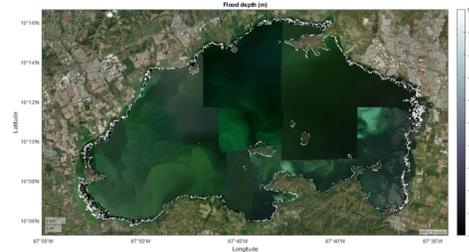
3.5 Simulaciones de expansión y comparación con eventos extremos

Las constantes crecidas desde el año 2005 aumentaron el nivel del lago y superaron las capacidades de evaporación y purificación de sus aguas. Dichas crecidas se debieron a los transvases de agua de la cuenca del Orinoco a la cuenca del Lago de Valencia para el consumo de agua potable de la densa población de la mayor parte de los estados Aragua y Carabobo (por ejemplo, los embalses de Cachinche y La Balsa sobre el río Pao), que han contribuido al aumento de nivel del lago, que recoge a su vez las aguas servidas a través de numerosos ríos como el Cabriales, Güey, Aragua y otros.

Por esta razón se seleccionó el año 2005 para realizar una simulación de la expansión del lago y compararla con la imagen satelital del lago correspondiente al mes de octubre, obtenida desde [2]. Para la simulación se utilizó el nivel de agua de 410 msnm y MatFlood. La imágenes se muestran en la figura 16.

En la imagen 16 se observa la expansión superpuesta sobre una imagen satelital actual del lago, en ella resalta el hecho de que en el año 2005, la isla de la culebra aún no era una isla, esto se puede ver en la parte inferior izquierda de la simulación.

Para evaluar las diferencias entre la expansión simu-



Simulación 2005 nivel 410 msnm.



Imagen Satelital Octubre 2005.

Figura 16. Simulación vs Imagen satelital año 2005. Fuente: Propia

lada y la expansión histórica del Lago de Valencia, se procesaron ambas imágenes satelitales en el software QGIS [5]. Inicialmente, las imágenes fueron alineadas dentro de una ventana geográfica delimitada por las coordenadas de longitud mínima (-67.9) y máxima (-67.5), y latitud mínima (10.05) y máxima (10.31), asegurando así una superposición espacial precisa. Posteriormente, se procedió a delimitar manualmente los bordes de la expansión simulada y la expansión histórica observada en la imagen satelital. Finalmente, mediante las herramientas de análisis espacial de QGIS, se realizó la operación de resta entre las áreas delimitadas para calcular el área de la diferencia, cuantificando así la discrepancia entre la simulación y la realidad observada. El resultado se muestra en la figura 17 en la que se observa que la simulación sobre estima la expansión real (area rosada).

Sobre estimación 2005: 15 km^2

$$(1 - \text{Área inundada} / \text{Área simulada}) * 100 = (1 - (389/374)) * 100 \approx 4\%$$

$$\text{Perímetro del lago simulado} - \text{Perímetro inundado} = 159,67 - 127 = 32,67 \text{ km}$$

El segundo año que se consideró para realizar la expansión y comparar con la imagen satelital fue 2012, debido a que en este año las precipitaciones afectaron

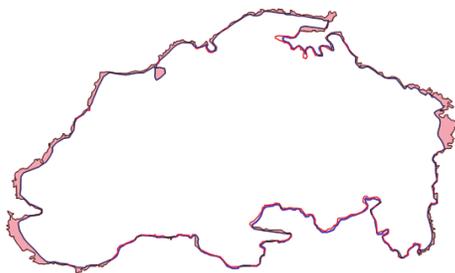
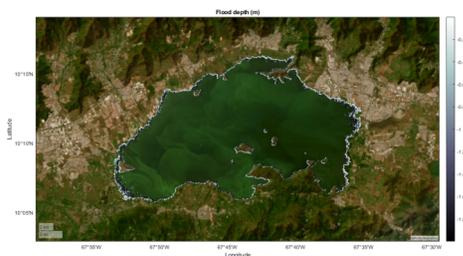


Figura 17. Diferencias entre simulación y expansión real año 2005. Fuente: Propia

el nivel del lago.

“En el año 2012 se produjo una emergencia, cuando el Lago de Valencia experimentó niveles importantes de crecimiento y se elevó a 413,36 msnm la cota máxima de seguridad. [6]”

“En 2012, las lluvias y el desnivel entre los caseríos y el lago, provocaron inundaciones y filtraciones de estas aguas contaminadas que afectaron a más de 8.500 personas que terminaron en refugios improvisados en unidades militares de Aragua, en hoteles, en escuelas y en otras instituciones educativas. Muchas familias pasaron hasta 7 años en los refugios, unas pocas fueron indemnizadas con viviendas y el barrio El Aguacatal fue declarado refugio abierto” [6].



Simulación 2012 nivel 412.5 msnm.

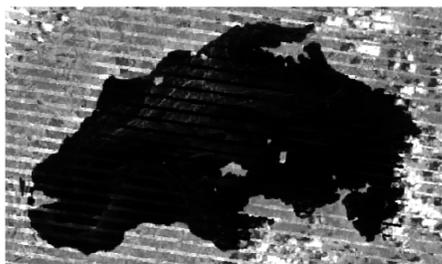


Imagen Satelital Octubre 2012.

Figura 18. Simulación vs Imagen satelital año 2012. Fuente: Propia

Se repitió el proceso realizado con la simulación de



Figura 19. Diferencias entre simulación y expansión real año 2012. Fuente: Propia

2005 para evaluar las diferencias entre la expansión simulada y la expansión histórica del Lago de Valencia en 2012, se procesaron ambas imágenes satelitales en el software QGIS. se alinearon las imágenes dentro de una ventana geográfica delimitada por las coordenadas de longitud mínima (-67.9) y máxima (-67.5), y latitud mínima (10.05) y máxima (10.31), se procedió a delimitar manualmente los bordes de la expansión simulada y la expansión histórica observada en la imagen satelital. Finalmente, mediante las herramientas de análisis espacial de QGIS, se realizó la operación de resta entre las áreas delimitadas para calcular el área de la diferencia, cuantificando así la discrepancia entre la simulación y la realidad observada. El resultado se muestra en la Figura 19 en la que se observa nuevamente que la simulación sobreestima la expansión real (área verde).

Sobre estimación 2012: Sobreestimación 13 km^2
 $(1 - \frac{\text{Área inundada}}{\text{Área simulada}}) * 100 =$
 $(1 - (419/406)) * 100 \approx 3\%$
 Perímetro del lago simulado-Perímetro inundado = $211 - 46,7 = 64,3 \text{ km}$

En la simulación de 2012, se observa siguiendo la simulación de la expansión, que MatFlood ya considera al área de la culebra como una isla, cuando en realidad en 2012 no se había sido rodeada la zona por el agua.

Dado que en ambos años se observa una sobreestimación de la inundación se considera necesario el uso del factor de reducción de Matflood. De esta manera se disminuirá este efecto logrando así que las simulaciones se ajusten más a la realidad observada, permitiendo de esta manera realizar simulaciones más precisas y permitiendo la correcta identificación de las áreas propensas a sufrir por la expansión del

lago.

4. Conclusiones

En este trabajo se llevaron a cabo simulaciones de los cambios morfológicos en el borde del lago, asociados a las variaciones en los niveles del agua.

- Se utilizaron tres Modelos Digitales de Elevación con distintas resoluciones, 30 m, 12 m y 9 m, determinando que el DEM de 9 m proporciona una representación mucho más precisa de la expansión del lago en comparación con los DEM de 30 m y 12 m.
- Se modeló la expansión del Lago de Valencia combinando la herramienta MatFlood junto con un DEM de alta resolución (9 metros) y un nivel de agua en el lago, proporcionando resultados que se ajustan a la realidad observada y permitiendo la identificación de las áreas susceptibles a inundaciones.
- La comparación directa entre las simulaciones y las imágenes satelitales procesadas en QGIS permitió cuantificar la discrepancia entre la expansión simulada y la expansión histórica. Este análisis reveló que el DEM de 9 metros provee una mejor representación de la realidad y se redujo la sobreestimación.
- Surge la necesidad de determinar y aplicar un factor de reducción en las simulaciones para ajustar mejor los resultados a la realidad observada. Al calibrar el modelo con el factor de reducción correcto, se logrará minimizar la sobreestimación de la inundación y obtener una representación más precisa de la extensión del agua, lo que subraya la importancia de la calibración en la modelización de inundaciones.

Agradecimientos

Esta investigación ha sido financiada por el FONACIT bajo la subvención 2024PGP142.

Referencias

- [1] Enriquez, A. (2023). "MatFlood: An efficient algorithm for mapping flood extent and depth". *Environmental Modelling and Software*. Vol. 169, N°105829.
- [2] U.S. Geological Survey. *Earth Explorer*, <https://earthexplorer.usgs.gov/>
- [3] EOS Data Analytics. *Satellite Images on EOSDA LandViewer*. <https://eos.com/landviewer/>
- [4] Morasutti, G. (2019). "Proyecto Integral de Soluciones Definitivas del Lago de Valencia y Obras Complementarias". <https://grupoorinoco.org/wp-content/uploads/2019/03/presentaciocc81n-ca-ceiedc.pdf>
- [5] Sherman, Gary E and Sutton, Tim and Blazek, Radim and Luthman, Lars. (2004). "Quantum gis user guide"
- [6] Díaz Gregoria. (2017). "Lago de Valencia amenaza 17 comunidades al sur de Maracay". *Crónica Uno*. <https://goo.su/OBkNd>



Significancia estadística de variables morfométricas en el Lago de Valencia y sus relaciones con los cambios en el nivel

Romero M. Mirba J.^{1,2*}, Rodríguez Luis A.^{1,2}

¹Departamento de Matemática, Facultad de Ciencias y Tecnología, Universidad de Carabobo. Naganagua, Edo. Carabobo-Venezuela

²Centro Multidisciplinario de Visualización y Cómputo Científico (CEMVICC)

*Autor de correspondencia: mjromero@uc.edu.ve

Recibido: 29/01/2025, Revisado: 30/03/2025, Aceptado: 08/05/2025

Resumen

Este estudio analiza la significancia estadística de variables morfométricas en el Lago de Valencia y su relación con cambios en el nivel del agua entre 1980 y 2020. Se utilizaron datos morfométricos a través de teledetección (imágenes satelitales y cartografía histórica), incluyendo el área del lago y el nivel del agua, basados en un estudio previo de expansión. Se realizaron análisis estadísticos para identificar variaciones en la morfología del lago y su relación con cambios en el nivel del agua. Los resultados revelan tendencias significativas, con aumentos en el área del lago y fluctuaciones en el nivel del agua. Este estudio destaca la importancia de modelar matemáticamente la geometría del borde del lago para comprender completamente su dinámica y ofrece información valiosa para la gestión sostenible del Lago de Valencia.

Palabras Claves: Lago de Valencia, morfometría, nivel, significancia estadística, inundaciones.

Statistical significance of morphometric variables in Lake Valencia and their relationships with level changes

Abstract

This study analyzes the statistical significance of morphometric variables in Lake Valencia and their relationship with changes in water level from 1980 to 2020. Morphometric data obtained through remote sensing (satellite images and historical cartography) were utilized, including lake area and water level, based on a previous lake expansion study. Statistical analyses were performed to identify variations in lake morphology and their relationship with water level changes. The results reveal significant trends, with increases in lake area and fluctuations in water level. This study highlights the importance of mathematically modeling the lake's edge geometry to fully understand its dynamics and provides valuable information for the sustainable management of Lake Valencia.

Keywords: Lake Valencia, morphometry, level, statistical significance, floods.

1. Introducción

Los lagos, elementos cruciales de la hidrósfera y reguladores naturales de la escorrentía fluvial, no solo estabilizan el equilibrio ecológico, sino que también constituyen valiosos indicadores de las dinámicas del cambio climático. De allí su importancia a nivel global, ya que proveen, desde el suministro de agua dulce hasta la regulación del clima y la conservación de la biodiversidad. Sin embargo, estos ecosistemas son altamente vulnerables a los cambios ambientales, tanto naturales como antropogénicos, que pueden alterar su estructura, dinámica y funcionamiento. En la mayoría de los estudios existentes, se utilizan imágenes de teledetección para cuantificar las características morfológicas de los lagos [5].

La caracterización morfométrica de un cuerpo de agua constituye el punto de partida esencial en investigaciones limnológicas. Este análisis permite establecer de manera metódica la ubicación de las estaciones de muestreo y proporciona una comprensión integral del funcionamiento del sistema. Además, al considerar las áreas de interfase agua-aire y agua-sedimento, se pueden obtener datos cruciales sobre los procesos ecológicos y biogeoquímicos que influyen en la dinámica del cuerpo de agua [4].

La morfología estudia diferentes características de la forma en los cuerpos de agua, las cuales se cuantifican a través de indicadores como el área del lago, la longitud de la línea de costa del lago, la relación del área perimetral, la longitud del eje más largo, el ancho máximo, el índice de desarrollo de la línea de costa, la complejidad de la forma del lago y la relación de compacidad. Con base en datos de imágenes satelitales, en la actualidad, se han logrado avances en el estudio de las características morfológicas de los lagos. Para el Lago de Valencia, en [3] se hace un estudio de 42 años sobre la expansión del lago obteniendo los diferentes indicadores morfológicos desde imágenes satelitales a lo largo del período de estudio.

El Lago de Valencia, es el segundo lago más importante de Venezuela, se localiza en una fosa tectónica conocida como “Graben de Valencia” y ha experimentado cambios significativos en su forma y tamaño en las últimas décadas. Para comprender mejor estos cambios, este estudio analiza la significancia estadística

de variables morfométricas obtenidas por [3], tales como el área, el perímetro, la longitud, el ancho, el índice de desarrollo de costa y el nivel del agua.

Sin embargo, a pesar de que los indicadores morfológicos permiten cuantificar en cierta medida los cambios, se necesitan construir modelos matemáticos que permitan entender los cambios dinámicos de la geometría del borde de la cuenca.

2. Metodología

2.1 Área de estudio

El Lago de Valencia o Lago de Tacarigua es el segundo lago más importante de Venezuela, se encuentra ubicado en una fosa tectónica conocida como “Graben de Valencia” ver [2] en la región centro norte de Venezuela.

