



Fundamentos del Modelo Cosmológico FLRW: Derivación Completa desde Relatividad General

Ramírez, Leopoldo^{1,2*}; Falcón, Nelson²

¹Coordinación de Óptica, Instituto Nacional de Astrofísica, Óptica y Electrónica (INAOE), Tonantzintla, Puebla, México.

²Departamento de Física, Facultad de Ciencias y Tecnología, Universidad de Carabobo. Naganagua, Edo. Carabobo-Venezuela

*Autor de correspondencia: leopoldo.ramirez@inaoep.mx

Recibido: 27/07/2025, Revisado: 03/08/2025, Aceptado: 12/08/2025

Resumen

Se presenta una derivación sistemática y completa del modelo cosmológico de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker (FLRW) desde primeros principios de la relatividad general. Partiendo del principio cosmológico de homogeneidad e isotropía, se deduce la métrica FLRW, se calculan los tensores de curvatura correspondientes y se aplican las ecuaciones de campo de Einstein para obtener las ecuaciones de Friedmann que gobiernan la evolución del universo. Se incluyen las soluciones para diferentes épocas cosmológicas, el análisis de la evolución de los parámetros de densidad, y se discuten las implicaciones observacionales del modelo. Esta derivación proporciona los fundamentos teóricos completos del modelo cosmológico estándar Λ CDM, conectando la geometría diferencial con la física observable del cosmos.

Palabras Claves: Cosmología, métrica FLRW, ecuaciones de Friedmann, relatividad general, principio cosmológico.

Foundations of the FLRW Cosmological Model: Complete Derivation from General Relativity

Abstract

We present a systematic and complete derivation of the Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker (FLRW) cosmological model from first principles of general relativity. Starting from the cosmological principle of homogeneity and isotropy, we deduce the FLRW metric, calculate the corresponding curvature tensors, and apply Einstein's field equations to obtain the Friedmann equations that govern the evolution of the universe. Solutions for different cosmological epochs are included, along with analysis of the evolution of density parameters and discussion of the observational implications of the model. This derivation provides the complete theoretical foundations of the standard Λ CDM cosmological model, connecting differential geometry with the observable physics of the cosmos.

Keywords: Cosmology, FLRW metric, Friedmann equations, general relativity, cosmological principle.

1. Introducción

El modelo cosmológico de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker (FLRW) constituye el pilar fundamental de la cosmología moderna y el núcleo teórico

del paradigma cosmológico estándar. Este modelo elegante, basado en el principio cosmológico de homogeneidad e isotropía del universo a gran escala, proporciona el marco conceptual esencial para interpretar las observaciones cosmológicas más fun-

damentales, desde la expansión de Hubble hasta las sutiles anisotropías del fondo cósmico de microondas que revelan las semillas de la estructura cósmica [1].

La historia del modelo FLRW representa uno de los capítulos más extraordinarios de la física teórica del siglo XX. Alexander Friedmann, trabajando en 1922 con las ecuaciones de Einstein recién formuladas, fue el primero en descubrir que las ecuaciones de campo admitían soluciones dinámicas, revelando un universo en expansión mucho antes de que existiera evidencia observacional [2]. Georges Lemaître, el físico-sacerdote belga, profundizó estas ideas entre 1927-1931 y propuso el concepto revolucionario del “átomo primitivo.” “huevo cósmico”, anticipando lo que eventualmente se conocería como la teoría del Big Bang.

Howard Robertson (1935) y Arthur Walker (1937) completaron el marco geométrico al deducir rigurosamente todas las métricas compatibles con un universo homogéneo e isótropo, estableciendo las bases matemáticas que conectan la geometría del espacio-tiempo con la dinámica de la materia cósmica. Juntos, estos pioneros transformaron una ecuación matemática abstracta en un relato coherente del origen, evolución y destino del cosmos.

La derivación rigurosa de las ecuaciones de Friedmann a partir de la relatividad general no es meramente un ejercicio académico; representa la cristalización de uno de los triunfos más notables del intelecto humano en su búsqueda por comprender la naturaleza fundamental del universo. En estas ecuaciones se encuentra codificada la historia completa del cosmos, desde los primeros instantes después del Big Bang hasta las predicciones sobre su destino final.

En este trabajo presentamos una derivación sistemática y pedagógicamente estructurada del modelo FLRW desde primeros principios, siguiendo la secuencia lógica natural: principio cosmológico → métrica FLRW → símbolos de Christoffel → tensores de curvatura → ecuaciones de Einstein → ecuaciones de Friedmann → soluciones cosmológicas. Esta aproximación permite comprender tanto los aspectos geométricos fundamentales como las profundas implicaciones físicas del modelo, estableciendo conexiones claras entre la matemática abstracta y la realidad observable del universo.

2. El Principio Cosmológico y sus Fundamentos Observacionales

2.1 Formulación del Principio Cosmológico

El principio cosmológico establece que el universo es estadísticamente homogéneo e isótropo en escalas suficientemente grandes, típicamente superiores a ~ 100 Mpc. Esta suposición fundamental, que inicialmente podría parecer una simplificación drástica de la complejidad evidente del cosmos, ha encontrado una validación observacional extraordinaria a través de múltiples líneas de evidencia independientes.

La homogeneidad implica que las propiedades físicas del universo (densidad de materia, temperatura, campos electromagnéticos) son estadísticamente las mismas en todos los puntos del espacio cuando se promedian sobre volúmenes suficientemente grandes. Matemáticamente, esto se expresa como la invariancia bajo traslaciones espaciales:

$$\langle \rho(\vec{r}) \rangle = \langle \rho(\vec{r} + \vec{a}) \rangle \quad (1)$$

para cualquier vector de traslación \vec{a} y escalas mayores que la escala de homogeneidad.

