



Estudio del Modelo Inflacionario α -atractor usando Métodos Semiclásicos

Clara Rojas¹

¹ Yachay Tech University, School of Physical Sciences and Nanotechnology, Hda. San José S/N y Proyecto Yachay, 100119, Urcuquí, Ecuador

*Clara Rojas: crojas@yachaytech.edu.ec

Recibido: 23/07/2025, Revisado: 05/08/2025, Aceptado: 12/08/2025

Resumen

En este trabajo resolvemos numéricamente y mediante el método de aproximación uniforme las ecuaciones de las perturbaciones escalares y tensoriales para el modelo inflacionario α -atractor. Este modelo inflacionario ha cobrado gran importancia porque permite describir tanto la expansión acelerada inicial del universo durante la época inflacionaria como la expansión acelerada actual, utilizando el mismo potencial. Una vez calculados los observables, concluimos que el método de aproximación uniforme ofrece resultados excelentes en comparación con la integración numérica.

Palabras Claves: Perturbaciones cosmológicas inflacionarias, Espectros de potencias escalar y tensorial, modelo inflacionario α -atractor.

Study of the α -attractors Inflationary Model Using Semiclassical Methods

Abstract

In this work, we solve the equations for scalar and tensor perturbations for the α -attractor inflationary model both numerically and using the Uniform Approximation Method. This inflationary model has gained great importance because it allows us to describe both the initial accelerated expansion of the universe during the inflationary epoch and the current accelerated expansion, using the same potential. Once the observables are calculated, we conclude that the uniform approximation method provides excellent results in comparison to numerical integration.

Keywords: Inflationary cosmological perturbations, scalar and tensor power spectra, α -attractor inflationary model.

1. Introducción

En este trabajo estudiamos el modelo inflacionario α -attractor usando el método de aproximación uniforme [1–7]. Estos métodos de aproximación semiclásicos han sido utilizados ampliamente en los últimos años para estudiar las perturbaciones cosmológicas [1–8]. El modelo inflacionario α -attractors posee una gran relevancia actualmente ya que establece una justificación teórica entre la época inflacionaria y la aceleración cósmica tardía, permitiendo describir tanto la inflación como la dinámica de la energía oscura usando un sólo potencial $V(\phi)$ [9, 10].

Cuando la inflación es producida por un campo escalar homogéneo, la ecuación dinámica para el inflatón ϕ está dada por la ecuación,

$$\ddot{\phi}(t) + 3H\dot{\phi}(t) + \frac{\partial V(\phi)}{\partial \phi} = 0, \quad (1)$$

donde el punto significa derivada respecto al tiempo t . La evolución del parámetro de Hubble $H(t) = \dot{a}(t)/a(t)$, donde $a(t)$ es el factor de escala, está dada por la ecuación de Friedmann, en unidades de Planck $M_{\text{Pl}} = 1$,

$$H^2 = \left[\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + V(\phi) \right]. \quad (2)$$

Una vez que se resuelven las ecuaciones de movimiento el siguiente paso es construir la ecuación de las perturbaciones escalares. Las perturbaciones escalares u_k en un universo dominado por un campo escalar ϕ satisfacen la ecuación diferencial [11],

$$u_k'' + \left(k^2 - \frac{z_S''}{z_S} \right) u_k = 0, \quad (3)$$

donde la prima indica derivada con respecto al tiempo conforme $\eta = \int dt/a$ y $z_S = a\phi'/\mathcal{H}$ con $\mathcal{H} = a'/a$.

Para las perturbaciones tensoriales, introducimos la función $v_k = ah$, donde h representa la amplitud de la onda gravitacional. Las perturbaciones tensoriales obedecen una ecuación diferencial de segundo orden análoga a la Eq. (3),

$$v_k'' + \left(k^2 - \frac{a''}{a} \right) v_k = 0. \quad (4)$$

Las soluciones de la Ecs. (3) y (4) exhiben el siguiente comportamiento asintótico,

$$u_k \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2k}} e^{-ik\eta}, \quad -k\eta \rightarrow \infty, \quad (5)$$

para escalas de longitud menores que el horizonte de Hubble y

$$u_k \rightarrow A_k z_S, \quad -k\eta \rightarrow 0, \quad (6)$$

para escalas mayores que el horizonte de Hubble.