Es una cuenca de tipo endorreica y cubre 3.150 km^2 (0,3% del país), es el fenómeno hidrográfico más importante del centro del país. La cuenca del Lago de Valencia es también conocida popularmente como los «Valles de Aragua». Próximo a sus riberas se ubican las capitales de los estados Carabobo (Valencia) y Aragua (Maracay), y otros centros urbanos como Guacara, San Joaquín, Mariara, Güigüe y Palo Negro. Se encuentra ubicada entre las coordenadas geográficas 67° 07' y 68° 12' de longitud Oeste y 09° 57' y 10° 26' de latitud Norte, limitada por el Norte con la Cuenca del Mar Caribe, por el Sur con las Cuencas de los ríos Guárico y Pao, por el Este con la Cuenca del río Tuy y por el Oeste por la Cuenca del río Pao.

A continuación damos un conjunto de definiciones de las variables morfométricas, ver [8], [7].

2.2 Definición de las variables morfométricas básicas

Contorno de un lago. El contorno de un lago se define operativamente utilizando la línea en el mapa, o en la batimetría como representación de la costa o límite del lago. En la morfometría clásica el contorno así definido se registra por medio de sus coordenadas cartesianas, sobre las cuales se toman una serie de

medidas en forma de dimensiones y distancias, así como combinaciones de las misma en índices.

Sin embargo, debido a la variabilidad del nivel del agua, especialmente en lagos con pendientes litorales suaves (es decir, las orillas o costas tienen una inclinación gradual y poco pronunciada), este contorno puede expandirse o contraerse, convirtiéndose en una franja más o menos extensa y dinámica.

Morfometría. La morfometría de un lago se refiere a las características físicas de la cuenca del lago que son necesarias para determinar su forma. Idealmente, la caracterización morfométrica de un cuerpo de agua debe ser el punto de partida de las investigaciones limnológicas, ya que a partir de ésta se puede determinar la ubicación de las estaciones de recolección de manera metódica. La morfometría del Lago de Valencia se define por el estudio de sus parámetros básicos, tales como el área, perímetro, longitud máxima, ancho máximo, el índice de desarrollo de costa. Estos parámetros se calculan a partir de mapas topográficos e imágenes satelitales LANDSAT. En [3] se muestra que el lago ha crecido de manera no uniforme, influenciado por la topografía circundante.

Algunas de las variables morfométricas más relevantes para el estudio del Lago de Valencia son:

Área de agua. Permite entender la extensión del cuerpo de agua y su evolución a lo largo del tiempo.

Perímetro. Indica cambios significativos en la forma y extensión del lago.

Las medidas del área y el perímetro han de ser lo más precisas posibles.

Longitud máxima. Refleja la variación en la extensión máxima del lago a lo largo de los años.

Determinar la longitud máxima de un lago, como el Lago de Valencia, a partir de una imagen satelital, no es una tarea trivial. La forma irregular de los lagos hace que sea necesario evaluar la distancia entre numerosos pares de puntos para identificar aquellos que definen la longitud máxima real. Este mismo desafío se presenta en el análisis de imágenes al medir la longitud máxima de cualquier objeto, ya que el cálculo implica comparar una gran cantidad de distancias hasta encontrar el valor máximo.

Ancho máximo. Proporciona información sobre la

anchura máxima del lago en diferentes momentos, lo que puede indicar cambios en la forma y extensión del cuerpo de agua.

Nivel medio del lago. Permite evaluar la estabilidad del nivel del agua a lo largo del tiempo, a pesar de los cambios en otras métricas.

Índice de desarrollo de costa. Es un indicador que se utiliza para evaluar la forma y el desarrollo de la línea costera del lago.

El índice de desarrollo de costa se calcula mediante la relación entre el perímetro del lago y el área que ocupa:

$$Dc = \frac{P}{2\sqrt{\pi A}}$$

donde,

P es el perímetro del lago.

A es el área total de la superficie del lago.

- Si $Dc = 1$, implica que el cuerpo de agua tiene forma circular.
- Si $Dc < 1$, indica una costa más irregular y fragmentada.
- Si $Dc > 1$, sugiere una costa más regular y alargada.

2.3 Datos

Este estudio se basa en datos morfométricos obtenidos a partir del artículo “Análisis de la Expansión del Lago de Valencia (1978-2020)” de Fernández González (2020) [3]. En este trabajo, el autor proporciona un conjunto completo de datos que incluye indicadores morfométricos clave, recopilados mediante imágenes satelitales y cartografía histórica a lo largo del período de estudio mencionado.

En la Tabla 1 se muestran los valores de los parámetros morfométricos básicos del Lago de Valencia. La relevancia de los datos radica en su potencial para identificar patrones temporales, evaluar la estabilidad del ecosistema acuático y, posiblemente, predecir futuros cambios en el lago.

2.4 Modelaje estadístico

Para describir y modelar los datos de las variables morfométricas y su relación con los cambios en el

Año	Área agua (Km ²)	Área islas (Km ²)	Área total (Km ²)	Perímetro (Km)	Longitud máxima (Km)	Ancho máximo (Km)	Dc	Nivel (m.s.n.m)
1978	322,0	3,5	325,5	109,8	29,0	15,7	1,72	407
1985	342,8	3,2	346,0	112,7	29,7	16,0	1,71	407
1986	342,9	3,2	346,1	117,4	29,8	15,9	1,78	407
1987	343,2	3,2	346,4	117,8	29,9	15,9	1,79	407
1988	345,8	2,9	348,7	118,9	29,9	16,0	1,8	407
1990	348,2	3,1	351,3	121,0	30,1	16,4	1,82	407
1998	362,0	2,9	364,9	134,2	31,0	16,8	1,98	407
1999	366,7	2,8	369,5	135,8	31,3	16,8	1,99	407
2000	370,9	2,9	373,7	134,1	31,7	17,0	1,96	411
2001	372,8	2,8	375,5	134,0	31,7	17,0	1,95	411
2002	373,4	2,9	376,2	134,0	31,8	17,1	1,95	411
2003	373,4	2,7	376,1	135,1	31,8	17,0	1,97	411
2014	407,5	4,6	412,2	139,9	33,8	17,1	1,94	416
2015	408,1	4,6	412,7	139,9	33,8	17,2	1,94	416
2016	406,8	4,6	411,4	139,1	33,7	17,2	1,93	416
2017	408,1	4,6	412,7	137,3	33,8	17,2	1,91	416
2018	411,3	4,5	415,8	137,8	34,0	17,2	1,91	416
2019	412,9	4,3	417,2	137,6	34,0	17,3	1,9	417
2020	413,9	4,0	418,0	136,7	33,9	17,3	1,89	417

Tabla 1. Parámetros morfométricos básicos. Fuente: Fernández G, Gabriel. [3]

nivel del agua en el Lago de Valencia, se utilizaron las siguientes técnicas:

2.4.1 Estadística descriptiva

Para describir los datos, se calcularon medidas de tendencia central y dispersión, entre las cuales, se tiene el promedio, el mínimo, el máximo, los cuartiles (mediana, Q_1 , Q_3) y la desviación estandar. En la Tabla 2 se muestran los cálculos de las cantidades y en la Figura 1 las tendencias de las variables en función del tiempo.

2.4.2 Estadística inferencial

Para evaluar las relaciones entre variables, a un nivel de significancia del 5%, se calcula la correlación entre las variables, esta nos indica las posibles relaciones lineales entre variables, ver la Figura 2.

Se empleó el modelo de regresión lineal para evaluar la significancia estadística y predecir el nivel del lago a través de las variables morfométricas. Este modelo

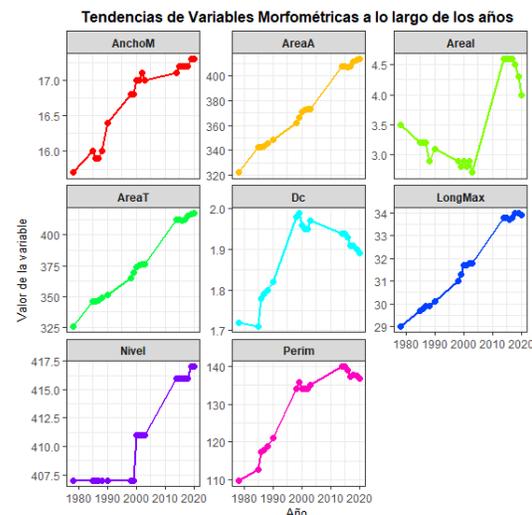


Figura 1. Tendencia de las variables a lo largo de los años. Fuente: propia.

está descrito por la siguiente ecuación

$$\text{Nivel} = \beta_0 + \beta_1 \text{AreaA} + \beta_2 \text{AreaI} + \beta_3 \text{Perim} + \beta_4 \text{LongMax} + \beta_5 \text{AnchoM} + \beta_6 \text{Dc} + \varepsilon$$

donde,

Param	Mín	Q_1	\bar{X}	Med	D.e	Q_3	Máx
AreaA	322.0	347.0	375.4	372.8	30.042	407.8	413.9
AreaI	2.700	2.900	3.542	3.200	0.752	4.400	4.600
AreaT	325.5	350.0	378.9	375.5	30.62	412.4	418.0
Perim	109.8	120.0	130.2	134.2	10.11	137.4	139.9
LongMax	29.00	30.00	31.83	31.70	1.778	33.80	34.00
AnchoM	15.70	16.20	16.74	17.00	0.56	17.20	17.30
Nivel	402.0	404.8	408.1	408.2	3.75	411.7	413.5

Tabla 2. Resumen estadísticos de los parámetros morfométricos básicos del Lago de Valencia.

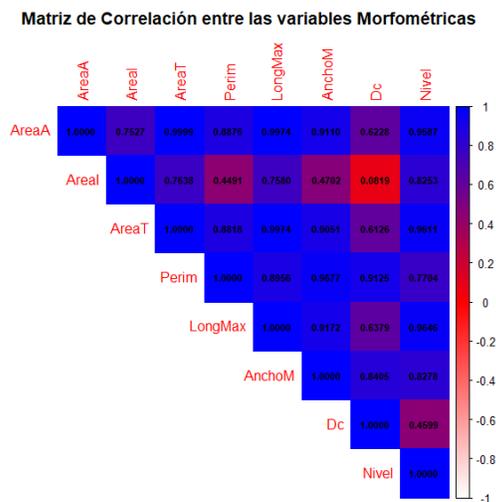


Figura 2. Matriz de correlación entre las variables morfométricas. Fuente: propia.

Nivel: es la variable dependiente (nivel del lago).

AreaA, AreaI, Perim, LongMax, AnchoM y Dc: son las variables independientes.

$\beta_0, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4, \beta_5, \beta_6$: son los coeficientes de regresión.

ε : es el término de error.

Se utilizó el Criterio de Información de Akaike (AIC) para seleccionar el mejor modelo para predecir el nivel del lago, es decir, el modelo que pierda la menor cantidad de información posible. El criterio de información de Akaike (An Information Criterion, AIC) proporciona un método simple y objetivo que selecciona el modelo más adecuado para caracterizar los datos experimentales. Este criterio, que se enmarca en el campo de la teoría de la información, se define como:

$$AIC = -2\log(L(\hat{\theta})) + 2K$$

donde $\log(L(\hat{\theta}))$ es el logaritmo de máxima verosimilitud, que permite determinar los valores de los parámetros libres de un modelo estadístico y K es el número de parámetros libres del modelo.

Un valor individual de AIC no es interpretable por sí solo, y los valores AIC sólo tienen sentido cuando se realizan comparaciones utilizando los mismos datos experimentales [6]. El menor valor de AIC indica que o bien el modelo se ajusta mejor a los datos experimentales o que es menos complejo.

Se realizaron gráficos de diagnóstico de residuos para evaluar la adecuación del modelo y verificar los supuestos de la regresión lineal (normalidad, homocedasticidad, independencia).

2.4.3 Modelos de series de tiempo

Para analizar los cambios en el nivel del lago a lo largo del tiempo. Se evalúa la estacionaridad de la serie de tiempo por medio de la prueba de Dickey-Fuller aumentada, ver Figura 3. Luego se ajustaron modelos ARIMA(p, d, q) (por sus siglas en inglés, AutoRegressive Integrated Moving Average), que deriva de sus tres componentes AR (Autoregresivo), I(Integrado) y MA (Medias Móviles) ver [9], para modelar los cambios en el nivel del lago. Para identificar los parámetros apropiados de los modelos ARIMA, se realizaron análisis de autocorrelación utilizando las funciones de autocorrelación (ACF) y autocorrelación parcial (PACF), ver Figura 4. Una vez ajustados los modelos se determina la bondad del ajuste a través de pruebas de Ljung-Box que contrastan la hipótesis de independencia de los residuos de los modelos ARIMA.

Modelo ARIMA(p, d, q) para el nivel del lago:

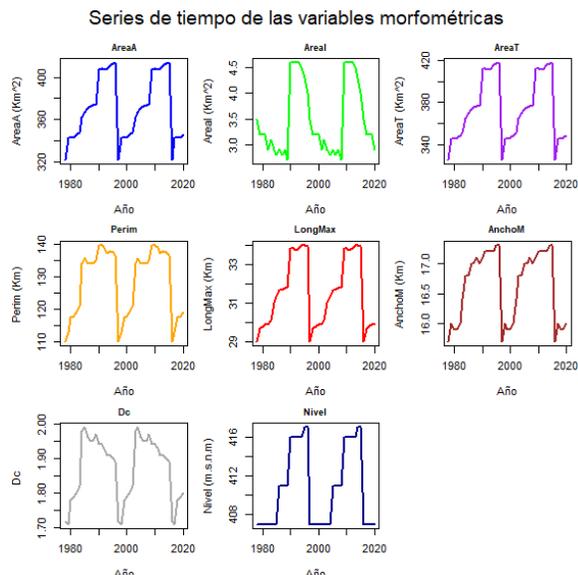


Figura 3. Series de tiempo de las variables morfométricas y el nivel del lago. Fuente: propia.

$$\left(1 - \sum_{i=1}^p \phi_i B^i\right) (1 - B)^d Y_t = \left(1 + \sum_{j=1}^q \theta_j B^j\right) \varepsilon_t$$

donde,

Y_t : es el valor del nivel del lago en el tiempo t .

B : es el operador de retardo definido por

$$BY_t = Y_{t-1}.$$

p : es el orden del componente autorregresivo (AR).

d : es el orden de diferenciación.

q es el orden del componente de media móvil (MA).

ϕ_i : son los coeficientes del componente AR.

θ_j : son los coeficientes del componente MA.

ε_t : es el término de error (ruido blanco) en el tiempo t .

Se compararon cuatro modelos ARIMA, para diferentes valores de los parámetros. La Tabla 3 incluye el AIC (Criterio de Información de Akaike) y el BIC (Criterio de Información Bayesiano) para cada modelo.