La isotropía, por su parte, establece que no existe dirección privilegiada alguna en el espacio. Las propiedades físicas deben ser las mismas cuando se observan en cualquier dirección desde cualquier punto. Esta condición se expresa matemáticamente como invariancia bajo rotaciones:

$$\langle \rho(\hat{n}) \rangle = \langle \rho(R\hat{n}) \rangle \quad (2)$$

donde \hat{n} es un vector unitario direccional y R representa cualquier matriz de rotación.

2.2 Evidencia Observacional del Principio Cosmológico

La validación empírica del principio cosmológico proviene de diversas fuentes observacionales convergentes:

Fondo Cósmico de Microondas: Las observaciones del satélite Planck han revelado que la radiación del fondo cósmico de microondas presenta una isotropía extraordinaria, con anisotropías de temperatura de amplitud $\Delta T/T \sim 10^{-5}$ [3]. Esta uniformidad

representa la evidencia más directa de que el universo primitivo era extraordinariamente homogéneo e isotrópico.

Distribución de Galaxias a Gran Escala: Los análisis estadísticos de catálogos galácticos masivos como el Sloan Digital Sky Survey (SDSS) han demostrado que la función de correlación de galaxias alcanza la homogeneidad estadística en escalas superiores a los 100-150 Mpc. La transición de la estructura jerárquica (galaxias, cúmulos, supercúmulos) a la homogeneidad estadística confirma las predicciones del principio cosmológico.

Distribución de Cuásares: Los cuásares, siendo los objetos astronómicos más luminosos conocidos, permiten sondear la estructura del universo hasta corrimientos al rojo $z \sim 6$. Su distribución angular muestra isotropía estadística, confirmando que el principio cosmológico se mantiene válido incluso en el universo temprano.

2.3 Implicaciones Matemáticas de la Simetría Máxima

La combinación de homogeneidad e isotropía constituye lo que los geómetras llaman “simetría máxima” para un espacio tridimensional. Esta condición impone restricciones algebraicas extremadamente fuertes sobre la forma posible del tensor métrico, reduciendo el número de funciones independientes que describen la geometría del espacio-tiempo de las infinitas componentes generales a una sola función del tiempo: el factor de escala cósmico $a(t)$.

Esta “democratización matemática” del cosmos no es simplemente una conveniencia calculacional; refleja una profunda simplicidad subyacente en la arquitectura del universo que permite que las leyes físicas más complejas se reduzcan a un conjunto manejable de ecuaciones diferenciales.

3. Derivación Detallada de la Métrica FLRW

3.1 Construcción Geométrica desde Simetrías

Consideremos una variedad cuatro-dimensional \mathcal{M} cuyo tensor métrico $g_{\mu\nu}$ satisface las condiciones de homogeneidad e isotropía. El elemento de línea

fundamental debe admitir una foliación natural mediante hipersuperficies de tiempo constante, cada una caracterizada por simetría esférica máxima.

El punto de partida es el reconocimiento de que la métrica debe tener la forma general:

$$ds^2 = g_{00}(t)dt^2 + 2g_{0i}(t, x^j)dt dx^i + g_{ij}(t, x^k)dx^i dx^j \quad (3)$$

donde los índices latinos recorren las coordenadas espaciales $i, j, k = 1, 2, 3$. **Paso 1: Normalización Temporal**

La condición de que observadores comóviles (aquellos en reposo respecto al flujo de Hubble) sigan líneas de tiempo coordinado requiere que el tiempo propio coincida con el tiempo coordinado para estos observadores. Esto establece:

$$g_{00} = 1 \quad (4)$$

Paso 2: Ortogonalidad Espacio-Temporal

La homogeneidad implica que no puede existir un flujo preferencial de materia en ninguna dirección espacial. Esto requiere que las hipersuperficies de tiempo constante sean ortogonales a las líneas temporales:

$$g_{0i} = 0 \quad \text{para todo } i = 1, 2, 3 \quad (5)$$

Paso 3: Factorización del Factor de Escala

Para una hipersuperficie temporal específica $t = t_0 = \text{constante}$, el elemento de línea espacial se expresa como:

$$ds_{t_0}^2 = -h_{ij}(t_0, x^k)dx^i dx^j \quad (6)$$

La condición de homogeneidad e isotropía impone que para cualquier otra hipersuperficie temporal $t = t_1$, la métrica espacial debe mantener la misma forma geométrica, difiriendo únicamente por un factor de escala temporal:

$$ds_{t_1}^2 = f(t_0, t_1)h_{ij}(t_0, x^k)dx^i dx^j \quad (7)$$

Generalizando para un tiempo arbitrario t :

$$ds_t^2 = -a^2(t)h_{ij}(x^k)dx^i dx^j \quad (8)$$

donde $a(t)$ es el factor de escala cósmico que encapsula toda la dinámica temporal de la expansión universal.

3.2 Implementación de la Simetría Esférica

Para espacios tridimensionales con simetría esférica máxima (isotropía completa alrededor de cualquier punto), la métrica espacial h_{ij} debe adoptar la forma canónica en coordenadas esféricas:

$$dl^2 = e^{2\Delta(r)} dr^2 + r^2 d\Omega^2 \quad (9)$$

donde $\Delta(r)$ es una función de la coordenada radial que determina la curvatura intrínseca del espacio, y el elemento angular se define como:

$$d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2 \quad (10)$$

3.3 Determinación del Parámetro de Curvatura

Para determinar la función $\Delta(r)$ que caracteriza la curvatura intrínseca del espacio tridimensional, utilizamos la condición fundamental de que las hipersuperficies espaciales deben poseer curvatura constante como consecuencia directa del principio cosmológico.

Para una métrica espacial tridimensional con simetría esférica, el escalar de curvatura de Ricci tridimensional se expresa como:

$${}^{(3)}R = \frac{2}{r^2} \left(1 - \frac{d}{dr}(re^{-2\Delta}) \right) \quad (11)$$

La condición de curvatura constante impone:

$${}^{(3)}R = 6k = \text{constante} \quad (12)$$

donde k es el parámetro de curvatura espacial.

