



VOL. 16 (1 - 2) / 2021

Online ISSN: 2542-3061
Print ISSN: 1698-7418

Faraute

de Ciencias y Tecnología

VOLUMEN ESPECIAL: COLOQUIO LATINOAMERICANO.
MATERIA OSCURA Y ENERGÍA OSCURA EN EL UNIVERSO

UN NUEVO PARADIGMA
COSMOLOGICO: MODIFICACIÓN A
GRAN ESCALA DE LA GRAVITACIÓN

MOVIMIENTO PROPIO DE LOS CÚMULOS
GLOBULARES MESSIER: TEST DE LA
GRAVEDAD NEWTONIANA MODIFICADA

DINÁMICA DE COLISIONES GALÁCTICAS CON GRAVEDAD
NEWTONIANA MODIFICADA

FORMACIÓN DE ESTRUCTURAS CON GRAVEDAD MODIFICADA A GRAN
ESCALA CON CAMPO TIPO YUKAWA INVERSO UYF

LA HIPÓTESIS DE CÉSPEDES-CURÉ: UNA SOLUCIÓN AL MISTERIO DE LA MATERIA Y
ENERGÍA OSCURA

EFEKTOS DE LA DENSIDAD DE ENERGÍA GRAVITACIONAL SOBRE LA VELOCIDAD DE
LA LUZ: PROPUESTA PARA VERIFICACIÓN EXPERIMENTAL DE LA HIPÓTESIS DE
CÉSPEDES-CURÉ

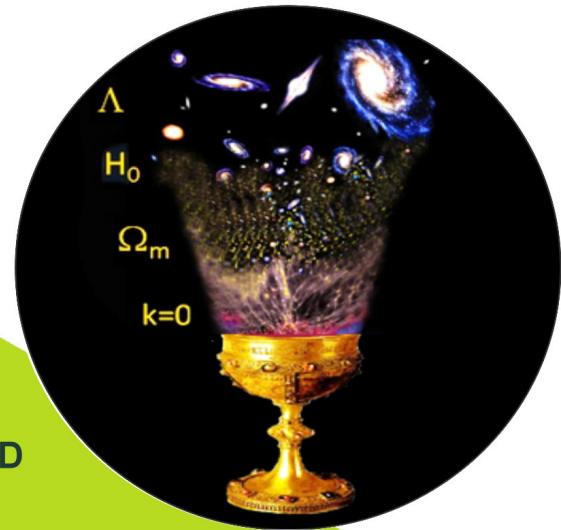
NUEVOS MODELOS DE ESTRELLAS CARGADAS DE ENERGÍA OSCURA EN SIMETRÍA
CONFORME

ESTUDIO DEL MODELO INFLACIONARIO α -ATTRACTOR USANDO MÉTODOS
SEMICLÁSICOS

SIMULACIÓN DE LOS PARÁMETROS DE DISEÑO DE UNA ANTENA PARABÓLICA PARA
LA EXPLORACIÓN DE LA LÍNEA DE HIDRÓGENO NEUTRO

FUNDAMENTOS DEL MODELO COSMOLOGICO FLRW: DERIVACIÓN COMPLETA
DESDE RELATIVIDAD GENERAL

LA TENSIÓN DE HUBBLE COMO DESAFÍO: OPORTUNIDADES DE PRUEBAS PARA EL
CAMPO YUKAWA INVERSO (IYF)





Print ISSN 1698-7418

Online ISSN 2542-3061

Depósito Legal PP200402CA1617

PUBLICACION SEMESTRAL

La revista FARAUTE de Ciencias y Tecnología es una publicación periódica y arbitrada de la Facultad Experimental de Ciencias y Tecnología de la Universidad de Carabobo, cuyo objetivo es divulgar los resultados de las investigaciones científicas y tecnológicas de la comunidad científica. Se publica un volumen anual en dos números.

Comité Editorial

Editor Jefe

Dr. José Gregorio Rodríguez-Quintal

Departamento de Biología, Facultad de Ciencias y Tecnología, Universidad de Carabobo, Venezuela

Editor Adjunto Volumen Especial Coloquio Latinoamericano: Materia oscura y energía oscura en el Universo

Dr. Nelson Falcón

Profesor titular, Jefe del Laboratorio de Física de la Atmósfera y Espacio Ultraterrestre (FaCYT). Coordinador Académico
Dpto de Física.

Junta Editorial

Dr. José Gregorio Marcano

Decano Facultad de Ciencias y Tecnología, Universidad de Carabobo, Venezuela.

Dra. Mariela Contreras

Departamento de Biología, Facultad de Ciencias y Tecnología, Universidad de Carabobo, Venezuela.

Dr. Luis Rodríguez

Departamento de Matemáticas, Facultad de Ciencias y Tecnología, Universidad de Carabobo, Venezuela.

Dr. Pedro Linares

Departamento de Computación, Facultad de Ciencias y Tecnología, Universidad de Carabobo, Venezuela.

Dr. Henry Labrador

Departamento de Química, Facultad de Ciencias y Tecnología, Universidad de Carabobo, Venezuela.

Dr. Reimer Romero

Departamento de Física, Facultad de Ciencias y Tecnología, Universidad de Carabobo, Venezuela.

Editor Fundador

Dr. Oscar Valbuena

Departamento de Biología, Facultad de Ciencias y Tecnología, Universidad de Carabobo, Venezuela.

Comité Asesor

Dr. José Rodríguez

Dra. Silvia Pérez

Dra. Sonia Ardito

Facultad de Ciencias y Tecnología, Universidad de Carabobo, Venezuela.

ENVIO DE ARTICULOS Y CORRESPONDENCIA: farautecienciauc@gmail.com

Acreditada en REVENCYT bajo el código RVF008 y en el Directorio Latindex con el número de folio 17789

La revista no se hace responsable ni solidaria de los juicios emitidos por los autores de los artículos publicados en la misma.



UNIVERSIDAD DE CARABOBO

FACULTAD EXPERIMENTAL DE CIENCIAS Y TECNOLOGIA

VOL. 16, N° (1-2), 2021

CONTENIDO

Editorial.....	03
Un nuevo paradigma cosmológico: modificación a gran escala de la gravitación A new cosmological paradigm: Large-scale modification of gravitation Nelson Falcón	05
Movimiento propio de los cúmulos globulares Messier: test de la gravedad Newtoniana modificada Proper motion of Messier globular clusters: test of modified Newtonian gravity Daniela a. Salas, Nelson Falcón.	13
Dinámica de colisiones galácticas con gravedad Newtoniana modificada Dynamics of galactic collisions with modified Newtonian gravity Alcides ortega, Nelson Falcón.	23
Formación de estructuras con gravedad modificada a gran escala con campo tipo Yukawa inverso UYF Formation of structures with large-scale modified gravity, with inverse-Yukawa-like field UYF Leopoldo Ramírez, Luis Pérez, Nelson Falcón	32
La Hipótesis de Céspedes-Curé: una solución al misterio de la materia y energía oscura The Céspedes-Curé Hypothesis: A solution to the mystery of dark matter and energy Greaves E. D., Bracho C.	41
Efectos de la densidad de energía gravitacional sobre la velocidad de la luz: propuesta para verificación experimental de la Hipótesis de Céspedes-Curé Effects of gravitational energy density on the speed of light: proposal for a experimental verification of the Céspedes-Curé Hypothesis María L. Rojas G., Eduardo D. Greaves N.	48



Some new models of charged dark energy stars in conformal symmetry Nuevos
modelos de estrellas cargadas de energía oscura en simetría conforme
Manuel Malaver de la F., María Esculpi

.....55

Estudio del Modelo Inflacionario α -attractor usando Métodos Semiclásicos
Study of the α -attractors Inflationary Model Using Semiclassical Methods
Clara Rojas

.....69

Simulación de los Parámetros de Diseño de una Antena Parabólica para la Exploración de la
Línea de Hidrógeno Neutro
Simulation of the Design Parameters of a Parabolic Antenna for Neutral Hydrogen Line
Exploration
Duarte G. David E.

.....75

Fundamentos del Modelo Cosmológico FLRW: Derivación Completa desde Relatividad General
Foundations of the FLRW Cosmological Model: Complete Derivation from General Relativity
Ramirez, Leopoldo, Nelson Falcón

.....84

La tensión de Hubble como desafío: oportunidades de pruebas para el campo Yukawa inverso
(IYF)
The Hubble tension as a challenge: Opportunities for testing the Inverse Yukawa Field (IYF)
Fabian Robledo

.....97

Editorial

El presente número de la revista Faraute está dedicado a la presentación de las memorias del Coloquio Latinoamericano Materia Oscura y Energía Oscura en el Universo, que se realizó entre los días 9 y 11 de Julio del 2025, teniendo como sede la Facultad Experimental de Ciencias y Tecnología de la Universidad de Carabobo. El objetivo del Coloquio fue actualizar los avances teóricos y observacionales en Cosmología y Gravitación, en torno al problema de la Materia oscura, la Energía Oscura, la Tensión de Hubble y las Ondas Gravitacionales, enmarcado como parte de las actividades previstas en el Proyecto de Investigación MinCyT 2024 CFP2025000038: “Modificación a gran escala de la Gravedad: alternativa a la Materia oscura y Energía Oscura del Universo”.

El Coloquio contó con la participación de 8 países: Brasil, Canadá, Chile, Colombia, Ecuador, España, México y Venezuela y ponentes de 10 instituciones: UC, UCLA, UCV, USB, LUZ, UEMC, IVIC, INAOE (Méjico), ICyA (Méjico) e YTC (Ecuador). Con 12 Conferencias magistrales y 14 contribuciones orales libres. El evento sirvió también para conmemorar el XXXII Aniversario de la creación de la FACYT, contando con la presencia de las Autoridades Universitarias.

Existe un conflicto entre la cosmología oscura —paradigma que postula la existencia de materia oscura y energía oscura—, y otra alternativa basada en la modificación de la ley de gravitación de Newton. Dicho conflicto parte de cuestionar la universalidad de la gravedad newtoniana —su alcance infinito en un marco finito, ignorando la masa de la hipotética partícula que media la misma, además de despreciar las fuerzas de masas lejanas (como las estrellas)—, destacando su falta de evidencia empírica fuera del Sistema Solar debido notoriamente a resultados anómalos de las sondas Pioneer 10 y Pioneer 11 al distanciarse del Sol, y su incompatibilidad con observaciones a escalas galácticas y cosmológicas.

De hitos clave como la Teoría del Big Bang y la Ley de Hubble-Lemaître (la cual no es deducible de dicho formalismo), y el descubrimiento de la expansión acelerada del universo, que llevaron al paradigma en discusión. Frente a este modelo, se propuso una modificación a gran escala de la gravedad, inspirado en el Principio de Mach, aditivo al Potencial Newtoniano, definido como $U_{YF}(r) = U_0(r - r_0)e^{-\alpha/r}$, que explica fenómenos como las curvas de rotación galáctica y la expansión acelerada sin recurrir a componentes exóticos.

El paradigma eufemísticamente llamado Cosmología Oscura, es debido a que los modelos astrofísicos y relativistas actuales necesitan la explicación de observaciones anómalas y sus debidos reajustes, como es el caso con la Radiación Cósmica de Fondo (CMB), de la mano de dos entidades hipotéticas y no detectadas cuya dependencia a estas es problemática:

- Materia Oscura: Explica la diferencia de materia entre la materia observada por observaciones y la materia estimada teóricamente en el universo faltante en cúmulos galácticos y las curvas de rotación plana, que constituiría $\sim 26\%$ del universo, pero no interactúa con la luz ni con la materia bariónica, y su naturaleza sigue siendo desconocida.
- Energía Oscura: Agente responsable de la expansión acelerada del universo, de la cual se parte en la medición de la cantidad de masa en el universo, que se estima es el $\sim 70\%$ de su contenido muy a pesar de tener una discrepancia con la materia observada en el cosmos de un orden de 10.

La ausencia de evidencia de la Materia Oscura tras décadas de búsqueda, y la naturaleza desconocida de la Energía Oscura, sugiere que el modelo actual podría ser un ” parche” teórico: Asumir la universalidad de la gravedad newtoniana a escalas cosmológicas sin cuestionarla es un

riesgo que se preserva como un marco útil solo mientras no exista una teoría alternativa ampliamente aceptada.

La propuesta de gravedad modificada mediante el potencial Yukawa-Falcon U_{YF} se enfoca en poder explicar las anomalías atribuidas a la materia oscura y la energía oscura sin recurrir a componentes exóticos, en vez del problema de la masa faltante y buscar una masa ficticia. Destaca de esta los siguientes puntos:

- Preservación de la Gravitación Newtoniana: Para escalas astronómicas pequeñas como el Sistema Solar, la gravedad se comporta como lo plantea la Ley de Gravitación de Newton, por lo tanto, no hay problemas en la gravedad local que observamos.
- Refuerzo gravitatorio a Escalas Galácticas: Conforme aumenta la distancia la fuerza se va incrementando hasta llegar a un mínimo o pozo de potencial ($r \gg 10\text{Mpc}$), explicando las curvas de rotación observadas en las galaxias, la formación de cúmulos galácticos y estructuras de escala cosmológica.
- Explicación de la Expansión Acelerada: Al poseer un cambio de signo para la gravedad a distancias aún mayores y siendo una función de crecimiento acelerado, se explica la expansión acelerada del universo como resultado del cambio de signo de la gravedad a escalas tan grandes ($r > 50\text{Mpc}$).

Esto elimina la necesidad de partículas no detectadas como sería la materia oscura al reproducir observaciones con solo materia bariónica, como son las curvas de rotación, la masa faltante en cúmulos de galaxias y el frenado de las sondas Pioneer, al reinterpretar la energía oscura como un efecto de la gravedad modificada a grandes escalas.

Esta propuesta incluye una predicción de la masa del graviton ($m_0 \approx 10\text{--}64\text{ kg}$), coherente con límites de LIGO-Virgo y resuelve la tensión en la Constante de Hubble H_0 al predecir valores una cota superior ($H_{0\max} \approx 86, 3\text{km/sMpc}$), cercanos a medidas independientes y tratándolo como un parámetro dependiendo de la distancia para explicar la discrepancia de sus valores.

A pesar de ser una solución aparentemente elegante, esta requiere más pruebas como mediciones precisas de lentes gravitacionales o la dinámica de cúmulos, al solidificar el Teorema de Birkhoff como no aplicable a este nuevo modelo, o el análisis de estructuras a gran escala que carecerían de simetría esférica. Aun así, su capacidad para unificar fenómenos dispersos (ej.: expansión acelerada, rotación galáctica, y validar los resultados de las sondas Pioneer) la hace prometedora.

Se expone una dicotomía fundamental en la cosmología moderna en contraste a la propuesta de un ajuste teórico minimalista que requiere mayor desarrollo, por lo que mientras la materia y energía oscuras sigan sin tener evidencia directa, alternativas como U_{YF} merecen exploración.

La ciencia avanza cuestionando supuestos, y este trabajo ejemplifica como repensar la gravedad podría resolver misterios centenarios. Sin embargo, la aceptación de cualquier nuevo paradigma dependería de su capacidad para predecir observaciones con mayor precisión que el modelo actual, y mientras la gravedad modificada no demuestre superioridad empírica indiscutible, el modelo estándar seguiría siendo la opción predominante.

En este sentido, la gravedad modificada no es solo una crítica, sino una invitación a la revisión de ideas, y reinventar nuestra comprensión del universo en el presente siglo XXI, a través de los trabajos de Investigación reportados en este volumen.

Dr . Jose Gregorio Marcano
Presidente del Comité Organizador
Coloquio

Dr. Nelson Falcón
Editor Adjunto



UN NUEVO PARADIGMA COSMOLÓGICO: MODIFICACIÓN A GRAN ESCALA DE LA GRAVITACIÓN

NELSON FALCON.

Universidad de Carabobo. Facultad Experimental de Ciencia y Tecnología. Dpto. de Física, Laboratorio de Física de la Atmosfera y Espacio Ultraterrestre. Carabobo. Venezuela.

nelsonfalconv@rmail.com

Recibido: 20/07/2025, Revisado: 05/08/2025, Aceptado: 12/08/2025

Resumen

Se propone un término correctivo a la ley de Newton basado en el principio de Mach, un campo tipo Yukawa inverso, dependiente de la distancia comóvil. Este ajuste finito a la gravitación explica curvas de rotación galáctica, la masa virial en cúmulos de galaxias y la constante cosmológica sin invocar materia oscura no bariónica. Se integra en la cosmología FRW, deduciendo la ley de Hubble-Lemaître y ofreciendo una interpretación natural de la energía oscura. Se discuten implicaciones astrofísicas en virialización, corrimiento al rojo gravitacional y lente gravitacional, además de abordar la tensión de Hubble. Se concluye que esta modificación a gran escala de la gravitación es una alternativa mensurable al paradigma de materia oscura y se sugiere líneas futuras de investigación en la dinámica de cúmulos galácticos y la formación de estructuras.

Palabras clave: Gravitación modificada, Principio de Mach, Materia oscura, Ley de Hubble-Lemaître.

A New Cosmological Paradigm: Large-Scale Modification of Gravitation

Abstract

A corrective term to Newton's law is proposed based on Mach's principle, a comoving distance-dependent inverse Yukawa-type field. This finite adjustment to gravitation explains galactic rotation curves, the virial mass in galaxy clusters, and the cosmological constant without invoking non-baryonic dark matter. It is integrated into FRW cosmology, deducing the Hubble-Lemaître law and offering a natural interpretation of dark energy. Astrophysical implications for virialization, gravitational redshift, and gravitational lensing are discussed, in addition to addressing the Hubble strain. It is concluded that this large-scale modification of gravitation is a measurable alternative to the dark matter paradigm, and future research directions in galaxy cluster dynamics and structure formation are suggested.

Key words: Modified gravitation, Mach's principle, Dark matter, Hubble-Lemaître law..

1. Introducción

Para describir la dinámica del Universo, a escala astronómica y cosmológica, se considera que la única interacción entre estrellas o galaxias es la gravitación. Más específicamente, se asume a priori la validez universal de la Ley de Newton, según la cual la fuerza de la gravedad viene dada por el inverso del cuadrado de la distancia. Recordemos que incluso la Relatividad General asume la validez de la Ley de la gravitación de Newton, considerando que este es el límite al que tiende la interacción gravitacional en la aproximación del campo débil.

La Ley del Cuadrado Inverso de la distancia asume un rango infinito para la interacción gravitacional. Sin embargo, la cosmología prescribe el radio finito del universo (radio de Hubble). Entonces surge un problema epistemológico: ¿cómo puede una interacción tener un rango mayor que el universo mismo? El rango infinito de gravitación implica necesariamente una masa cero para el gravitón, lo que contradice la existencia de ondas gravitacionales detectadas. Durante las últimas dos décadas, la colaboración LIGO-Virgo ha realizado observaciones de ondas gravitacionales emitidas por la fusión de un sistema binario. En estas observaciones, el rango de masa del gravitón se limitó a menos de 10^{-60} kg (Gao, 2023), lo que sugiere que el rango de la fuerza gravitacional es finito y, por lo tanto, contradice la ley de gravitación de Newton.

Si bien es cierto que la validez de la ley de la gravedad del cuadrado inverso de Newton se ha verificado con precisiones superiores a 10^{-4} para experimentos similares a los de Eötvös, no existe evidencia empírica de su validez más allá del sistema solar; se asume cierta para estimar la masa de estrellas binarias. Al utilizar la gravedad newtoniana (la ley de la gravedad del cuadrado inverso)

para describir la dinámica de los objetos dentro del sistema solar, asumimos la aproximación de dos cuerpos y despreciamos las contribuciones de las demás estrellas. Esto se justifica, en primer lugar, porque la masa del Sol es mucho mayor que la de todos los demás componentes del sistema solar y, en consecuencia, el problema reducido de dos cuerpos puede abordarse perturbadoramente.

Y segundo, porque el movimiento dentro del sistema solar es tal que la distancia de comorbilidad es insignificante en relación con la distancia interestelar y, por lo tanto, las contribuciones gravitacionales de las demás estrellas de nuestra galaxia son aproximadamente las mismas en todos los puntos de la trayectoria, es decir, en una esfera gaussiana con un radio mucho menor que la distancia interestelar media (del orden de cuatro años luz). Pero estas suposiciones no se cumplen para rangos de distancia de comorbilidad del orden de kiloparsecs y megaparsecs. Dentro de un cúmulo de galaxias, el campo gravitacional alrededor de una galaxia individual también debe contener contribuciones de todas las demás galaxias cercanas; su suma total no es necesariamente cero, ya que las galaxias dentro de los cúmulos no tienen una distribución esférica homogénea y las distancias de comorbilidad no son mucho menores que la separación media entre galaxias, y su interacción gravitacional múltiple no puede despreciarse.

Por lo tanto, si la inercia local está relacionada de alguna manera con la distribución a gran escala de la materia en el Universo (Principio de Mach), la ley de gravitación de Newton es insuficiente para describirla.

Claramente, no es posible calcular explícitamente esa contribución global (debida a la distribución a gran escala de la materia) a la fuerza gravitacional entre dos partículas. Einstein lo intentó mediante el término cosmológico Λ , pero quedó pendiente cómo

modelar su equivalente en distancias estelares dentro de una galaxia dada y dentro de cúmulos de galaxias. Por otra parte, la gravitación estándar, basada en la ley del cuadrado inverso de la distancia y su equivalente relativista de rango infinito, conduce a serias dificultades en la descripción del Universo: (i) No puede explicar las curvas de rotación de las galaxias, que muestran su incompatibilidad con las masas virializadas de las galaxias, (ii) Dentro de los ricos cúmulos de galaxias, la masa inferida es significativamente menor que la requerida para mantener estos sistemas gravitacionalmente estables (problema de la masa faltante de Zwicky), y (iii) en escalas cosmológicas, la densidad de materia bariónica observada es mucho menor que la predicha por los modelos cosmológicos de Friedman-Robertson-Walker con constante cosmológica (Λ FRW) y curvatura nula.