Una vez que se resuelve las Es. (3) y (4) para diferentes valores del momento k , se puede calcular el espectro de potencias para las perturbaciones escalares y tensoriales a través de la relación,

$$P_S(k) = \lim_{k\eta \rightarrow \infty} \frac{k^3}{2\pi^2} \left| \frac{u_k(t)}{z_S(t)} \right|^2, \quad (7)$$

$$P_T(k) = \lim_{k\eta \rightarrow \infty} \frac{k^3}{2\pi^2} \left| \frac{v_k(t)}{a(t)} \right|^2. \quad (8)$$

El índice espectral para las perturbaciones escalares está definido por [12],

$$n_S(k) = 1 + \frac{d \ln P_S(k)}{d \ln k}. \quad (9)$$

Finalmente la relación la relación entre el espectro de potencias tensorial y escalar está dado por,

$$r(k) = 8 \frac{P_T(k)}{P_S(k)}. \quad (10)$$

2. Métodos y Resultados

2.1 El Método de Aproximación Uniforme

Para aplicar el método de aproximación uniforme se debe escribir las Ecs. (3) y (4) en el tiempo físico t y de la siguiente forma,

$$\ddot{U}_k + R_S(k, t)U_k = 0, \quad (11)$$

$$\ddot{V}_k + R_T(k, t)V_k = 0, \quad (12)$$

donde

$$R_S(k, t) = \frac{1}{a^2} \left[k^2 - \frac{(\dot{a}z_S \dot{a}z_S) a}{z_S} \right] + \frac{1}{4a^2} (a^2 - 2a\ddot{a}), \quad (13)$$

$$R_T(k, t) = \frac{1}{a^2} [k^2 - (\dot{a}^2 + a\ddot{a})] + \frac{1}{4a^2} (a^2 - 2a\ddot{a}), \quad (14)$$

adicionalmente $U(k)$ satisface las condiciones asintóticas,

$$U_k \rightarrow A_k \sqrt{a(t)} z_S(t), \quad kt \rightarrow \infty, \quad (15)$$

$$U_k \rightarrow \sqrt{\frac{a(t)}{2k}} \exp[-ik\eta(t)], \quad kt \rightarrow 0, \quad (16)$$

las condiciones asintóticas (15) y (16) también se cumplen para V_k .

Queremos obtener una solución aproximada de las ecuaciones diferenciales (11) y (12) en términos de las soluciones conocidas $w_S(\rho_S)$ y $w_T(\rho_T)$ de la ecuación de comparación [2, 3, 13, 14],

$$\frac{d^2 w_S(\rho_S)}{d\rho_S^2} + r_S(\rho_S)w_S(\rho_S) = 0, \quad (17)$$

$$\frac{d^2 w_T(\rho_T)}{d\rho_T^2} + r_T(\rho_T)w_T(\rho_T) = 0, \quad (18)$$

donde $r_S(\rho_S)$ se elige de manera similar a $R_S(k, t)$ y $r_T(\rho_T)$ se elige de manera similar a $R_T(k, t)$, con el mismo número de ceros, de modo que las soluciones de las ecuaciones (17) y (18) sean conocidas..

Las funciones $U(k, t)$ y $V(k, t)$ también deben ser similares a $w_S(\rho_S)$ y $w_T(\rho_T)$, y pueden relacionarse mediante [13],

$$U_k(k, t) \approx \left\{ \frac{r_S[\rho_S(k, t)]}{R_S(k, t)} \right\}^{1/4} w_S[\rho_S(k, t)], \quad (19)$$

$$V_k(k, t) \approx \left\{ \frac{r_T[\rho_T(k, t)]}{R_T(k, t)} \right\}^{1/4} w_T[\rho_T(k, t)]. \quad (20)$$

La condición de validez para que las Ecs. (19) y (20) sean una buena solución está dada por,

$$\left| \frac{1}{R_{S,T}(t)} \left(\frac{d\rho_{S,T}}{dt} \right) \frac{d^2}{dt^2} \left(\frac{d\rho_{S,T}}{dt} \right)^{1/2} \right| \ll 1. \quad (21)$$

Las Ecs. (19) y (20) proporcionan una aproximación uniforme para $U_k(k, t)$ y $V_k(k, t)$ en todo el rango de t , incluyendo los puntos de retorno.