Desarrollando la derivada:

$$\frac{d}{dr}(re^{-2\Delta(r)}) = e^{-2\Delta(r)} - 2re^{-2\Delta(r)} \frac{d\Delta(r)}{dr} \quad (13)$$

Sustituyendo en la ecuación de curvatura constante y resolviendo la ecuación diferencial resultante con la condición de regularidad en el origen, obtenemos:

$$e^{2\Delta(r)} = \frac{1}{1 - kr^2} \quad (14)$$

3.4 La Métrica FLRW Completa

Combinando todos los elementos desarrollados, la métrica de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker completa se expresa como:

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t) \left[\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \right] \quad (15)$$

Esta forma canónica describe completamente la geometría del espacio-tiempo cosmológico bajo las suposiciones del principio cosmológico.

3.5 Interpretación Geométrica de los Parámetros

Los diferentes valores del parámetro de curvatura k corresponden a geometrías espaciales fundamentalmente distintas:

$$k = +1 : \text{ Geometría esférica (universo cerrado) } \quad (16)$$

$$k = 0 : \text{ Geometría euclidiana (universo plano) } \quad (17)$$

$$k = -1 : \text{ Geometría hiperbólica (universo abierto) } \quad (18)$$

Para $k = +1$, las hipersuperficies espaciales son esferas tridimensionales con volumen finito. Para $k = 0$, son espacios euclidianos planos con volumen infinito. Para $k = -1$, son espacios hiperbólicos con curvatura negativa y volumen infinito.

Geometrías del Espacio-Tiempo en Cosmología FLRW

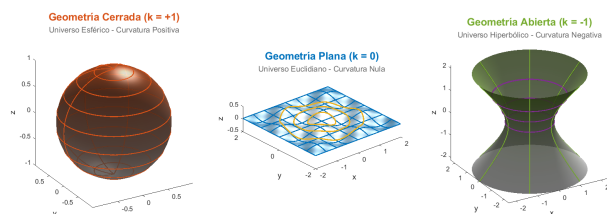


Figura 1. Geometrías del espacio-tiempo en cosmología FLRW. Se muestran las tres posibles geometrías espaciales: cerrada ($k = +1$, esférica), plana ($k = 0$, euclidiana) y abierta ($k = -1$, hiperbólica). Cada geometría determina el destino final del universo.

4. Análisis Completo de los Tensores de Curvatura

4.1 Componentes del Tensor Métrico y sus Inversas

Del elemento de línea FLRW obtenemos las componentes del tensor métrico:

$$g_{00} = 1 \quad g^{00} = 1 \quad (19)$$

$$g_{11} = -\frac{a^2(t)}{1-kr^2} \quad g^{11} = -\frac{1-kr^2}{a^2(t)} \quad (20)$$

$$g_{22} = -a^2(t)r^2 \quad g^{22} = -\frac{1}{a^2(t)r^2} \quad (21)$$

$$g_{33} = -a^2(t)r^2 \sin^2 \theta \quad g^{33} = -\frac{1}{a^2(t)r^2 \sin^2 \theta} \quad (22)$$

Todas las componentes no diagonales son nulas debido a la ortogonalidad inherente del sistema de coordenadas FLRW.

4.2 Derivadas del Tensor Métrico

Para calcular los símbolos de Christoffel, necesitamos las derivadas parciales del tensor métrico. Las derivadas no nulas son:

Derivadas temporales:

$$\partial_0 g_{11} = -\frac{2a(t)\dot{a}(t)}{1-kr^2} \quad (23)$$

$$\partial_0 g_{22} = -2a(t)\dot{a}(t)r^2 \quad (24)$$

$$\partial_0 g_{33} = -2a(t)\dot{a}(t)r^2 \sin^2 \theta \quad (25)$$

Derivadas radiales:

$$\partial_1 g_{11} = -\frac{a^2(t) \cdot 2kr}{(1-kr^2)^2} \quad (26)$$

$$\partial_1 g_{22} = -2a^2(t)r \quad (27)$$

$$\partial_1 g_{33} = -2a^2(t)r \sin^2 \theta \quad (28)$$

Derivada angular:

$$\partial_2 g_{33} = -2a^2(t)r^2 \sin \theta \cos \theta \quad (29)$$

4.3 Cálculo Detallado de los Símbolos de Christoffel

Los símbolos de Christoffel se calculan mediante la fórmula fundamental:

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} = \frac{1}{2}g^{\lambda\sigma}(\partial_{\mu}g_{\nu\sigma} + \partial_{\nu}g_{\mu\sigma} - \partial_{\sigma}g_{\mu\nu}) \quad (30)$$

Debido a las simetrías de FLRW, de los 64 símbolos posibles, solo 12 son no nulos:

Grupo 1: Símbolos Temporales (Expansión Cósmica)

$$\Gamma_{11}^0 = \frac{1}{2}g^{00}(-\partial_0 g_{11}) = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \frac{2a(t)\dot{a}(t)}{1-kr^2} = \frac{a\dot{a}}{1-kr^2} \quad (31)$$

$$\Gamma_{22}^0 = \frac{1}{2}g^{00}(-\partial_0 g_{22}) = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 2a(t)\dot{a}(t)r^2 = a\dot{a}r^2 \quad (32)$$

$$\Gamma_{33}^0 = \frac{1}{2}g^{00}(-\partial_0 g_{33}) = a\dot{a}r^2 \sin^2 \theta \quad (33)$$