Para resolver las incompatibilidades entre las observaciones astronómicas y la gravedad, a escalas superiores al sistema solar, se ha conjeturado la existencia de materia exótica denominada materia oscura, más precisamente, materia oscura no bariónica. Esta materia oscura no estaría compuesta por elementos químicos de la tabla periódica ni por los componentes básicos del Modelo Estándar de Física de Partículas, en abierta contradicción con los experimentos terrestres y la observaciónpectral (visible, infrarrojo, rayos X, ultravioleta y rayos gamma).

Por lo tanto, el problema de la masa faltante se ha convertido en un paradigma. La historia de la ciencia ha mostrado numerosos ejemplos de supuestos paradigmáticos cuya revisión crítica condujo a su abandono y sustitución por alternativas mensurables para comprender la naturaleza. Recordemos los epiciclos de Ptolomeo hasta el siglo XVII, el paradigma del flogisto en el siglo XVIII y el éter en el siglo XIX, antes del advenimiento

de la relatividad especial. Por lo tanto, la interacción gravitatoria entre dos estrellas o entre dos galaxias sería la prescrita por la ley del cuadrado inverso de Newton más una contribución adicional de las masas distantes, que no necesitan ser las mismas para diferentes puntos del espacio; ya que, a gran escala, la distribución de masa no es esférica con su centro en el marco de observación local.

Entonces, la hipótesis general es que todas las partículas con masa están sujetas a la fuerza de la gravedad a través de la ley de la gravitación del cuadrado inverso, más un término adicional que varía con la distancia de co-movimiento causada por la distribución a gran escala de la masa bariónica, en el sentido del principio de Mach. En la sección 2 se discute la fenomenología y el origen de este término correctivo del potencial gravitacional, En la sección 3 se muestran los resultados de la osmología Λ FRW con gravedad modificada sin incluir materia oscura y la deducción teórica de la Ley de Hubble-Lemaître, En la sección 5 se discuten las implicaciones astrofísicas y finalmente se muestran las conclusiones en la última sección.

2. Modelo Fenomenológico

La idea general es que todas las partículas con masa en reposo no nula están sujetas a la fuerza de la gravedad a través de la ley del cuadrado inverso de la gravedad, más un término adicional que varía con la distancia comóvil (Falcon 2013, Falcon y Aguirre 2014, Falcon 2021). Esta contribución complementaria a la ley del cuadrado inverso sería causada por la distribución a gran escala de la masa bariónica, en el sentido del principio de Mach. El término de fuerza adicional sería cero en rangos de distancia comóvil del orden del Sistema Solar, débilmente atractivo en rangos de distancia interestelar, muy atractivo en rangos de distancia comparables a los cúmulos de galaxias y repulsivo a escalas cósmicas

(Figura 1). Llamamos a este término, debido a su forma, campo inverso tipo Yukawa (U_{YF}).

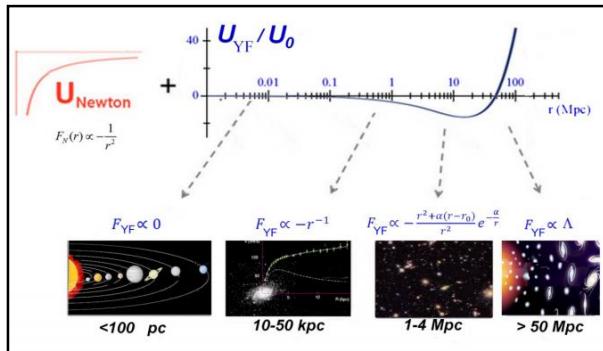


Fig. 1. Modificación a gran escala del pensamiento gravitacional del Campo U_{YF} en escala astronómica para diferentes rangos de la distancia comóvil.

Entonces, la fuerza gravitacional tendría un rango finito, del orden de megapársecs. En estructuras a gran escala con dimensiones superiores a 10 Mpc, existe un vínculo gravitacional entre las galaxias, mediante una cadena secuencial de atracciones gravitacionales entre sus componentes vecinos, pero no mediante un centro común. Cabe destacar que asumir un rango infinito para la gravedad implicaría, entre otras cosas, imaginar masas colosales para el centro atractor en los súper cúmulos de galaxias, que son inobservables (Agueros Negros Hipermasivo).

Considerando los primeros momentos de la formación del Universo (superficie de última dispersión), la energía promedio por unidad de masa (U) puede expresarse para cada nucleón (N) a la temperatura T_d del plasma durante la recombinación, utilizando la distribución de Boltzmann, como el trabajo requerido para mover el protón desde la posición inicial, hasta la distancia de comovimiento r con respecto al centro de la nube protogaláctica, de masa M , como:

$$\langle U \rangle \equiv \langle \frac{u}{N} \rangle = -U_o(r_o - r)e^{-\frac{\epsilon}{k_B T}} \quad (1)$$

Donde k_B representa la constante de Boltzmann, U_o es una constante y ϵ es la energía del protón. Esta energía es únicamente energía cinética, que podría expresarse en términos de la energía gravitacional de las nubes protogalácticas que se forman posteriormente, por lo tanto:

$$U_{YF} \equiv \langle U \rangle = U_o(r - r_o)e^{-\frac{\alpha}{r}} \quad (2)$$

Con

$$\alpha = \frac{Gm_p M}{k_B T_d} = \frac{4\pi G m_p}{3k_B T_d} r_o \rho_c \quad (3)$$

Donde se ha usado ($k_B T_d \approx 13,6$ eV). M and r_o denotan la masa y el radio promedio de la protogalaxia respectivamente y ρ_c la densidad crítica. $U_o \equiv U_o(M) = 4\pi l GM r_o^{-1}$ es una constante de acoplamiento en unidades de J/kg y $l \approx 1$ m⁻¹ es un parámetro dimensional. Se obtiene así $r_o = 47.12$ Mpc ~ 50 Mpc y $\alpha = 2.47$ Mpc ~ 2.5 Mpc. Un modelo exacto requerirá ajustar los valores de las constantes de acoplamiento sin modificar la fenomenología,

La fuerza por unidad de masa (aceleración) complementaria a gran escala de la gravitación Newtoniana resulta:

$$F_{YF}(r) \equiv -\vec{\nabla} U_{YF} = U_o e^{-\frac{\alpha}{r}} \left(1 + \frac{\alpha}{r} - \frac{\alpha r_o}{r^2} \right) \quad (4)$$

Nótese que la fuerza máxima ocurre en $r_m \approx 1.2$ Mpc que es el orden del radio de Abell en cúmulos de galaxias. También cuando r es despreciable entonces $F_{YF} \approx 0$, es decir, la gravedad solo está prescrita por la ley del cuadrado inverso de la gravitación, de acuerdo con experimentos tipo Eötvos. Para rangos de distancias comóviles en kiloparsec, entre objetos débilmente ligados gravitacionalmente, obtenemos $F_{YF} \sim r^{-1}$, por lo tanto, los resultados de MoND-Milgrom se recuperan como un caso particular, y podrían aplicarse para resolver el

problema de las curvas de rotación de galaxias. La fuerza F_{YF} es nula en $r_c \cong 11.2$ Mpc, en el orden del valor promedio de transición suave a aglutinación fuerte en la distribución de galaxias; y en concordancia con la masa no nula del gravitón de acuerdo con los resultados de las ondas gravitacionales.

3. Cosmología AFRW

Consideremos ahora un modelo cosmológico habitual del Big Bang (AFRW), con un tensor de energía-momento homogéneo e isótropo FRW-métrico para un fluido perfecto, entonces obtenemos las ecuaciones de Friedman habituales con constante cosmológica Λ y curvatura nula ($k=0$):

$$\left(\frac{\dot{R}}{R}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3} \rho + \frac{\Lambda c^2}{3} \quad (5)$$

$$\frac{2\ddot{R}}{R} + \left(\frac{\dot{R}}{R}\right)^2 = -\frac{8\pi G}{c^2} P + \Lambda c^2 \quad (6)$$

Donde R es el tensor de curvatura de Riemann, P y ρ denotan la presión y la densidad, respectivamente. Como es habitual, c denota la constante de velocidad de la luz y G la constante de aceleración de la gravedad.

Ahora, asumimos que L es una variable cósmica con respecto a la distancia comóvil. Cabe destacar que la covarianza está garantizada porque a escalas cosmológicas (rangos de la distancia comóvil: $r \gg 50$ Mpc) la F_{YF} es constante (Fig. 1). En estas escalas cosmológicas, las galaxias se describen como partículas de polvo mediante el tensor de energía de impulso para fluidos perfectos. Por lo tanto, la energía oscura puede considerarse una «fuerza cósmica» en el sentido del principio de Mach, causada por la materia ordinaria, mediante el término cosmológico Λ :

$$\Lambda \equiv \Lambda_0 F_{YF}(r) = -\frac{3H_0}{c^3} \frac{dU_{YF}(r)}{dr} \quad (7)$$

Donde H_0 es el valor presente de la tasa de expansión y la constante de acoplamiento es $\Lambda_0 \equiv 3H_0 c^{-3} \cong 0.31 10^{-42} m^{-3} s^{-2}$. Donde $r \rightarrow r_m$, el parámetro cosmológico Λ , en escala intergaláctica resulta: $\Lambda(r_m) \approx (397.73 \text{ kg m}^{-2}) G H_0 c^{-3}$. En consecuencia, la ecuación de Friedman es ahora:

$$0 = H_0^2 [(\Omega_b + \Omega_b \Omega_{YF}) + \Omega_\Lambda - 1] = H_0^2 [\Omega_m + \Omega_\Lambda - 1] \quad (8)$$

Donde se ha empleado los parámetros de densidad estandares: $\Omega_b = \rho/\rho_c$, $\Omega_\Lambda = \Lambda c^2 / 3H_0^2$, para la densidad de materia y el termino cosmológico respectivamente, junto a la definición $\Omega_{YF} \equiv \Lambda(r_m)c^2/3H_0^2$.

Ahora bien, el resultado notable es que el parámetro de materia oscura fría (Ω_c) podría interpretarse ahora, como la contribución gravitacional causada por la distribución a gran escala de la materia bariónica ordinaria: $\Omega_m = (\Omega_b + \Omega_b \Omega_{YF}) = \Omega_b + \Omega_c$ sin postular la existencia de partículas exóticas desconocidas (materia oscura no bariónica). Por lo tanto, como $\Omega_{YF} \approx 10.42$ y usando $\Omega_b \approx 0.0223$ y $\Omega_\Lambda \approx 0.6911$ (Falcon 2021), se obtiene $\Omega_m \approx 0.255$ y $\Omega_m + \Omega_\Lambda = 0.255 + 0.6911 \approx 1$.

Consideremos los fotones emitidos desde una galaxia remota con velocidad de recesión v , y su observación en el sistema de referencia local. Por lo tanto, deberíamos evaluar la U_{YF} en $r > > 50$ Mpc, con condición inicial $v = 0$ en $t = 0$. Encontramos:

$$V = \int a dt = \int \left(\lim_{r \rightarrow \infty} F_{YF} \right) \frac{dr}{c} \cong \left(\frac{U_0}{c} \right) r \quad (9)$$

Remplazando la constante de acoplamiento $U_0 = 4\pi G \text{ kg m}^{-2}$, se obtiene la ley de Hubble-Lemaître (Falcon y Aguirre 2014, Falcon 2021):

$$V = \left(\frac{4\pi G \ell}{c} \right) r \equiv H_0 r \cong \left(86.3 \frac{\text{km}}{\text{sMpc}} \right) r \quad (10)$$

Donde $\ell \equiv 1 \text{ kg m}^2$ es un parámetro dimensional. Nótese que el valor de H_0 es el límite superior teórico, evaluado para los objetos más distantes ($r \gg 50 \text{ Mpc}$). También la energía oscura podría interpretarse como la aceleración cósmica en marcos locales, causada por la distribución a gran escala de la materia bariónica ordinaria, como lo prescribe el Principio de Mach, a través del potencial U_{YF} . En efecto cuando $r \rightarrow r_c$, el parámetro cosmológico $\Lambda(r)$ en escalas intergalácticas es ahora: $\Lambda(r_c) \cong 0.623 (3H_0^2 c^{-2})$. Usando aquí el límite superior para el parámetro de Hubble $H_0 = 86.3$, obtenemos $\Omega_\Lambda \approx 0.72$ en buen acuerdo con las medidas de la expansión mediante observaciones de supernovas SNIa.

Por otra parte, en el universo temprano, durante la era de la recombinación, la distancia comovil tiende hacia el horizonte material. $r/r_0 \rightarrow 0.778$ entonces, usando (9), se obtiene $H_0 \approx 67.15 \frac{\text{km}}{\text{sMpc}}$, mientras que si $r/r_0 \rightarrow 0.86$ entonces $H_0 \approx 74.22 \frac{\text{km}}{\text{sMpc}}$ (Fig. 2).

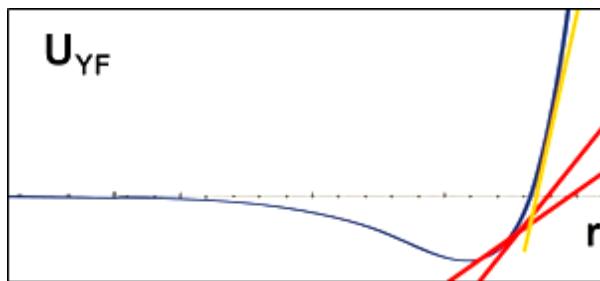


Fig. 2. La pendiente en la gráfica del potencial U_{YF} da el valor de la Constante de Hubble, su valuación a distintas distancias comoviles explica la denominada Tensión de Hubble.

Estos resultados abren nuevas posibilidades para comprender la llamada tensión de Hubble, es decir, la aparente incompatibilidad entre las mediciones del parámetro de Hubble utilizando las anisotropías del Fondo Cósmico de Microondas (CMB) y las mediciones directas utilizando supernovas de tipo Ia.

4. Implicaciones Astrofísicas

En la década de 1930, Zwicky propuso el enfoque de la materia oscura, basándose en la incompatibilidad entre la gravedad newtoniana y los residuos de velocidad medidos en los cúmulos de galaxias. El problema de la masa faltante surgió al aplicar el Teorema del Virial para calcular la masa a partir del radio y la velocidad radial proyectados en los cúmulos de galaxias, lo que resultó en una masa virial calculada cien veces mayor que la inferida a partir de la luminosidad observada en el Grupo Local y la vecindad estelar solar.

Consideraremos la expresión del virial de Clausius $G \equiv \sum_i \vec{p}_i \cdot \vec{r}_i$ cuando se deriva con respecto al tiempo y luego se promedia con respecto a un período completo (τ):

$$\frac{1}{\tau} \int_0^\tau \frac{dG}{dt} dt' = \frac{1}{\tau} \int_0^\tau \sum_i -\vec{\nabla} U_i \cdot \vec{r}_i dt' + \frac{1}{\tau} \int_0^\tau \sum_i \frac{\vec{p}_i^2}{2m_i} dt'$$

(11)

Si las partículas están sujetas únicamente al potencial newtoniano, obtenemos la conocida relación entre las energías cinética (T) y potencial(U): $\langle U \rangle = 2\langle T \rangle$. Pero si ahora las partículas están sujetas a un potencial gravitatorio con un término adicional de largo alcance, como U_{YF} , tenemos:

$$\langle U \rangle + \langle U_{YF} \rangle = 2\langle T \rangle + \frac{1}{\tau} \int_0^\tau U_0 \left(\alpha - \frac{\alpha r_0}{r} \right) e^{-\alpha/r} dt$$

(12)

Resulta que la masa virializada es ahora, en promedio, 500 veces menor que la calculada originalmente con el potencial gravitacional newtoniano (Falcon 2025), compatible entonces con la relación masa-luminosidad observada en los cúmulos de galaxias. Se resuelve la paradoja de Zwicky sin recurrir a la materia oscura no bariónica,

gracias a la adición de la energía de enlace del campo U_{YF} .

El corrimiento al rojo astronómico total es la suma del corrimiento al rojo Doppler debido al movimiento emisor-receptor, el corrimiento al rojo causado por el campo gravitacional (corrimiento al rojo gravitacional) y el corrimiento al rojo cosmológico debido a la expansión cósmica. El componente gravitacional del corrimiento al rojo es directamente proporcional al campo gravitacional. Ahora bien, el sistema inercial proporciona, a través del U_{YF} , una contribución adicional al corrimiento al rojo gravitacional que aumenta con la distancia comóvil.

Cuando la distancia a la fuente es inferior a unos pocos Mpc, el término adicional es insignificante. Sin embargo, esto es importante en otros casos, ya que dos galaxias a la misma distancia y en posiciones muy diferentes podrían presentar un corrimiento al rojo diferente debido al sistema inercial local (U_{YF}). Esto podría resolver la controversia de Arp.

Si la distribución a gran escala de la materia, representada por el potencial U_{YF} , causa un cambio en el potencial gravitacional efectivo en el corrimiento al rojo gravitacional, entonces se esperaría que también afectara la curvatura de la luz en el formalismo de lente gravitacional. El efecto de la curvatura del espacio-tiempo en la trayectoria de la luz dentro de la lente gravitacional se describe en términos del índice de refracción efectivo, directamente proporcional al campo gravitacional. La inclusión del campo U_{YF} aumenta el ángulo de deflexión de la lente gravitacional. En consecuencia, las estimaciones de la masa de la lente gravitacional se habrían sobreestimado (Falcon 2025) de manera análoga al problema de la masa faltante de Zwicky. Obviamente, esto no afecta la observación de la desviación de la luz en caso

de un eclipse solar total, ya que la U_{YF} se desprecia a escala del sistema solar (Fig.1).

En el formalismo habitual del crecimiento estructural y la formación de galaxias, se parte de oscilaciones acústicas adiabáticas (BAO). Para BAO, se asume la relación $\Omega_m = \Omega_b + \Omega_c$. Es fácil ver que la modificación a gran escala de la gravedad newtoniana como enfoque alternativo para la materia oscura fría produciría un resultado idéntico para BAO, debido a la identidad aritmética $\Omega_m = (\Omega_b + \Omega_b \Omega_{YF}) = \Omega_b + \Omega_c$ previamente deducida.

El término materia oscura fría puede entonces interpretarse como la energía asociada con la contribución gravitacional del sistema inercial sin invocar la existencia de materia no bariónica exótica (Falcon 2023).

5. Conclusiones y perspectivas.

Vemos que la inclusión de una modificación a gran escala de la gravedad newtoniana podría ser una alternativa viable al paradigma de la materia oscura no bariónica, permite teóricamente deducir la ley empírica de Hubble, ofrece una interpretación "natural" de la energía oscura y es concomitante con la cosmología FRW y la física habitual.

Independientemente de si la expresión propuesta para el llamado campo inverso de tipo Yukawa (U_{YF}) es exactamente la propuesta aquí, se ha demostrado que la inclusión de un término gravitacional adicional que varía con la distancia podría incorporar explícitamente el Principio de Mach como alternativa teórica al paradigma de la materia oscura no bariónica. Esta modificación a gran escala de la gravedad, con una función comóvil dependiente de la distancia, sería compatible con la cosmología FRW, los observables astronómicos y el alcance finito de la gravedad.

La modificación a gran escala de la

gravedad, debería tener consecuencias en varios aspectos relevantes de la astrofísica: la dinámica observada de los cúmulos globulares que no siguen estrictamente la 3ra Ley de Kepler, la dinámica dentro de los cúmulos de galaxias y las colisiones (*merging of galaxies*) observadas en ellos, y modificaría también el cálculo de la fragmentación de nubes auto gravitantes y las protogalaxias (longitud de Jeans). Estos temas escapan del alcance del presente trabajo, y su estudio se presenta en este mismo volumen en varios artículos relacionados.

6. Agradecimientos

Se agradece el financiamiento del Ministerio del Poder Popular para la Ciencia y Tecnología a través del proyecto CFP 20250000038: Modificación a gran escala de la Gravedad: alternativa a la Materia oscura y Energía Oscura del Universo.

7 Bibliografía

Falcon, N. 2013. Modification of the Newtonian Dynamics in Λ FRW-Cosmology an Alternative Approach to Dark Matter and Dark Energy. JMP 319. 10-18. <https://www.scirp.org/journal/paperinformation?paperid=36069>

Falcon, N., Aguirre A. 2014. Theoretical Deduction of the Hubble Law Beginning with a MoND Theory in Context of the Λ FRW-Cosmology. IJAA. 4. 551-559. <https://www.scirp.org/journal/paperinformation?paperid=51478>

Falcon, N. 2021. A large-scale heuristic modification of Newtonian gravity as an alternative approach to dark energy and dark matter. J Astrophys Astron 42. 102. <https://link.springer.com/article/10.1007/s1>

[2036-021-09752-0](#)

Falcon, N. 2023. Modified Gravitation and Mach's Principle: An Alternative to the Dark Matter and Dark Energy Cosmological Paradigm. OAJA 1 (1): 000103 <https://medwinpublishers.com/OAJA/article/10.23880/oaja-16000103/abstract>

Falcon, N. 2025. Zwicky's Missing Mass: Dark Matter versus Modified Gravity. OAJA 3 (1): 000156 <https://medwinpublishers.com/OAJA/article/10.23880/oaja-16000156/abstract>

Gao, Q. (2023). Constraint on the mass of graviton with gravitational waves. Science China Physics, Mechanics & Astronomy, 66(2), 220411. <https://doi.org/10.1007/s11433-022-1971-9>



MOVIMIENTO PROPIO DE LOS CÚMULOS GLOBULARES MESSIER: TEST DE LA GRAVEDAD NEWTONIANA MODIFICADA

DANIELA A. SALAS L.¹ y NELSON FALCON¹

Universidad de Carabobo. Facultad Experimental de Ciencia y Tecnología.¹ Laboratorio de Física de la Atmosfera y Espacio Ultraterrestre. Dpto. de Física. Carabobo. Venezuela.