El objetivo es encontrar una solución aproximada para las ecuaciones diferenciales (11) y (12) en una región donde $Q_S^2(k, t)$ y $Q_T^2(k, t)$ tienen una raíz simple en $t_{\text{ret}} = \tau_S$ y $t_{\text{ret}} = \tau_T$, respectivamente, de modo que $Q_{S,T}^2(k, t) > 0$ para $0 < t < t_{\text{ret}}$ y $Q_{S,T}^2(k, t) < 0$ para $t > t_{\text{ret}}$. Una función de comparación adecuada es $r_S(\rho) = \pm \rho_S$ y $r_T(\rho) = \pm \rho_T$, por lo que existen dos casos:

- a) En la región permitida clásicamente, $Q_{S,T}^2(k, t) > 0$, elegimos $r_{S,T}(\rho_{S,T}) = \rho_{S,T}$ y las ecuaciones de comparación a resolver son,

$$\frac{d^2 w_S}{d\rho_S^2} + \rho_S w_S = 0, \quad (22)$$

$$\frac{d^2 w_T}{d\rho_T^2} + \rho_T w_T = 0. \quad (23)$$

Las ecuaciones (22) y (23) corresponden a la ecuación de Airy, la cual tiene dos soluciones independientes $A_i(-\rho_{S,T})$ y $B_i(-\rho_{S,T})$ [15]. La relación de mapeo está dada por [13],

$$\frac{d\rho_{S,T}}{dt} = [Q_{S,T}^2(k, t)\rho_{S,T}]^{1/2}. \quad (24)$$

$$U_k(k, t) = \left[\frac{\rho_S^1(k, t)}{Q_S^2(k, t)} \right]^{1/4} \{C_1 A_i[-\rho_S^1(k, t)] + C_2 B_i[-\rho_S^1(k, t)]\}, \quad (25)$$

$$V_k(k, t) = \left[\frac{\rho_T^1(k, t)}{Q_T^2(k, t)} \right]^{1/4} \{C_1 A_i[-\rho_T^1(k, t)] + C_2 B_i[-\rho_T^1(k, t)]\}, \quad (26)$$

$$\frac{2}{3} [\rho_{S,T}^1(k, t)]^{3/2} = \int_t^{t_{\text{ret}}} [Q_{S,T}^2(k, t)]^{1/2} dt, \quad (27)$$

donde C_1 y C_2 son dos constantes que deben determinarse con la ayuda de las condiciones de frontera (16).

En el límite $kt \rightarrow \infty$, se emplean las fórmulas asintóticas [15],

$$A_i(-\rho) \sim \pi^{-1/2} \rho^{-1/4} \sin\left(\frac{2}{3}\rho^{3/2} + \frac{\pi}{4}\right), \quad (28)$$

$$B_i(-\rho) \sim \pi^{-1/2} \rho^{-1/4} \cos\left(\frac{2}{3}\rho^{3/2} + \frac{\pi}{4}\right), \quad (29)$$

se encuentra que $C_1 = \sqrt{\frac{\pi}{2}}, e^{-i\pi/4}$ y $C_2 = \sqrt{\frac{\pi}{2}}, e^{i\pi/4}$.

b) En la región prohibida clásicamente, $Q_{S,T}^2(k, t) < 0$, elegimos $r_{S,T}(\rho_{S,T}) = -\rho_{S,T}$ y resolvemos las ecuaciones de comparación,

$$\frac{d^2 w_S}{d\rho_S^2} - \rho_S w_S = 0, \quad (30)$$

$$\frac{d^2 w_T}{d\rho_T^2} - \rho_T w_T = 0. \quad (31)$$

Las ecuaciones (30) y (31) tienen la forma de la ecuación diferencial de Airy, la cual posee dos soluciones independientes $A_i(-\rho_{S,T})$ y $B_i(-\rho_{S,T})$ [15]. La relación de mapeo está dada por [13],

$$\frac{d\rho_{S,T}}{dt} = [-Q_{S,T}^2(k, t)\rho_{S,T}]^{1/2}. \quad (32)$$

Las soluciones aproximadas para las ecuaciones diferenciales (11) y (12) son

$$U_k(k, t) = [-\rho_S^r(k, t)Q_S^2(k, t)]^{1/4} \times \{C_1 A_i[\rho_S^r(k, t)] + C_2 B_i[\rho_S^r(k, t)]\}, \quad (33)$$