Grupo 2: Símbolos Radiales (Curvatura y Expansión)

$$\Gamma_{01}^1 = \Gamma_{10}^1 = \frac{1}{2}g^{11}(\partial_0 g_{11}) = \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{1-kr^2}{a^2(t)}\right) \cdot \left(-\frac{2a(t)\dot{a}(t)}{1-kr^2}\right) = \frac{\dot{a}}{a} \quad (34)$$

$$\Gamma_{11}^1 = \frac{1}{2}g^{11}(\partial_1 g_{11}) = \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{1-kr^2}{a^2(t)}\right) \cdot \left(-\frac{a^2(t) \cdot 2kr}{(1-kr^2)^2}\right) = \frac{kr}{1-kr^2} \quad (35)$$

$$\Gamma_{22}^1 = \frac{1}{2}g^{11}(-\partial_1 g_{22}) = -r(1-kr^2) \quad (36)$$

$$\Gamma_{33}^1 = \frac{1}{2} g^{11} (-\partial_1 g_{33}) = -r(1 - kr^2) \sin^2 \theta \quad (37)$$

Grupos 3 y 4: Símbolos Angulares

$$\Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^2 = \frac{1}{r} \quad (38)$$

$$\Gamma_{33}^2 = -\sin \theta \cos \theta \quad (39)$$

$$\Gamma_{13}^3 = \Gamma_{31}^3 = \frac{1}{r} \quad (40)$$

$$\Gamma_{23}^3 = \Gamma_{32}^3 = \cot \theta \quad (41)$$

$$-\frac{\partial \Gamma_{0\rho}^\rho}{\partial x^0} = -\frac{\partial}{\partial t} (\Gamma_{01}^1 + \Gamma_{02}^2 + \Gamma_{03}^3) \quad (44)$$

$$= -3 \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\dot{a}}{a} \right) \quad (45)$$

$$= -3 \left(\frac{\ddot{a}}{a} - \frac{\dot{a}^2}{a^2} \right) \quad (46)$$

El cuarto término contribuye:

$$-\Gamma_{0\sigma}^\rho \Gamma_{0\rho}^\sigma = -3 \left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 \quad (47)$$

4.4 Interpretación Física de los Símbolos de Christoffel

Cada símbolo de Christoffel tiene una interpretación física profunda:

- Γ_{ij}^0 : Codifican cómo la expansión del universo afecta el flujo del tiempo - Γ_{01}^1 : Representa directamente el parámetro de Hubble, la velocidad de expansión - Γ_{11}^1 : Captura los efectos de la curvatura espacial intrínseca - $\Gamma_{22}^1, \Gamma_{33}^1$: Representan fuerzas centrípetas cósmicas modificadas por la curvatura - Los símbolos angulares capturan la geometría esférica intrínseca

4.5 Cálculo del Tensor de Ricci

El tensor de Ricci se obtiene por contracción del tensor de Riemann:

$$R_{\mu\nu} = \frac{\partial \Gamma_{\mu\nu}^\rho}{\partial x^\rho} - \frac{\partial \Gamma_{\mu\rho}^\rho}{\partial x^\nu} + \Gamma_{\mu\nu}^\rho \Gamma_{\rho\sigma}^\sigma - \Gamma_{\mu\sigma}^\rho \Gamma_{\nu\rho}^\sigma \quad (42)$$

Componente Temporal R_{00} :

El cálculo detallado procede como:

$$R_{00} = \frac{\partial \Gamma_{00}^\rho}{\partial x^\rho} - \frac{\partial \Gamma_{0\rho}^\rho}{\partial x^0} + \Gamma_{00}^\rho \Gamma_{\rho\sigma}^\sigma - \Gamma_{0\sigma}^\rho \Gamma_{\rho 0}^\sigma \quad (43)$$

Dado que $\Gamma_{00}^\rho = 0$ para todos los ρ , el primer y tercer términos se anulan. El segundo término es:

Por tanto:

$$R_{00} = -3 \left(\frac{\ddot{a}}{a} - \frac{\dot{a}^2}{a^2} \right) - 3 \frac{\dot{a}^2}{a^2} = -3 \frac{\ddot{a}}{a} \quad (48)$$

Componentes Espaciales:

Mediante cálculos similares, las componentes espaciales resultan:

$$R_{11} = -\frac{1}{1 - kr^2} \left(\frac{\ddot{a}}{a} + 2 \frac{\dot{a}^2}{a^2} + 2 \frac{k}{a^2} \right) \quad (49)$$

$$R_{22} = -r^2 \left(\frac{\ddot{a}}{a} + 2 \frac{\dot{a}^2}{a^2} + 2 \frac{k}{a^2} \right) \quad (50)$$

$$R_{33} = -r^2 \sin^2 \theta \left(\frac{\ddot{a}}{a} + 2 \frac{\dot{a}^2}{a^2} + 2 \frac{k}{a^2} \right) \quad (51)$$

4.6 Escalar de Ricci

El escalar de Ricci se calcula como la traza del tensor de Ricci:

$$R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} \quad (52)$$

$$= g^{00} R_{00} + g^{11} R_{11} + g^{22} R_{22} + g^{33} R_{33} \quad (53)$$

Sustituyendo y simplificando:

$$R = -6 \left(\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{k}{a^2} \right) \quad (54)$$

5. Aplicación de las Ecuaciones de Campo de Einstein

5.1 El Tensor de Energía-Momento para un Fluido Perfecto

En cosmología, el contenido material del universo se modela como un fluido perfecto caracterizado por una densidad de energía $\rho(t)$ y una presión $p(t)$, ambas funciones únicamente del tiempo cósmico debido a la homogeneidad.

El tensor de energía-momento para un fluido perfecto en relatividad general se expresa como:

$$T_{\mu\nu} = (\rho + p)u_\mu u_\nu + pg_{\mu\nu} \quad (55)$$

donde u_μ es la cuadrivelocidad del fluido, que satisface la condición de normalización:

$$u_\mu u^\mu = 1 \quad (56)$$

Para observadores comóviles en el sistema de coordenadas FLRW, la cuadrivelocidad tiene componentes:

$$u^\mu = (1, 0, 0, 0), \quad u_\mu = (1, 0, 0, 0) \quad (57)$$

Por tanto, las componentes del tensor de energía-momento resultan:

$$T_{00} = (\rho + p) \cdot 1 \cdot 1 + p \cdot 1 = \rho \quad (58)$$

$$T_{11} = (\rho + p) \cdot 0 \cdot 0 + p \cdot g_{11} = pg_{11} \quad (59)$$

$$T_{22} = pg_{22} \quad (60)$$

$$T_{33} = pg_{33} \quad (61)$$

con todas las componentes no diagonales nulas.