{ dsalasl@uc.edu.ve, nelsonfalconv@gmail.com }

Recibido: 21/07/2025, Revisado: 07/08/2025, Aceptado: 12/08/2025

Resumen

Se presenta la estimación del movimiento propio de los cúmulos globulares de la Vía Láctea, listados en el catálogo de Messier, y se compara con las posiciones de los catálogos de Dreyer, Harris, GAIA y NASA-NED. Se corrigen las coordenadas ecuatoriales por la precesión (2025) y se grafica para las coordenadas galácticas. Los resultados muestran desviaciones significativas de las trayectorias de los cúmulos globulares Messier con la tercera ley de Kepler, de acuerdo con la generalización del teorema del Virial en la teoría de gravedad modificada a gran escala. La relación período-distancia, sin asumir modelos de Materia Oscura, permite limitar la masa dinámica de la Vía Láctea y la invalidez del movimiento kepleriano de los CG. Los datos de mejor ajuste son $2,3 \pm 0,32 \times 10^{14} M_{\odot}$ para la masa dinámica de la Vía Láctea, y $\beta = -5/3$ en modelos de gravedad newtoniana modificada.

Palabras clave: cúmulos globulares Messier, gravedad modificada, movimiento propio. Masa de la Vía Láctea

Proper motion of Messier globular clusters: test of modified Newtonian gravity

Abstract

The proper motion estimate of the Milky Way globular clusters listed in the Messier catalog is presented and compared with the positions in the Dreyer, Harris, GAIA, and NASA-NED catalogs. The equatorial coordinates are corrected for precession (2025) and plotted for Galactic coordinates. The results show significant deviations of the Messier trajectories of globular clusters from Kepler's third law, in agreement with the generalization of the Virial theorem in the large-scale modified gravity theory. The period-distance relation, without assuming Dark Matter models, allows to constrain the dynamical mass of the Milky Way and the invalidity of the Keplerian motion of the GCs. The best-fit data are $2.3 \pm 0.32 \times 10^{14} M_{\odot}$ for the dynamical mass of the Milky Way, and $\beta = -5/3$ in modified Newtonian gravity models.

Key words: Messier's globular clusters, modified Newtonian gravity, proper motion. Milky Way mass,

1. Introducción

Los cúmulos globulares (CG) son asociaciones esferoidales de cientos de miles de estrellas antiguas, unidas gravitacionalmente, que se encuentran principalmente en el halo de las galaxias. En la Vía Láctea, se conocen 158 cúmulos globulares a distancias del centro galáctico entre los 800 hasta los 123 mil parsecs (Harris, 1996).

Charles Messier (Messier, 1781),, en un intento de medir los objetos de apariencia difusa en el cielo nocturno, logró catalogar veintinueve de ellos, siendo así la lista de posiciones más antigua de Cúmulos Globulares de la Vía Láctea, en el periodo de 1760 a 1781.

Se supone que los CG orbitan en torno al centro galáctico de forma análoga a los planetas respectos al Sol (Fig. 1) y que, dicha interacción gravitacional esta prescrita por la Ley de Newton de la inversa del cuadrado de la distancia, en consecuencia, deberían verificar la tercera ley de Kepler, de acuerdo con la cual el cuadrado de los periodos orbitales sería proporcionales al cubo del semieje mayor de sus órbitas elípticas.

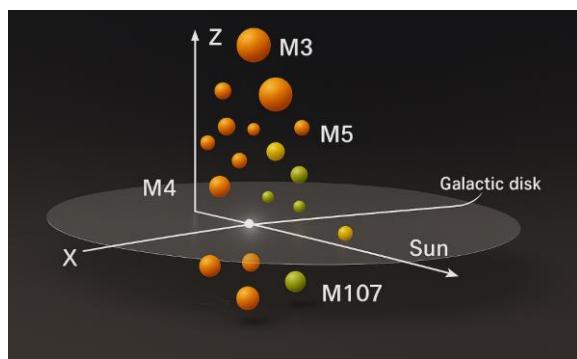


Fig. 1 Distribución de los cúmulos globulares Messier en coordenadas galactocéntricas, Imagen generada por Microsoft Copilot IA ® 2025 basada en datos del catálogo Harris (1996, actualizado 2010).

Y en todo caso, la constante de proporcionalidad sería un factor proporcional

a la masa de la Vía Láctea. La validez de la tercera Ley de Kepler en rangos galácticos está sujeta necesariamente a la validez de la Ley de gravitación de Newton según la cual la fuerza disminuye en proporción inversa del cuadrado de la distancia

Aún bajo el paradigma cosmológico de la existencia de hipotética materia oscura no bariónica, las órbitas Keplarianas de los CG debería preservarse, toda vez que la conjectura de la Materia Oscura predice que sus efectos gravitacionales son análogos a la materia ordinaria (Navarro et al 1997). Otra línea de investigación supone que la Ley de gravedad de Newton podría no ser Universal (Falcon 2013; Milgrom, 2001) y variar de modo diferente cuando los rangos de distancia comóvil es mucho mayor que las dimensiones del Sistema Solar (Falcon 2021, Falcon 2023).

Desde las primeras observaciones de los CG del Catálogo de Messier hasta nuestros días, han transcurrido más de doscientos años, luego sus posiciones relativas deben exhibir un movimiento propio apreciable y en consecuencia estos CG brillantes pueden usarse como test para verificar la validez de la tercera Ley de Kepler. El objetivo del presente trabajo es usar el movimiento propio de los cúmulos globulares como test de verificación de la Gravitación Newtoniana. Si la gravedad varía con la distancia comóvil, entonces las velocidades orbitales de los cúmulos globulares podrían ser diferentes a las predichas por la Teoría de la Gravedad de Newton.

Para ello nos proponemos describir la metodología (sección 2), mostrar la relación entre Periodo orbital y distancia galactocéntrica en diferentes catálogos actuales de CG (sección 3) y discutir los resultados empleando el Teorema del Virial generalizado para gravedad modificada (Falcon 2023) en la sección 4; y las conclusiones en la última sección.

2. Metodología

Se pretende evaluar el movimiento propio de los cúmulos globulares más notables, con registros históricos de su posición aparente en los catálogos de Messier (Messier 1781), Dreyer (Dreyer 1888) y Harris (Harris 2010), que son los tres catálogos históricos de catastro de cúmulos globulares en la Vía Láctea.

Las posiciones aparentes de los CG, en coordenadas ecuatoriales (α, δ) que aparecen en cada catálogo, se corrigen por el equinoccio para la época de 2025.

A continuación, ambas efemérides se convierten a coordenadas galácticas: catálogo antiguo (b_0, l_0) y la Nasa Extragalactic Dataset NED-NASA (b, l), estimando el movimiento propio entre ambas efemérides. El movimiento propio, respecto al centro galáctico está dado por:

$$\mu = \sqrt{\Delta b^2 + \Delta l^2} \quad (1)$$

Conociendo el desplazamiento angular aparente y asumiendo que las órbitas de los cúmulos globulares son cónicas regulares, se puede estimar el período de revolución alrededor del centro galáctico. La diferencia entre épocas de los catálogos históricos-NED actual, es el tiempo transcurrido durante el movimiento propio, luego el periodo T se calcula a partir de la proporción del desplazamiento angular:

$$T = 2\pi \frac{\Delta t}{\Delta \mu} \quad (2)$$

En cualquier caso, las distancias heliocéntricas (D), son inferidas a partir de las estrellas variables periódicas Cefeidas y RR-Lyrae (Baumgardt y Vasiliev 2021, Arellano-Ferro 2022), y no las obtenidas a través de estimaciones de paralaje y/o cinéticas, se convierten a distancias galactocéntricas (r), utilizando la geometría de la Figura 2.

Se asume $d_{SMW} = 8$ kpc para la distancia centro-galáctica del Sol (McMillan, 2017). M54 se omite porque actualmente se considera parte de la corriente de galaxias enanas A de Sagitario (Siegel, 2007). M107 tampoco está incluido, ya que Pierre Mechain le añadió más tarde a la publicación original del catálogo Messier.

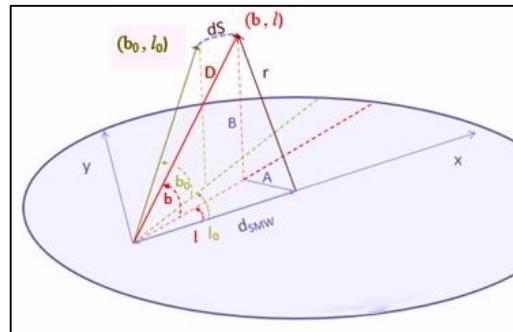


Fig. 2. Geometría del movimiento propio en coordenadas galácticas: (b, l). D representa la distancia heliocéntrica y r la distancia galactocéntricas. Fuente propia.

Se empleará también la medida del movimiento propio de los cúmulos globulares de Messier, reportada por Vasiliev a partir de los datos de GAIA (Vasiliev, 2019). GAIA es un observatorio astrométrico de la espacial de la Agencia Espacial Europea (ESA) para cartografiar las posiciones, distancias y movimientos propios en la bóveda celeste.

Se calcula la diferencia de coordenadas, en latitud y longitud, como para las épocas de medición y con la distancia centro galáctico en cada uno de ellos.

Luego se calculó la distancia de arco a partir de la diferencia entre las coordenadas galácticas, para cada par de catálogos: el Messier-NED, Dreyer-NED, y Harris-NED.

Por otra parte, la gravitación Newtoniana demanda la validez de la tercera ley de Kepler:

$$m \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 r = \frac{GM}{r^2} m \leftrightarrow T^2 \propto r^3 \quad (3)$$

Donde r es la distancia comóvil, que en los CG corresponde a la distancia galactocéntrica. Luego:

$$\left[\frac{T}{(yr)}\right]^2 = A \eta \left[\frac{r}{(kpc)}\right]^3 \quad (4)$$

Donde $A = \approx 9,29 \times 10^{24} \text{ (kpc}^3 \text{ año}^{-2}\text{)}$
y $\eta \equiv \left[\frac{M_{\odot}}{M}\right]$ es el número de masas solares.

Con independencia del valor de η , que representa la masa global de la galaxia (en unidades de masas solares); la ley de gravedad de Newton demanda que la relación funcional logarítmica, entre la distancia comóvil y el periodo orbital, es exactamente 3/2:

$$\log \left| \frac{T}{\text{año}} \right| = \frac{1}{2} \log \left| \frac{3x10^{12}}{\eta^{1/2}} \right| + \frac{3}{2} \log \left| \frac{r}{kpc} \right| \quad (5)$$

Como el periodo T del movimiento de los cúmulos globulares se obtiene a partir del movimiento propio, e independientemente de la distancia r a las estrellas variables medidas en cada CG, entonces las relaciones precedentes (4 y 5) permiten evaluar la gravitación Newtoniana y además acotar la masa dinámica de la Vía Láctea.

3 Resultados

La Tabla 1 presenta los datos básicos de los GC en el catálogo de Messier. Las primeras columnas corresponden al número del Catálogo Messier original, las coordenadas ecuatoriales: ascensión recta (α) y declinación (δ), por época en la medición original y las correcciones para el equinoccio de 2025.

M	Catálogo Messier			
	Coordenadas Ecuatoriales (1781)		Coordenadas Ecuatoriales (2025)	
	α [h:m:s]	δ [° : ' : "]	α [°]	δ [°]
2	21:34:46.76	-00:37:14.8	323,700	0,621
3	13:43:27.53	28:13:31	205,870	28,225
4	16:25:04.82	-26:33:30.9	246,270	-25,441
5	15:19:46.67	01:59:15.4	229,950	1,988
9	17:20:37.32	-18:31:11.6	260,150	-17,480
10	16:58:32.74	-04:07:54.9	254,640	-3,868
12	16:48:30.7	-02:30:41	252,130	-1,489
13	16:42:33.8	36:24:09.6	250,640	36,403
14	17:38:55.17	-03:16:21	264,730	-2,728
15	21:31:19.54	11:48:03.2	322,830	11,801
19	17:04:13.29	-26:18:44.5	256,050	-25,688
22	18:37:50.95	-23:54:50.8	279,46	-22,086
28	18:26:01.29	-24:50:20.7	276,500	-23,161
30	21:41:57.84	-23:08:51.3	325,490	-22,853
53	13:14:11.11	18:03:30.9	198,550	18,059
55	19:41:44.05	-30:53:35	295,430	-29,107
56	19:17:35.42	30:13:54.1	289,400	30,232
62	17:02:51.72	-30:08:29	255,720	-29,859
68	12:40:34.65	-26:51:16.6	190,150	-25,145
69	18:32:46.8	-32:22:55	278,200	-31,618
70	18:44:50.96	-32:18:00.4	281,210	-31,700
71	19:54:52.32	18:50:36.4	298,720	18,843
72	20:54:51.45	-12:26:03	313,720	-11,566
75	20:07:38.37	-21:51:20	301,910	-20,144
79	05:25:21.14	-24:28:50.7	81,340	-23,519
80	16:18:31.22	-23:02:27.6	244,630	-22,959
92	17:18:01.25	43:05:49.6	259,500	43,097

Tabla 1. Coordenadas Horarias CG en los catálogos Messier (1781) y corrección de época por precesión de los equinoccios.

La Tabla 2 muestra las coordenadas galácticas y, finalmente, el movimiento propio y el período orbital del GC.

Catálogo Messier				
M	Coordenadas Galácticas (2025)		Movimiento Propio	Periodo
	l [°]	b [°]	μ °/años	T años
2	53,472	-35,729	0,0013896	1063188,6402
3	42,074	78,683	0,0011537	1667187,2078
4	350,985	15,995	0,0011903	4633795,5239
5	3,845	46,802	0,0011326	1193686,2632
9	5,557	10,724	0,0011785	292586,9218
10	15,153	23,063	0,0015603	867900,3862
12	14,763	25,79	0,0056715	249199,1206
13	58,993	40,915	0,0006564	2817781,9258
14	21,312	14,797	0,0011612	610610,2353
15	64,623	-27,643	0,0018607	870502,5314
19	356,866	9,368	0,0012624	230586,2962
22	9,856	-7,551	0,0011815	2010308,3371
28	7,805	-5,561	0,0011772	730824,6727
30	27,08	-46,897	0,0017966	776632,1542
53	333,072	79,779	0,0012280	1292484,1470
55	8,817	-23,3	0,0014514	760955,5393
56	62,664	8,333	0,0008342	1776397,3022
62	353,587	7,313	0,0013900	348029,1723
68	299,564	36,074	0,0010530	1438181,5940
69	1,652	-10,248	0,0011305	263822,8390
70	2,822	-12,526	0,0012960	292883,9690
71	56,742	-4,562	0,0010045	2543847,4316
72	35,173	-32,686	0,0013488	851964,3946
75	20,304	-25,769	0,0014137	759169,7399
79	227,217	-29,313	0,0010335	2127211,4890
80	352,667	19,462	0,0081186	73631,2987
92	68,325	34,834	0,0006224	2851174,6403

Tabla 2. Coordenadas Galácticas, movimiento propio y periodo de los CG Messier.

El catálogo de Messier tiene más de doscientos años de antigüedad y, por lo tanto, el movimiento del CG es notable. Los resultados equivalentes para los catálogos de Dreyer (Dreyer, 1888) y Harris (Harris, 2000). son similares, aunque con menor movimiento propio y por tanto con mayores incertidumbres (Tablas A1-A4 en Anexo).

La Tabla 3 muestra el número de Messier para cada CG en las dos primeras columnas, seguido de las distancias heliocéntrica y galactocéntricas recopiladas a partir de las referencias, las coordenadas NED, el movimiento propio y el período orbital (Vasiliev, 2019).

M	D (kpc)	NED(2025)		GAIA [Vasiliev, 2019]	
		l [°]	μ °/años	μ °/años	T años
2	11,693	53,065	-35,579	4,120357873	5489685,072
3	10,175	42,881	78,933	2,650806104	8533052,294
4	1,851	350,793	16,24	22,73847183	994766,3712
5	7,479	3,69	47,074	10,66449249	2121007,365
9	8,1	5,384	10,984	3,910726275	5783955,591
10	5,067	14,996	23,352	8,099567705	2792675,848
12	5,109	15,58	26,587	6,803461251	3324699,924
13	7,6	59,042	41,081	4,087620335	5533651,674
14	9,1	21,183	15,074	6,212956221	3640693,142
15	10,709	64,731	-27,168	3,817540831	5925140,844
19	8,343	356,701	9,657	3,637497079	6218415,194
22	3,303	9,732	7,274	11,29460659	2002678,617
28	5,368	7,638	-5,302	8,918081072	2536360,336
30	8,458	26,916	-46,574	7,304045249	3096841,043
53	18,498	331,936	79,996	1,363058693	16594639,12
55	5,348	8,63	-22,992	9,879815838	2289462,423
56	9,6	62,535	8,492	2,60444543	8684945,686
62	6,412	353,407	7,591	5,84174503	3872039,431
68	10,409	299,279	36,161	3,267743564	6922044,727
69	8,9	1,568	-9,992	7,741688317	2921774,448
70	9,362	2,697	-12,231	4,909491623	4607293,146
71	4,001	56,568	-4,386	4,30060705	5259598,666
72	16,7	34,918	-32,44	3,513458268	6437949,559
75	20,7	20,112	-25,478	2,853293711	7927493,416
79	13,3	227,172	-29,562	2,925819202	7730985,939
80	10,339	352,491	19,734	6,301178064	3589720,347
92	8,2	68,351	34,99	4,954081247	4565824,818

Tabla 3. Coordenadas Galácticas, movimiento propio y periodo de los CG en el catálogo GAIA-NED

En la Fig. 3, se utiliza la Ecuación (5) junto con los datos sobre las distancias galactocéntricas y los períodos de los GC para cada catálogo. Resulta evidente que la dinámica de los GC no obedece a la tercera ley de Kepler, por cuanto la pendiente difiere significativamente del valor esperado 1,5. Y, en consecuencia, la dinámica de estos objetos no verifica la ley del inverso del cuadrado de la distancia prescrita por la gravitacional newtoniana. Los datos de los diferentes catálogos son consistentes entre sí. La Tabla 4 resume los parámetros de la distribución lineal: pendiente, intercepto y coeficiente de Correlación de Pearson (CP). La última columna es la masa dinámica de la Vía Láctea sin suponer materia oscura.

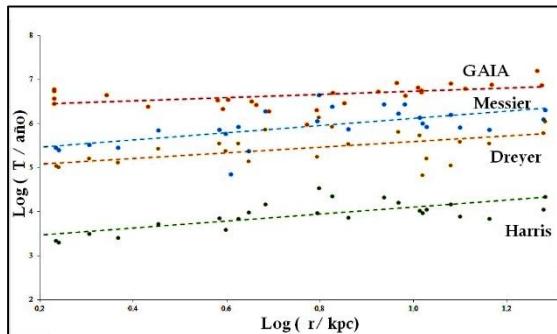


Fig. 3. Relación período-distancia según catálogos de CG Messier.

Catálogo	Pendiente	Intersepto A	CP	$10^{14} M_{\odot}$
GAIA	$0,37 \pm 0,25$	$6,36 \pm 0,33$	0,47	0,017
Messier	$0,83 \pm 0,42$	$5,30 \pm 0,32$	0,64	2,26
Dreyer	$0,64 \pm 0,41$	$4,95 \pm 0,34$	0,53	11,3
Harris	$0,79 \pm 0,35$	$3,31 \pm 0,33$	0,75	261,6
Media	$0,66 \pm 0,21$	$4,98 \pm 1,26$	0,60	9,87

Tabla 4. Parámetros de ajuste de la relación período-distancia para catálogos CG.

4. Discusión

En promedio, la pendiente es inferior al 50% de la esperada ($3/2$), con el valor

mínimo para los datos de GAIA (0,37) y el máximo para el catálogo de Harris (0,79). El ajuste lineal es débil en el catálogo de GAIA y significativo en los demás. Debido principalmente a que los datos de GAIA se refiere a movimientos propios muy pequeños y de mayor incertidumbre, menos de veinte años entre posiciones de los CG, por la misma razón la correlación mejora para los catálogos más antiguos de Dreyer y Messier.

Para el Catálogo Messier, que corresponde al mayor movimiento propio, se obtiene la masa de la Vía Láctea $2 \times 10^{14} M_{\odot}$, cien veces más que las estimaciones mencionadas, con una correlación significativa en el ajuste lineal. Esto puede deberse a la incertidumbre sobre el radio del halo galáctico (McMillan 2017), que se estima con densidad media del orden de $3 - 7 \times 10^{-15} g/cm^3$. El cúmulo AM1 035 02.3 -493655 es el cúmulo globular más distante de la Vía Láctea, ubicado a 124,6 kpc del centro galáctico (Harris, 2000), por lo que podemos afirmar que este es el límite inferior del radio del halo galáctico. Por lo tanto, la masa de gas en el halo es del orden de $\sim 10^{14} M_{\odot}$, de acuerdo con resultados previos.

Pero la masa, calculada por el Teorema del Virial, asume implícitamente que la gravitación es la Ley Inversa del Cuadrado de la Distancia (Gravedad Newtoniana). En la ecuación general del Teorema del Virial de Clausius:

$$\frac{1}{\tau} \int_0^\tau \frac{dG}{dt} dt' = \frac{1}{\tau} \int_0^\tau \sum_i -\vec{\nabla} U_i \vec{r}_i dt' + \frac{1}{\tau} \int_0^\tau \sum_i \frac{p_i^2}{2m_i} dt' \quad (6)$$

El miembro izquierdo de (6) se cancela cuando el movimiento es periódico.

Ahora, si consideramos cualquier modificación de la Gravedad Newtoniana a gran escala sigue siendo válida la expresión Virial de Clasius, pero sustituyendo el potencial en el segundo miembro de (6).