$$V_k(k, t) = [-\rho_T^r(k, t)Q_T^2(k, t)]^{1/4} \times \{C_1 A_i[\rho_T^r(k, t)] + C_2 B_i[\rho_T^r(k, t)]\}, \quad (34)$$

$$\frac{2}{3} [\rho_{S,T}^r(k, t)]^{3/2} = \int_{t_{\text{ret}}}^t [-Q_{S,T}^2(k, t)]^{1/2} dt. \quad (35)$$

Para el cálculo del espectro de potencias es necesario tomar el límite $k, t \rightarrow \infty$ de las soluciones (33) y (34). En este límite se tiene,

$$A_i(\rho) \sim \frac{\pi^{-1/2}}{2} \rho^{-1/4} \exp\left(-\frac{2}{3}\rho^{3/2}\right), \quad (36)$$

$$B_i(\rho) \sim \pi^{-1/2} \rho^{-1/4} \exp\left(\frac{2}{3}\rho^{3/2}\right). \quad (37)$$

Finalmente,

$$u_k^{\text{ua}}(t) \rightarrow \frac{C}{\sqrt{2a(t)}} [-Q_S^2(k, t)]^{-1/2} \times \left\{ \frac{1}{2} \exp\left(-\int_{\tau_S}^t [-Q_S^2(k, t)]^{1/2} dt\right) + i \exp\left(\int_{\tau_S}^t [-Q_S^2(k, t)]^{1/2} dt\right) \right\}, \quad (38)$$

$$v_k^{\text{ua}}(t) \rightarrow \frac{C}{\sqrt{2a(t)}} [-Q_T^2(k, t)]^{-1/2} \times \left\{ \frac{1}{2} \exp\left(-\int_{\tau_T}^t [-Q_T^2(k, t)]^{1/2} dt\right) + i \exp\left(\int_{\tau_T}^t [-Q_T^2(k, t)]^{1/2} dt\right) \right\}, \quad (39)$$

donde C es un factor de fase. Utilizando la parte creciente de las soluciones (38) y (39), se pueden calcular los espectros de potencias escalar y tensorial empleando el método de aproximación uniforme,

$$P_S^{\text{ua}}(k) = \lim_{-kt \rightarrow \infty} \frac{k^3}{2\pi^2} \left| \frac{u_k^{\text{ua}}(t)}{z_S(t)} \right|^2, \quad (40)$$

$$P_T^{\text{ua}}(k) = \lim_{-kt \rightarrow \infty} \frac{k^3}{2\pi^2} \left| \frac{v_k^{\text{ua}}(t)}{a(t)} \right|^2. \quad (41)$$

2.2 El modelo

Uno de los potenciales propuestos para este tipo de inflación está dado por un modelo α -attractor que tiene la siguiente forma [9],

$$V(\varphi) = \lambda e^{-n \tanh\left(\frac{\varphi}{\sqrt{6\alpha}}\right)}, \quad (42)$$

donde n y α son parámetros adimensionales, y n depende de α de la siguiente manera: $n = \kappa, \sqrt{6\alpha}$. Los parámetros n y α son fijados por Saló en $n = 124$ y $\alpha = 10^{-2}$ [9].

La forma de este potencial puede ser observada en la Figura 1,

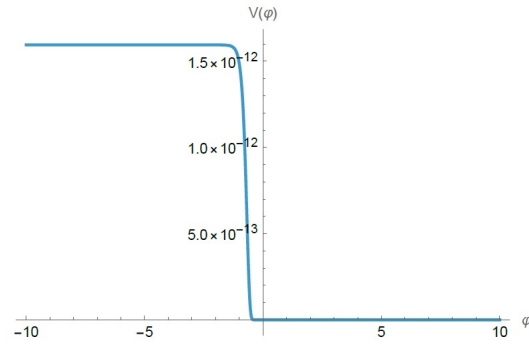


Figura 1. Potencial para el modelo inflacionario α -attractor.