5.2 Cálculo del Tensor de Einstein

El tensor de Einstein se define como:

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R \quad (62)$$

Componente G_{00} :

$$G_{00} = R_{00} - \frac{1}{2}g_{00}R \quad (63)$$

$$= -3\frac{\ddot{a}}{a} - \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \left(-6 \left(\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{k}{a^2} \right) \right) \quad (64)$$

$$= -3\frac{\ddot{a}}{a} + 3 \left(\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{k}{a^2} \right) \quad (65)$$

$$= 3 \left(\frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{k}{a^2} \right) \quad (66)$$

Definiendo el parámetro de Hubble $H = \dot{a}/a$:

$$G_{00} = 3 \left(H^2 + \frac{k}{a^2} \right) \quad (67)$$

Componente G_{11} :

$$G_{11} = R_{11} - \frac{1}{2}g_{11}R \quad (68)$$

$$= -\frac{1}{1-kr^2} \left(\frac{\ddot{a}}{a} + 2\frac{\dot{a}^2}{a^2} + 2\frac{k}{a^2} \right) \quad (69)$$

$$- \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{a^2}{1-kr^2} \right) \cdot \left(-6 \left(\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{k}{a^2} \right) \right) \quad (70)$$

Simplificando:

$$G_{11} = -\frac{a^2}{1-kr^2} \left(2\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{k}{a^2} \right) \quad (71)$$

Componentes G_{22} y G_{33} :

Por simetría esférica:

$$G_{22} = -a^2 r^2 \left(2\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{k}{a^2} \right) \quad (72)$$

$$G_{33} = -a^2 r^2 \sin^2 \theta \left(2\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{k}{a^2} \right) \quad (73)$$

5.3 Derivación de las Ecuaciones de Friedmann

Las ecuaciones de campo de Einstein establecen:

$$G_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu} \quad (74)$$

donde G es la constante gravitacional de Newton.

Primera Ecuación de Friedmann (Ecuación 00):

$$G_{00} = 8\pi G T_{00} \quad (75)$$

$$3 \left(H^2 + \frac{k}{a^2} \right) = 8\pi G \rho \quad (76)$$

Dividiendo por 3:

$$H^2 + \frac{k}{a^2} = \frac{8\pi G \rho}{3} \quad (77)$$

Esta es la primera ecuación de Friedmann, que relaciona la tasa de expansión del universo con su densidad de energía y curvatura espacial.

Segunda Ecuación de Friedmann (Ecuación 11):

$$G_{11} = 8\pi G T_{11} \quad (78)$$

$$-\frac{a^2}{1 - kr^2} \left(2\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{k}{a^2} \right) = 8\pi G p \left(-\frac{a^2}{1 - kr^2} \right) \quad (79)$$

Simplificando:

$$2\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{k}{a^2} = -8\pi G p \quad (80)$$

Usando la primera ecuación de Friedmann para eliminar $H^2 + k/a^2$:

$$2\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{8\pi G \rho}{3} = -8\pi G p \quad (81)$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}(\rho + 3p) \quad (82)$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}(\rho + 3p) \quad (83)$$

Esta es la segunda ecuación de Friedmann, que determina la aceleración de la expansión cósmica.

5.4 Ecuación de Continuidad

La conservación del tensor energía-momento ($\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0$) en el espacio-tiempo FLRW conduce a la ecuación de continuidad:

$$\dot{\rho} + 3H(\rho + p) = 0 \quad (84)$$

Esta ecuación expresa la conservación local de la energía en el universo en expansión.

6. Interpretación Física de las Ecuaciones de Friedmann

6.1 Significado de la Primera Ecuación

La primera ecuación de Friedmann:

$$H^2 + \frac{k}{a^2} = \frac{8\pi G \rho}{3} \quad (85)$$

tiene una interpretación física profunda. El lado izquierdo representa los términos cinemáticos:

- H^2 : El cuadrado de la tasa de expansión actual - k/a^2 : La contribución de la curvatura espacial (que decrece con la expansión)

El lado derecho es proporcional a la densidad de energía total del universo. Esta ecuación establece que la velocidad de expansión del universo está determinada completamente por su contenido energético y su geometría espacial.

6.2 Significado de la Segunda Ecuación

La segunda ecuación de Friedmann:

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}(\rho + 3p) \quad (86)$$

determina si el universo acelera o decelera su expansión. El término $(\rho + 3p)$ es la densidad de energía gravitacionalmente activa:

- Si $\rho + 3p > 0$: $\ddot{a} < 0$ (expansión desacelerada) - Si $\rho + 3p < 0$: $\ddot{a} > 0$ (expansión acelerada)

La presión contribuye tres veces más que la densidad a la gravedad en relatividad general, lo que permite la expansión acelerada con energía oscura ($p = -\rho$).

6.3 Casos Físicos Importantes

Materia No Relativista ($p \ll \rho$):

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}\rho < 0 \Rightarrow \text{Desaceleración} \quad (87)$$

Radiación ($p = \rho/3$):

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}(\rho + p) = -\frac{8\pi G}{3}\rho < 0 \Rightarrow \text{Desaceleración intensa} \quad (88)$$

Energía Oscura ($p = -\rho$):

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}(\rho - 3\rho) = \frac{8\pi G}{3}\rho > 0 \Rightarrow \text{Aceleración} \quad (89)$$

7. Soluciones para Diferentes Épocas Cosmológicas

7.1 Soluciones Generales para Fluidos Barotrópicos

Para fluidos que satisfacen una ecuación de estado de la forma $p = \omega\rho$, donde ω es constante, la ecuación de continuidad se integra para dar:

$$\dot{\rho} + 3H\rho(1 + \omega) = 0 \quad (90)$$

Integrando:

$$\frac{d\rho}{\rho} = -3(1 + \omega)\frac{da}{a} \quad (91)$$

$$\ln \rho = -3(1 + \omega) \ln a + \text{const} \quad (92)$$

Por tanto:

$$\rho(a) = \rho_0 a^{-3(1+\omega)} \quad (93)$$

donde ρ_0 es la densidad actual.