En particular, Falcón (Falcon 2021, Falcon 2025) postula que todas las

partículas con masa en reposo no nula están sujetas a la fuerza de la gravedad mediante la ley del cuadrado inverso de la gravitación, más un término adicional que varía con la distancia comóvil. En consecuencia (Falcon 2025):

$$U(r) = U_N + U_{YF} = -\frac{GM}{r} + U_0(M)(r - r_0)e^{-\frac{\alpha}{r}} \quad (7)$$

Donde r es la distancia comóvil, y α y r_0 son parámetros conocidos Esta contribución complementaria a la ley del cuadrado inverso se debe a la distribución a gran escala de la masa bariónica, en el sentido del principio de Mach. El término de fuerza adicional sería cero en rangos de distancias comóviles del orden del Sistema Solar, débilmente atractivo en rangos de distancias interestelares, muy atractivo en rangos de distancias comparables a los cúmulos de galaxias, y repulsivo a escalas cósmicas.

Entonces, al reemplazar (7) en (6) se obtiene:

$$0 = -\langle U \rangle + 2\langle T \rangle + \frac{1}{\tau} \int_0^\tau \sum_i m_i U_0(M) e^{-\frac{\alpha}{r'}} \left(\alpha + r_0 - \frac{\alpha r_0}{r'} \right) dt' \quad (8)$$

El segundo término en (7) es nulo para el rango de distancias de los cúmulos de globulares, pero el último término en (8) no lo es..

Nótese que este término integral en (8) suele omitirse en la expresión del Virial de gravedad Newtoniana; $0 = -\langle U \rangle + 2\langle T \rangle$.

Para calcular la integral es necesario modelar la distribución de masa de la Vía Láctea, con detalles de la geometría de la barra, el disco, los brazos y las galaxias enanas satélite, entre otras incertidumbres. Pero podemos aproximarnos a esta integral argumentando que su valor medio es proporcional a la distribución de masa bariónica (Vía Láctea) y también proporcional a $r^{-\beta}$. Por lo tanto, el Virial de Clausius queda:

$$\frac{4\pi^2 r^2}{T^2} = \frac{GM}{r} - \frac{GM(kpc)^{\beta-1}}{r^\beta} \quad (9)$$

Entonces, la relación período-distancia en escala logarítmica es ahora:

$$\left| \frac{T}{yr} \right| = Log \left| \frac{3 \cdot 10^{12}}{\eta^{\frac{1}{2}}} \right| + \frac{3+\beta}{2} Log \left| \frac{r}{kpc} \right| \quad (9)$$

Luego si $\beta \cong -5/3$, obtenemos $\eta \sim 10^{14} M_\odot$ como en la Fig. 3 sin considerar la materia oscura no bariónica.

5 Conclusiones

A partir de los datos de posición de los cúmulos globulares proporcionados por los catálogos referidos, se calculó el movimiento propio de los cúmulos globulares a través del catálogo de Messier logrando observar una tendencia lineal con pendiente de 0,82 y con un coeficiente de Pearson de 0,64 significativo para las variables de período-distancia galactocéntricas.

El intersección de la función permite calcular la masa dinámica de la Vía Láctea $M = 2,25 \times 10^{14} M_\odot$. Por otro lado, se pudo estimar de la generalización del teorema del Virial, $\beta = -1,36$ en acuerdo con los modelos de gravedad newtonianos modificados a gran escala.

Se concluye que el movimiento propio de los cúmulos globulares de Messier es medible en catálogos astrométricos históricos permitiendo estimar el período de revolución individual de los cúmulos globulares. Además, el movimiento de los GC no es kepleriano ($\beta \neq 0$) y en consecuencia no cumplen con la ley del inverso del cuadrado de la distancia de la gravedad Newtoniana.

Observamos que no se verifica la Tercera Ley de Kepler, porque los datos obtenidos con las observaciones directas no corresponden a lo predicho en (5), conocido como el problema de la curva de rotación de los cúmulos globulares.

Por lo tanto, se puede predecir mejor en términos de la teoría de la gravedad

modificada (Falcón 2025) capaz de explicar la dinámica de los cúmulos globulares sin necesidad de invocar al paradigma de la materia oscura no bariónica.

6 Agradecimientos

Se agradece el financiamiento del MinCyT CDCH UC a través del proyecto CFP 20250000038: Modificación a gran escala de la Gravedad: alternativa a la Materia oscura y Energía Oscura del Universo.

7 Bibliografía

Arellano-Ferro A. (2022). A vindication of the RR Lyrae Fourier light curve decomposition for the calculation of metallicity and distance in globular clusters. RMAA 58: 257–271.

Baumgardt, H., & Vasiliev, E. (2021). Accurate distances to Galactic globular clusters through a combination of GAIA EDR3, HST, and literature data. MNRAS 505, 4: 5957-5977.

Dreyer. J. (1888). A New General Catalogue of Nebulæ and Clusters of Stars. Memoirs of the Royal Astronomical Society 49. 1

Falcon N. (2013). Modification of the Newtonian Dynamics in Λ FRW-Cosmology an Alternative Approach to Dark Matter and Dark Energy. JMP 319, 10-18.

Falcon N. (2021). A large-scale heuristic modification of Newtonian gravity as an alternative approach to dark energy and dark matter. JAA 42, 102.

Falcon N. (2023). Modified Gravitation and Mach's Principle: An Alternative to the Dark Matter and Dark Energy Cosmological Paradigm. OAJA 1, 1: 000103.

Falcon, N. (2025). Zwicky's Missing Mass: Dark Matter versus Modified Gravity. OAJA. 3 (1):000156.

Harris, W. E. (1996). A catalog of parameters for globular clusters in the Milky Way. AJ 112: 1487.

Harris W. (2010), A New Catalog of Globular Clusters in the Milky Way arXiv:1012.3224.

McMillan P. J. (2017). The mass distribution and gravitational potential of the Milky Way. MNRAS 465, 76–94.

Messier C. (1781). Catalogue des Nébuleuses des amas d' Étoiles. Mémoires de l' Académie Royale des Sciences : Paris.

Milgrom M (2001) MOND – A Pedagogical Review. Acta Phys Polon B 32: 3613

Nasa Extragalactic Data Base: <http://ned.ipac.caltech.edu/> Consultado 15/01/2025

Navarro, J; Frenk, C; White, S. 1997. A Universal Density Profile from Hierarchical Clustering. APJ 490. (493): 000103

Siegel. M. et al. (2007). The ACS Survey of Galactic Globular Clusters: M54 and Young Populations in the Sagittarius Dwarf Spheroidal Galaxy. ApJL 667 (1): L57–L60.

Vasiliev E. 2019. Proper motions and dynamics of the Milky Way globular cluster system from Gaia DR2 MNRAS 484. 2: 2832–2850.

8 Anexos:

M	Catálogo de Dreyer			
	Coordenadas Ecuatoriales (1888)		Coordenadas Ecuatoriales (2025)	
	α [h:m:s]	δ [° : ' : "]	α [°]	δ [°]
2	21:24:44.59	-00:42:12.5	21:24:44.59	-00:42:12.5
3	13:43:16.5	30:04:00.7	13:43:16.5	30:04:00.7
4	16:25:11	-26:45:16.2	16:25:11	-26:45:16.2
5	15:19:46.1	02:47:46.5	15:19:46.1	02:47:46.5
9	17:20:39.23	-18:31:34.4	17:20:39.23	-18:31:34.4
10	16:58:28.86	-04:07:38.1	16:58:28.86	-04:07:38.1
12	16:48:35.41	-02:58:53.6	16:48:35.41	-02:58:53.6
13	16:47:40.46	-36:34:21.9	16:47:40.46	-36:34:21.9
14	17:38:54.34	-03:15:06.6	17:38:54.34	-03:15:06.6
15	21:31:09.12	13:09:19.4	21:31:09.12	13:09:19.4
19	17:04:06.06	-25:17:29.6	17:04:06.06	-25:17:29.6
22	18:37:55.02	-23:53:07.2	18:37:55.02	-23:53:07.2
28	18:26:04.96	-24:50:57.4	18:26:04.96	-24:50:57.4
30	21:41:57.81	-23:03:13.9	21:41:57.81	-23:03:13.9
53	13:14:08.69	18:12:26.8	13:14:08.69	18:12:26.8
55	19:41:36.32	-30:52:30.7	19:41:36.32	-30:52:30.7
56	19:17:33.48	30:20:34.8	19:17:33.48	30:20:34.8
62	17:02:48.72	-30:07:50.7	17:02:48.72	-30:07:50.7
68	12:40:49.44	-26:52:26.1	12:40:49.44	-26:52:26.1
69	18:32:58.88	-32:19:23.3	18:32:58.88	-32:19:23.3
70	18:44:49.61	-32:15:33.7	18:44:49.61	-32:15:33.7
71	19:54:50.7	19:00:42.1	19:54:50.7	19:00:42.1
72	20:54:49.8	-12:25:43.4	20:54:49.8	-12:25:43.4
75	20:07:33.02	-21:50:53.1	20:07:33.02	-21:50:53.1
79	05:25:12.67	-24:29:51.8	05:25:12.67	-24:29:51.8
92	17:17:52.03	43:31:20.5	17:17:52.03	43:31:20.5

Tabla A1. Coordenadas Horarias CG en los catálogos Dreyer (1888) y Nasa Extragalactic Dataset (2025)

M	Catálogo de Dreyer			
	Coordenadas Galácticas (2025)		Movimiento Propio	Periodo
	l [°]	b [°]	μ °/años	$T = \frac{2\pi + \Delta t}{\Delta\phi}$ años
2	53,38	-35,767	0,013512688	67762,96626
3	51,323	78,472	0,010526546	114994,7831
4	350,85	15,846	0,002468957	1405935,37
5	4,773	47,307	0,004721954	180191,5047
9	5,556	10,714	0,001931622	112341,5869
10	15,148	23,079	0,002363201	360627,9667
12	14,787	25,78	0,006245812	142410,2351
13	346,537	5,782	0,441071026	2639,015073
14	21,329	14,81	0,001838622	242690,6086
15	65,767	-26,748	0,006224841	163757,1308
19	357,683	9,996	0,006538608	28018,78847
22	9,889	-7,552	0,001992041	750400,247
28	7,803	-5,578	0,001978215	273702,2538
30	27,212	-46,872	0,002498316	351477,6416
53	333,424	79,915	0,001716936	612527,8463
55	8,826	-23,268	0,002047622	358853,6784
56	62,761	8,389	0,001505096	657690,6681
62	353,589	7,328	0,001970416	164004,2449
68	299,633	36,058	0,001871101	542892,4779
69	1,725	-10,261	0,001937549	103253,1523
70	2,858	-12,505	0,001939988	131247,0852
71	56,884	-4,471	0,001975015	867901,1903
72	35,176	-32,678	0,001963831	392510,7489
75	20,304	-25,747	0,002003405	359352,2679
79	227,224	-29,349	0,001303089	1131641,759
92	68,837	34,906	0,002499407	0,478224791

Tabla A2. Coordenadas Galácticas, movimiento propio y periodo de los CG en el catálogo de Dreyer

M	Catálogo de Harris			
	Coordenadas Ecuatoriales (2010)		Coordenadas Ecuatoriales (2025)	
	α [h:m:s]	δ [° : ' : "]	α [°]	δ [°]
2	21:33:27.02	-00:49:23.7	21:34:44.16	-00:42:40.9
3	13:42:11.62	+28:22:38.2	13:43:20.69	28:15:06.8
4	16:23:35.22	-26:31:32.7	16:25:07.35	-26:34:55.8
5	15:18:33.22	+02:04:51.7	15:19:49.19	01:59:28.3
9	17:19:11.26	-18:30:57.4	17:20:39.15	-18:32:24.6
10	16:57:09.05	-04:06:01.1	16:58:28.24	-04:08:15.4
12	16:47:14.18	-01:56:54.7	16:48:32.14	-01:59:29.8
13	16:41:41.24	+36:27:35.5	16:42:34.87	36:24:48.5
14	17:37:36.10	-03:01:45.3	17:38:54.74	-03:02:32.8
15	21:29:58.33	+12:10:01.2	21:31:10.81	12:16:39.4
19	17:02:37.80	-26:16:04.7	17:04:10.67	-26:18:07.2
22	18:36:23.94	-23:54:17.1	18:37:55.41	-23:52:56.2
28	18:24:32.81	-24:52:11.2	18:26:05.06	-24:51:16
30	21:40:22.12	-23:10:47.5	21:41:47.12	-23:03:55.8
53	13:12:55.25	+18:10:05.4	13:14:08.68	18:02:10
55	19:39:59.71	-30:57:53.1	19:41:34.69	-30:54:19.8
56	19:16:35.57	+30:11:00.5	19:17:34.09	30:13:45.8
62	17:01:12.80	-30:06:49.4	17:02:48.44	-30:08:54.8
68	12:39:27.98	-26:44:38.6	12:40:47.79	-26:52:51.9
69	18:31:23.10	-32:20:53.1	18:33:00.91	-32:19:42.9
70	18:43:12.76	-32:17:31.6	18:44:50.34	-32:15:56
71	19:53:46.49	+18:46:45.1	19:54:53.37	18:50:44.8
72	20:53:27.70	-12:32:14.3	20:54:49.94	-12:26:29.2
75	20:06:04.69	-21:55:16.2	20:07:32.98	-21:50:52.9
79	05:24:11.09	-24:31:29.0	05:25:12.91	-24:30:12.1
80	16:17:02.41	-22:58:33.9	16:18:32.08	-23:02:10
92	17:17:07.39	+43:08:09.4	17:17:53.52	43:06:37

Tabla A3. Coordenadas Horarias CG en los catálogos Harris (2010) y Nasa Extragalactic Dataset (2025)

M	Catálogo de Harris			
	Coordenadas Galácticas (2025)		Movimiento Propio	Periodo
	l [°]	b [°]	μ °/años	$T = \frac{2\pi * \Delta t}{\Delta \phi}$ años
2	53,371	-35,77	0,0133800	9656,49
3	42,217	78,707	0,0114448	14924,39
4	350,973	15,972	0,0139248	35174,73
5	3,859	46,796	0,0127079	9447,65
9	5,544	10,707	0,0137184	2232,03
10	15,137	23,076	0,0170182	7066,22
12	15,715	26,313	0,0127297	9859,42
13	59,007	40,913	0,0075875	21646,82
14	21,52	14,91	0,0157719	3992,11
15	65,013	-27,313	0,0126987	11326,84
19	356,869	9,382	0,0141651	1824,97
22	9,892	-7,552	0,0141248	14933,03
28	7,798	-5,581	0,0140076	5454,18
30	27,179	-46,836	0,0166997	7419,53
53	332,964	79,764	0,0131113	11318,14
55	8,793	-23,272	0,0142444	7278,88
56	62,66	8,336	0,0084615	16507,32
62	353,574	7,318	0,0140230	3251,72
68	299,626	36,051	0,0133871	10706,95
69	1,723	-10,27	0,0137156	2058,17
70	2,853	-12,51	0,0137257	2617,54
71	56,746	-4,565	0,0106403	22731,39
72	35,163	-32,683	0,0137527	7908,75
75	20,304	-25,747	0,0141980	7154,86
79	227,23	-29,35	0,0092099	22592,60
80	352,673	19,463	0,0856360	663,43
92	68,338	34,859	0,0058069	29044,32

Tabla A4. Coordenadas Galácticas, movimiento propio y periodo de los CG en el catálogo de Harris



DINÁMICA DE COLISIONES GALÁCTICAS CON GRAVEDAD NEWTONIANA MODIFICADA

ALCIDES ORTEGA¹ y NELSON FALCON²

Universidad de Carabobo. ¹Direccion de Informática. ²Facultad Experimental de Ciencia y Tecnología. Laboratorio de Física de la Atmosfera y Espacio Ultraterrestre. Dpto de Física. Carabobo. Venezuela. {aortega@uc.edu.ve, nelsonfalconv@gmail.com}

Recibido: 20/07/2025, Revisado: 05/08/2025, Aceptado: 12/08/2025

Resumen

Los Catálogos de galaxias cercanas contienen 5-7,5% de colisiones galácticas (*Merging*). Estas fusiones galácticas suelen modelarse mediante dinámica Newtoniana junto a distribuciones de materia oscura no bariónica en el halo. Alternativamente Falcon y colaboradores arguyen que la gravedad Newtoniana debe incluir un término adicional que representa la inercia local a través del principio de Mach. El objetivo del presente trabajo estimar la dinámica de los grupos de galaxias para describir sus posibles colisiones partiendo de la mecánica de Lagrange con potencial tipo Yukawa inverso (campo U_{YF}), que varía con la distancia comóvil, con un comportamiento nulo en el sistema solar interior, débilmente atractivo a distancias interestelares, muy atractivo en cúmulos de galaxias y repulsivo a escalas cósmicas, que resuelve la incompatibilidad entre los modelos Friedman, Robertson-Walker (Λ FRW) con curvatura nula y densidad de materia observada. Se describe la fenomenología empleando el potencial newtoniano más un término gravitacional tipo Yukawa inverso, se modelan las órbitas galácticas, se muestran y se discuten las trayectorias predichas para las galaxias en colisión y sus implicaciones astrofísicas. Se concluye que la órbita prescrita por las galaxias aplicando la Dinámica Newtoniana Modificada con U_{YF} corresponde a trayectorias espirales donde la energía inicial de las galaxias determina las colisiones en la interacción galáctica.

Palabras clave: Materia Oscura, Gravedad, Gravedad Modificada, Fusión de Galaxias.

Dynamics of galactic collisions with modified Newtonian gravity

Abstract

Catalogs of nearby galaxies contain 5-7,5% of galaxy collisions (*Merging*). These galactic mergers are usually modeled by Newtonian dynamics together with non-baryonic dark matter distributions in the halo. Alternatively, Falcon and collaborators argue that Newtonian gravity must include an additional term that represents the local inertia through Mach's principle. The objective of the present work is to estimate the dynamics of galaxy groups to describe their possible collisions starting from Lagrangian mechanics with an inverse Yukawa-type potential (U_{YF} field), which varies with the comoving distance, with zero behavior in the inner Solar System, weakly attractive at interstellar distances, very attractive in galaxy clusters and repulsive at cosmic scales, which resolves the incompatibility between the Friedman-Robertson-Walker (Λ FRW) models with zero curvature and observed matter density. The phenomenology is described using the Newtonian potential plus an inverse Yukawa-type gravitational term, the galactic orbits are modeled, and the predicted trajectories of colliding galaxies and their astrophysical implications are discussed. It is concluded that the orbit prescribed by galaxies applying Modified Newtonian Dynamics with UYF corresponds to spiral trajectories where the initial energy of the galaxies determines the collisions in the galactic interaction.

Key words: Dark Matter, Gravity, Modified Gravity, Galaxy Merging.

1. Introducción

En las observaciones realizadas a las estructuras de los cúmulos de galaxias se ven colisiones (*Merging*) de galaxias que contradicen los modelos que explican la dinámica gravitacional y que están basados en la ley del inverso cuadrado de la distancia postulada por Newton, dado que la masa de materia observada es ordenes de magnitud menor que la requerida para explicar lo observado.

Modelos tradicionales emplean enjambres autogravitantes en simuladores de partículas de Materia Ordinaria conjuntamente con partículas de materia oscura no bariónica para reproducir las colisiones entre dos galaxias interactuantes, sin embargo, los halos de materia oscura es una hipótesis ad hoc de dudosa certidumbre basada en los modelos de Navarro-Frenk-White (NFW) (Navarro *et al.*, 1997) dentro del paradigma de materia exótica inobservada, no constituida por los elementos químicos conocidos ni por el modelo estándar de física de partículas.

Se han propuesto alternativas a la materia oscura no bariónica según la cual la teoría de Gravitación se debe modificar en rangos estelares y cosmológicos.

El objetivo del presente trabajo estimar la dinámica de los grupos de galaxias para describir sus posibles colisiones bajo el formalismo de gravedad modificada. Para ello en la sección 2 se describe la fenomenología un campo tipo Yukawa inverso como alternativa al paradigma de materia oscura (Falcon 2025). En la Sección 3 se modelan las órbitas galácticas mediante la formulación lagrangiana empleando como potencial efectivo el potencial newtoniano más un término gravitacional tipo Yukawa inverso (Falcon 2021). En la sección 4 se muestran las trayectorias predichas para las galaxias en colisión y sus implicaciones astrofísicas. Seguidamente una breve discusión respecto a colisiones en

poblaciones de galaxias cercanas (sección 5) Finalmente se presentan las conclusiones.

2. Gravedad Modificada con campo tipo Yukawa inverso

Falcon y colaboradores (Falcon 2013, 2014, 2021) arguyen que la gravedad Newtoniana debe incluir un término adicional (U_{YF}) que represente la inercia local a través del principio de Mach. El origen de ese campo es la materia bariónica ordinaria y representa la contribución gravitacional de la distribución a gran escala de la masa en la inercia local, obviada en la gravitación Newtoniana al describir la interacción entre dos partículas.

Esta contribución complementaria sería nula en rangos de distancias comóviles del orden del sistema solar, débilmente atractiva en rangos de distancias interestelares, muy atractiva en rangos de distancias intergalácticas, y repulsiva a escalas cósmicas (Fig 1).

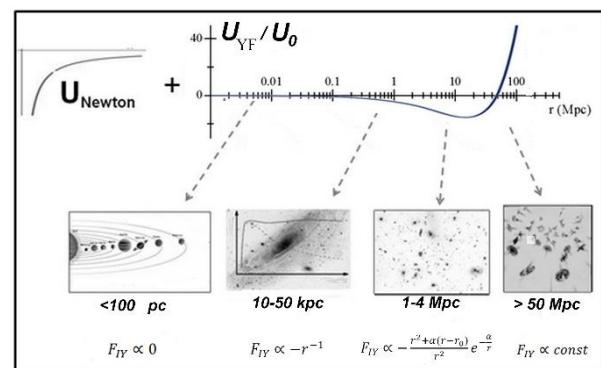


Fig. 1. Modificación a gran escala de la con campo tipo Yukawa inverso (U_{YF}) en escala astronómica para diferentes rangos de distancia comóvil.