2.3 Resultados

En esta sección se compara la solución numérica para el índice espectral escalar $n_S(k)$ y la relación tensor – escalar $r(k)$ con el resultado obtenido usando la aproximación uniforme, lo que se puede observar en la Tabla 1.

Método	$n_S(k)$	Error relativo	$r(k)$	Error relativo
Numérico	0,960653	–	$4,29 \times 10^{-5}$	–
Aproximación uniforme	0,960664	$1,14 \times 10^{-5}$	$4,28 \times 10^{-5}$	$2,33 \times 10^{-3}$

Tabla 1. Comparación de los valores para $n_S(k)$, $r(k)$, y sus errores relativos, obtenidos numéricamente y usando el método de aproximación uniforme para el modelo inflacionario α -attractor.

3. Conclusiones

En este artículo se propone el método de aproximación uniforme como un método novedoso para calcular el espectro de potencias escalar $P_S(k)$ y tensorial $P_T(k)$ para el modelo inflacionario α -attractors, así como los observables: el índice espectral escalar $n_S(k)$ y la relación tensor–escalar $r(k)$. Con la aproximación uniforme se obtuvo el índice espectral escalar $n_S(k)$ con un error relativo del orden de 10^{-5} y para la relación tensor–escalar $r(k)$ se obtuvo un error relativo del orden de 10^{-3} , respecto al resultado numérico. En base a estos resultados se puede afirmar que la aproximación uniforme es un método eficiente para estudiar las perturbaciones tanto escalares como tensoriales en cosmología inflacionaria.

Referencias

- [1] R. Casadio, F. Finelli, M. Luzzi, and G. Venturi. Improved WKB analysis of cosmological perturbations. *Phys. Rev. D*, 71:043517, 2005.
- [2] C. Rojas and V. M. Villalba. Computation of inflationary cosmological perturbations in the power-law inflationary model using the phase-integral method. *Phys. Rev. D*, 75(6):063518, 2007.
- [3] V. M. Villalba and C. Rojas. Application of the phase-integral method in some inflationary scenarios. *J. Phys.: Conf. Ser.*, 66:012034, 2007.
- [4] Clara Rojas and Víctor M. Villalba. Computation of inflationary cosmological perturbations

- in chaotic inflationary scenarios using the phase-integral method. *Phys. Rev. D*, 79:103502, 2009.
- [5] Clara Rojas and Víctor M. Villalba. Computation of the power spectrum in chaotic $\frac{1}{4}\lambda\phi^4$ inflation. *JCAP*, 003:1, 2012.
- [6] T. Tapia, M. Z. Mughal, and C. Rojas. Semi-classical analysis of the Starobinsky inflationary model. *Phys. Dark Univ.*, 30:100650, 2020.
- [7] T. Tapia and C. Rojas. Semiclassical analysis of the tensor power spectrum in the Starobinsky inflationary model. *Int. J. Mod. Phys. D*, 30:2150040, 2021.
- [8] C. Rojas. El Método de Fase Integral aplicado a Perturbaciones Cosmológicas Inflacionarias. *FARAUTE*, 3:27, 2008.
- [9] L. Aresté Saló, D. Benisty, E. I. Guendelman, and J. d. Haro. α -attractors in quintessential inflation motivated by supergravity. *Phys. Rev. D*, 103:123535, 2021.
- [10] Y. Akrami, S. Casas, S. Deng, and V. Vardanyan. Quintessential α -attractor inflation: forecasts for Stage IV galaxy surveys. *JCAP*, 2021:006, 2021.
- [11] F. Mukhanov, H. A. Feldman, and R. H. Brandenberger. Theory of cosmological perturbations. *Phys. Rep.*, 215(5-6):203–333, 1992.
- [12] A. R. Liddle and D. H. Lyth. *Cosmological Inflation and Large-Scale Structure*. Cambridge University Press, Cambridge, 2000.
- [13] M. Berry and K. E. MounT. Semiclassical Approximations in Wave Mechanics. *Rep. Prog. Phys.*, 35:315, 1972.
- [14] S. Habib, K. Heitmann, G. Jungman, and C. Molina-París. The inflationary perturbation spectrum. *Phys. Rev. Lett*, 89(28):281301, 2002.
- [15] M. Abramowitz and I. A. Stegun. *Handbook of Mathematical Functions*. Dover, New York, 1965.