ARIMA(p, d, q)	AIC	BIC
ARIMA(1,1,1)	197.92	202.99
ARIMA(1,1,0)	195.92	199.29
ARIMA(0,1,1)	195.92	199.29
ARIMA(0,1,0)	193.92	195.61

Tabla 3. Comparación de modelos ARIMA. Fuente: propia.

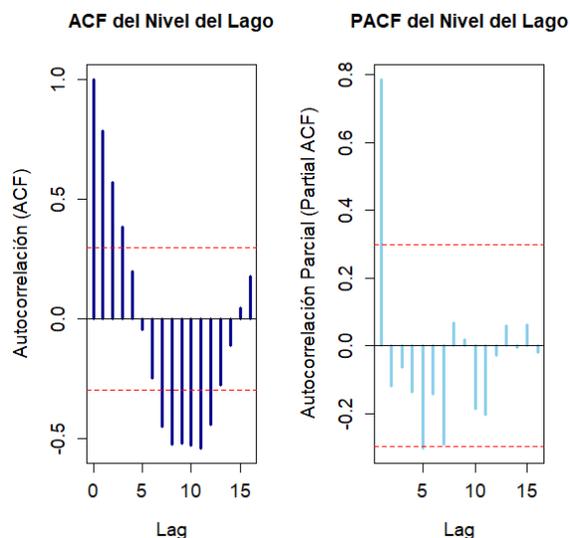


Figura 4. Función de autocorrelación. Fuente: propia.

Se calcula la serie de tiempo del nivel del lago con promedio móvil para un período de 3 años ver Figura 5, esta es una técnica de suavizado de series de tiempo que se usa para reducir el ruido, identificar tendencias y patrones subyacentes, facilitando así su análisis, interpretación y modelado. La serie con promedio móvil calcula la media de un conjunto de observaciones consecutivas dentro de una ventana de tiempo específica (llamada "ventanaü .orden" del promedio móvil). Este promedio se "mueve.a lo largo de la serie de tiempo, calculándose para cada nueva ventana de observaciones.

Se utiliza el conjunto de modelos y técnicas estadísticas, para evaluar la significancia de estas variaciones

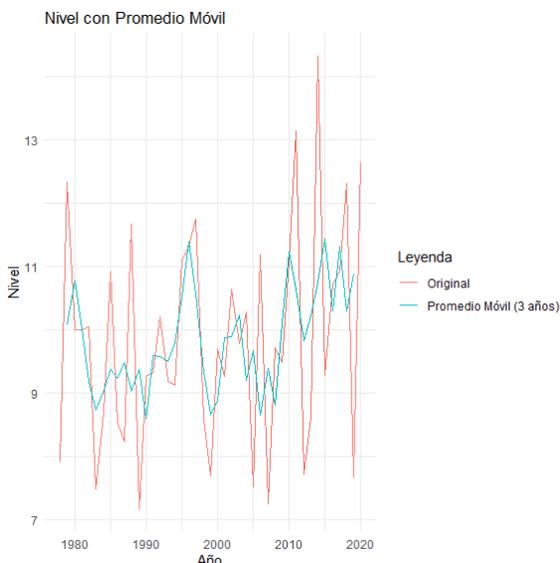


Figura 5. Series de tiempo del Nivel del lago con promedio móvil. Fuente: propia.

lo que proporciona un marco robusto para la interpretación de los datos. Todos los cálculos se realizaron utilizando el software R.

3. Análisis

Se realizó un análisis de las variables morfométricas que describen cambios a lo largo del tiempo.

Se identificó una correlación positiva y significativa entre el nivel del agua y el área del lago, indicando que el crecimiento del cuerpo de agua se relaciona directamente con fluctuaciones en el nivel.

Adicionalmente, se observó una relación moderada entre el área de las islas y el nivel del agua, sugiriendo que los cambios en el nivel afectan también a los ecosistemas insulares dentro del lago. Por otro lado, el índice de desarrollo de costa muestra correlaciones con el perímetro (0.9125) y el ancho máximo (0.8405), lo que indica que las costas son más regulares y alargadas.

Las técnicas de modelado estadístico, incluyendo la regresión lineal, permitieron predecir el nivel del lago a partir de las variables morfométricas, reforzando la idea de que estas métricas son útiles para entender el comportamiento de los datos.

Las variables más significativas en la predicción del nivel de agua fueron el área de agua, el área de islas,

la longitud máxima y el índice de costa, como se muestra a continuación.

El modelo de regresión lineal obtenido con las variables más significativas es:

$$\text{Nivel} = 304,029 - 0,279\text{AreaA} - 1,312\text{AreaI} + 8,136\text{LongMax} - 22,323\text{Dc} + \varepsilon.$$

El análisis de las gráficas de diagnóstico de residuos (Figura 6) muestra serias limitaciones del modelo de regresión lineal para estos datos. La presencia de no linealidad, heterocedasticidad y no normalidad en los residuos, claramente evidenciadas en la Figura 6, sugiere que los supuestos fundamentales del modelo no se cumplen. Asimismo, la identificación de valores atípicos y puntos influyentes en la Figura 6 resalta su potencial para sesgar significativamente los resultados obtenidos.

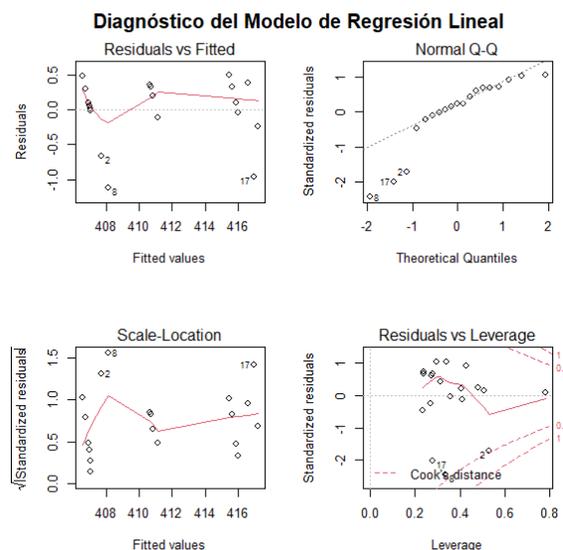


Figura 6. Diagnóstico del modelo de Regresión Lineal. Fuente: propia.

De los modelos de serie de tiempo dados en la Tabla 3, el que tiene el AIC y BIC más bajo es ARIMA(0, 1, 0), este modelo específico sugiere que las predicciones se basan principalmente en las diferencias de primer orden de la serie de tiempo, sin componentes autorregresivos (AR) ni de media móvil (MA). En esencia, es un modelo de paseo aleatorio con deriva, es un modelo muy simple que esencialmente predice que el futuro será igual al último valor observado

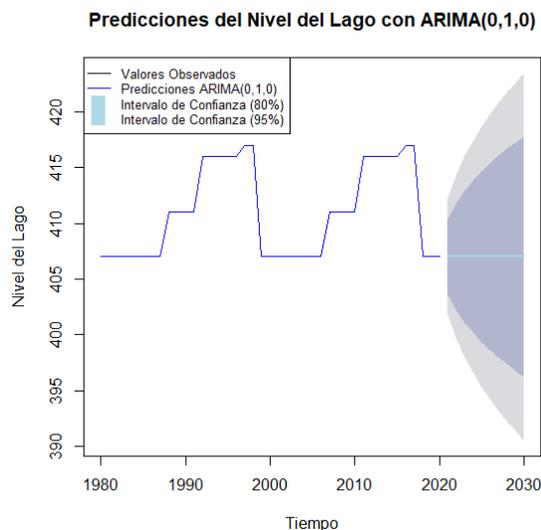


Figura 7. Predicciones del Nivel del Lago. Fuente: propia

con alguna variación ver [10]. La línea de predicción horizontal indica que el modelo no captura ninguna tendencia o estacionariedad en los datos. Los intervalos de confianza indican que existe incertidumbre en las predicciones a largo plazo, ver Figura 7.

La gráfica del nivel del Lago de Valencia muestra una considerable variabilidad anual a lo largo del período 1978-2020. Sin embargo, al aplicar un promedio móvil de 3 años (línea azul), ver Figura 5. Se revela una tendencia de mediano plazo más clara. Se observa un descenso notable en el nivel promedio durante la década de 1980, seguido de una fase de recuperación y relativa estabilidad en los años 90. A principios de la década de 2000, se aprecia un nuevo declive, aunque posteriormente el nivel promedio experimentó una recuperación significativa alrededor del año 2010. La comparación entre la serie original y el promedio móvil subraya cómo este último filtra el ruido de las variaciones anuales, permitiendo identificar las dinámicas subyacentes del nivel del lago a una escala temporal mayor.

Conclusiones

Los resultados obtenidos en este análisis morfométrico del Lago de Valencia traen consigo importantes implicaciones. Se puede concluir que:

- Las variables morfométricas son determinantes no solo para entender la configuración actual del lago, sino también para anticipar posibles cambios futuros. Su monitoreo constante es vital para la formulación de políticas de conservación y manejo sostenible.
- Las variables morfométricas estudiadas tienen un impacto significativo en el nivel del agua del Lago de Valencia. Esto sugiere que los cambios en estas variables pueden afectar el riesgo de inundaciones.
- La caracterización morfométrica es esencial, ya que permite identificar cómo los cambios en el uso del suelo, precipitación y otros factores ambientales influyen en la geometría del lago.
- El incremento observado en el área y volumen del lago sugiere que existen factores ambientales que están influyendo en su evolución. Esto implica que los ecosistemas acuáticos relacionados podrían estar experimentando cambios significativos, lo que podría afectar la biodiversidad local y la calidad del agua.
- El modelo ARIMA(0,1,0) es relativamente simple y puede no capturar todas las complejidades de la dinámica del nivel del lago, por lo cual es importante considerar otros modelos y factores que podrían influir en el nivel del lago.

De la Figura 7 se concluye que el nivel del lago ha experimentado fluctuaciones significativas a lo largo del tiempo. Estas fluctuaciones pueden estar relacionadas con factores como la precipitación, la evaporación, la extracción de agua y otros factores ambientales.

Se recomienda explorar modelos ARIMA más complejos, modelos de series de tiempo alternativos o considerar la inclusión de variables externas que puedan explicar la no estacionariedad y la autocorrelación.

- Comprender la no estacionariedad y la dependencia temporal en el nivel del lago es crucial para desarrollar modelos predictivos precisos para la prevención de inundaciones.

- El análisis de la serie de tiempo del nivel del Lago de Valencia y su promedio móvil de 3 años revela una dinámica compleja, caracterizada por una significativa variabilidad anual superpuesta a tendencias de mediano plazo. Si bien no se observa una tendencia lineal uniforme en todo el período estudiado, las fases de descenso y recuperación en el nivel promedio sugieren una sensibilidad a factores climáticos y posiblemente a intervenciones humanas en la cuenca. Comprender estas tendencias es crucial para la planificación y gestión sostenible de los recursos hídricos del lago, así como para mitigar los posibles impactos en su ecosistema y en las comunidades que dependen de él.
- La modelización matemática de la geometría del borde del lago es crucial para entender su dinámica. Esto permite evaluar cómo las variaciones en el perímetro y el área del lago afectan su forma.

Agradecimientos

Esta investigación ha sido financiada por el FONACIT bajo la subvención 2024PGP142.

Referencias

- [1] Díaz E, Pérez R, Armas M. Propuesta de los actores claves del plan de educación ambiental en la Cuenca del Lago de Valencia. *Observatorio laboral revista Venezolana* 3.5: 43-59, (2010).
- [2] Peeters L., A Kroboth. Origen y evolución de la Cuenca del Lago de Valencia, Venezuela. *Instituto para la Conservación del Lago De Valencia. Caracas, Venezuela, 1968.*
- [3] Fernández G, Gabriel. Análisis de la Expansión del Lago de Valencia (1978-2020). Región centro-norte de Venezuela. *Terra. Nueva Etapa, vol. XXXVI, núm. 60, 2020.*
- [4] Montoya M. Yimmy. Caracterización morfométrica básica de tres lagos someros en el municipio de El Carmen de Viboral (Antioquia), Colombia. *Actualidades Biológicas* 27, (82): 79-86, 2005.
- [5] Yan Huang, Yifei Tian, Changwen Li, Wu Liu, Nan Zhang, Haiyang Wang, Yue Wu, Wanting Feng, Yifan Yu. Quantitative Study on Morphological Change Characteristics of Tonle Sap Lake Based on DEM. *Open Journal of Modern Hydrology*, 14, 1-13, 2024
- [6] Martínez, Diego R., et al. El Criterio de Información de Akaike en la Obtención de Modelos Estadísticos de Rendimiento, *Conference: XX Jornadas de Paralelismo, 2009.*
- [7] Fornerón, Claudia Fernanda and Piccolo, María Cintia and Carbone, María Elizabeth. Análisis morfométrico de la laguna Sauce Grande (Argentina). *Huellas. no.14, 11-30, 2010.* <https://repo.unlpam.edu.ar/handle/unlpam/2561>.
- [8] Castillo J, Marcos. Morfometría de lagos: Una aplicación a los lagos del Pirineo. Tesis de Doctorado, Universidad de Barcelona. <http://www.tdx.cat/TDX-0830104-114851>. 1992.
- [9] De la Fuente Fernández, S. (s.f.). Series temporales, modelo ARIMA metodología de Box-Jenkins [PDF]. Facultad de Ciencias Económicas y Empresariales, Departamento de Economía Aplicada. <https://www.estadistica.net/ECONOMETRIA/SERIES-TEMPORALES/modelo-arima.pdf>.
- [10] Noble, J. (s.f.). ¿Qué son los modelos ARIMA? IBM. <https://www.ibm.com/es-es/think/topics/arima-model>.



Análisis de Componentes Principales Funcionales (FPCA) de Precipitaciones en el Lago de Valencia

Lugo U. Andrés A.^{1,2*}, Marcano José G.^{1,2}

¹Departamento de Matemáticas, Facultad de Ciencias y Tecnología, Universidad de Carabobo. Naguanagua, Edo. Carabobo-Venezuela

²Centro Multidisciplinario de Visualización y Cómputo Científico (CEMVICC)

*Autor de correspondencia: adlugo.ven@gmail.com

Recibido: 29/01/2025, Revisado: 22/02/2025, Aceptado: 08/05/2025

Resumen

En este trabajo se presenta un análisis de los datos mensuales de precipitaciones provenientes de 11 estaciones meteorológicas ubicadas en el Lago de Valencia, Venezuela utilizando el método de componentes principales funcionales (FCP). Este proceso consiste en transformar los datos de cada estación en curvas funcionales mediante técnicas de suavizado usando bases de Fourier debido a la naturaleza periódica presente en los datos. Al realizar el análisis de componentes principales se obtuvo que sólo dos componentes contribuyen con más del 85% de variabilidad y de las cuales se identifican dos periodos bien definidos de lluvia y sequía que contribuyen a comprender mejor las variaciones climáticas en esta región.