El uso de este potencial tipo Yukawa inverso permite resolver la incompatibilidad entre los modelos Friedman, Robertson-Walker (FRW) con curvatura nula y la densidad de materia bariónica observada (Falcon 2013). El empleo de esta formulación resuelve el problema de la masa perdida de Zwicky sin incorporar materia oscura (Falcon

2025)

La Fig. 1 muestra un mínimo en $r \approx 10$ Mpc y por lo tanto el modelo predice la finitud del alcance de la gravedad y masa del gravitón no nula, en concordancia de la observación de ondas gravitacionales (Falcon 2023).

El potencial U_{YF} puede expresarse como:

$$U_{YF} = U_0 e^{-\frac{\alpha}{r}}(r - r_0) \quad (1)$$

Donde las constantes de acoplamiento son $r_0=50$ Mpc, $\alpha=2.5$ Mpc y $U_0 = 4\pi\tilde{l}GMr_0^{-1}$. \tilde{l} es un parámetro dimensional con valor de m^{-1} . Adviértase que el U_{YF} es un potencial por unidad de masa, creado por la distribución de masa M , luego para describir la interacción con alguna partícula masiva hay que multiplicar por el valor de la masa m de dicha partícula.

3. Aproximación Lagrangiana

Considérese una galaxia de masa m , dentro de un campo gravitacional de un cumulo de galaxias de masa M , y sea $U=U(r)$ el potencial efectivo que solo depende de la distancia comóvil. Entonces la función de Lagrange en coordenadas polares es:

$$\mathcal{L} = \frac{\mu}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) - U(r) \quad (2)$$

Donde el punto como estandarte sobre las letras, denota derivada parcial respecto al tiempo y $\mu=(M+m)/(Mm)$ es la masa reducida. Entonces las Ecuaciones de Euler-Lagrange que describen el movimiento, para los dos grados de libertad r y θ son:

$$\frac{d}{dt}(\mu r^2\dot{\theta}) = 0 \quad (3)$$

$$\mu\ddot{r} - \mu r\dot{\theta}^2 + \frac{\partial U(r)}{\partial r} = 0 \quad (4)$$

Nótese que θ es una variable cíclica, por lo tanto (3) conlleva a la Conservación del momento angular (l):

$$(\mu r^2\dot{\theta}) = Constante = l \Rightarrow \dot{\theta} = \frac{l}{\mu r^2} \quad (5)$$

La ecuación de Euler-Lagrange para la variable r permite, luego de multiplicar por \dot{r} , obtener la conservación de la energía (E):

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\mu}{2}\dot{r}^2 + \frac{l^2}{2\mu r^2} + U\right) = 0 \Rightarrow \left(\frac{\mu}{2}\dot{r}^2 + \frac{l^2}{2\mu r^2} + U\right) = E \quad (6)$$

En el caso de que el potencial gravitacional sea el Newtoniano, entonces

$$U(r) = U_N = -\frac{GMm}{r} \quad (7)$$

Reemplazando (5) en (6) e Integrando se obtiene la ecuación de la órbita:

$$\Delta\theta = \int \frac{r^{-1}dr}{\sqrt{\frac{2\mu E}{l^2}r^2 - \frac{2\mu}{l^2}U(r)r^2 - 1}} \quad (8)$$

Al realizar la integración obtenemos una expresión de la forma:

$$r = \frac{\epsilon k}{1 + \epsilon \cos\theta} \quad (9)$$

Que es la ecuación característica de las cónicas en coordenadas polares; y representa, en la Dinámica Newtoniana, trayectorias keplerianas de excentricidad ϵ .

Consideremos ahora la modificación a gran escala de la Gravedad (Falcón 2011, 2021), con un término U_{YF} que representa la contribución de la inercia local, dado por (1), entonces en lugar de (7) se tiene:

$$U(r) = U_N + U_{YF} \quad (10)$$

Y la ecuación de la órbita (8), queda como:

$$\Delta\theta = \int \frac{r^{-1}dr}{\sqrt{\frac{2\mu}{l^2}r^2 \left[E + \frac{GMm}{r} - U_0 e^{-\frac{\alpha}{r}}(r - r_0) \right] - 1}} \quad (11)$$

La no linealidad de (11) requiere una aproximación polinómica, en el rango

esperado de variabilidad para la distancia comóvil: $1 \leq r \leq 3$ Mpc, característica dentro de un cumulo de galaxias.

Con el cambio de variables $x \equiv \frac{r}{r_0} = \frac{r}{50\text{Mpc}}$, en el rango $0.02 \leq x \leq 0.06$, se obtiene:

$$\Delta\theta = \int \frac{x^{-1}dx}{\sqrt{\frac{2\mu Er_0^2}{l^2}x^2 - \frac{2\mu r_0^2 U(x)}{l^2}x^2 - 1}} \quad (12)$$

Donde

$$U(x) = -\frac{GMm}{r_0x} + 4\pi GMm\tilde{l}e^{-\frac{0.05}{x}}(x-1) \quad (13)$$

Se puede aproximar el término no lineal de (12) a una función polinómica cuadrática(Fig. 2):

$$U_{YF}(x) \cong a_2 x^2 + a_1 x + a_0 \\ = 78,79x^2 - 14,58x + 0,18 \quad (14)$$

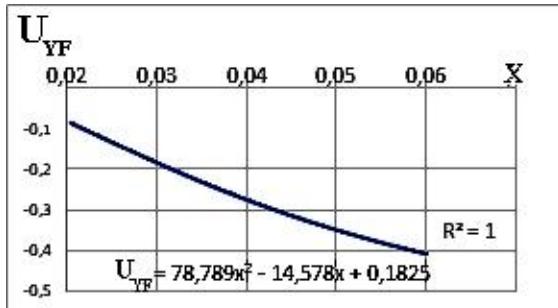


Fig. 2. Aproximación del potencial U_{YF} en el rango interno de distancia comóvil de los cúmulos de galaxias

Luego, la ecuación de la órbita (12), en forma integral queda como:

$$\Delta\theta = \int \frac{x^{-1}dx}{\sqrt{b_4 x^4 + b_3 x^3 + b_2 x^2 + b_1 x + b_0}} \quad (15)$$

Donde

$$b_4 = -\frac{2\mu r_0^2}{l^2} 4\pi GMm \tilde{l}a_2$$

$$b_3 = -\frac{2\mu r_0^2}{l^2} 4\pi GMm \tilde{l}a_1$$

$$b_2 = -\frac{2\mu r_0^2}{l^2} 4\pi GMm \tilde{l} \left(a_0 - \frac{E}{4\pi GMm \tilde{l}}\right)$$

$$b_1 = -\frac{2\mu r_0}{l^2} GMm$$

$$b_0 = 1$$

En el rango de la distancia comóvil considerado: $1 \leq r \leq 3$ Mpc, el potencial U_{YF} resulta mucho mayor que el potencial Newtoniano (Fig. 3) por lo tanto $b_4 >> b_1, b_3 >> b_1, b_2 >> b_1$; además son términos mucho mayores que la unidad.

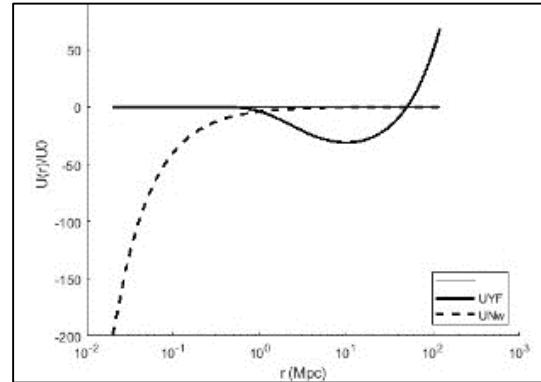


Fig 3. Comparación de los potenciales Newtoniano y U_{YF} en el rango interno de distancia comóvil de los cúmulos de galaxias

Por lo tanto (15) puede escribirse como:

$$\Phi(x) \equiv \frac{\Delta\theta}{A} = \int \frac{x^{-2}dx}{\sqrt{-a_2 x^2 - a_1 x + (a_0 - B)}} \quad (16)$$

Donde

$$A = \frac{l}{\sqrt{8\pi r_0^2 GMm \mu \tilde{l}}} \quad B = \frac{E}{4\pi GMm \tilde{l}} \quad (17)$$

Finalmente, la integración de (16) provee la ecuación de la órbita en términos de los parámetros de momento angular A y energía B :

$$\frac{\Delta\theta}{A} = \frac{\sqrt{-6207,7x^2 + 14,58x + B - 0,18}}{(0,18 - B)x} \\ + \frac{7,3}{(0,18 - B)^{3/2}} \tan^{-1}(\xi) \quad (18)$$

Con

$$\xi \equiv \frac{\sqrt{-6207,7x^2 + 14,58x + B - 0,18} - \sqrt{B - 0,18}}{\sqrt{B - 0,18}(851,65x - 1)} - 1 \quad (19)$$

Obsérvese que la ecuación de la trayectoria obtenida en (18) ya no corresponde a cónicas en coordenadas polares y por tanto las trayectorias no serán keplerianas.

4. Resultados

El incremento del momento angular, parámetro adimensional A en (18), aumenta monótonamente el ángulo θ para la misma distancia radial r. El comportamiento del ángulo θ con relación al parámetro adimensional de energía B no es evidente de la relación (18), la figura 4 muestra que también se incrementa monótonamente con la energía (parámetro B).

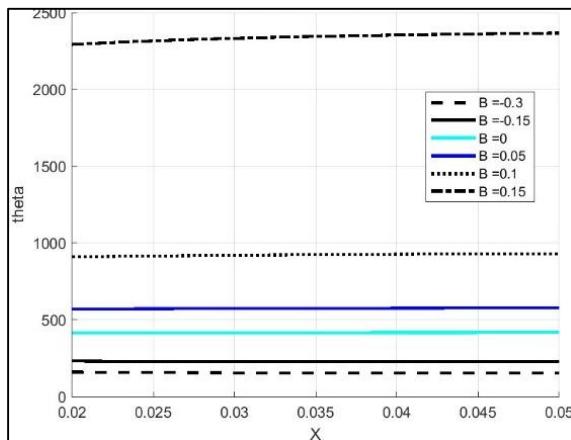


Fig 4. Variación angular en función del parámetro de energía B.

El incremento directamente proporcional de la posición angular, para la misma distancia radial, respecto a la energía y al momento angular confirma el carácter no Kepleriano de las órbitas dentro de un cúmulo de Galaxias. Este resultado es importante porque, a diferencias de las órbitas planetarias y estelares, no es posible comparar dos o mas posiciones órbitales en galaxia alguna dado que los tiempos de traslación exceden por mucho la edad de la Tierra. Hasta ahora en la literatura, se asume, sin evidencia alguna, que las órbitas galácticas son similares a las órbitas cónicas estelares y planetarias.

Las órbitas físicamente validas serán aquellas para las cuales la ecuación de la trayectoria (18) sea real. El radical en el primer término de (18) acota al valor minimal del parámetro de energía $B \geq -9,52$. Análogamente el radical del denominador segundo término de

(18) demanda la cota superior $B < 0,18$. Valores de energía relativa B, fuera de este rango no producirán órbitas estables ligadas en el cúmulo de galaxias.

Para valores mínimos de energía ($B \leq 0$) se obtienen trayectorias abiertas en el rango de distancias comóviles consideradas (Fig. 5) que no se corresponden a secciones cónicas ni arcos de circunferencias.

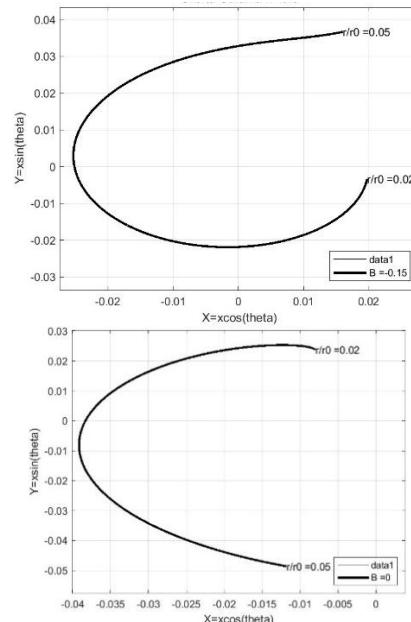


Fig 5. Trayectorias abiertas para galaxias con energía es pequeña. Arriba $B = -0,15$. Abajo $B = 0$.

Para graficar las trayectorias se usó la proyección de (18) en un plano bidimensional en el rango de distancia comóvil de 1-3 Mpc. Nótese que ese plano no corresponde necesariamente con el plano de observación de los cúmulos galácticos vistos desde la Tierra.

El incremento en modulo del parámetro de energía B, conlleva a trayectorias espirales que caen hacia el centro del Cúmulo (Fig 6). El spin o dirección de giro cambia con la signatura de la energía total.

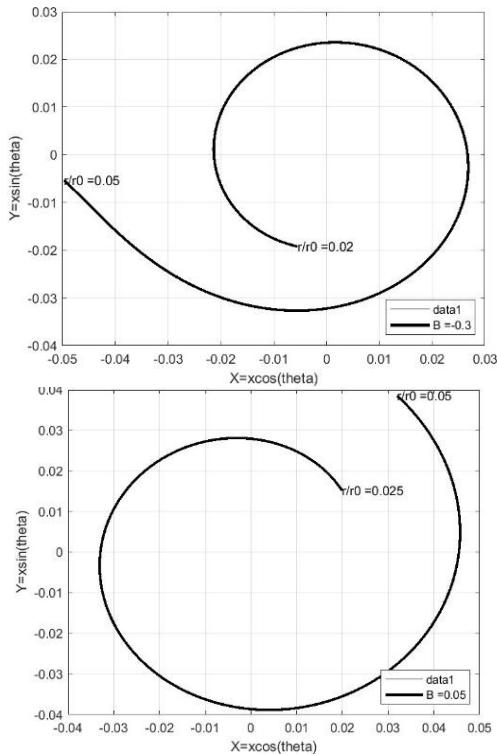


Fig. 6. Trayectorias espirales. Arriba: dextrógiros ($E < 0$) Abajo levógiros ($E > 0$)

El incremento de la energía (parámetro B) produce trayectorias espirales con mayor número de vueltas para los mismos rangos de distancia comóvil (Fig. 7). Como cabe esperar, pues dado un cúmulo de masa M y una galaxia de masa m , el aumento de B en (17) implica un incremento de la energía total, siendo que el potencial permanece constante, luego equivale a un aumento en la energía cinética y por tanto del número de vueltas que efectúa respecto al centro atractor.

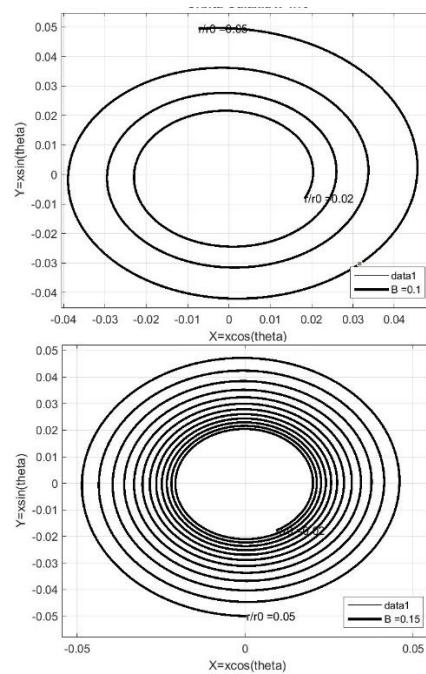


Fig 7. Trayectorias espirales levógiros, arriba $B=0.1$, abajo $B=0.15$.

El aumento de la Energía total (B) se traduce en un incremento proporcional de la energía cinética. Las trayectorias espirales descendentes de las galaxias hacia el centro atractor del cúmulo permiten inferir la tendencia hacia las colisiones y fusión entre galaxias, toda vez que la dinámica del campo U_{YF} no permite órbitas keplerianas donde el centro de masas fungiría como foco de las órbitas. Es decir, al no existir órbitas cónicas, todas las galaxias del cúmulo terminarían colisionando con el centro de masas de la configuración gravitacional.

5. Discusión

El más reciente *survey* de Galaxias cercanas (a menos de 50 Mpc, (Ohlson D *et al* 2024 muestran una distribución isótropa aproximadamente gaussiana, respecto al grupo local, salvo por la presencia del supercúmulo de Virgo (situado a 16 Mpc) y obviamente el sesgo de detección de galaxias pequeñas enanas del grupo local y sus cercanías en $r < 5$ Mpc (Fig.8).

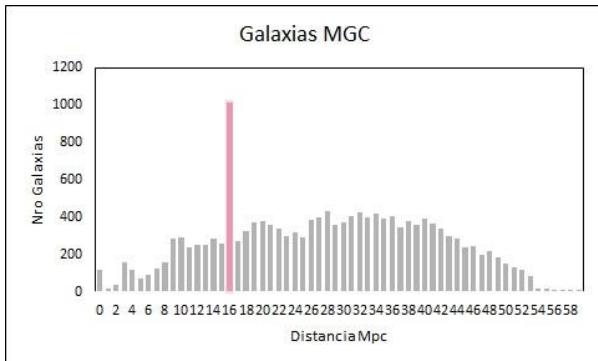


Fig 8 Histograma de galaxias en función de la distancia comóvil para $r > 50$ Mpc. Fuente propia a partir del catálogo de Ohlson (Ohlson D et al 2024). El supercúmulo de Virgo a $r \sim 16$ Mpc está destacado en color.

Por otra parte, las galaxias en fusión (*Merging*) presentan una distribución menos homogénea según el catálogo de galaxias interactuantes (Vorontsov-Velyaminov et al 1999). Se observa que la distribución presenta alrededor de 4-5 % de galaxias en fusión respecto al número total de galaxias a esas mismas distancias (Fig. 9).

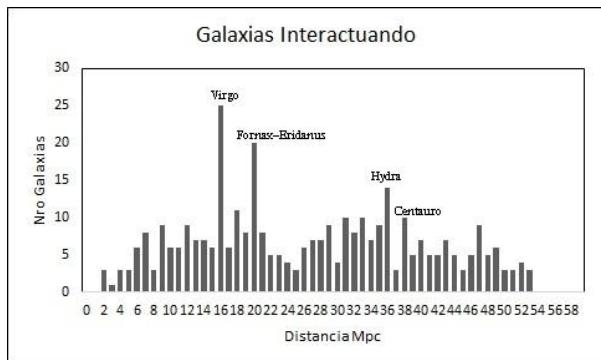


Fig 9 Histograma de fusiones de galaxias. Fuente propia a partir del catálogo de Galaxias interactuativas (Vorontsov-Velyaminov et al 2024). Los picos notables de frecuencia corresponden a los supercúmulos de galaxias cercanos.

Los máximos relativos se frecuencias de galaxias en colisión (*Merging*) se corresponden con las estructuras de los supercúmulos de galaxias a esas distancias: Virgo (4%), Fornax-Eridanus (5%) e Hydra-Centauro (3,5%). El registro de galaxias cercanas (Ohlson D et al 2024) contiene 15424; mientras que el Catalogo de galaxias

interactivas contiene solo 1162 (Vorontsov et al 1999); luego el 7,5 % se fusionan entre sí. Esta es una proporción grande si se considera que la distancia media entre galaxias en un cúmulo es del orden de 0,5 Mpc (Mo et al 2010). La dinámica galáctica prescrita en (11) sugiere que en los supercúmulos las colisiones o fusiones entre dos galaxias serán más frecuentes. Por cuanto el incremento de la inercia local debido a las masas dispersas de las otras galaxias en el supercúmulo incrementa el potencial U_{YF} .

Resultados preliminares muestran que las imágenes de colisiones y fusiones galácticas podrían simularse con una escogencia adecuada de las familias de trayectorias posibles dadas en (18). Sin pretender un modelo exhaustivo se ilustran las alegorías de dos ejemplos notables de colisiones galácticas. La figura 10 muestra la fusión de galaxias NGC4038 y NGC4039 en la constelación del Cervo (Galaxias de "Las Antenas").

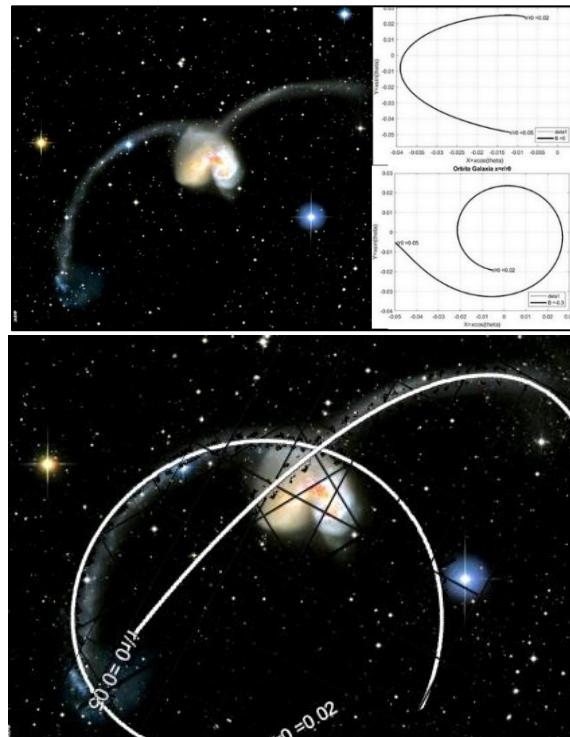


Fig 10 Galaxias de Las Antenas . Arriba: Trayectorias propuestas con $B=0$ y $B=-0,3$. Abajo superposición de trayectorias.

El par de galaxias en colisión NGC 5194-5185 en la constelación Canes Venacetti (Galaxias del remolino) se modela en la Figura 11.