7.2 Épocas Cosmológicas Específicas

Era de la Materia ($\omega = 0$):

$$\rho_m(a) = \rho_{m0} a^{-3} \quad (94)$$

Para un universo plano dominado por materia, la primera ecuación de Friedmann da:

$$H^2 = \frac{8\pi G \rho_{m0}}{3} a^{-3} \quad (95)$$

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G \rho_{m0}}{3} a^{-3} \quad (96)$$

Separando variables e integrando:

$$\int a^{1/2} da = \sqrt{\frac{8\pi G \rho_{m0}}{3}} \int dt \quad (97)$$

$$\frac{2}{3} a^{3/2} = \sqrt{\frac{8\pi G \rho_{m0}}{3}} t + C \quad (98)$$

Con la condición inicial $a(0) = 0$:

$$a(t) = \left(\frac{9 \cdot 8\pi G \rho_{m0}}{4 \cdot 3} t^2\right)^{1/3} = (6\pi G \rho_{m0})^{1/3} t^{2/3} \quad (99)$$

Era de la Radiación ($\omega = 1/3$):

$$\rho_r(a) = \rho_{r0} a^{-4} \quad (100)$$

Siguiendo el mismo procedimiento:

$$a(t) = (32\pi G \rho_{r0})^{1/4} t^{1/2} \quad (101)$$

Era de la Energía Oscura ($\omega = -1$):

$$\rho_\Lambda = \text{constante} \quad (102)$$

La ecuación de Friedmann da:

$$H^2 = \frac{8\pi G \rho_\Lambda}{3} = H_\Lambda^2 = \text{constante} \quad (103)$$

Integrando:

$$a(t) = a_0 e^{H_\Lambda(t-t_0)} \quad (104)$$

Esta es la solución de de Sitter, que describe expansión exponencial.

Época	ω	$\rho(a)$	$a(t)$	Desaceleración
Inflación	-1	$\rho = \text{const}$	e^{Ht}	$q = -1$
Radiación	1/3	$\rho \propto a^{-4}$	$t^{1/2}$	$q = +1$
Materia	0	$\rho \propto a^{-3}$	$t^{2/3}$	$q = +1/2$
Energía oscura	-1	$\rho = \text{const}$	e^{Ht}	$q = -1$

Tabla 1. Soluciones de las ecuaciones de Friedmann para diferentes épocas cosmológicas en un universo plano ($k = 0$). El parámetro de desaceleración se define como $q = -\ddot{a}a/\dot{a}^2$.

7.3 El Parámetro de Densidad y la Geometría del Universo

Definimos el parámetro de densidad crítica:

$$\rho_c(t) = \frac{3H^2(t)}{8\pi G} \quad (105)$$

Esta es la densidad necesaria para un universo espacialmente plano ($k = 0$).

El parámetro de densidad adimensional se define como:

$$\Omega(t) = \frac{\rho(t)}{\rho_c(t)} \quad (106)$$

De la primera ecuación de Friedmann:

$$\Omega(t) - 1 = \frac{k}{a^2 H^2} \quad (107)$$

Esta relación establece la conexión fundamental entre la densidad del universo y su geometría espacial:

$$\Omega > 1 \Rightarrow k = +1 \quad (\text{universo cerrado}) \quad (108)$$

$$\Omega = 1 \Rightarrow k = 0 \quad (\text{universo plano}) \quad (109)$$

$$\Omega < 1 \Rightarrow k = -1 \quad (\text{universo abierto}) \quad (110)$$

8. El Modelo Cosmológico Estándar Λ CDM

8.1 Componentes del Universo Actual

Las observaciones cosmológicas contemporáneas indican que el universo actual está dominado por tres componentes principales:

1. Materia bariónica ($\Omega_b \approx 0,05$): Protones, neutrones, electrones
2. Materia oscura fría ($\Omega_{dm} \approx 0,26$): Partículas no bariónicas no relativistas
3. Energía oscura ($\Omega_\Lambda \approx 0,69$): Componente con presión negativa

La densidad total de materia es $\Omega_m = \Omega_b + \Omega_{dm} \approx 0,31$.

8.2 Evolución del Parámetro de Hubble

Para un universo conteniendo materia no relativista y energía oscura:

$$H^2(z) = H_0^2 [\Omega_{m0}(1+z)^3 + \Omega_{\Lambda 0}] \quad (111)$$

donde z es el corrimiento al rojo cosmológico definido por:

$$1+z = \frac{a_0}{a(t)} \quad (112)$$

La figura (2) ilustra de manera cuantitativa el destino de universos con diferentes balances entre materia y energía oscura. Los modelos con $\Omega_\Lambda < 0$ (energía de vacío atractiva) alcanzan un tamaño máximo determinado por $a_{max} = (\Omega_m/(\Omega_m - 1))^{1/3}$ y posteriormente