Palabras Claves: Precipitaciones, componentes principales funcionales, Lago de Valencia

Functional Principal Component Analysis (FPCA) of Rainfall in Lake Valencia

Abstract

This paper presents an analysis of monthly rainfall data from 11 meteorological stations located in Lake Valencia, Venezuela, using the functional principal component analysis (FPCA) method. This process consisted of transforming the data from each station into functional curves by means of smoothing techniques using Fourier bases, due to the periodic nature present in the data. By performing the principal component analysis, it was found that only two components contribute more than 85% of the variability, and from which two well-defined periods of rain and drought are identified, which contributes to a better understanding of the climatic variations in this region.

Keywords: Precipitation, Functional Principal Components, Lake Valencia

1. Introducción

El análisis de las precipitaciones en el Lago de Valencia ha sido abordado desde diversas perspectivas. Estudios previos han empleado metodologías variadas para comprender el régimen climático y los patrones de lluvia en la región.

En [3], se realizó un estudio del régimen climático y el patrón espacial de lluvias, utilizando “Análisis de correlación espacial” y “los criterios de error de la lluvia media y la interpolación espacial del método de Kagan”.

En [6] y [10], se analizaron datos de ocho estaciones ubicadas en la cuenca del Lago de Valencia, aplicando técnicas de análisis de series de tiempo.

En [13], se utilizaron series temporales para examinar diversas variables meteorológicas en el Lago de Valencia, incluyendo las precipitaciones.

Además de los estudios específicos del Lago de Valencia, se han realizado investigaciones sobre el análisis de datos funcionales (FDA) y, en particular, el análisis de componentes principales funcionales (FPCA) en el contexto de estudios de precipitaciones.

En [11], se estudiaron las precipitaciones en Canadá utilizando FPCA, con el apoyo de un paquete estadístico en el software **R**. Este estudio también se presenta como ejemplo en [1], donde se encuentran fundamentos teóricos más detallados. Estas serán las principales fuentes para el presente trabajo.

En [1], [2], [4] y [5], se aplicaron diversos métodos de análisis de datos funcionales en estudios relacionados con el clima y las precipitaciones.

En este trabajo, se presenta un análisis de los datos mensuales de precipitaciones de 11 estaciones meteorológicas en el Lago de Valencia, Venezuela, utilizando el método de componentes principales funcionales (FPCA). Este proceso transforma los datos de cada estación en curvas funcionales mediante técnicas de suavizado con bases de Fourier, dada la periodicidad de los datos. El análisis de componentes principales reveló que dos componentes explican más del 85 % de la variabilidad, identificando dos períodos definidos, de lluvia y sequía, lo que contribuye a una mejor comprensión de las variaciones climáticas en la región.

La aplicación del FPCA permitirá reducir la dimensionalidad de los datos, identificar las principales fuentes de variabilidad en las precipitaciones y detectar patrones espaciales y temporales significativos. Los resultados de este estudio tendrán implicaciones importantes para la gestión de recursos hídricos, optimizando el uso del agua y mitigando los efectos de eventos extremos.

2. Bases teóricas

En esta primera sección vemos un breve resumen de la teoría que sustenta este trabajo. Se sigue aquí a [8] debido a ser más conciso en lo que nos ocupa. En [14] se puede encontrar una gran variedad de citas que muestran el desarrollo histórico del análisis de datos funcionales (FDA) y del análisis de componentes principales funcionales (FPCA). Para un estudio más completo se tienen también [9] y [12].

Variables aleatorias en L^2

El espacio L^2 es el conjunto de todas las funciones x definidas en $[0, T]$ que satisfacen que $\int_0^T x^2(t)dt < \infty$. El espacio L^2 es un espacio separable de Hilbert con producto interno,

$$\langle x, y \rangle = \int_0^T x(t)y(t)dt.$$

Una variable (o curva) aleatoria $X = \{X(t), t \in [0, T]\}$ es un elemento aleatorio de L^2 equipado con una σ -álgebra de Borel.

Si X y Y son variables aleatorias, estas son independientes si

$$P(X \in A, Y \in B) = P(X \in A)P(Y \in B).$$

Decimos que X es integrable si

$$E\|X\|^2 = E \int_0^T X^2(t)dt < \infty$$

Se debe notar que: $\int_0^T X^2(t)dt$ es una variable aleatoria real.

Si X es integrable entonces existe $\mu \in L^2$ tal que,

$$\langle \mu, x \rangle = E\langle X, x \rangle,$$

para cada $x \in L^2$. μ se denomina «esperanza de X », y se denota EX . EX conmuta con operadores acotados, es decir, si $\ell \in \mathcal{L}$ y X son integrables, entonces

$$E(\ell(X)) = \ell(EX).$$

Si $EX = 0$, el operador de covarianza de X se define como,

$$C(x) = E[\langle X, x \rangle X], \quad \forall x \in L^2.$$

El operador C es simétrico y positivo definido, es decir,

$$\begin{aligned} \langle C(x), y \rangle &= \langle x, C(y) \rangle, \forall x, y \in L^2. \text{ Simétrico.} \\ \langle C(x), x \rangle &\geq 0, \forall x \in L^2. \text{ Definido positivo.} \end{aligned}$$

El operador de covarianza es además compacto, es decir, dadas dos bases ortonormales de L^2 , $\{u_j\}$ y $\{v_j\}$ se puede escribir como

$$C(x) = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j \langle x, v_j \rangle u_j.$$

El operador de covarianza es de Hilbert-Schmidt, es decir, se verifica la condición

$$\sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j^2 < \infty.$$

Si se observa una muestra de N curvas X_1, \dots, X_N , estas pueden verse como las realizaciones de una función aleatoria X o como un elemento aleatorio de L^2 con la misma distribución de X .

Se asume a menudo que X_1, \dots, X_N son iid en L^2 , y se distribuyen igual a X , que asumimos es cuadrado integrable. Así definimos los siguientes parámetros:

$$\begin{aligned} \mu(t) &= E[X(t)] \quad (\text{función media}), \\ c(t, s) &= E[(X(t) - \mu(t))(X(s) - \mu(s))] \\ &\quad (\text{función de covarianza}), \\ C(\cdot) &= E[\langle (X - \mu), \cdot \rangle (X - \mu)] \\ &\quad (\text{operador de covarianza}). \end{aligned}$$

La función media μ se estima por la función de media muestral

$$\hat{\mu}(t) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N X_i(t) = \frac{X_1(t) + \dots + X_N(t)}{N}, \quad (1)$$

y la función de covarianza,

$$\hat{c}(t, s) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (X_i(t) - \hat{\mu}(t))(X_i(s) - \hat{\mu}(s)).$$

El operador de covarianza muestral se define como

$$\hat{C}(x) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \langle X_i - \hat{\mu}, x \rangle (X_i - \mu), \quad x \in L^2. \quad (2)$$

El operador \hat{C} cumple las mismas propiedades que el operador C , de esta manera, el operador \hat{C} puede escribirse como,

$$\hat{C}(x) = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j \langle x, v_j \rangle v_j$$

donde λ_j son los valores propios de \hat{C} y v_j sus vectores propios, que forman una base ortonormal de L^2 .

Los valores propios de \hat{C} se asumen positivos y monótonamente decrecientes, es decir,

$$\lambda_1 > \lambda_2 > \dots$$

Los vectores propios de \hat{C} se denominan «componentes principales funcionales empíricos» (EFPC) de los datos X_1, \dots, X_N .

Componentes principales

En la subsección anterior se vio que los EFPC se pueden interpretar como una base óptima ortonormal con respecto a la cual se pueden expandir los datos.

El producto interno $\langle X_i, \hat{v}_j \rangle = \int X_i(t) \hat{v}_j(t) dt$ se denomina el j -ésimo resultado de X_i y se puede interpretar como el «peso de la contribución» de los FPC a la curva X_i .

Un método para elegir el número de componentes principales es cuando la suma de los valores propios supera el 85 % de la suma total. En caso de que la primera componente supere el 85 %, se hace una rotación en los vectores propios (se elige otra base), de modo que haya por lo menos dos componentes principales.

3. Aplicación e interpretación del modelo a los datos del lago

En esta sección aplicamos el modelo descrito en [11] a los datos de precipitaciones del Lago de Valencia.

Las curvas asociadas a los datos

Se cuenta con datos mensuales de precipitaciones en los alrededores del Lago de Valencia medidos en once estaciones meteorológicas (al lado de cada estación se colocó el tiempo durante el cual se tomaron datos de acuerdo a la estación), a saber:

- E417: Santa Cruz, 1966 a 1999.
- E444: «Sin información», 1954 a 1966.
- E452: Mariara, 1949 a 1993.
- E466: Maracay, 1934 a 1992.
- E488: El Trompillo, 1960 a 2005.
- E489: Agua Blanca, 1934 a 2005.
- E491: Las Dos Bocas, 1949 a 2005.
- E497: La Ceniza, 1960 a 2003.
- E1483: «Sin información», 1944 a 1994.
- E1494: Embalse Taiguaguay, 1951 a 1999.
- E9317: «Sin información», 1974 a 1993.

Como se puede ver, desconocemos la ubicación de las estaciones 444, 1483 y 9317. En la Figura 1 se puede observar dónde están ubicadas aquellas estaciones de las que se conoce su ubicación. Para aplicar el modelo se le calculó la media mensual a cada estación, dejando una tabla de datos con dos variables: mes y estación. Para reducir la escala se le aplicó logaritmo en base 10 a cada uno de los datos. La tabla resultante se guardó en un archivo.txt, para luego ser cargada en el software estadístico **R**. Luego se cargó el paquete `fda` de **R** para el tratamiento de datos funcionales.

Los datos vienen en forma discreta. Por eso se deben transformar a datos continuos o funciones. Es decir, por cada estación se debe encontrar una función en L^2 que interpole los datos discretos. En la literatura se recomienda usar series de Fourier cuando se trata de datos de precipitaciones, ya que son fenómenos periódicos. Se debe encontrar una serie de modo que cada función aleatoria se pueda escribir como,

$$X_j(t) = \sum_{k=1}^K a_{k,j} \mathbf{v}_k(t), \quad (3)$$

donde j indica la estación. Se escogió $K = 13$ (el

número debe ser impar) ya que un número más pequeño daba errores en la estimación y uno más grande no modificaba la estimación. Existen métodos para estimar K , pero no se usaron en este estudio. Dado que es una serie de Fourier, los \mathbf{v}_k vienen dados de la siguiente manera:

$$\mathbf{v}_1 = 1, \mathbf{v}_{2k} = \sin(k\omega t), \mathbf{v}_{2k+1} = \cos(k\omega t),$$

para $k = 1, \dots, K-1$. La constante ω viene dada por la relación $\omega = 2\pi/T$, donde T , en este caso, es 12, por el número de los meses del año, por lo tanto $\omega = \pi/6$. Para obtener las curvas asociadas a los datos se creó una base de Fourier, usando el comando en **R**, `create.fourier.basis`, que requiere tres entradas:

1. `rango`, en nuestro caso 0 a 12, y lo definimos como el vector $(0, 12)$.
2. $K = 13$, el número de vectores de la base.
3. El `periodo` $T = 12$, que hay que añadirlo, ya que por defecto es 365, por los días del año.

La base creada se muestra en la Figura 2.

Ahora bien, para que cada curva pueda escribirse en términos de la base de Fourier, se deben estimar los coeficientes de (3) utilizando la función `fdPar` del paquete `fda` de **R**. Esta función usa los siguientes parámetros de suavizado para la interpolación.

Operador de aceleración armónica

El suavizado se admite mediante la clase `Lfd` que expresa el concepto de un operador diferencial lineal. Un operador diferencial lineal L es un operador lineal de la forma,

$$L(x(t)) = a_0 x(t) + \sum_{k=1}^m a_k D^k x(t).$$

Un caso especial importante es el «operador de aceleración armónica»,

$$L(X(t)) = \omega^2 DX(t) + D^3 X(t), \quad (4)$$

que se usa ampliamente con funciones de base de Fourier para suavizar datos periódicos. Este operador de aceleración armónica se usa para penalizar los términos más altos en la serie de Fourier (3). A los operadores lineales que se usan para este propósito se les denomina «operadores de penalización por rugosidad».

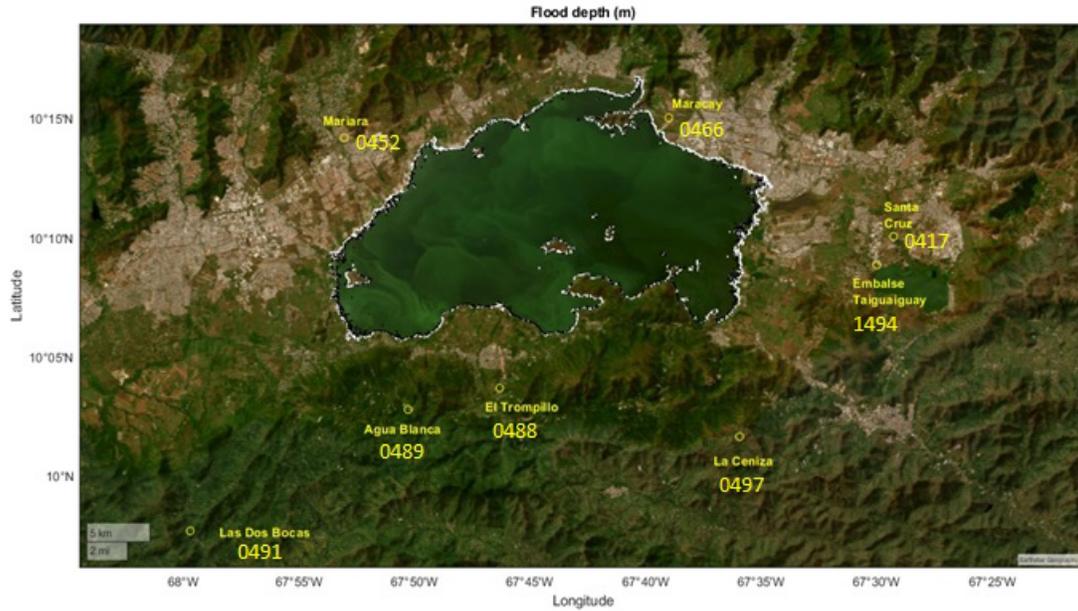


Figura 1. Estaciones conocidas

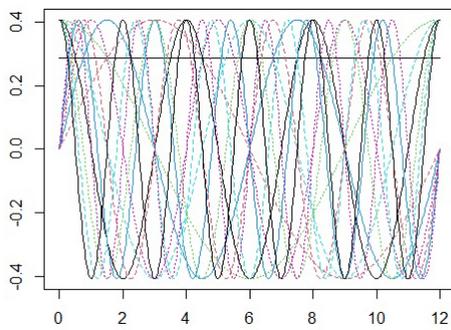


Figura 2. Base de Fourier. Fuente: propia

Matriz de rugosidad y Matriz de suavizado

La ecuación (3) puede escribirse de manera matricial como, $X(t) = \mathbf{c}^T \mathbf{v}(t)$.