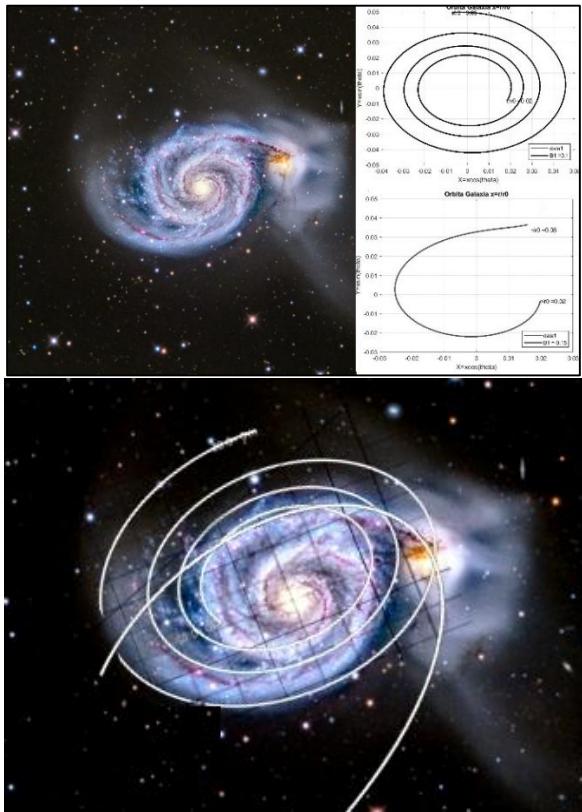


Fig 11 Galaxias del Remolino. Arriba: Trayectorias propuestas $B=0,15$ y $B=-0,15$. Abajo superposición de trayectorias.

6. Conclusiones.

El formalismo Lagrangiano de gravedad modificada por un campo U_{YF} , tipo Yukawa Inverso (Falcon 2021, 2024, 2025) permite modelar las trayectorias galácticas dentro de los cúmulos de galaxias, y sus colisiones, sin incluir materia oscura no barionica como en los modelos NFW. Las órbitas encontradas corresponden a trayectorias espirales en acuerdo con las observaciones, que dependen de la energía y momento angular inicial de las componentes. A diferencia de la gravitación newtoniana las trayectorias galácticas serian no Keplerianas donde la energía inicial regula el acercamiento o alejamiento en las

componentes galácticas para la fusión-colisión. Adicionalmente el formalismo explica la tasa relativamente alta de colisiones (5-7,5%) en los Catálogos de galaxias cercanas ($r < 50$ Mpc) y están de acuerdo con la hipótesis de finitud del alcance de la fuerza de gravitación, prescrito por el campo U_{YF} .

7. Agradecimientos

Se agradece el financiamiento del MinCyT CDCHUC a través del proyecto CFP 20250000038: Modificación a gran escala de la Gravedad: alternativa a la Materia oscura y Energía Oscura del Universo.

8. Bibliografía

Falcon, N. (2013). Modification of the Newtonian Dynamics in Λ FRW-Cosmology an Alternative Approach to Dark Matter and Dark Energy. JMP 319. 10-18.

Falcon, N., Aguirre A. (2014). Theoretical Deduction of the Hubble Law Beginning with a MoND Theory in Context of the Λ FRW-Cosmology. IJAA. 4. 551-559.

Falcon, N. (2021). A large-scale heuristic modification of Newtonian gravity as an alternative approach to dark energy and dark matter. J Astrophys Astron 42. 102.

Falcon, N. (2023). Modified Gravitation and Mach's Principle: An Alternative to the Dark Matter and Dark Energy Cosmological Paradigm. OAJA 1 (1): 000103

Falcon, N. (2025). Zwicky's Missing Mass: Dark Matter versus Modified Gravity. OAJA. 3 (1):000156.

Mo, H., van den Bosch, F., White, S. (2010). *Galaxy Formation and Evolution*. Cambridge University Press: USA.

Navarro, J; Frenk, C; White, S. (1997). A

Universal Density Profile from Hierarchical Clustering. APJ 490. (493): 000103

Ohlson D *et al* (2024) The 50 Mpc Galaxy Catalog (50 MGC): Consistent and Homogeneous Masses, Distances, Colors, and Morphologies AJ **167** 31

Vorontsov-Velyaminov, B.A. Noskova, R.I. Arkhipova V.P. (1999) *The Catalogue of Interacting Galaxies* Sternberg Astronomical Institute: Moscow University



FORMACIÓN DE ESTRUCTURAS CON GRAVEDAD MODIFICADA A GRAN ESCALA CON CAMPO TIPO YUKAWA INVERSO UYF

LEOPOLDO RAMIREZ^{1,2*} LUIS PEREZ² y NELSON FALCON. ²

¹Coordinacion de Óptica. Instituto Nacional de Astrofísica, óptica y Electrónica (INAOE), Tonantzintla, Puebla, México

²Universidad de Carabobo. Facultad Experimental de Ciencia y Tecnología. Dpto. de Física, Laboratorio de Física de la Atmosfera y Espacio Ultraterrestre. Carabobo. Venezuela.

{leopoldo.ramirez@inaoep.mx luferperezp@gmail.com nelsonfalconv@mail.com}

Recibido: 20/07/2025, Revisado: 05/08/2025, Aceptado: 12/08/2025

Resumen

Se estudia la formación de cúmulos y supercúmulos de galaxias en el formalismo de la teoría de Jeans con gravedad modificada (particularmente un campo de Yukawa inverso), añadiendo la dependencia del tamaño de las nubes estelares. Las estimaciones coinciden con las observaciones para tamaños promedios de nubes moleculares y galaxias espirales; además se predice la formación de regiones alternas de estabilidad y fragmentación para gas internube, de alta estabilidad para nubes grandes ($> 10 \text{ Mpc}$) de gas intergaláctico (con densidades $n_0 \leq 10^{-3} \text{ cm}^{-3}$) y una alta tasa de fragmentación para nubes más pequeñas ($90 \text{ kpc} < r < 10 \text{ Mpc}$). Se incluye de manera natural la expansión de Hubble en la formación de estructura a gran escala del universo sin modificar la descripción ya conocida para escalas estelares y altas densidades, siendo la nueva descripción una generalización de la teoría de Jeans sin invocar materia oscura no bariónica.

Palabras clave: Gravitación modificada, formación de estructura, teoría de Jeans,

Formation of structures with large-scale modified gravity, with inverse-Yukawa-like field UYF

Abstract

The formation of galaxy clusters and superclusters is studied in the formalism of Jeans theory with modified gravity (particularly an inverse Yukawa field), adding the dependence on the size of stellar clouds. The estimates agree with observations for average sizes of molecular clouds and spiral galaxies; in addition, the formation of alternating regions of stability and fragmentation for intercloud gas is predicted, with high stability for large clouds ($> 10 \text{ Mpc}$) of intergalactic gas (with densities $n_0 \leq 10^{-3} \text{ cm}^{-3}$) and a high fragmentation rate for smaller clouds ($90 \text{ kpc} < r < 10 \text{ Mpc}$). The Hubble expansion is naturally included in the formation of large-scale structure in the Universe without modifying the well-known description for stellar scales and high densities. The new description is a generalization of Jeans theory without invoking non-baryonic dark matter.

Key words: Modified gravitation, structure formation, Jeans theory.

1. Introducción

La teoría de Jeans describe cómo las nubes de gas y polvo en el espacio pueden colapsar bajo su propia gravedad para formar protoestrellas y protogalaxias. Se basa en el equilibrio entre la presión interna de una nube molecular (que tiende a expandirla) y la gravedad (que tiende a contraerla). La longitud de Jeans es el tamaño crítico de una nube primigenia (protoestelar o protogaláctica) cuando alcanza un equilibrio inestable entre la gravedad y la presión, y viene dada por (Jeans 1928):

$$\lambda_J \equiv \sqrt{\frac{\pi c_s^2}{G\rho}} \quad (1)$$

donde c_s es la velocidad adiabática del sonido en el medio, G es la constante de gravitación universal y ρ representa la densidad de la materia (bariónica) de la nube primigenia.

La condición para la fragmentación se alcanza cuando el tamaño de la nube supera la longitud crítica, denominada longitud de Jeans (λ_J):

$$D > \lambda_J \quad (2)$$

Otra manera de describir la formación de estructura es mediante la masa de Jeans, vale decir la masa contenida en una esfera con tamaño igual a su longitud de Jeans:

$$M_J \equiv \frac{4\pi\rho}{3} \left(\frac{\pi c_s^2}{G\rho} \right)^{3/2} \quad (3)$$

La teoría de Jeans ha permitido modelar la formación de estrellas y sistemas planetarios a partir del colapso de nubes de polvo y gas. Sin embargo, no hay ninguna teoría que explique convincentemente la formación de galaxias en el universo observable, los modelos más empleados parten de simulaciones con materia oscura fría no-bariónica (CDM), y son por tanto conjeturales.

La formación de estructura a gran escala como los cúmulos y supercúmulos de galaxias, sigue siendo un problema abierto, pues los modelos computacionales emplean el formalismo de Navarro-Frenk-White (NFW) que suponen una distribución de materia oscura (Navarro et al 1996). Esta materia oscura no estaría compuesta por elementos de la tabla periódica ni del Modelo Estándar de Física de Partículas, en abierta contradicción con los experimentos terrestres y la observación astronómica (visible, infrarrojo, rayos X, ultravioleta y rayos gamma). La materia oscura se presume en virtud de sus efectos gravitacionales exclusivamente.

Otra línea de investigación supone cambiar el paradigma de la materia oscura por la modificación a gran escala de la gravitación. Recientemente, una de estas teorías (Falcon 2021, 2023) propone adicionar un término no-local al potencial Newtoniano, denominado campo de Yukawa inverso (UYF). El origen de este potencial es la inercia ocasionada por la distribución a gran escala de la materia ordinaria (Falcon 2021) prescrito por:

$$U_{YF} \equiv \langle U \rangle = U_0(r - r_0)e^{-\frac{\alpha}{r}} \quad (4)$$

Con las constantes de acoplamiento $r_0 = \sim 50$ Mpc, $\alpha \sim 2.5$ Mpc y $U_0 \equiv 4\pi l GM r_0^{-1}$ en unidades de J/kg; y $l \equiv 1$ m⁻¹.

El potencial descrito en la Ec.(4) resulta nulo a escalas de menores a 1 parsec, en concordancia en los experimentos tipo Eotvos que comprueban la ley de gravedad de Newton para estas escalas. Es débilmente atractivo a escalas de kiloparsecs explicando las curvas de rotación de galaxias; es fuertemente atractivo en rangos de megaparsecs explicando la fuerte atracción dentro de los cúmulos de galaxias sin suponer la existencia de materia oscura no bariónica. Y el potencial U_{YF} resulta repulsivo a escalas mayores de 50 Mpc explicando expansión acelerada del universo (energía oscura).

Nos proponemos estudiar el

formalismo de formación de estructuras de Jeans al incorporar un potencial tipo Yukawa inverso (U_{YF}) como complemento a gran escala de la gravitación Newtoniana. En la sección 2 se muestra la formación de estructuras con gravedad modificada $U_{total}=U_{Newton}+U_{YF}$. Luego los resultados del modelo de fragmentación en la sección 3, y se discute la variación con la temperatura (sección 4) y las conclusiones en la última sección.

2. Metodología: Modelo de Jeans

Para estudiar el colapso auto gravitante en nubes protoestelares y protogalácticas se asumen las siguientes hipótesis (Sercic 1982, Mo et al 2010):

- (i) Solo se consideran la fuerza de gravedad y las ondas de presión debido a los choques entre las partículas.
- (ii) Las nubes solo contienen gas y polvo, principalmente regiones HI (hidrógeno neutro) y HII (hidrógeno ionizado)
- (iii) El tamaño de las nubes estelares es mucho menor al horizonte de partículas existente en ese momento, por lo que el régimen Newtoniano es equivalente al relativista; se considera densidades sin correcciones relativistas significativas
- (iv) Las nubes primigenias están en equilibrio térmico, homogeneidad e isótropa. La nube se considera aislada térmicamente (proceso adiabático).
- (v) Se asume simetría esférica, y en consecuencia, las magnitudes físicas involucradas (densidad, campo gravitatorio y el vector de onda de presión) son solo funciones radiales.

Bajo tales consideraciones, el tiempo de tránsito (τ_t) de una onda de presión a través de una nube estelar de longitud λ está dado por:

$$\tau_t \cong \frac{\lambda}{c_s} \quad (5)$$

Donde la velocidad adiabática del sonido en la nube (c_s), se expresa en términos de su temperatura (T), la masa del Hidrógeno (m_H) y la constante de Boltzmann como:

$$c_s \approx \sqrt{\frac{k_B T}{m_H}} \quad (6)$$

Además, el tiempo de caída libre (τ_g) hacia el centro de la nube bajo la acción de la gravedad $U_{total}=U_{Newton}+U_{YF}$ sería:

$$\tau_g = \sqrt{\pi} \left[G\rho + \frac{3U_0}{4\pi r^3} (r - r_0) e^{-\frac{\alpha}{r}} \right]^{-1/2} \quad (7)$$

Si $\tau_g < \tau_t$, la fuerza de presión del gas es mayor que la fuerza de gravedad y la nube se expande. Recíprocamente si $\tau_g > \tau_t$ la nube colapsa. La inestabilidad crítica se alcanza cuando las dimensiones características de la nube son iguales a la longitud de Jeans, por tanto:

$$\frac{\lambda_J^{(YF)}}{\lambda_J^{(N)}} = \left[1 - \Phi_0(n_0) e^{-\frac{\alpha}{r}} \frac{(r^2 + \alpha(r - r_0))}{r^3} \right]^{-1/2} \quad (8)$$

Donde los estandartes ^(YF) y ^(N) denotan las longitudes de Jeans considerando el potencial gravitacional modificado y Newtoniano respectivamente. $\Phi_0(n_0)$ es una función que depende de la densidad del número de partículas de la nube (n_0) y la metalicidad (μ). Suponiendo metalicidad solar ($\mu \sim 10^{-2}$) en una nube principalmente de Hidrógeno, se obtiene:

$$\Phi_0(n_0) \equiv \frac{3U_0(M)}{4\pi G\rho} = \frac{3}{\mu n_0 m_H} \approx \frac{5.8}{n_0} \langle \frac{Mpc}{cm^3} \rangle \quad (9)$$

La Ec.(8) revela que en el formalismo de gravedad modificada con U_{YF} , dependiente de la distancia comovil, la longitud de Jeans variará dependiendo de la escala de longitud considerada (Fig. 1). Además se verifica en (8) que $\lim_{r \rightarrow 0} \lambda_J^{(YF)} = \lambda_J^{(N)}$, luego el formalismo no predice cambios en el colapso de nubes estelares para sistemas planetarios, como cabe esperar para rangos de longitud donde la

contribución del término U_{YF} es despreciable.

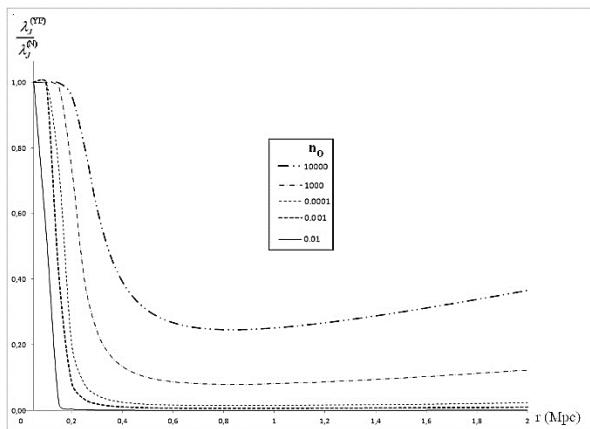


Fig. 1. Variación de la longitud de Jean a diferentes escalas y densidad del número de partículas.

Observamos en la Fig. 1 que la modificación de la gravitación newtoniana a gran escala no afecta la longitud de Jeans en rangos de distancia de comóvil menores de 100 kpc, incluso para densidades tan bajas como la del medio intergaláctico.

Al aumentar la densidad del número de partículas tiende a suavizar la diferencia entre las longitudes de Jeans con y sin la corrección a gran escala para la gravedad newtoniana. Para densidades bajas, como las del medio intergaláctico, la diferencia entre los dos modelos para la longitud de Jean es significativa. Siendo del orden del 40% menor que $\lambda_J^{(N)}$ en los rangos de distancia de (0,5 a 2) Mpc, lo que coincide con la aglutinación de gas caliente observada en rayos X en cúmulos de galaxias.

Para nubes densas ($n_0 \sim 10^2\text{-}10^6 \text{ cm}^{-3}$), la longitud de Jeans es prácticamente constante en todo rango, y se re obtiene una de las características estándar: la independencia con el tamaño de la nube. Si la nube es muy pequeña ($r \sim 0$) o muy grande ($r \gg r_0$), su comportamiento respecto a la fragmentación es constante a densidades altas.

En cambio, para densidades bajas ($n_0 \sim 10^{-3} \text{ cm}^{-3}$), el modelo predice que la longitud de Jeans supera los 14Mpc; en concordancia

con la ausencia de estructura de nubes poco densas y muy extensas; resultado no predicho por el formalismo estándar de Jeans, que no limita el tamaño de la nube a esas escalas de longitud y baja densidad.

3. Condiciones de fragmentación

La ecuación (2) representa el tamaño crítico en el cual la nube pasa de ser estable, con poca amplitud de las ondas de presión y densidad, hasta que estas últimas empiezan a crecer debido al aumento de la presión gravitacional. Se generan zonas con menor densidad de materia en los valles de las ondas de densidad, condición que se retroalimenta a medida que las ondas aumentan de amplitud; así, si inicialmente una nube grande en comparación a su densidad era homogénea ahora estaría segmentada en regiones aisladas, formándose fragmentos en la nube estelar original.

La inclusión del U_{YF} no cambia este mecanismo, pero afecta la tasa de fragmentación para diferentes tamaños de nubes estelares. La nueva condición de fragmentación para la longitud de Jeans reescalada (8) con gravedad tipo U_{YF} es:

$$\frac{\lambda_J^{(YF)}}{\lambda_J^{(N)}} \leq (7.32) \sqrt{\frac{n_0}{T}} r \quad (10)$$

Donde la Temperatura T se expresa en Kelvin, la distancia r en Mpc y la densidad del número de partículas en cm^{-3} .

Por lo que la condición de fragmentación (10) representa una recta que varía con la densidad y temperatura promedio de la nube de gas y polvo estelar. Por

consiguiente, se estudia $\frac{\lambda_J^{(YF)}(r, n_0)}{\lambda_J^{(N)}(r, n_0)}$ para diferentes tipos de nubes de gas y polvo estelar como lo son: las nubes moleculares (NM); el gas frío atómico (FA); el gas internube (IN) y el gas intergaláctico (IG) (Tabla 1).

Región	Densidad (cm^{-3})	Temperatura (K)
NM	$10^2 - 10^6$	$10^0 - 10^1$
FA	20 - 50	$10^1 - 10^2$
IN	0,2 - 0,5	$10^3 - 10^4$
IG	10^{-3}	10^5

Tabla 1: Densidades y temperaturas en diferentes regiones interestelares. (Murray 2011, Estalella y Anglado 1996, Ferriere 2001)

En la Figura 1 se aprecia que existe un máximo en $r \sim 18$ Mpc, por lo que las nubes de estas dimensiones tendrían a ser más estables bajo el modelo usando UYF que en la teoría de Jeans convencional.

Para $r \sim 0,83$ Mpc existe un mínimo donde el modelo tiene menor magnitud con respecto a la longitud de Jeans usual, lo que implica que a esas escalas se facilita la fragmentación de las nubes estelares.

La ecuación (10) provee una condición para las simulaciones de formación de estructura a gran escala como la formación de proto-galaxias o de cúmulos de proto-galaxias usando gravedad modificada en lugar de suponer materia oscura no bariónica con perfiles NFR de dudosa certidumbre.

Si se toma en cuenta la condición de fragmentación (11) y la longitud de Jeans (8), la intercepción gráfica de ambas relaciones define un radio crítico r_f en el cual las nubes pasan de un régimen estable a un régimen de fragmentación, que depende de la densidad de la nube. Este radio de fragmentación aumenta conforme la densidad de la nube disminuye (Tabla 2).

Los radios máximos de las nubes moleculares más densas no pasan de 310 pc a 5 K antes de fragmentarse, y las nubes moleculares gigantes (GMC) tienen radios de hasta ~ 200 pc (Murray 2011) si bien podrían llegar a existir nubes moleculares más grandes y menos densas.

Region	n_o (cm^{-3})	Temp. (K)	r_f
NM	10^6	5	310 pc
NM	10^2	5	31 kpc
FA	50	50	140 kpc
FA	20	50	210 kpc
IN	0,5	5×10^3	1,7-3,2 Mpc
IN	0,2	5×10^3	1,7-3,2 Mpc
IG	10^{-3}	10^5	38,7 Mpc

Tabla 2: Radios de fragmentación para diferentes n_o .

Las galaxias más densas (compuestas principalmente de gas FA) pueden llegar a tener radios máximos 140 kpc; el tamaño medio de las galaxias espirales es ~ 40 kpc.¹³ En el gas internube se podrían formar “zonas anulares” de fragmentación o zonas donde se alterna la estabilidad y la fragmentación de las nubes (Fig. 2). El comportamiento de estos anillos también varía con la temperatura

Al tener muy baja densidad, las nubes de gas intergaláctico están débilmente cohesionadas gravitacionalmente; aun siendo muy calientes no se fragmentan o colapsan para formar grupos de estructuras más pequeñas, manteniéndose extremadamente estables.

La alta estabilidad predicha de estas nubes explica por qué son la mayor parte del universo observable al “cubrir” el espacio entre las galaxias y cúmulos de galaxias, incluso formando zonas aún menos densas, más estables y con enormes tamaños vacíos, llamados voids.