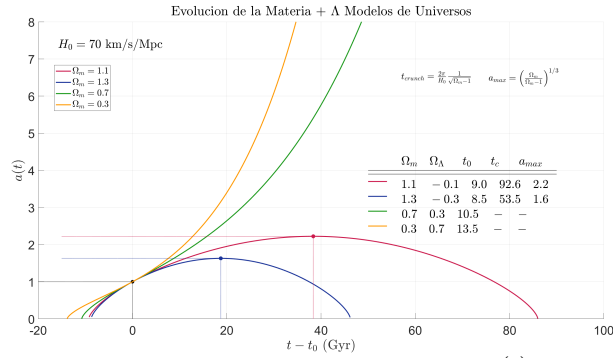


Figura 2. Evolución del factor de escala $a(t)$ para modelos cosmológicos planos con diferentes combinaciones de Ω_m y $\Omega_\Lambda = 1 - \Omega_m$. Las curvas roja ($\Omega_m = 1,1$, $\Omega_\Lambda = -0,1$) y azul ($\Omega_m = 1,3$, $\Omega_\Lambda = -0,3$) representan universos con energía oscura negativa que alcanzan un factor de escala máximo a_{max} y posteriormente colapsan en un Big Crunch en los tiempos t_{crunch} indicados. Las curvas verde ($\Omega_m = 0,7$, $\Omega_\Lambda = 0,3$) y naranja ($\Omega_m = 0,3$, $\Omega_\Lambda = 0,7$) muestran universos con energía oscura positiva que experimentan expansión acelerada eterna, siendo la curva naranja la más compatible con las observaciones actuales.

colapsan en un tiempo $t_{crunch} = (2\pi/H_0)/\sqrt{\Omega_m - 1}$. En contraste, los modelos con $\Omega_\Lambda > 0$ evolucionan asintóticamente hacia expansión exponencial tipo de Sitter. El modelo naranja, con parámetros cercanos a los observados en nuestro universo, predice una edad actual de aproximadamente 13.5 Gyr y expansión acelerada sin límite temporal, consistente con las observaciones de supernovas tipo Ia que revelaron la expansión acelerada del cosmos.

8.3 Historia Térmica y Cronología del Universo

El modelo FLRW predice una secuencia específica de épocas cosmológicas:

Era Primordial ($z > 10^{10}$) : - Nucleosíntesis primordial ($z \approx 10^9$) - Producción de elementos ligeros (H, He, Li)

Era de la Radiación ($10^4 < z < 10^{10}$) : - Universo dominado por fotones y neutrinos - Temperatura $T \propto (1+z)$

Era de la Materia ($0,3 < z < 10^4$) : - Recombinación ($z \approx 1100$) - Formación de estructura jerárquica -

Formación de primeras estrellas y galaxias

Era de la Energía Oscura ($z < 0,3$) : - Transición a expansión acelerada - Época actual del universo

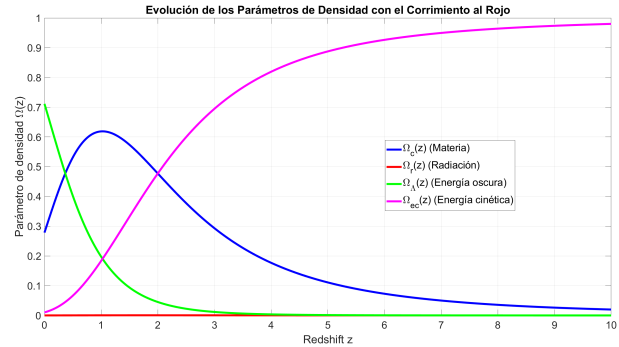


Figura 3. Evolución de los parámetros de densidad con el corrimiento al rojo. Se observa cómo la energía cinética domina en el universo muy temprano, seguida por la radiación, luego la materia, y finalmente la energía oscura en la época actual. Las transiciones entre épocas ocurren cuando las densidades se igualan.

8.4 Parámetros Cosmológicos del Modelo Estándar

Las observaciones del satélite Planck (2020) han determinado los parámetros cosmológicos con precisión extraordinaria:

$$H_0 = 67,4 \pm 0,5 \text{ km s}^{-1} \text{Mpc}^{-1} \quad (113)$$

$$\Omega_{m0} = 0,315 \pm 0,007 \quad (114)$$

$$\Omega_{\Lambda 0} = 0,685 \pm 0,007 \quad (115)$$

$$\Omega_{k0} = 0,001 \pm 0,002 \quad (\text{universo plano}) \quad (116)$$

$$t_0 = 13,8 \pm 0,1 \text{ Gyr} \quad (\text{edad del universo}) \quad (117)$$

8.5 Condiciones para Expansión Acelerada

La segunda ecuación de Friedmann establece que la expansión acelerada ($\ddot{a} > 0$) requiere:

$$\rho + 3p < 0 \quad (118)$$

Para un universo con materia ($p_m = 0$) y energía oscura ($p_\Lambda = -\rho_\Lambda$):

$$\rho_m + \rho_\Lambda + 3(-\rho_\Lambda) = \rho_m - 2\rho_\Lambda < 0 \quad (119)$$

Por tanto, la aceleración requiere:

$$\rho_\Lambda > \frac{\rho_m}{2} \Rightarrow \Omega_\Lambda > \frac{\Omega_m}{2} \quad (120)$$

La Figura 3 ilustra la evolución completa de los parámetros de densidad desde el universo primitivo hasta la época actual. Se observa claramente cómo la energía cinética (línea magenta) domina en corrimientos al rojo extremadamente altos, seguida por la radiación (línea roja) que decrece como $(1+z)^4$, luego la materia (línea azul) que evoluciona como $(1+z)^3$, y finalmente la energía oscura (línea verde) que permanece constante y domina en la época actual ($z \approx 0$).

9. Verificación Observacional y Desafíos del Modelo

9.1 Éxitos del Modelo FLRW

El modelo FLRW ha demostrado una capacidad predictiva extraordinaria:

1. Ley de Hubble: Predicción teórica de la expansión cósmica antes de su descubrimiento observacional
2. Nucleosíntesis Primordial: Las abundancias observadas de elementos ligeros (H, He, Li) concuerdan precisamente con las predicciones
3. Fondo Cósmico de Microondas: La temperatura de 2.7 K y el espectro de cuerpo negro fueron predichos teóricamente
4. Formación de Estructura: La evolución de perturbaciones de densidad explica la estructura jerárquica observada
5. Expansión Acelerada: El modelo acomoda naturalmente la energía oscura requerida por las observaciones de supernovas

9.2 Limitaciones y Problemas Abiertos

A pesar de sus éxitos, el modelo FLRW enfrenta desafíos significativos:

Problema de la Materia Oscura: Aunque se requiere para explicar las curvas de rotación galácticas y la formación de estructura, la naturaleza física de la materia oscura permanece desconocida.