Así, se define el «criterio de ajuste penalizado por rugosidad» como,

$$F(\mathbf{c}) = (\mathbf{y} - \mathbf{V}\mathbf{c})^T (\mathbf{y} - \mathbf{V}\mathbf{c}) + \lambda \int [L(X(t))]^2 dt. \quad (5)$$

donde j es la estación, λ es llamado «parámetro de suavizado» y V es la matriz de los datos. La matriz de rugosidad es

$$R = \int [L(X(t))]^2 dt = \int \mathbf{v}(t) \mathbf{v}^T(t) dt,$$

y la matriz de suavizado como,

$$H(\lambda) = V(V^T V + \lambda R)^{-1} V^T.$$

Parámetro de suavizado

La medida de validación cruzada generalizada, GCV, desarrollada por Craven y Wahba (1979), está diseñada para localizar el mejor valor para el parámetro de suavizado λ . Otras medidas se muestran en [7]. Esta medida se define como,

$$GCV(\lambda) = \left(\frac{n}{n - df(\lambda)} \right) \left(\frac{SSE}{n - df(\lambda)} \right) \quad (6)$$

donde $df(\lambda) = \text{Traza}(H(\lambda))$ y

$$SSE = \sum_{j=1}^n [y_j - X(t_j)]^2.$$

El mejor parámetro de suavizado se obtiene minimizando (6). En la Figura 3 se observa que el mínimo de $GCV(\lambda)$ se obtiene cuando $\log(\lambda) = -1$, es decir, $\lambda = 0,1$.

Finalmente, usando la base de Fourier, la penalización y el parámetro de suavizado se utiliza el comando `smooth.basis` para calcular los coeficientes para cada una de las curvas asociadas a los datos de las estaciones. En la Figura 4 se muestran las curvas asociadas a cada una de las estaciones. Para un desarrollo más completo de esta subsección ver [11] y [7].

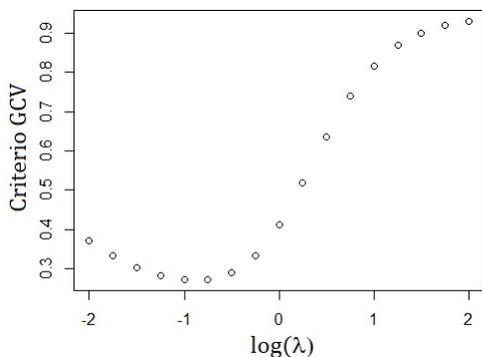


Figura 3. Criterio GCV. Fuente: propia

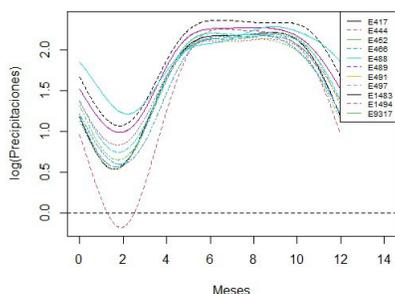


Figura 4. Datos funcionales por estación. Fuente: propia

Componentes principales

El análisis de componentes principales se implementa con la función `fda.fd` en **R**. Esta función tiene los siguientes parámetros de entrada:

```
pca.fd(datos funcionales, nharm =
      3, harmfdPar = fdPar(datos
      funcionales), centerrfns=TRUE)
```

donde «datos funcionales» son los que se generaron con el comando `smooth.basis`, «nharm = 3» indica el número de componentes principales que se desean (esto se modifica una vez obtenidos los datos), «fdPar» es la función de penalidad.

La función `fda.fd` devuelve un objeto funcional con los siguientes componentes:

`harmonics`: Un objeto funcional que contiene los vectores de las componentes principales.

`values`: El conjunto completo de valores propios.

`scores`: Muestra la influencia de cada estación en cada componente principal.

`varprop`: Un vector con la proporción de la varian-

za explicada por cada vector propio.

`meanfd`: Un objeto funcional que da la función media de X .

El criterio para elegir el número de componentes principales depende de la magnitud de los valores propios. Esto lo vemos en el vector con la proporción de la varianza explicada por cada vector propio, `varprop`:

(0.88, 0.06, 0.04).

Esto indica que el 88% de la variabilidad es explicada por la primera componente principal. La sugerencia en la literatura es que haya más de una componente principal. Se aplica una matriz de rotación para hallar una nueva base en la cual al menos dos componentes principales expliquen la variabilidad de los datos. Con el comando `varmx.pca.fd` se crean otras componentes principales a través de un proceso de rotación. El comando arroja, junto con los mismos resultados del comando `pca.fd` la matriz de rotación usada. Igual que con el caso anterior, revisamos el vector de proporción, que en este caso es:

(0.66, 0.28).

Este cubre el 94% de la variabilidad de los datos, y ninguna de sus componentes cubre más del 85%, que es lo que buscábamos con la rotación. Los coeficientes de las componentes principales en la base de Fourier (armónicos) vienen dados por,

$$A = \begin{bmatrix} 3.93 \times 10^{-1} & 7.97 \times 10^{-1} \\ 7.68 \times 10^{-1} & -4.23 \times 10^{-1} \\ 3.76 \times 10^{-1} & 2.69 \times 10^{-1} \\ 2.00 \times 10^{-1} & 1.09 \times 10^{-2} \\ -2.65 \times 10^{-1} & 3.30 \times 10^{-1} \\ -1.34 \times 10^{-2} & 4.52 \times 10^{-2} \\ -4.31 \times 10^{-2} & 4.93 \times 10^{-2} \\ -1.83 \times 10^{-2} & 2.43 \times 10^{-2} \\ -2.06 \times 10^{-2} & 1.03 \times 10^{-2} \\ 4.91 \times 10^{-3} & -6.48 \times 10^{-3} \\ 2.40 \times 10^{-6} & 1.31 \times 10^{-7} \\ 5.88 \times 10^{-3} & -5.91 \times 10^{-3} \end{bmatrix} \quad (7)$$

y las componentes principales vienen dadas por,

$$PC = \mathbf{v}^T A,$$

donde $PC = [PC_1(t) \ PC_2(t)]^T$.

La gráfica de las componentes principales viene dada en la Figura 5.

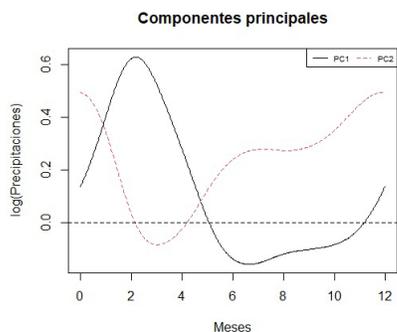


Figura 5. Las componentes principales. Fuente: propia

Los valores propios asociados a las componentes principales son:

$$\lambda_1 = 0.2942269 \quad \text{y} \quad \lambda_2 = 0.1237606.$$

Discusión de resultados

Aquí se analizan los «scores» y el «gráfico de media perturbada».

Los scores

Los «scores», o resultados, son los coeficientes de cada una de las curvas aleatorias asociadas a las estaciones con respecto a la base formada por las componentes principales, quedando cada curva X_j como,

$$\begin{aligned} X_{417}(t) &= -0.1656PC_1(t) - 0.1894PC_2(t), \\ X_{444}(t) &= -1.3683PC_1(t) - 0.4572PC_2(t), \\ X_{452}(t) &= -0.1702PC_1(t) - 0.3378PC_2(t), \\ X_{466}(t) &= -0.2363PC_1(t) - 0.2324PC_2(t), \\ X_{488}(t) &= 0.0791PC_1(t) + 0.0445PC_2(t), \\ X_{489}(t) &= 0.4268PC_1(t) + 0.3139PC_2(t), \\ X_{491}(t) &= 0.5458PC_1(t) + 0.6481PC_2(t), \\ X_{497}(t) &= 0.2446PC_1(t) - 0.0875PC_2(t), \\ X_{1483}(t) &= -0.0453PC_1(t) - 0.0588PC_2(t), \\ X_{1494}(t) &= -0.1382PC_1(t) - 0.2418PC_2(t), \\ X_{9317}(t) &= 0.8275PC_1(t) + 0.5986PC_2(t). \end{aligned}$$

Los «scores» muestran el peso o la influencia que tiene la estación en la componente principal respectiva. Mientras más distante de cero sea el score, más peso tiene esa estación en la componente principal. La Figura 6 muestra los «scores» de las estaciones, cada punto representa una estación, en el eje de las

abscisas aparece la primera componente principal y en el de las ordenadas el segundo. Las coordenadas de cada punto corresponden a los coeficientes de las dos componentes principales respectivamente. Los puntos más alejados del origen representan estaciones con mayor peso, mientras que los más cercanos al origen representan estaciones con menor peso. También se pueden ver las estaciones que están más aisladas en la gráfica como datos atípicos. En este caso, los valores atípicos serían las estaciones 444, 9317, 491 (Las Dos Bocas), 489 (Agua Blanca).

Adicionalmente, en la Figura 6 se observan dos cluster, uno en el centro que al revisar la ubicación de las estaciones en la Figura 1 se observa que justamente estas estaciones son las que están más cercanas al lago y en un terreno más llano. El segundo cluster se observa en la esquina superior a la derecha tres estaciones que de acuerdo a la Figura 6 son justamente las que están ubicadas en la parte alta que es zona de montaña. Note también que las estaciones más elevadas tienen un score positivo respecto a la primera componente principal, mientras que las más bajas tienen un score negativo respecto a la segunda componente principal, en una escala más pequeña. Las estaciones más elevadas tienden a tener lluvias más abundantes, lo que hace que el peso en cada componente esté relacionado con la cantidad de lluvia. La ubicación de las estaciones de las que se desconoce su ubicación tienen datos interesantes: 444 está más a la izquierda que todas, 9317 está más a la derecha de todas y 1483 está más al centro que todas.

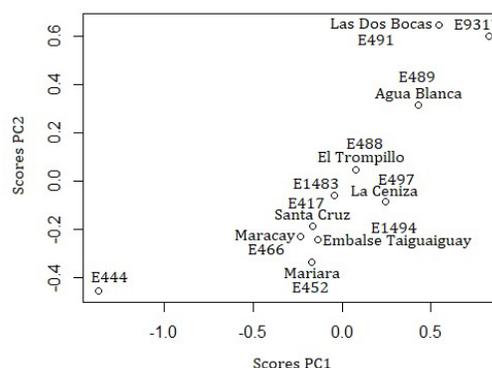


Figura 6. Mapa de scores con las estaciones. Fuente: propia

Media perturbada

El gráfico de «media perturbada», Figura 7, viene dado por tres curvas, $\hat{\mu}(t)$ (ver (1)) es la curva representada con una línea continua, $\hat{\mu}(t) + 2\sqrt{\lambda_i}PC_i$ es la curva representada con símbolos de «+» y $\hat{\mu}(t) - 2\sqrt{\lambda_i}PC_i$ es la curva representada por símbolos de «-». Estas fórmulas se encuentran en [7], pág. 48 a 51. La primera componente principal muestra una variación mayor en la época de sequía, aproximadamente de noviembre a abril, y la segunda componente principal muestra una variación mayor en la época de lluvias, aproximadamente de mayo a octubre. La alta variación de octubre a febrero es posible que se deba a lluvias atemporales en las estaciones 9317 y 491 (Las Dos Bocas), que tienen un microclima de montaña.

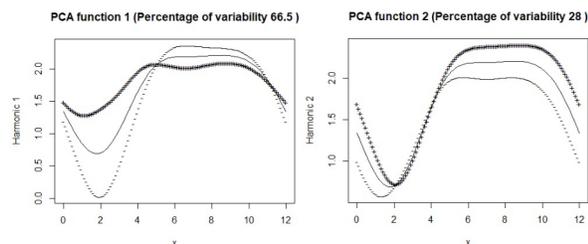


Figura 7. Media perturbada. Fuente: propia

Agradecimientos

Esta investigación ha sido financiada por el FONACIT bajo la subvención 2024PGP142.

Referencias

- [1] Aoki, P. M. (2017). Functional data analysis for rain rate statistics. *Proyect report, CS 229, Stanford, University*.
- [2] Ghumman, A. R., Haider, H., and Shafiqzaman, M. (2020). Functional data analysis of models for predicting temperature and precipitation under climate change scenarios. *Journal of Water and Climate Change*, 11(4):1748–1765.
- [3] Guevara Pérez, E., Guevara Bello, J. E., and García, E. (2008). Régimen climático y patrón espacial de las lluvias en la cuenca del Lago de Valencia, Venezuela. *Revista de Climatología*, 8, 29-40.
- [4] Hael, M. A., Yongsheng, Y., and Saleh, B. I. (2020). Visualization of rainfall data using functional data analysis. *SN Applied Sciences*, 2(3):461.
- [5] Hamdan, M. F., Jemain, A. A., and Jamaludin, S. S. S. (2018). Estimation of rainfall curve by using functional data analysis and ordinary kriging approach. *Matematika*, pages 167–177.
- [6] Hernández, J. and Rodríguez, L.-Á. (2020). Is ENSO associated with precipitation patterns in Lake Valencia Venezuela? *Revista de Climatología*, 20:75–87.
- [7] Hooker, G. (2010). Functional data analysis: A short course. international workshop on statistical modeling.
- [8] Horváth, L. and Kokoszka, P. (2012). *Inference for functional data with applications*, volume 200. Springer Science & Business Media.
- [9] Hsing, T. and Eubank, R. (2015). *Theoretical foundations of functional data analysis, with an introduction to linear operators*, volume 997. John Wiley & Sons.
- [10] Olivares, B. O. (2018). Condiciones tropicales de la lluvia estacional en la agricultura de secano de Carabobo, Venezuela. *LA GRANJA. Revista de Ciencias de la Vida*, 27(1):86–102.
- [11] Ramsay, J. O., Hooker, G., and Graves, S. (2009). *Functional Data Analysis with R and MATLAB*. Springer Publishing Company, Incorporated, 1st edition.
- [12] Ramsay, J. O. and Silverman, B. O. (2005). *Functional data analysis*. Springer-Verlag.
- [13] Tinoco Mantilla, J. (2015). *Estudio de algunas variables meteorológicas en el Lago de Valencia usando series temporales*. PhD thesis, Universidad Central de Venezuela.
- [14] Wang, J.-L., Chiou, J.-M., and Müller, H.-G. (2016). Functional data analysis. *Annual Review of Statistics and its Application*, 3(1):257–295.