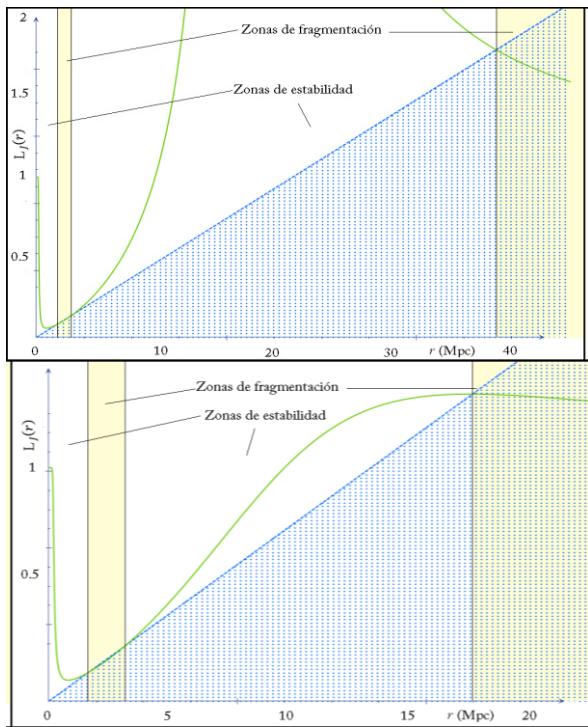


Fig. 2: Zonas de fragmentación (amarillo) y estabilidad (blancas) presentes en el gas IN. Arriba: para $n_o = 0,2 \text{ cm}^{-3}$. Abajo: para $n_o = 0,5 \text{ cm}^{-3}$. La zona punteada representa la región donde se satisface la inecuación (10).

4. Discusión: Dependencia con la Temperatura

En (8) no hay dependencia directa de la longitud de Jeans reescalada y la temperatura; sin embargo, hay dependencia indirecta con la ecuación (10) por lo que la temperatura cambia la pendiente de la condición de fragmentación. Al igual que en la longitud de Jeans newtoniana, el aumento en la temperatura de las nubes estelares tiende a hacer la nube más estable, y así, las nubes frías tienden a fragmentarse con más facilidad que las nubes calientes. Esto se observa en las Figura 3-8 donde se han usado las temperaturas mínimas y máximas promedio observadas en las distintas regiones de gases interestelares.

Como se aprecia en la Figura 3, las nubes moleculares más frías (10^0 K) pueden llegar a radios máximos de 1,37 kpc, y las mas

calientes (10^1 K) a ser más grandes hasta de 4,32 kpc antes de fragmentarse; como en la sección anterior, las nubes moleculares más grandes observadas llegan hasta $r \sim 200 \text{ pc}$ que esta dentro de los límites predichos.

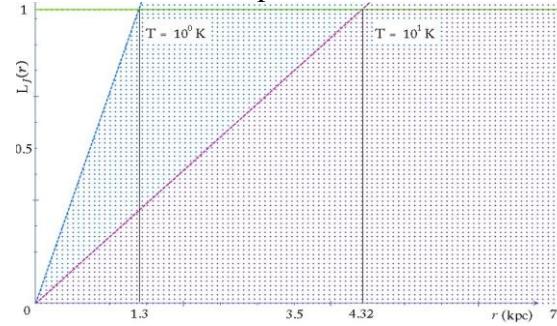


Figura 3: Longitud de Jeans ponderada (8) en función del radio para nubes moleculares. Las líneas verticales delimitan las temperaturas observadas. La zona punteada representa la inecuación (10), y las zonas sin sombra son estables.

La nube de gas frio atómico (Figura 4) a temperaturas de 10^1 K se empiezan a fragmentar cuando llegan a radios mayores de 137 kpc; las más calientes (10^2 K) pueden llegar a alcanzar radios máximos de 317 kpc, lo cual está acorde con las galaxias observadas (Ferriere 2001, Murray 2011).

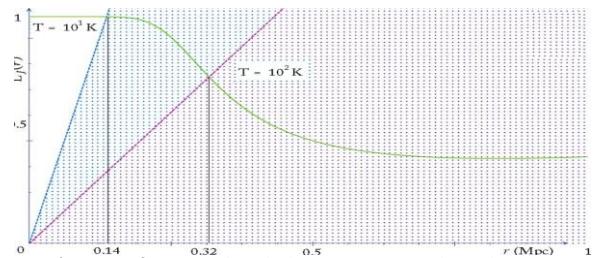


Figura 4: Longitud de Jeans ponderada (8) en función del radio para gas frio atómico . Las líneas verticales delimitan las temperaturas observadas. La zona punteada representa la inecuación (10), y las zonas sin sombra son estables.

En el gas internube (Figura 5), las nubes más frías empiezan a fragmentarse al alcanzar los 1,2 Mpc de tamaño, y alcanzan tamaños de fragmentación de 4,7 Mpc en el momento en que dejan de fragmentarse cuando superan $T \sim 5,3 \times 10^3 \text{ K}$. Se puede notar que está en el mismo

orden de magnitud que la separación promedio entre cúmulos de galaxias: $r_a \approx 1,5h^{-1} \text{ Mpc}$ (Peebles y Rastra, 2003).

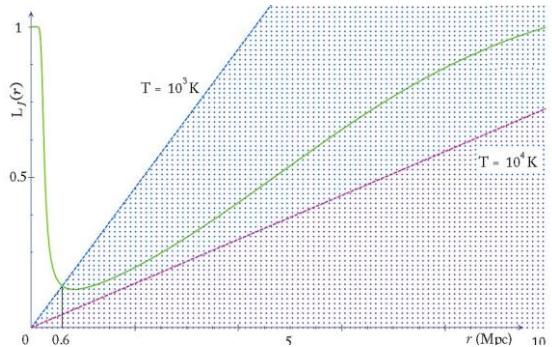


Figura 5: Longitud de Jeans ponderada (8) en función del radio para gas internube. Las líneas verticales delimitan las temperaturas observadas. La zona punteada representa la inecuación (10), y las zonas sin sombra son estables.

En estas nubes estelares, existen cuatro zonas o regiones donde se alterna la estabilidad y la fragmentación (Figura 6). La primera zona es de estabilidad, desde el centro hasta 1err_f donde las nubes pequeñas no se fragmentan. La segunda zona es de fragmentación; nubes de gas IN con radios de entre primer punto crítico r_c y segundo r_c , se fragmentan, su grosor disminuye a medida que aumenta la temperatura, y así, cuando la nube excede $T \geq 5,3 \times 10^3 \text{ K}$, esta zona de fragmentación desaparece. La tercera zona también es de estabilidad, con grosor del tercer r_c y el segundo r_c , que aumenta con la temperatura y disminuye con la densidad; esta zona aparece cuando $10^4 \text{ K} > T \geq 2,7 \times 10^3 \text{ K}$ a cualquier densidad. A temperaturas $10^3 \text{ K} < T < 2,7 \times 10^3 \text{ K}$ y aparece a $n_0 \leq 1,27 \times 10^{-4} * T \text{ K}^{-1} + 0,15 \text{ cm}^{-3}$. Por último, la cuarta zona es de fragmentación y define el tamaño máximo que puede llegar a tener las nubes de gas IN a una temperatura y densidad determinada. Esta zona se une con la primera zona de fragmentación cuando la tercera desaparece, por lo que las nubes de gas IN se fragmentan entre 2 y 40 Mpc dependiendo de la densidad y temperatura de la nube, estando en el mismo orden de magnitud que la escala en el que la materia va de agruparse débilmente a

aglutinaciones fuertes (Peebles y Rastra, 2003).

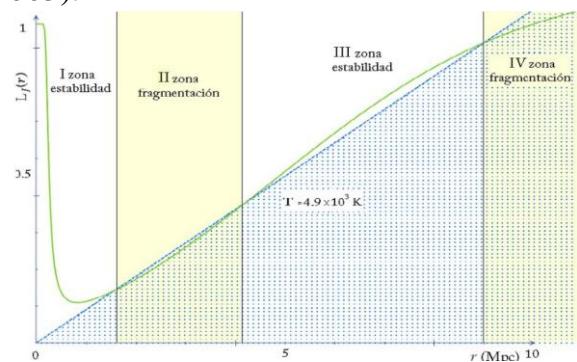


Figura 6: Longitud de Jeans ponderada (8) en función del radio para gas internube. Las líneas verticales delimitan las temperaturas observadas. La zona punteada representa la inecuación (10), y las zonas sin sombra son estables.

El gas intergaláctico (Figura 7) sigue manteniéndose muy estable aun variando la temperatura. Nubes con estas densidades ($n_0 \sim 10^{-3} \text{ cm}^{-3}$) solo podrían fragmentarse si tuvieran temperaturas $T \leq 5,2 \times 10^3 \text{ K}$, pero en general, estas nubes son muy calientes con temperatura de hasta $10^7 - 10^8 \text{ K}$ (Spinrad 2005, Gupta et al. 2010).

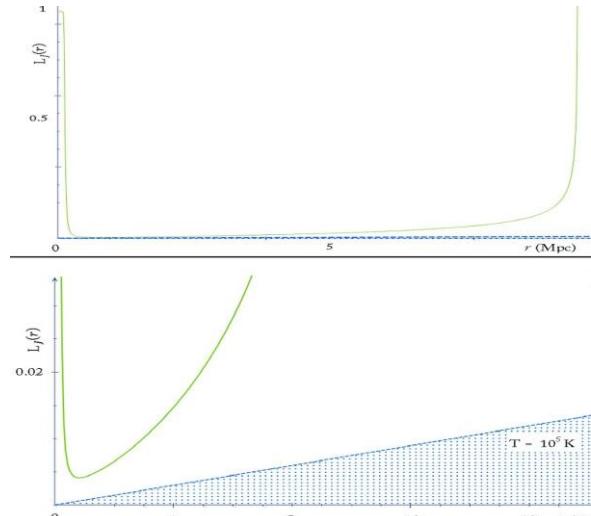


Figura 7: Longitud de Jeans ponderada (8) en función del radio para gas intergaláctico. La zona punteada representa la inecuación (10), y las zonas sin sombra son las regiones estables.

5. Conclusiones y perspectivas.

En general, el modelo con IYF tiene el mismo comportamiento para la formación de estructuras primordiales del universo temprano que el formalismo de Jeans convencional en relación a la densidad y la temperatura. Pero a diferencia del formalismo usual, el campo U_{YF} provee una dependencia con el tamaño de la propia nube, presentando una relación entre el radio de fragmentación proporcional a $n^{1/2}$ con la densidad de partículas de la nube estelar y $T^{-1/2}$ con la temperatura, como se aprecia en (10).

El radio máximo predicho para las nubes moleculares coincide con los radios máximos de las nubes moleculares gigantes. Para el gas frío atómico, el radio máximo en el cual se empiezan a fragmentar las nubes concuerda con el tamaño promedio de las galaxias; sin necesidad de incorporar materia oscura no bariónica como en los modelos NFW. Sin embargo, en el caso del gas internube, pueden llegar a existir regiones alternas de estabilidad y fragmentación donde los radios predichos coinciden con el radio de Abell para cúmulos. También se predice la alta estabilidad del gas intergaláctico; a $n \leq 10^{-3} \text{ cm}^{-3}$ las nubes con $r < 10 \text{ Mpc}$ se fragmentan formando nubes más pequeñas de hasta 90 kpc, en concordancia con el alcance finito de la gravedad ($r \sim 10 \text{ Mpc}$) del modelo U_{YF} (Falcon 2021) y las más grandes y menos densas, como los espacios intercúmulos, se mantienen estables a muy baja densidad como ocurre en los voids.

Una teoría de gravitación modificada con el campo U_{YF} generaliza la teoría

estándar de Jeans de la formación de estructura, introduciendo la expansión del universo de manera natural sin alterar la formación a escalas estelares y planetarias. A la vez describe la formación de estructura a gran escala del universo sin recurrir a la hipótesis de materia exótica (materia oscura no bariónica), y que podría describir y/o predecir la formación de galaxias (y otras estructuras a gran escala) con simulaciones computacionales, que queda como perspectiva futura.

6. Agradecimientos

Se agradece el financiamiento del Ministerio del Poder Popular para la Ciencia y Tecnología a través del proyecto CFP 2025000038: Modificación a gran escala de la Gravedad: alternativa a la Materia oscura y Energía Oscura del Universo.

7 Referencias

- Estalella, R., Anglado, G. 1996. *Introducción a la física del medio interestelar*. Ed. Uni. Barcelona: España.
- Falcon, N. 2021. A large-scale heuristic modification of Newtonian gravity as an alternative approach to dark energy and dark matter. *J Astrophys Astron* **42**: 102.
- Falcon, N. 2023. Modified Gravitation and Mach's Principle: An Alternative to the Dark Matter and Dark Energy Cosmological Paradigm. *OAJA* **1** (1): 000103
- Ferriere, K. 2001. The interstellar environment of our Galaxy. *Rev. Mod. Phys.*, **73**:1031–1066.
- Gupta, A., et al. 2010. Detection and characterization of the warm-hot intergalactic medium. *B. Am. Astron. Soc.*, **41**:908.

Jeans, J.H. 1928. *Astronomy and cosmogony*. Cambridge University Press, Cambridge, Reino Unido,

Mo, H., van den Bosch, F., White, S. 2010 *Galaxy formation and evolution*. Cambridge University Press: Cambridge.

Murray, N. 2011. Star formation efficiencies and lifetimes of giant molecular clouds in the Milky Way. *Ap. J.*, **729**:133.

Navarro, J F.; Frenk, C. S.; White, S. D. 1996. The Structure of Cold Dark Matter Halos. *ApJ*. **462**: 563–575

Peebles, P., Rastra, B. 2003. The cosmological constant and dark energy. *Rev. Mod. Phys.*, **75**: 559– 606.

Sersic, J.L. 1982. *Extragalactic Astronomy*. D. Reidel Pub. C.: Dordrecht,

Spinrad, H. 2005. *Galaxy formation and evolution*. Springer/Praxis Pub: Chi-chester, Reino Unido,



LA HIPÓTESIS DE CÉSPEDES-CURÉ: UNA SOLUCIÓN AL MISTERIO DE LA MATERIA Y ENERGÍA OSCURA

GREAVES¹ E. D. y BRACHO² C.

¹*Universidad Simón Bolívar. Apartado 89000, Caracas, Venezuela*

egreaves20002000@yahoo.com,

²*Facultad de Ingeniería, Universidad Central de Venezuela, Caracas, Venezuela.*

bracho_carlos@hotmail.com

Recibido: 28/07/2025, Revisado: 12/08/2025, Aceptado: 15/08/2025

Resumen

Según la Hipótesis de Céspedes-Curé (HCC), la velocidad de la luz depende del inverso de la raíz cuadrada de la densidad de energía total del espacio, tanto gravitacional como electromagnética. Una explicación satisfactoria de las mediciones de la NASA de las anomalías “Flyby y Pioneer Anomaly” proporciona evidencia irrefutable de la HCC. Por lo tanto, es necesario revisar todas las mediciones astronómicas de velocidad y distancia basadas en el efecto Doppler que dependen de la velocidad de la luz, tales como la curva plana de rotación de las galaxias o las velocidades extremas de retracción de galaxias lejanas. La HCC predice una sobreestimación de las velocidades derivadas por el efecto Doppler, cuando hay una disminución de la densidad de energía gravitacional espacial, lo que explica la curva plana de las galaxias. Además, un modelo de extensión finita del universo proporciona una explicación plausible de la inflación.

Palabras clave: Velocidad variable de la luz, Densidad de energía, Hipótesis de Céspedes-Curé.

The Céspedes-Curé Hypothesis: A Solution to the Mystery of Dark Matter and Energy

Abstract

According to the Céspedes-Curé Hypothesis (CCH), the speed of light depends on the inverse square root of the total energy density of space, both gravitational and electromagnetic. A satisfactory explanation of NASA's measurements of the Flyby and Pioneer Anomalies provides irrefutable evidence for the CCH. Therefore, it is necessary to revise all astronomical measurements of speed and distance based on the Doppler shift that depend on the speed of light, such as the flat rotation curve of galaxies or the extreme retraction velocities of distant galaxies. The CCH predicts an overestimation of Doppler-derived velocities when there is a decrease in the spatial gravitational energy density, which explains the flat curve of galaxies. Furthermore, a finite extension model of the universe provides a plausible explanation for inflation

Key words: Variable speed of light, Energy density, Céspedes-Curé hypothesis.

1. Introducción

Las velocidades de rotación de estrellas en las galaxias no siguen lo esperado de acuerdo a la dinámica de Newton sino que dichas velocidades aumentan aproximadamente de forma lineal con la distancia. Ante la ausencia de una explicación razonable se crea la hipótesis de la presencia de materia no visible en el núcleo de las galaxias [1], esto dio lugar al concepto de la materia oscura. De forma análoga la detección de galaxias y estrellas lejanas con velocidades muy altas, mucho más altas que la predicción de la ley lineal de Hubble, cuerpos cuyos corrimientos Doppler implican velocidades de retracción que exceden la velocidad de la luz por múltiplos [1], dio lugar al concepto de la energía oscura: Una energía hipotética que explicaría estas velocidades extremas de retracción. Todas las determinaciones de velocidades astronómicas dependen de observaciones basadas en el efecto Doppler es decir el corrimiento Δf hacia mayores o menores frecuencias que la frecuencia f esperada para un cuerpo con velocidad relativa cero.

El efecto Doppler predice un corrimiento Δf de la frecuencia f emitida por un cuerpo con velocidad v dado por (1) [2, p 64] donde c es la velocidad de la luz considerada constante en todo el universo.

$$\Delta f = f \frac{v}{c} \quad (1)$$

Se deduce que las velocidades son determinadas con la relación (2)

$$v = \frac{\Delta f}{f} c = Zc \quad (2)$$

donde Z es el “redshift”

La suposición de Einstein de que c , la velocidad de la luz, es constante en el vacío no es verificable. Esto porque el vacío absoluto no existe en ninguna parte del universo. En todas partes existen campos

gravitatorios, campos electromagnéticos, partículas elementales, rayos cósmicos, etc. Esta suposición ha sido cuestionada por la hipótesis de Jorge Céspedes-Curé (HCC) [3]. La verificación de la HCC se presenta mas abajo.

2. La Hipótesis de Céspedes-Curé (HCC)

La forma matemática de la Hipótesis de Céspedes-Curé [3] dice que la velocidad de la luz no es constante sino que es proporcional a la densidad de energía ρ mediante la relación (3):

$$c = \frac{k}{\sqrt{\rho}} \quad (3)$$

ρ es densidad de energía gravitacional o cualquier otra, eléctrica o magnética. k = constante de proporcionalidad (propongo llamarla: Constante de Céspedes Curé)

La densidad de energía ρ gravitacional en un sitio de aceleración gravitatoria g (m/s^2) está dada por (4) donde G esa la constante de gravitación universal

$$\rho_g = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{4\pi G} \right) g^2 \quad (4)$$

La densidad de energía gravitatoria producida por una masa M a una distancia r del centro de la masa está dada por (5)

$$\rho = \frac{GM^2}{8\pi r^4} \quad (5)$$

La densidad de energía debida a un campo eléctrico E (6) y un campo magnético B (7) están dadas por

$$\rho_E = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 \quad (6)$$

$$\rho_B = \frac{1}{2} \frac{1}{\mu_0} B^2 \quad (7)$$

Donde μ_0 y ϵ_0 son la permeabilidad magnética y la permitividad eléctrica del vacío respectivamente.

En un sitio donde hay campos eléctricos, magnéticos y gravitacionales la

HCC estará dada por (8):

$$c = \frac{k}{\sqrt{\rho_E + \rho_B + \rho_g}} \quad (8)$$

Y en la tierra la velocidad de la luz, dada por (9), es afectada por la densidad de energía de la tierra misma ρ_E , por la densidad de energía del sol ρ_s y por las de las estrellas lejanas ρ^* . Esta última es la mayor contribución en órdenes de magnitud. Ver Fig. 1. La luna y los otros planetas del sistema solar contribuyen cantidades insignificantes debido a la dependencia de $1/r^4$ de la expresión (5)

$$c = \frac{k}{\sqrt{\rho^* + \rho_s + \rho_E}} \quad (9)$$

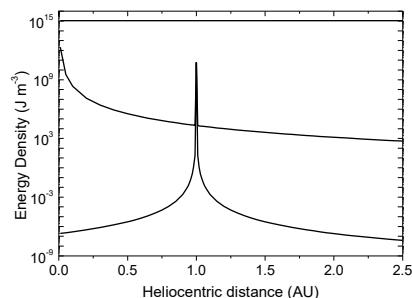


Fig. 1 Gráfico de la densidad de energía gravitacional ($J \text{ m}^{-3}$) desde la superficie del sol hasta una distancia de 2.5 UA. Línea superior es debida a las estrellas lejanas ρ^* , la línea media es ρ_s debida a Sol y la línea centrada en 1 UA es ρ_E debida a la Tierra. La influencia del factor $1/r^4$ es aparente.

3. El índice de refracción del espacio

De acuerdo a la HCC la velocidad de la luz en la superficie de la tierra, Eq. (3), es $c = k/\sqrt{\rho}$, pero en otro sitio donde la densidad de energía ρ' es distinta la velocidad de la luz c' esta dada por $c' = k/\sqrt{\rho'}$.

El índice de refracción del espacio en la superficie de la Tierra está definido como n

= 1. En otro sitio del espacio n' está definido como es usual, dado por (10): el numerador contiene la densidad de energía en el otro sitio y el denominador la densidad de energía en la superficie de la tierra.

$$n' = \frac{c}{c'} = \frac{\sqrt{\rho'}}{\sqrt{\rho}} = \frac{\sqrt{\rho'}}{\sqrt{\rho^* + \rho_s + \rho_E}} \quad (10)$$

4. Evidencia de la teoría.

La teoría se verifica mediante la precisa explicación de anomalías medidas por la NASA: La anomalía del sobrevuelo [4,5] y la anomalía del Pioneer [6] y en particular por la coincidencia de los valores de la densidad de energía gravitacional ρ^* debida a las estrellas y galaxias lejanas calculada por dos métodos totalmente distintos: El doblamiento de la luz de las estrellas durante eclipses realizada por Jorge Céspedes-Curé [7] con el cual se obtiene $\rho^* = 1,094291 \times 10^{15} \text{ Joule/m}^3$ y por el cálculo de la anomalía del Pioneer realizado por E. D. Greaves [7,5] con el cual se obtiene $\rho^* = 1.0838 \times 10^{15} \text{ Joule/m}^3$

4.1 El cálculo de J. Céspedes-Curé

Fueron usadas las medidas de múltiples eclipses recolectadas por Merat [8] y presentadas en la Tabla 1.