Problema de la Energía Oscura: La densidad de energía del vacío cuántico predicha por la física de partículas excede la densidad de energía oscura observada por 120 órdenes de magnitud.

Problema de la Coincidencia: ¿Por qué las densidades de materia y energía oscura son comparables precisamente en la época actual?

Problema del Horizonte: ¿Cómo regiones causalmente desconectadas del universo primitivo alcanzan el mismo estado térmico?

Problema de la Planitud: ¿Por qué el universo está tan cerca de la densidad crítica?

9.3 Extensiones y Modificaciones

Varias extensiones del modelo FLRW han sido propuestas:

1. Inflación Cósmica: Período de expansión exponencial en el universo muy temprano
2. Energía Oscura Dinámica: Modelos donde $w \neq -1$ y puede evolucionar con el tiempo
3. Gravedad Modificada: Teorías $f(R)$, gravedad escalar-tensor, dimensiones extra
4. Cosmologías Anisotrópicas: Modelos de Bianchi para universos con anisotropía primordial

10. Conclusiones y Perspectivas Futuras

La derivación sistemática del modelo cosmológico FLRW presentada en este trabajo ilustra la elegancia conceptual y el poder predictivo de este marco teórico fundamental. Partiendo del principio cosmológico de homogeneidad e isotropía, hemos demostrado cómo la aplicación rigurosa de la relatividad general conduce naturalmente a las ecuaciones de Friedmann que gobiernan la evolución del universo.

Las ecuaciones de Friedmann representan mucho más que simples relaciones matemáticas; constituyen el código genético del cosmos, encapsulando la historia completa del universo desde el Big Bang hasta su destino final. Su extraordinario éxito en explicar observaciones que van desde la expansión de Hubble

hasta las anisotropías del fondo cósmico de microondas las convierte en uno de los logros más notables de la física teórica.

El modelo FLRW ha transformado la cosmología de una disciplina especulativa en una ciencia de precisión, donde los parámetros fundamentales del universo se conocen con precisiones de pocos por ciento. Esta precisión ha revelado también los límites del modelo, señalando hacia nueva física que debe incorporarse para una comprensión completa del cosmos.

Las observaciones futuras, incluyendo ondas gravitacionales primordiales, surveys de galaxias de siguiente generación, y estudios de alta precisión de la energía oscura, continuarán poniendo a prueba y refinando nuestra comprensión del universo basada en los fundamentos sólidos del modelo FLRW.

La belleza del modelo FLRW radica no solo en su elegancia matemática, sino en su capacidad para conectar los aspectos más abstractos de la geometría diferencial con la realidad más tangible del universo observable. En sus ecuaciones encontramos la manifestación más clara del programa einsteiniano de unificar geometría y física, revelando que el cosmos mismo es una manifestación de los principios más profundos de la relatividad general.

Agradecimientos

Los autores agradecen las discusiones fructíferas con colegas del Instituto Nacional de Astrofísica, Óptica y Electrónica (INAOE) y la Universidad de Carabobo que enriquecieron este trabajo. Se agradece el financiamiento del Ministerio del Poder Popular para la Ciencia y Tecnología a través del proyecto CFP 20250000038: Modificación a gran escala de la Gravedad: alternativa a la Materia oscura y Energía Oscura del Universo.

Referencias

- [1] Peebles, P. J. E. (1993). *Principles of Physical Cosmology*. Princeton University Press, Princeton.
- [2] Friedmann, A. (1922). Über die Krümmung des Raumes. *Zeitschrift für Physik*, **10**(1), 377-386.

- [3] Planck Collaboration (2020). Planck 2018 results. VI. Cosmological parameters. *Astronomy & Astrophysics*, **641**, A6.
- [4] Weinberg, S. (1972). *Gravitation and Cosmology: Principles and Applications of the General Theory of Relativity*. John Wiley & Sons, New York.
- [5] Carroll, S. M. (2004). *Spacetime and Geometry: An Introduction to General Relativity*. Addison Wesley, San Francisco.
- [6] Perlmutter, S., et al. (1999). Measurements of Ω and Λ from 42 High-Redshift Supernovae. *The Astrophysical Journal*, **517**(2), 565-586.
- [7] Riess, A. G., et al. (1998). Observational Evidence from Supernovae for an Accelerating Universe and a Cosmological Constant. *The Astronomical Journal*, **116**(3), 1009-1038.
- [8] Wald, R. M. (1984). *General Relativity*. University of Chicago Press, Chicago.
- [9] Misner, C. W., Thorne, K. S., & Wheeler, J. A. (1973). *Gravitation*. W. H. Freeman, San Francisco.
- [10] Lemaître, G. (1927). Un univers homogène de masse constante et de rayon croissant rendant compte de la vitesse radiale des nébuleuses extragalactiques. *Annales de la Société Scientifique de Bruxelles*, **47**, 49-59.
- [11] Robertson, H. P. (1935). Kinematics and world structure. *Astrophysical Journal*, **82**, 284-301.
- [12] Walker, A. G. (1937). On Milne's theory of world structure. *Proceedings of the London Mathematical Society*, **42**, 90-127.
- [13] Hubble, E. (1929). A relation between distance and radial velocity among extra-galactic nebulae. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, **15**(3), 168-173.
- [14] Weinberg, S. (2008). *Cosmology*. Oxford University Press, Oxford.
- [15] Dodelson, S. (2003). *Modern Cosmology*. Academic Press, San Diego.