Dos aplicaciones del análisis de Fourier al estudio de formas. Caso de estudio: borde de un lago

León José R.³, Marcano José G.^{1,2}, Rodríguez Luis A.^{1,2}, Romero M. Mirba J.^{1,2*}

¹Departamento de Matemática, Facultad de Ciencias y Tecnología, Universidad de Carabobo. Naguanagua, Edo. Carabobo-Venezuela.

²Centro Multidisciplinario de Visualización y Cómputo Científico (CEMVICC).

³Instituto de Matemática y Estadística Ingeniero Rafael Laguardia (IMERL). Facultad de Ingeniería. Universidad de la República. Montevideo-Uruguay.

*Autor de correspondencia: mjromero@uc.edu.ve

Recibido: 29/01/2025, Revisado: 22/02/2025, Aceptado: 07/05/2025

Resumen

En este trabajo utilizamos el análisis de Fourier para analizar formas bidimensionales, en particular nos centramos en formas que corresponden al borde de un lago. Estudiamos la morfometría del borde, a través de una descomposición de Fourier de su forma y proponemos un algoritmo para el cálculo del área encerrada por el borde.

Palabras Claves: Morfometría, área, nivel, geometría del borde, análisis estadístico.

Two applications of Fourier analysis to the study of shapes. A Case Study: Lake Boundary

Abstract

In this work, we use Fourier analysis to analyze two-dimensional shapes, focusing in particular on shapes corresponding to the edge of a lake. We study the morphometry of the edge through a Fourier decomposition of the shape and propose an algorithm for calculating the area enclosed by the edge.

Keywords: Morphometry, area, level, edge geometry, statistical analysis.

1. Introducción

Si consideramos formas bidimensionales estas consisten en muchos casos de contornos de una única curva cerrada. Si no es el caso, la forma se puede dividir en varias curvas cerradas, además formas que se representan con curvas abiertas se pueden cerrar. En este trabajo nos centraremos en curvas cerradas individuales. Siguiendo la presentación de [5], describiremos formas correspondientes a curvas cerradas como una función periódica compleja.

Generalmente, la función no tiene una expresión analítica conocida, en lugar de eso solo disponemos de una discretización, es decir, un conjunto de puntos finitos cuyas coordenadas pertenecen a la forma que define el contorno. Este esquema puede tratarse como una función compleja periódica discretizada. Por lo tanto, es posible realizar un análisis de Fourier de los datos utilizando la transformada discreta de Fourier.

El análisis de Fourier es una rama de las matemáticas que estudia cómo las funciones pueden ser representadas o aproximadas por sumas de funciones trigonométricas simples (senos y cosenos). Esta técnica es fundamental en diversos campos como la física, la ingeniería, el procesamiento de señales y muchas otras áreas.

1.1 Serie de Fourier

La serie de Fourier permite descomponer una función periódica $f(t)$ de cualquier período T , en una suma infinita de senos y cosenos:

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos\left(\frac{2\pi nt}{T}\right) + b_n \sin\left(\frac{2\pi nt}{T}\right) \right] \quad (1)$$

donde:

- a_0 es el valor promedio de la función.
- a_n y b_n son los coeficientes de Fourier, que determinan la amplitud de las componentes seno y coseno.
- ω es la frecuencia fundamental.

Los coeficientes de Fourier se calculan mediante las siguientes fórmulas:

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos\left(\frac{2\pi nt}{T}\right) dt$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin\left(\frac{2\pi nt}{T}\right) dt$$

donde T es el período de la función.

1.2 Transformada de Fourier

La transformada de Fourier extiende el concepto de la serie de Fourier a funciones no periódicas. Transforma una función del dominio del tiempo $f(t)$ al dominio de la frecuencia $F(\omega)$:

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt$$

donde i es la unidad imaginaria.

La transformada inversa de Fourier permite recuperar la función original del dominio de la frecuencia al dominio del tiempo:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{i\omega t} d\omega.$$

2. Estudio de formas bidimensionales

Se puede utilizar una función exponencial para describir un círculo en el plano complejo. La función es

$$ae^{i\theta t} = a(\cos(\theta t) + i\text{sen}(\theta t))$$

es decir, un círculo centrado en el origen con radio a . Si a es complejo, el círculo tendrá radio $|a|$.

La parametrización compleja del círculo puede ser modificada para describir una elipse. En ese sentido, distinguimos en una elipse su eje menor y su eje mayor, el de mayor longitud, estos ejes son ortogonales. En el conjunto de todas las elipses posibles, los círculos forman el subconjunto de elipse con ejes de igual longitud. Para convertir un círculo en una elipse, simplemente cambiamos la longitud de un eje, para $a \neq b \neq 0$, tenemos que

$$a \cos(\theta t) + ib \sin(\theta t),$$

elegimos $r_1 = (a+b)/2$, $r_2 = (a-b)/2$ entonces

$$\begin{aligned} & (r_1 + r_2) \cos(\theta t) + (r_1 - r_2)(i \sin(\theta t)) \\ &= r_1 e^{i\theta t} + r_2 e^{-i\theta t}. \end{aligned}$$

Si $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$ y multiplicamos la ecuación por un complejo z entonces obtenemos una rotación de la elipse de ángulo $\arg(z)$, además si sumamos un complejo z_0 a la ecuación obtenemos una elipse cuya intersección de sus ejes principales está en z_0 en lugar del origen. Por lo tanto, la expresión general de una elipse es descrita por la ecuación $r_1 e^{i\theta t} + r_2 e^{-i\theta t} + z_0$, donde $r_1, r_2, z_0 \in \mathbb{C}$.

¿Cómo se relacionan el modelado de formas, las elipses representadas como funciones compleja y el análisis de Fourier?

La serie de Fourier para una función periódica f dada por (1), se puede escribir en forma compleja por el desarrollo

$$f(t) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} c_l e^{il \frac{2\pi n t}{T}} \quad (2)$$

donde los coeficientes están dados por

$$c_l = \frac{1}{T} \int_0^T e^{-il \frac{2\pi n t}{T}} f(t) dt. \quad (3)$$

En la representación de Fourier de f si reagrupamos los coeficientes tenemos

$$f(t) = \sum_{l=0}^{\infty} \left(c_l e^{il \frac{2\pi n t}{T}} + c_{-l} e^{-il \frac{2\pi n t}{T}} \right)$$

es decir, la función f es representada por una suma de elipses representadas en forma compleja, vemos que en el análisis de Fourier una función compleja periódica da como resultado una suma de elipses. La curva se genera como la suma de elipses en distintas frecuencias o niveles de detalle.

Los componentes de la transformada de Fourier permiten la representación de la forma con un nivel de detalle dado por el rango de frecuencias. Las bajas frecuencias representan la estructura gruesa de un objeto, mientras que las frecuencias más altas añaden los detalles. Una determinada frecuencia depende de todas las frecuencias siguientes para aproximarse a una forma. El centro de gravedad u origen de la forma se muestra como un punto.

2.1 Transformada discreta de Fourier

La transformada discreta de Fourier (en adelante, TDF) es una aproximación a los coeficientes de la serie de Fourier c_l , describimos un bosquejo de su derivación.

En aplicaciones prácticas, $f(t)$ está dada por un conjunto de muestras, en el momento k se denota $f_k = f(t_k)$. Suponemos que f es una tabla de N muestras obtenidas a lo largo del intervalo T en puntos de tiempo igualmente espaciados $t_k = k\Delta t$, $k = 0, \dots, N-1$ y $\Delta t = T/N$. En intervalos fuera del elegido, se supone que la función se repite una extensión periódica de f .

La integral (3) que define los c_k se puede aproximar utilizando la regla del trapecio,

$$\begin{aligned} c_l &= \frac{1}{T} \int_0^T e^{-il \frac{2\pi n t}{T}} f(t) dt \\ &\approx \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{(e^{-il \frac{2\pi n t_k}{T}} f(t_k) + e^{-il \frac{2\pi n t_{k+1}}{T}} f(t_{k+1}))}{2} \Delta t \\ &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} e^{-2\pi i l k / N} f(t_k). \end{aligned}$$

Si definimos $f(t_k)$ la TDF esta dada por,

$$F_l = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} e^{-2\pi i l k / N} f_k \quad (4)$$

y su inversa por

$$f_l = \sum_{k=0}^{N-1} e^{2\pi i l k / N} F_k.$$

Es posible realizar un análisis de Fourier de los datos de una forma utilizando la TDF. Un código en MATLAB sencillo a partir de la ecuación (4) es el siguiente

```
f = complex(xCoordinates, yCoordinates);
N = length(f);
k = 0:N - 1;
j = 0:N - 1;
F = 1/N*exp(-2*pi*i*1*k'/N)*f;
```

F ahora tiene los coeficientes de Fourier F_l de la forma f . Ahora intentemos relacionarlos con los coeficientes de Fourier c_l de las ecuaciones (2) y (3). El

F_0	F_1	F_2	F_3	...	F_k	F_{k+1}	...	F_{N-3}	F_{N-2}	F_{N-1}
c_0	c_1	c_2	c_3	...	c_k	c_{-k}	...	c_{-3}	c_{-2}	c_{-1}

Tabla 1. Relación entre la transformada discreta y los coeficientes de Fourier

primer coeficiente, F_0 , es el resultado de establecer $j = 0$, lo que reduce la ecuación TDF a

$$F_0 = 1/N \sum_{k=0}^{N-1} f_k = \bar{f}.$$

El primer componente es claramente el centroide de los puntos en f , es decir, $F_0 = c_0$. La Tabla 1 muestra las correspondencias.

El orden, aparentemente extraño, es el resultado de la sumatoria de la TDF de 0 a $N - 1$. Esto es equivalente a considerar el rango de la definición de transformada de Fourier en $(-\infty, \infty)$ truncado entre $-N/2 + 1 : N/2$ (N par). Las frecuencias fuera de 0 a $N/2 - 1$ se pliegan y vienen como las frecuencias negativas. Este efecto se llama solapamiento, (en inglés, aliasing). Se prefiere el rango 0 a $N - 1$ ya que maneja un número par o impar de puntos de manera similar, dado que el primer coeficiente F_0 siempre será una traslación pura.

La transformada de Fourier de f consta del centroide de f juntos con coeficientes $[c_l, c_{-l}]$ de una serie de elipses de frecuencia creciente, ver Tabla 1.

3. Aplicaciones al estudio de la morfología de lagos

En la tesis de Jurado [4] se realiza un estudio de la morfometría de un conjunto de lagos de la región europea de los Pirineos. Entre las características estudiadas en la tesis tenemos la forma del contorno. El autor define el contorno del lago de manera operativa, esto es, utiliza la línea en el mapa, o en la batimetría, como representación de la costa o límite del lago. Cuanto menor sea la pendiente de la franja litoral de un lago, mayor es la probabilidad de que pequeñas variaciones en el nivel de la superficie del agua del lago lleguen a traducirse en cambios significativos en el tamaño y la forma de su contorno.

El autor obtiene los contornos a partir del tratamiento de imágenes que contienen la cuenca de estudio. Los contornos son obtenidos por binarización de la imagen, lo que permite la segmentación del borde.

Los coeficientes de Fourier sirven como una descripción abreviada de la forma del contorno de un lago. Esta técnica es utilizada para el análisis de los lagos pirenaicos, para la mayoría se obtiene un ajuste aceptable con los primeros 12 a 24 armónicos, debido a que sus contornos suelen tener una irregularidad moderada. Ver Figura 1 para un ejemplo, en este el gráfico de la columna izquierda corresponde al lago original, el primer contorno se ha construido a partir únicamente del primer armónico de Fourier; el segundo contorno, a partir de los dos primeros armónicos, y así sucesivamente hasta llegar a la aproximación final del borde del lago, la cual está basada en 32 armónicos, y que aparentemente es un buen ajuste al original.

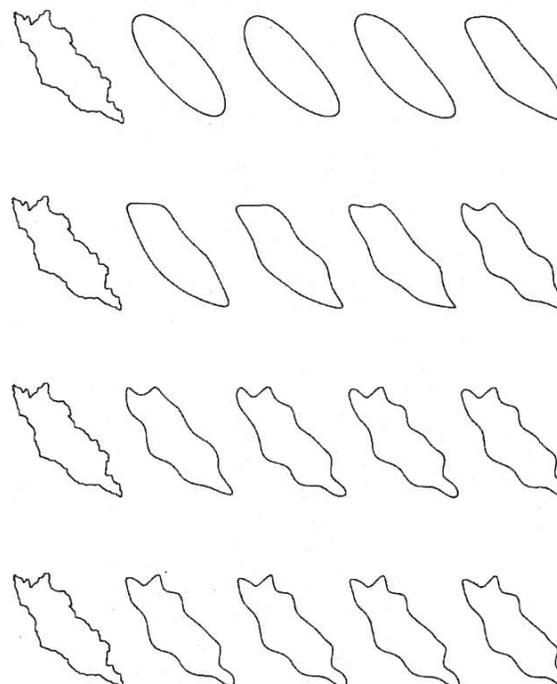


Figura 1. Reconstrucciones del contorno del Lago Mar de Valarties (Garona, Val d’Aran) a partir de los coeficientes de Fourier. Fuente: Jurado [4]

4. Área de regiones cerradas

Sea Ω un dominio en el plano complejo z y sea f una función analítica y biunívoca en Ω . Entonces, f define una aplicación de Ω sobre un dominio $\hat{\Omega}$ en el plano w . Las siguientes propiedades son consecuencias directas del supuesto biunívoco:

1. $f'(z) \neq 0, z \in \Omega$.
2. La función f tiene una inversa f^{-1} , de modo que cada punto $w \in \hat{\Omega}$ puede relacionarse con un único punto $z \in \Omega$ por medio de $z = f^{-1}(w)$.
3. La aplicación se caracteriza por la propiedad geométrica de que si γ_1, γ_2 son dos arcos diferenciables que se cortan en un punto $z_0 \in \Omega$ y forman allí un ángulo α , entonces el ángulo formado por las imágenes de γ_1 y γ_2 en el punto $w_0 = f(z_0)$ es nuevamente α . Es decir, la aplicación preserva ángulos.

Una aplicación que satisface la propiedad de conservación de ángulos en un punto z_0 se dice que es “conforme” en z_0 . Una aplicación f que satisface las propiedades anteriores se dice que es una “aplicación conforme de Ω sobre $\hat{\Omega}$ ”.

Transformaciones conformes. Sea $f : D \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ una aplicación holomorfa, inyectiva de D a un conjunto E contenido en la imagen de f . Sea $\phi(x, y)$ una función real valuada, identificamos $\phi(x, y) = \phi(z)$ que está definida en D . Definimos,

$$\psi(w) := \phi(f^{-1}(w)) = \phi(x(u, v), y(u, v)).$$

La función ψ es la transformación conforme de ϕ bajo f .

El siguiente teorema permite el cálculo de integrales de ϕ , ver Henrici [2], pág 339.

Teorema 1 Si ψ es la transformación conforme a través de $w = f(z)$, entonces

$$\int_D \phi(z) dx dy = \int_E \psi(w) |f^{-1}(w)|^2 du dv.$$

Demostración. Por la identificación $\phi(z) = \phi(x, y)$, usamos el teorema de cambio de variables en su forma real,

$$\int_D \phi(x, y) dx dy = \int_E \psi(w) \left| \frac{\delta(x, y)}{\delta(u, v)} \right| du dv \quad (5)$$

donde $\frac{\delta(x, y)}{\delta(u, v)}$ es la expresión del Jacobiano de la aplicación $w \rightarrow f^{-1}(w)$. Las ecuaciones de Cauchy-Riemann aplicadas a f^{-1} implican,

$$\left| \frac{\delta(x, y)}{\delta(u, v)} \right| = |f^{[-1]'}|^2.$$

ver [1] ecuación (72), al sustituir en la integral (5)

$$\int_E \psi(w) \left| \frac{\delta(x, y)}{\delta(u, v)} \right| du dv = \int_E \psi(w) |f^{[-1]'}|^2 du dv$$

■

Aplicación al cálculo del área. Si $\phi = 1$, el área de D , viene dada por

$$A(D) = \int_D dx dy.$$

Si utilizamos la expresión de la integral dada por el teorema anterior, suponiendo que E es el disco unitario y $g(w) = f^{-1}(w)$, al desarrollar en serie de potencia g (en el círculo), se obtiene la expresión de la serie de Fourier

$$g(w) = b_0 + b_1 w + b_2 w^2 + \dots$$

tal que la serie g' converge para $|w| < 1$. En coordenadas polares la integral está dada por la expresión

$$A(D) = \int_0^1 d\rho \int_0^{2\pi} |g'(\rho e^{i\theta})|^2 d\theta$$

desarrollando $|g'(\rho e^{i\theta})|^2$ e integrando se obtiene

$$A(D) = 2\pi \int_0^1 \sum_{k=1}^{\infty} k^2 b_k \bar{b}_k \rho^{2k-1} d\rho$$

o

$$A(D) = \pi \sum_{k=1}^{\infty} k |b_k|^2,$$

esto permite enunciar el siguiente teorema.

Teorema 2 Bajo las condiciones del teorema 1. Se tiene la fórmula,

$$A(D) = \pi \sum_{k=1}^{\infty} k |b_k|^2.$$

La existencia de una aplicación conforme entre el dominio D y el disco unitario E está garantizada por el célebre teorema de la aplicación de Riemann. El cual se incluye para claridad del lector.

Teorema 3 (Aplicación de Riemann) *Cualquier dominio simplemente conexo Ω , cuya frontera consiste en más de un punto, puede aplicarse conformemente al disco unitario $E := \{z : |z| < 1\}$. Es decir, para $a \in D$ existe f tal que*

$$f(a) = 0 \text{ y } f'(a) > 0$$

y toma exactamente un único valor en el disco E .

En el siguiente ejemplo escribimos para el dominio D encerrado por la elipse de ecuación,

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

la correspondencia conforme con el disco E . Para este fin, definimos la transformación de Joukowski, $z = \alpha w + \frac{\beta}{w} = \alpha w + \beta \bar{w}$, donde $z = x + iy$ y $w = u + iv$

$$z = x + iy = (\alpha + \beta)u + i(\alpha - \beta)v$$

ahora si $w \in \delta E$ entonces $u^2 + v^2 = 1$, por lo tanto

$$\frac{x^2}{(\alpha + \beta)^2} + \frac{y^2}{(\alpha - \beta)^2} = 1$$

$$a = (\alpha + \beta), b = (\alpha - \beta).$$

Se define $g : E \rightarrow D$ por

$$g(w) = \alpha w + \frac{\beta}{w}.$$

Para desarrollar la serie de potencia de la función g , consideramos la función $1/w$ y la escribimos como una serie geométrica,

$$\frac{1}{w} = \sum_{n=0}^{\infty} (1-w)^n$$

al sustituir en la expresión que define a g , obtenemos

$$\begin{aligned} \alpha w + \frac{\beta}{w} &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k w^k \\ &= c_0 + c_1 w + \dots + c_n w^n \\ &\quad + \sum_{j=n+1}^{\infty} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k w^k \end{aligned}$$

donde $c_0 = \beta(n+1)$, $c_1 = -(\alpha - \beta \sum_{j=1}^n \binom{n}{j})$ y para $k = 2, \dots, n$

$$c_k = (-1)^k \beta \sum_{j=k}^n \binom{j}{k}.$$

Para aplicar el método de cálculo de área a dominios discretizados que representen, por ejemplo, contornos de lagos, necesitamos disponer de la función $g = f^{-1}$. En este caso es necesario obtener aproximaciones numéricas de g . Un estudio comparativo de métodos para aproximar g se encuentra en M. Badreddine [3].

5. Aproximación numérica a g vía núcleo Szego

Introducimos a continuación el algoritmo de aproximación a g , ver apéndice C en Baricco *et. al.* [1]. Sea g el polinomio,

$$g(w) = \sum_{j=0}^{m-1} c_j w^j.$$

Denotamos por $z(t)$ una parametrización de la frontera de D , $t \in [0, \beta]$, por ejemplo podemos utilizar la expansión de Fourier de δD que obtuvimos en la sección 2.1.

Algoritmo

- P1 Definimos n puntos equidistantes en el círculo unitario $\theta_j = 2\pi i j/m$.
- P2 Calculamos los valores de los parámetros $\theta^{-1}(\theta_j)$, utilizando la aproximación de Newton,

$$\tau_j^{(k+1)} = \tau_j^{(k)} + \frac{\theta_j - \theta(\tau_j^{(k)})}{\dot{\theta}(\tau_j^{(k)})}$$

calculamos $\dot{\theta}(\tau_j^{(k)})$, de la ecuación

$$\dot{\theta}(t) = \frac{2\pi}{S(a, a)} |\Omega^2(t)|$$

con $S(a, a) = \int_0^\beta |Y^2(t)| dt$ donde $Y(t)$ y $\Omega(t)$, satisfacen la relación

$$Y(t) + \int_0^\beta k(t, s) dt = \Omega(t), \quad t \in [0, \beta].$$

- P3 Obtenemos preimagenes de los puntos equidistantes sobre el círculo

$$z(t_j) = f^{-1}(e^{2\pi i j/m}).$$

P4 Calculamos los coeficientes c_l , tal que g interpola f^{-1} en los puntos $e^{2\pi ij/m}$

$$c_l = \int_0^{2\pi} g(e^{i\theta}) e^{-il\theta} d\theta$$

y esto puede hacerse a través de la TDF.

[5] Karl Skoglund. Fourier Series, the DFT and Shape Modelling. Prepublicación 2004.

6. Conclusiones

En este trabajo presentamos dos métodos para el estudio del borde de un lago. El primero descompone en formas sencillas, a través de la descomposición elíptica de Fourier el borde, separando en armónicos que se aproximan a la forma original y que posiblemente contengan información sobre los cambios de la forma en el tiempo. El segundo método presenta un algoritmo para calcular el área del borde, utilizando la aproximación de la aplicación de Riemann por una descomposición de Fourier. Para trabajos futuros proponemos desarrollar e implementar algoritmos que utilicen estos métodos de manera que nos permitan analizar cambios temporales en el borde del Lago de Valencia.

Agradecimientos

Esta investigación ha sido financiada por el FONACIT bajo la subvención 2024PGP142.

Referencias

- [1] Baricco, G. A., Olivero, A. M., Rodríguez, E. J., Safar, F. G., y Sanz, J. L., Conformal mapping-based image processing: Theory and applications., *Journal of Visual Communication and Image Representation*, 6(1), 35-51, 1995.
- [2] Peter Henrici, *Applied and computational complex analysis*, Wiley-Interscience, 1973.
- [3] Mohamed Badreddine, *A Comparison Of Some Numerical Conformal Mapping Methods For Simply And Multiply Connected Domains*, Tesis de doctorado, Wichita State University, 2009.
- [4] Marcos del Castillo Jurado, *Morfometría de lagos una aplicación a los lagos del Pirineo*, Tesis de doctorado, Universidad de Barcelona, 1992.

GUIA PARA LOS AUTORES

La Revista FARAUTE UC de la Facultad de Ciencias y Tecnología (FACYT) considerará, para su difusión, trabajos inéditos relacionados con las ramas de las Ciencias Básicas y la Tecnología, tanto de carácter técnico como de carácter divulgativo, siempre que el mismo sea el producto de un proceso de investigación objetivo y comprobable. Se aceptan artículos o notas en español e inglés.

Tipos de Trabajos

- Artículos científicos con un máximo de doce (12) páginas.
- Artículos divulgativos de investigación con un máximo de doce (12) páginas.
- Notas Técnicas con un máximo de cinco (5) páginas.
- Artículos de Actualización Científica que resuman el “Estado del Arte” de un área específica de las ciencias y tecnología con un máximo de doce (12) páginas.
- Artículos de invitados especiales con un máximo de cinco (5) páginas.
- Cartas al Editor, que consistan en observaciones técnicas de artículos publicados en la revista.

Requerimientos de formato para manuscritos enviados para su evaluación:

El formato del manuscrito debe seguir las siguientes recomendaciones:

- Tipo de letra: *Times New Roman* 12 ptos, a excepción del título en español.
- Texto del artículo a doble columna a excepción del título, la información del(os) autor(es) y el resumen.
- Espaciado: simple
- Tamaño de papel: Carta con márgenes justificado de 2,5 cm por cada lado.
- Los artículos deben constar de las siguientes secciones:
 - **Título:** en español e inglés. El título en español debe ser en letra Times New Roman, tamaño 14, en mayúsculas, negritas, centrado. Dejando una línea de por medio, en letra tamaño 12, el título en inglés, negrita, en mayúsculas únicamente las iniciales de los nombres, pronombres, verbos, adjetivos y adverbios.

Información del(os) autor(es). Colocar el primer nombre completo, inicial del segundo, primer apellido completo e inicial del segundo, en mayúscula y centrado. En la siguiente línea colocar la dirección física de los autores y en la última línea la dirección de correo electrónica. Emplear superíndices numéricos para la identificación de los autores y sus respectivas direcciones. En caso de que varios autores posean correos electrónicos bajo un mismo dominio, utilizar el formato siguiente {login1, login2, ... loginn}@dominio. Ejemplo:

{sardito, hvasquez, jrodrigu}@uc.edu.ve

- **Resumen:** máximo de 150 palabras a una sola columna justificada, sin incluir referencias bibliográficas. Luego colocar entre tres (03) y cinco (05) palabras clave en orden alfabético (el resumen y las palabras clave deben incluirse en idioma inglés).
- **Introducción.**
- **Cuerpo del artículo:** Materiales y métodos (en caso de ser necesario), resultados y discusión.

- **Conclusiones** (opcional).
- **Agradecimientos** (opcional).
- **Bibliografía.** Las referencias bibliográficas serán listadas en orden alfabético, incluirán primer apellido, inicial del nombre y en caso de ser varios autores, inicial del nombre seguido del primer apellido, año de publicación, título de la obra o del trabajo citado (se debe colocar en mayúscula solo la letra inicial de la primera palabra). Ejemplos según sea el caso:
 - Publicaciones periódicas: Autor. Año. Título del artículo. *Nombre de la Revista abreviada*. Volumen (Número): páginas.

Baum, L. E., T. Petrie, G. Soules & N. Weiss. (1970). A maximization technique occurring in the statistical analysis of a probabilistic functions of Markov chains. *Ann. Math. Stat.* 41(1):164–171.

- Libros: Autor. Año. *Título del libro*. Casa editora. Ciudad.

Bernardo, J. & A. Smith. (1994). *Bayesian theory*. Wiley. New York.

- Libros colegiados: Autor. Año. Título del capítulo. In: *Título del libro* (editores), páginas. Casa editora. Ciudad.

Steyermark, J. (1994). Aspectos morfológicos del Parque Nacional Morrocoy. In: Flora del Parque Nacional Morrocoy (B. Manara, ed.), 66-103. Fundación Instituto Botánico de Venezuela y Agencia Española de Cooperación Internacional. Caracas, Venezuela.

- Proceedings o memorias: Autor. Año. Nombre del Evento. Institución donde se realizó el mismo. Ciudad. País. Páginas.

Toyota, M. (1999). Caracterização química e citológica como subsídios à taxonomia de grupos-problema. VIII Reunião brasileira de ficologia. Sociedade brasileira de ficologia. Pernambuco. Brasil. 41.

- Tesis o trabajos de ascenso: Autor. Año. Título. Tipo de Trabajo. Facultad. Universidad. Ciudad, País.

Vera, B. (2000). Estudio ficoflorístico de la región oriental del litoral central de Venezuela, Edo. Vargas, Venezuela. Trabajo de ascenso a la categoría de Asistente. Facultad de Ciencias. Universidad Central de Venezuela. Caracas, Venezuela.

- Documento en electrónico: citar según las indicaciones del documento electrónico o seguir los formatos indicados en la norma ISO 690-2, disponible en la dirección:

http://www.ugr.es/~pwlac/G00_Referencias_electronicas.html

- Las referencias deben ser citadas en el artículo, de acuerdo a:
 - **Un solo autor:** se indica el primer apellido del autor seguido por el año de la publicación, todo esto entre paréntesis.

..... (Vargas, 1999)....

- **Dos autores:** se coloca el primer apellido del primer autor, el símbolo & y el primer apellido del segundo autor, seguidamente la fecha de publicación; todo esto entre paréntesis.

..... (Vargas & Rodríguez, 2002).....

- **Más de dos autores:** se coloca el primer apellido del primer autor, luego se coloca “*et al.*”, seguidamente la fecha de publicación; todo esto entre paréntesis.

..... (Vega *et al.*, 2005)

- **Más de dos referencias:** se coloca cada referencia de acuerdo a lo anterior, separados por puntos y comas (;). Se deben ordenar primariamente en orden cronológico y en segundo lugar alfabéticamente, todo esto entre paréntesis. el primer apellido del primer autor, luego se coloca “*et al.*”, seguidamente la fecha de publicación; todo esto entre paréntesis.

..... (Vargas, 1999; Vargas & Rodríguez, 2002; Graterol *et al.*, 2005; Vega *et al.*, 2005)

- Los encabezados de cada sección se escribirán en negritas y deben estar enumerados.
- Las figuras, fotografías, diagramas y gráficos deben denominarse como “Fig.”. Las tablas deben denominarse “Tabla”. Las tablas y figuras deben enumerarse correlativamente y estar citadas en el texto en el mismo formato anterior. Se presentarán insertas en el cuerpo del artículo y además se debe entregar una copia en versión digital de las mismas. Las figuras deben estar en blanco y negro o escala de grises en formato JPEG o TIFF a una resolución de 300 dpi. Para la entrega de la versión final se requieren las imágenes en archivos a parte.
- Unidades de medida. Los valores se deben expresar en el sistema métrico decimal de acuerdo con el Sistema Internacional de Unidades (SI). La mayoría de los símbolos se escriben abreviados, en minúscula, salvo algunas excepciones como aquellos derivados de nombres propios, no llevan punto y se separan del valor numérico por un espacio. Ejemplos: cm (centímetro), h (hora), °C (Celsius).
- Las ecuaciones deben identificarse con un número entre paréntesis correspondiente a la enumeración correlativa de las ecuaciones. Estas deben estar en cursiva. Ejemplo:

$$I_F = I_E = - I_C = A^2 I_{A1} + A I_{A2} + I_{A0} = \frac{-J\sqrt{3}E_A}{Z_1 + Z_2} \quad (1)$$

Las ecuaciones tienen que estar citadas en el manuscrito y deben identificarse como “Ec”.

- Los algoritmos o códigos fuentes de programas se deben identificar con la palabra “Algoritmo” seguida de un número correspondiente a la numeración correlativa de los algoritmos y un título que lo identifique. Estos deben respetar la indentación y en letra courier tamaño 9. Ejemplo:

```
(1) void * sum(void * arg) {
(2) int * p; p = (int *)arg;
(3) pthread_mutex_lock(&m);
(4) s = s + *p;
(5) pthread_mutex_unlock(&m);
(6) }
```

Algoritmo 1. Hilo que efectúa la suma.

- Nombres y coordenadas geográficas. Los nombres geográficos sólo se escriben en mayúscula cuando forman parte de un nombre propio, por ejemplo: Península de Paraguana, Río Cabriales. Las coordenadas deben citarse utilizando las siglas correspondientes: Lat. (latitud), Long. (longitud), N (norte), S (sur), E (este), O (oeste), ejemplo: 10°31'01" Lat. N., 67°06'10" Long. O.

Envío de manuscritos para arbitraje:

Los *manuscritos iniciales* deben ser enviados en formato electrónico PDF o MSWord (al menos en la versión XP) a la siguiente dirección:

farautecienciauc@gmail.com

Hojas de estilo para artículos aceptados para su publicación:

El arte final de los artículos aceptados para su publicación debe respetar todos los requerimientos anteriores. Para ello se ponen a disposición de los autores las hojas de estilo correspondiente a cada formato (LATEX o Microsoft WORD), las cuales pueden ser obtenidas electrónicamente en la siguiente dirección electrónica:

<http://www.facyt.uc.edu.ve/investigacion/faraute>

Hoja de Estilos para LATEX:

CyT UC.sty

CyT UC.tex

Hoja de Estilos para WORD:

CyT UC.doc

Notas finales:

Los artículos serán sometidos a arbitraje en extenso previa publicación. Los artículos arbitrados sujetos a modificación, deben ser corregidos en un plazo de tres semanas para su incorporación en el número correspondiente. En caso de no ser entregados, permanecerán por un período de espera de seis meses como máximo, para la entrega de la versión corregida. Una vez vencido este plazo el trabajo será arbitrado nuevamente previa solicitud por parte del autor.

La Revista Faraute de Ciencias y Tecnología es el órgano de difusión y divulgación de las actividades científicas de la Facultad de Ciencias y Tecnología de la Universidad de Carabobo, la cual es de Acceso Abierto No comercial (AANC).

GUIDE FOR AUTHORS

“Faraute” Journal of the Experimental Faculty of Science and Technology (Facyt) publishes original papers of interest to a broad group of readers from the basic Science and Technology community.

A submission to Faraute UC must be the original contribution of the author(s) and must not be published elsewhere or be under consideration for another publication in its submitted or a substantially similar form in any language. Contributions in Spanish and English in the following categories may be submitted.

Types of contributions

- Research articles with original results in the basic science and technology. Maximum twelve (12) pages.
- Technical notes. Maximum five (5) pages.
- Reviews. Critical surveys of specific field of science and technology in which existing published information is analyzed and discussed. Maximum twenty (20) pages.
- Articles of special guest. Maximum five (5) pages.
- Letters to the editor regarding technical observations of articles published in the journal.

Preparation of text:

The format of the manuscript must follow the following recommendations:

- Type of letter: *Times New Roman* size 12, except the title in Spanish.
- Text of the article in double columns, except the title, the information of the author(s) and the abstract..
- Spacing: single,
- Size of paper: letter, with justified margins of 2.5 cm on either space.
- The article must have the following sections:
 - **Title:** In Spanish and English. The title in Spanish must be in Times New Roman, size 14, in capital letters, bold, centered, leaving one line size 12 between. The title I English will be bold; capital letters are to be used only for the initial the names, pronouns, verbs, adjectives and adverbs. Cursive words are allowed, only when referring to the scientific name of a species. For example:

**DETERMINACIÓN Y CARACTERIZACIÓN PARCIAL DE PROTEASAS
OBTENIDAS DEL FRUTO DE *Thevetia ahouai* (L.) A.DC.**
 - **Information of the author(s).** Place the first name, initial of the second one, last name and initial of the second one, in capital letters and centered. In the following line place the physical address of the authors, and in the last line the electronic address. Use numeric super indexes to identify authors and their addresses. In case of various authors having electronic addresses under the same domain, use the following format: {login1, login2, ... loginn}@domain. For example:

{sardito, hvasquez, jrodrigu@uc.edu.ve}

- **Abstract:** The abstract must contain a maximum of 150 words in one column, justified, without including bibliographic references. Afterwards, add between three (3) and five (5) keywords in alphabetical order.
- **Introduction:** This section should provide a comprehensible statement of the problem, a relevant literature of the subject, and the proposed approach or solution.
- **Body of the article:** The paper may include a section of material and methods, if necessary, and must contain both a result and a discussion section.
- **Conclusions:** A conclusions section is optional.
- **Acknowledgments:** This section is also optional.
- **Bibliography:** Bibliographical references will be listed in alphabetical order. They will include, for the first author, first surname and initial of the first name. For the rest of the authors, if there are any, initial of first name followed by first surname. After the authors names it follows the year of publication in parenthesis. The next information should be the title of the work referenced. Only the first letter of the first word should be in capital letters. Examples of possible referenced works are given in the following paragraphs:

- Periodic publications: Author or authors. Year. Title of the article. Abreviated name of the publication (in italics). Volume (Number): pages.

Baum, L. E., T. Petrie, G. Soules & N. Weiss. (1970). A maximization technique occurring in the statistical analysis of a probabilistic functions of Markov chains. *Ann. Math. Stat.* 41(1):164–171.

- Books: Author or authors. Year. Title of book. Publishers. City.

Bernardo, J. & A. Smith. (1994). *Bayesian theory*. Wiley. New York.

- Collaborative books: Author or authors. Year. Title of chapter. In: Title of book (editors), pages. Publishers. City.

Steyermark, J. (1994). Aspectos morfológicos del Parque Nacional Morrocoy. In: Flora del Parque Nacional Morrocoy (B. Manara, ed.), 66-103. Fundación Instituto Botánico de Venezuela y Agencia Española de Cooperación Internacional. Caracas, Venezuela.

- Proceedings or memoirs: Author or authors. Year. Name of presentation. Name of the Event. Institution where the event took place. City. Country. Pages.

Toyota, M. (1999). Caracterização química e citológica como subsídios à taxonomia de grupos-problema. VIII Reunião brasileira de ficologia. Sociedade brasileira de ficologia. Pernambuco. Brasil. 41.

- Thesis or promotion research projects: Author or authors. Year. Title. Type of work. Faculty. University. City, Country.

Vera, B. (2000). Estudio ficoflorístico de la región oriental del litoral central de Venezuela, Edo. Vargas, Venezuela. Trabajo de ascenso a la categoría de Asistente. Facultad de Ciencias. Universidad Central de Venezuela. Caracas, Venezuela.

- Document in electronic format: Cite according to indications of the electronic document or follow the formats indicated the norm ISO 690-2, available in the address:

http://www.ugr.es/~pwlac/G00_Referencias_electronicas.html

- The references must be cited in the article according to:
 - **One author:** Indicate the first surname of the author followed by the year of publication, all in parenthesis.
 (Vargas, 1999).....
 - **Two authors:** indicate the first surname of the first author, the symbol & and the surname of the second author, followed by the year of publication, all in parenthesis.
 (Vargas & Rodríguez, 2002).....
 - **More than two authors:** Indicate the last name of the first author, the add “*et al.*”, followed by the year of publication, all in parenthesis.
 (Vega *et al.*, 2005)
 - **More than two references:** Write each reference according to the previous information, separated by semi-colons (;). They should be sorted chronologically firstly and them alphabetically, all in parenthesis.
 (Vargas, 1999; Vargas & Rodríguez, 2002; Graterol *et al.*, 2005; Vega *et al.*, 2005)
- The headings of each section must be written in bold, and should be numbered.
- Figures, photographs and graphics should be identified “Fig.”. Tables should be called “Table”. These words should be placed under the figure or table aligned to the left. There should follow a description, in Times New Roman letters, size 10. The tables and figures must be numbered correlatively and be cited in the text in the same previous format.
- Figures will be inserted in the body of the article, and a digital copy should be handed in. They should be in JPEG or TIFF, a resolution of 300 dpi, and the file should be name as “Fig”, followed by the corresponding number of the article.
- Units of measure. The values must be expressed in the decimal metric system, according to the Systeme International d’Unités (SI). Most symbols are abbreviated, in common letters, except in some cases, as those derived from proper names, they do not take a period, and are separated from the numeric value by a space. Examples: cm (centimeter), h (hour), °C (Celsius).
- Equations must be identified with a number in parenthesis corresponding to the correlative numbers of the equation. These must be in cursive. For example:

$$I_F = I_B = -I_C = A^2 I_{A1} + A I_{A2} + I_{A0} = \frac{-J\sqrt{3}E_A}{Z_1 + Z_2} \quad (1)$$

To refer these equation in the manuscript should be identified as “Eq”.

- Algorithms or codes of program sources must be identified with the word “Algorithms”, followed by a number corresponding to the correlative number of the algorithms and the title identifies it, all centered in a placed I the lower part. Each line must be numbered as show below. These must respect indentation and be in “Courier” size 9. Example:

```
(1) void * sum(void * arg) {
(2) int * p; p = (int *)arg;
(3) pthread_mutex_lock(&m);
(4) s = s + *p;
(5) pthread_mutex_unlock(&m);
(6) }
Algorithm 1. Hilo que efectúa la suma.
```

- Names and geographical coordinates. Geographical names are only written in capital letters when they are part of a proper name, for example: Península de Paraguana, Río Cabrales. Coordinates must be cited using the corresponding abbreviation: Lat. (latitude), Long. (length), N (north), S (south), E (east), W (west), for example: 10°31’01” Lat. N., 67°06’10” Long. O.

Sending manuscripts for arbitration:

The initial manuscripts must be sent in PDF or MSW electronic format to the following address:

farautecienciauc@gmail.com

Style pages for articles accepted for publication:

The final art of the article accepted for publication must respect all the previous requirements. Therefore, the authors are offered the style pages that correspond to each format (LATEX or Microsoft WORD), which can be obtained at the following electronic address: <http://www.facyt.uc.edu.ve/investigacion/faraute>

For LATEX style pages:

CyT_UC.sty
CyT_UC.tex

For WORD style pages:

CyT_UC.doc

Final notes:

The articles will undergo complete arbitration prior to publication. The arbitrated articles subjected to modifications, must be corrected in three weeks to be included in the corresponding number. In case they are not turned in they will be held for a maximum of six months, awaiting for the corrected version. Once that period expires the article will be subjected to arbitration again upon the author’s request.

Faraute de Ciencias y Tecnología is the organ of diffusion and dissemination of the scientific activities of the Facultad de Ciencias y Tecnología of the Universidad de Carabobo, which is Non-commercial Open Access (AANC).



UNIVERSIDAD DE CARABOBO
FACULTAD EXPERIMENTAL DE CIENCIAS Y TECNOLOGÍA

AUTORIDADES UNIVERSITARIAS

Jessy Divo de Romero

Rectora

Ulises Rojas

Vicerrector Académico

José A. Ferreria

Vicerrector Administrativo

Pablo Aure

Secretario

AUTORIDADES DE LA FACULTAD
EXPERIMENTAL DE CIENCIAS Y TECNOLOGÍA

Profesor José Gregorio Marcano
Decano

Profesora Elizabeth Perozo
Directora Departamento de Química

Profesora Marilyn Giugni
Directora Departamento de Computación

Profesor Richard Barrios
Departamento de Física

Profesor Luis Rodríguez
Departamento de Matemática

Profesor Rafael Fernández
Departamento de Biología

Profesora Rosa de Muñoz
Coordinadora de la unidad de formación
Socio-Humanística

Profesor Reimer Romero
Director de Investigación

Profesor Juan Carlos Pereyra
Director de Postgrado

Profesor Orestes Montilla
Director de Asuntos Estudiantiles

Profesora Ysmel la Rosa
Directora de extensión

Profesora Miryelis Rojas
Directora de asuntos profesoraes

Profesora Rosa Bravo
Directora de currículum