Los desplazamientos δ , de Einstein, predichos por la GRT se calculan con la siguiente relación (11) donde G es la constante de gravedad universal, M_o es la masa del Sol, R_o el radio solar y m un múltiplo del radio solar.

$$\delta = 4GM_o/mR_o \quad (11)$$

Tabla 1. Medidas recolectadas por Merat con datos de 6 eclipses solares y 297 deflexiones estelares. Cálculos del doblamiento de la luz de las estrellas (en segundos de arco ") para estrellas a distintas distancias del sol según la relación de Einstein (GRT) y según Céspedes Curé usadas por este para calcular la densidad de energía ρ^* debida a las estrellas y galaxias lejanas.

Distancia del centro (Radio Sol)	Einstein(")	Céspedes Curé (")	Merat (") Medidas	Merat (\pm Error)
2,09	0,84	0,91	1,02	0,11
3,12	0,56	0,73	0,67	0,08
4,02	0,44	0,58	0,58	0,04
5,1	0,34	0,44	0,4	0,07
6,06	0,29	0,35	0,41	0,04
7,11	0,25	0,27	0,31	0,04
7,84	0,22	0,23	0,24	0,04
9,51	0,18	0,16	0,2	0,06
11,6	0,15	0,11	0,16	0,03

Los datos de la Tabla 1 se encuentran graficados en la Figura 2 que muestra la bondad relativa de las dos teorías en la predicción del doblamiento de la luz de las estrellas durante eclipses solares.

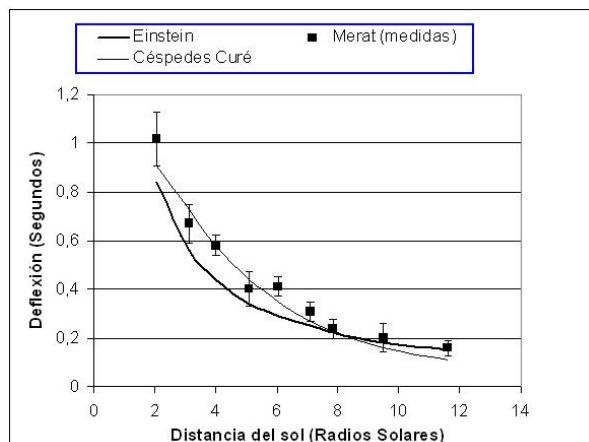


Figura 2. El ángulo de desviación de la luz durante eclipses solares en función de la distancia de estrellas del borde del sol. Se muestran las predicciones de la GRT teoría de Einstein y de Céspedes-Curé.

4.2 El cálculo de E. G. Greaves.

Hay seis naves espaciales que han mostrado los efectos de la anomalía del Pioneer. De la NASA: Ulisses, Galileo, Pioneer 10, Pioneer 11 y NEAR. De la ESA: Rosetta. El cálculo de la densidad de energía

gravitacional de las estrellas y galaxias lejanas fue hecho con el valor mas preciso de la anomalía reportado por J. D. Anderson y colaboradores (2003) a una distancia de 20 UA. Se usaron las siguientes ecuaciones [6] para obtener ρ^*

$$\rho^* = \frac{\rho_{Sfar} + \rho_{Efar} - n'^2(\rho_{S1AU} + \rho_E)}{n'^2 - 1} \quad (12)$$

Donde ρ_{Sfar} y ρ_{Efar} son la densidad de energía debida al sol y la tierra en la localidad de la nave a 20 UA, ρ_{S1AU} y ρ_E son la densidad de energía del sol (a 1 UA) y la tierra en la superficie de la tierra, y n' es el índice de refracción del espacio en la localidad de la nave a 20 UA el cual se calculó con la expresión (13):

$$n' = 1 - \frac{E_D c}{2 f_e G \left(\frac{M_S}{r_S^2} + \frac{M_E}{r_E^2} \right)} \quad (13)$$

Donde E_D es el exceso de frecuencia Doppler de la anomalía a 20 UA ($5.99 \pm 0.01 \times 10^{-9}$ Hz/s), c la velocidad de la luz f_e la frecuencia de transmisión entre la tierra y la nave (2295 MHz), G la constante de gravitación universal y los términos en el paréntesis la masa del Sol y de la Tierra y sus respectivos radios. Al substituir todos los valores para obtener el índice de refracción con (13) y colocar el cuadrado del valor en numerador y denominador de (12) se obtiene el valor $\rho^* = 1.0838 \times 10^{15}$ Joule/m³ el cual difiere del valor obtenido por Céspedes-Curé en apenas 1%.

5. Consecuencias

1.- En zonas del espacio con mayor densidad de energía gravitacional, la velocidad de la luz es menor y el índice de refracción es mayor (Ejemplo: Cerca del sol n es mayor).

2.- En zonas con menor densidad de energía gravitacional la velocidad de la luz es mayor y el índice de refracción es menor.

3.- Consecuencias sobre el efecto Doppler: Las velocidades radiales obtenidas por el corrimiento Δf de la frecuencia f con el efecto Doppler se calculan con $v = (\Delta f / f) \times c = z \times c$. donde z es el corrimiento al rojo o “redshift”. Si la velocidad de la luz cambia, las velocidades de cuerpos astronómicos derivadas con el efecto Doppler cambian.

4.- En sitios con menor densidad de energía gravitacional la velocidad de la luz aumenta, luego: Las velocidades estelares radiales son *sobreestimadas*. Esto tiene consecuencias en la curva plana de rotación de las Galaxias (Flat rotation curve of Galaxies)

5.- A mayor distancia del centro de la galaxia, disminuye ρ' , aumenta c' y las velocidades v de retracción medida con el efecto Doppler son sobreestimadas, dando lugar a los valores observados. Ver Figura 3.

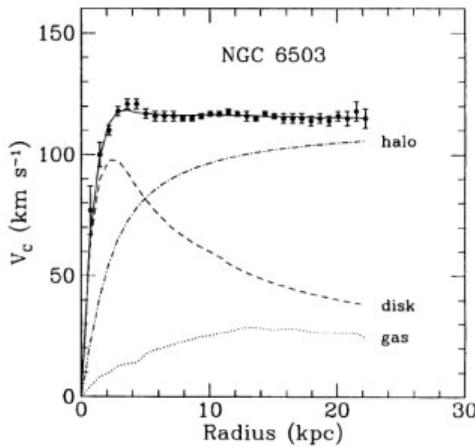


Figura 3. “Curva de rotación galáctica” para NGC 6503 que muestra las velocidades medidas de estrellas en función del radio de la galaxia. Muestra la contribución del disco y del gas, además de la contribución del halo de materia oscura necesaria para que coincidan los datos. (En lugar de la curva decreciente que se esperaría según la dinámica de Newton para una distribución de masa central en forma de disco [9]).

5.1 Problemas con la ley empírica de Hubble

La ley empírica de Hubble muestra el corrimiento al rojo (redshift) de estrellas y galaxias en función de la distancia. Las

medidas primeras mostraron una relación lineal cuya pendiente se denomina la constante de Hubble. Posteriores medidas de los objetos estelares más lejanos indican valores extremos de corrimiento al rojo que superan la velocidad de la luz en valores medidos de $Z > 1$ hasta 11. Ver por ejemplo la Figura 4.

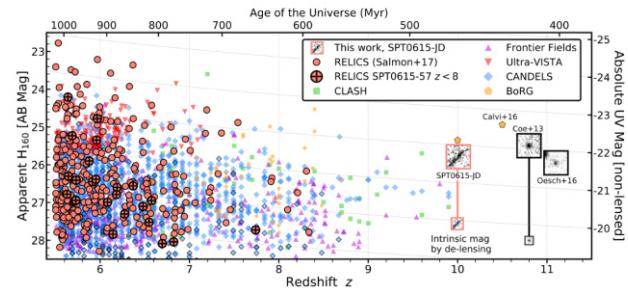


Figura 4. Grafico que muestra observaciones de galaxias con velocidades superlumínicas con corrimientos al rojo de ~ 6 a 11 . [10]

Esta evidencia observational presenta serios problemas a la física y ha dado origen al concepto de la energía oscura como una fuente de energía que explique lo observado. Aun así, el conflicto mayor es con la relatividad especial que limita las velocidades de objetos másicos a valores menores que c .

La HCC puede ofrecer una explicación de esta evidencia observational si se hacen adicionalmente las suposiciones siguientes:

- 1.- Un universo en expansión
- 2.- Un universo finito, no homogéneo
- 3.- Un universo con disminución radial de la densidad de estrellas y galaxias.

Con estas suposiciones se tiene que la HCC predice una disminución radial de la densidad de energía gravitacional que implicaría un aumento radial de la velocidad de la luz según la Eq. (3)

La consecuencia es que el efecto Doppler arrojará un aumento sistemático de la sobreestimación de la velocidad de las estrellas y galaxias más lejanas dando lugar a observaciones como las presentadas en la Figura 4.

6. Experimentos propuestos

Con la finalidad de obtener evidencia experimental adicional en soporte de la HCC se proponen cuatro experimentos:

Experimento 1. Medida de velocidad de la luz entre Júpiter y la Tierra. Valor calculado: $n' = 0,999973821$ (c' mayor que c en 7848,4 m/s ó +0,00262 %). Esta medida sería una repetición, con instrumentos y métodos de análisis modernos, de la primera medida histórica de c hecha por Ole Roemer en 1676. Medir la velocidad de la luz por el método de Roemer mediante los eclipses de las lunas de Júpiter. Esta medida hace uso del cronómetro espacial que representan los períodos de las lunas de Júpiter. El mismo

procedimiento se podría hacer para medir c entre la tierra y el espacio interestelar exterior hasta una estrella variable cuyo período se usaría como cronómetro espacial.[11]

Experimento 2. Medida de la velocidad de la luz en la estación espacial internacional (ISS). Valor calculado: $n' = 0,99997869369$ (c' mayor que c en 6387,6 m/s ó +0,00213 %) Requiere llevar a la ISS un instrumento muy preciso capaz de medir c con errores no mayores que ± 10 m/s

Experimento 3. Medida de la velocidad de la luz en un campo magnético fuerte (2 Tesla). Valor calculado $n' = 1,00000000072721$. Es una medida difícil pero factible y es un experimento propuesto por Albert Einstein de hace 94 años al premio Nobel ruso Peter Kapitsa en 1930 [12]

Experimento 4. El Experimento de María Laura Rojas. Este consiste en medir con mucha precisión la frecuencia de resonancia de un circuito LC en sitios con valores distintos de la aceleración de gravedad (es objeto de un trabajo separado contenido en este número especial de la revista Faraute)

7. Conclusiones

Hay fuerte evidencia para la Hipótesis de Céspedes-Curé (HCC). La velocidad de la luz no es constante y depende de la densidad

de energía del espacio. Hay que revisar todas las velocidades de cuerpos celestes medidas con el efecto Doppler. La HCC Puede explicar la curva plana de las galaxias. Las velocidades superlumínicas de las galaxias lejanas no son reales. La HCC mas un modelo adecuado de universo finito pueden explicar la inflación. La HCC explica el “Lensing” como sitios con elevado índice de refracción debido a la alta densidad de energía de cuerpos supermasivos en la localidad.

Finalmente se concluye que la materia oscura y energía oscura son conceptos ficticios y que las observaciones astronómicas que le han dado origen se explican con la HCC.

8 Bibliografía

1. Victoria Strait et al. Stellar Properties of $z \gtrsim 8$ Galaxies in the Reionization Lensing Cluster Survey The Astrophysical Journal, 888:124 Number 2 (8pp), 2020 January 10.
- 2 Struve O., Linds B., Pillands H. *Elementary Astronomy*. New York, Oxford University Press. 1959.
3. Céspedes-Curé Jorge. *Einstein on Trial or Metaphysical Principles of Natural Philosophy*. Publisher: et al. Organization, (2002). Available at Amazon.com; Amazon.co.uk.
4. Greaves E. D. Propiedades del espacio vacío-Memorias II Congreso de ABAE, 2017.URL:
<http://www.abae.gob.ve/download/propiedades-del-espacio-vacio-con-campos-gravitacionales-experiencias-propuestas/> Acceso mayo de 2024.
5. Greaves E. D., Bracho C and Mikoss I. A Solution to the Flyby Anomaly Riddle. Progress in Physics. (2020) V.16 Issue 1 (April), 49 – 57. Acceso Julio de 2025. URL:<https://www.progress-in-physics.com/complete/PiP-2020-01.pdf>

6. Greaves E. D. , Bracho C., Gift S and Rodriguez An M. A solution to the Pioneer Anomalous Annual and Diurnal Residuals. Progress in Physics. 2021 (vol. 17), issue 2, 168-184. <http://www.ptep-online.com/2021/PP-62-06.PDF>

7. Greaves E. D., NASA's astonishing evidence that c is not constant: The Pioneer anomaly ArXiv No 0701130, Acceso Julio 2025 <http://arxiv.org/abs/physics/0701130>

8. Merat Parvis. Analysis of the optical data on the deflection of Light in the vicinity of the solar limb. Gen Relativity Gravitation 5 No 3 (1974) 757-764

9. Katherine Freese. Status of Dark Matter in the Universe. International Journal of Modern Physics D, Volume 26, Issue 6, id. 1730012-223, 2017.

10. Victoria Strait, et al. Stellar Properties of $z \gtrsim 8$ Galaxies in the Reionization Lensing Cluster Survey. The Astrophysical Journal, 888:124 Number 2 (8pp), 2020 January 10.

11. Gurgen Adamian. (Académico ruso adamian@theor.jinr.ru). Sugerencia durante el Latinamerican Symposium on Nuclear Physics and Applications, XIII, LASNPA 2020, University of Costa Rica, San José, Costa Rica, January 20 to 24, 2020.

12. Kapitza Peter. Experimento, teoría, práctica. Artículos y conferencias. Editorial MIR, Moscow. (Spanish translation). (1985) p. 390.



EFFECTOS DE LA DENSIDAD DE ENERGÍA GRAVITACIONAL SOBRE LA VELOCIDAD DE LA LUZ: PROPUESTA PARA VERIFICACIÓN EXPERIMENTAL DE LA HIPÓTESIS DE CÉSPEDES-CURÉ

MARIA L. ROJAS G.¹ y EDUARDO D. GREAVES N.²

Universidad Simón Bolívar.¹Departamento de Física.² Laboratorio de Física Nuclear. Caracas. Venezuela.

¹19-10256@usb.ve, ²egreaves20002000@yahoo.com

Recibido: 28/07/2025, Revisado: 12/08/2025, Aceptado: 15/08/2025

Resumen

Se presenta una explicación de la hipótesis de Céspedes-Curé, la cual es una expresión matemática que relaciona la velocidad de la luz con la densidad de energía gravitacional del medio en que se propaga. Se incluye un repaso por tres fenómenos que la respaldan: anomalía del Pioneer, anomalía de sobrevuelo y los datos históricos. Se explica el uso de un circuito resonante para verificar experimentalmente la hipótesis y se muestran los avances actuales del mismo. Por último, se propone una ampliación del experimento usando la Estación Espacial China.

Palabras clave: Circuito resonante, Densidad de energía gravitacional, Hipótesis de Céspedes-Curé, Velocidad de la luz.

Effects of gravitational energy density on the speed of light: proposal for a experimental verification of the Céspedes-Curé hypothesis

Abstract

An explanation of the Céspedes-Curé hypothesis is given, a mathematical expression that relates the speed of light to the gravitational energy density of the medium in which it propagates. It includes a review of three phenomena that support it: the Pioneer anomaly, the flyby anomaly, and historical data. In addition, the use of a resonant circuit to experimentally verify the hypothesis is explained, and current advances in this field are presented. Finally, an extension of the experiment using the Chinese Space Station is proposed.

Key words: Resonant circuit, Gravitational energy density, Céspedes-Curé hypothesis, Speed of light.

1. Introducción

El presente trabajo es parte de una investigación en desarrollo, donde se busca mediante un barrido de frecuencia en un circuito resonante determinar si existe un cambio de la frecuencia de resonancia cuando el circuito es trasladado a localidades con diferente valor de gravedad local, esto para discernir si existe alguna relación entre la densidad de energía gravitacional y la velocidad de la luz.

El concepto que se maneja de densidad de energía es el siguiente: la cantidad de energía por unidad de volumen que se encuentra almacenada en un espacio debida a un campo. Para el caso concreto debida a un campo gravitacional se tiene

$$\rho_g = \frac{g^2}{8\pi G} = \frac{GM^2}{8\pi r^4} \quad (1)$$

Donde g es el valor local de la gravedad, G es la constante de gravitación universal, M es la masa del cuerpo que genera el campo y r es la distancia al mismo. En este estudio se trabajará con el campo generado por la Tierra, de modo que se usará la primera expresión, ya que con el valor local de la gravedad es posible calcular inmediatamente la densidad de energía gravitacional en ese lugar.

Para vincular la densidad de energía con la velocidad de la luz usaremos la hipótesis de Céspedes-Curé, la cual fue expuesta por Jorge Céspedes-Curé en su libro Einstein on Trial (Céspedes-Curé, 2002). La hipótesis dice que la velocidad de la luz depende de una constante k y de la densidad de energía total en el espacio en que se está propagando, es decir la suma de las contribuciones de todos los campos, según la relación

$$c = \frac{k}{\sqrt{\rho}} \quad (2)$$

2. Antecedentes y justificación

Existen algunos enigmas de la ciencia que la hipótesis de Céspedes-Curé parece dar respuesta, a continuación, un breve repaso de trabajos anteriores que sirven como justificación de la presente investigación.

2.1. Anomalía Pioneer

Las sondas Pioneer 10 y 11 fueron lanzadas en los setenta para estudiar a los gigantes gaseosos Júpiter y Saturno. Desde la década de los 90 se notó una aceleración anómala hacia el Sol a medida que se alejaban del sistema solar. La anomalía se descubrió cuando la nave se encontraba a 20 UA, este misterio es conocido como la Anomalía Pioneer. A pesar de una exhaustiva búsqueda de explicaciones convencionales, como fugas de propulsores o efectos de radiación, la aceleración observada no pudo ser justificada (Anderson et al, 2002). Turyshev y colaboradores (2012) pretenden explicar la Anomalía Pioneer como debido a la emisión de calor no simétrica, sin embargo, la emisión de calor no es capaz de explicar las variaciones diarias, las variaciones anuales (Anderson et al. 2002) ni las variaciones de la aceleración anómala durante el sobrevuelo de Júpiter reportado por (Toth y Turyshev. 2007).

Como la velocidad de las sondas se calcula por medio de efecto Doppler, Greaves (Greaves, 2007) propone que el cambio de c debido a la Hipótesis de Céspedes-Curé puede explicar la anomalía. Para ello calcula el índice de refracción necesario para explicar la aceleración observada, y con él se calcula la densidad de energía gravitacional de las estrellas lejanas ρ^* como $1,0838 \times 10^{15} \text{ J/m}^3$. El valor de ρ^* representa la densidad de energía gravitacional debida a la masa lejana que hay en el universo, y en la práctica funciona como un fondo constante.

En su libro (Céspedes-Curé, 2022) Céspedes-Curé calcula ρ^* a partir de los datos de los eclipses obteniendo el valor $1,094291 \times 10^{15} \text{ J/m}^3$ el cual difiere del calculado por Greaves en 1%.

2.2. Anomalía de sobrevuelo

Existe un procedimiento muy común en las sondas espaciales llamada maniobra de asistencia gravitatoria, esta consiste en usar un cuerpo masivo (la Luna, la Tierra u otro cuerpo celeste) para cambiar la trayectoria de las sondas. Durante estas maniobras se ha detectado en diversas sondas como: Galileo, NEAR, Cassini, Rosetta y MESSEN-GE un cambio anormal de la energía cinética en los sobrevuelos cercanos a diferentes cuerpos, en especial a la Tierra, precisamente por ser más fácil de detectar. Este cambio inesperado va desde un aumento de la velocidad, una reducción de la misma e incluso ninguna anomalía. Para medir la velocidad en este caso también se usa el efecto Doppler por lo que Greaves y colaboradores (Greaves et al., 2020) calculan el efecto de la hipótesis para Galileo I y NEAR. Los resultados son: para Galileo una diferencia porcentual entre la anomalía medida y la calculada de +0,40% y para NEAR de -0,57%, por lo que se puede concluir que la hipótesis de Céspedes-Curé es bastante efectiva en explicar este fenómeno.

2.3. Datos históricos

Entre todas las medidas de c existe un cierto margen de error, que ha permitido la existencia de una pequeña discrepancia a partir de la séptima cifra significativa que ha pasado desapercibida. Ramdani (Ramdani, 2019) logra identificar una relación entre el valor de la velocidad de la luz medido en un cierto experimento y el valor de la gravedad local en el lugar en el que se realizó el experimento; concretamente halla una

relación lineal de pendiente negativa.

Para determinar si lo observado por Ramdani se puede explicar mediante la hipótesis de Céspedes-Curé es necesario desarrollar una expresión que calcule la velocidad de la luz c_i en un punto i sobre la superficie terrestre donde la gravedad local es g_i , dicha expresión es esta

$$c_i = c_E \frac{\sqrt{\rho^* + \rho_S + \rho_E}}{\sqrt{\rho^* + \rho_S + \frac{g_i^2}{8\pi G}}} \quad (3)$$

Donde ρ_S es la densidad de energía gravitacional debida al Sol, ρ_E es la densidad de energía gravitacional de la Tierra en su superficie y c_E es el valor de la velocidad de la luz aceptado en la actualidad. Si se grafica la Ec. 3 usando los valores numéricos dados por Greaves (Greaves, 2017) se tienen las graficas incluidas en la Fig.1 y Fig.2.

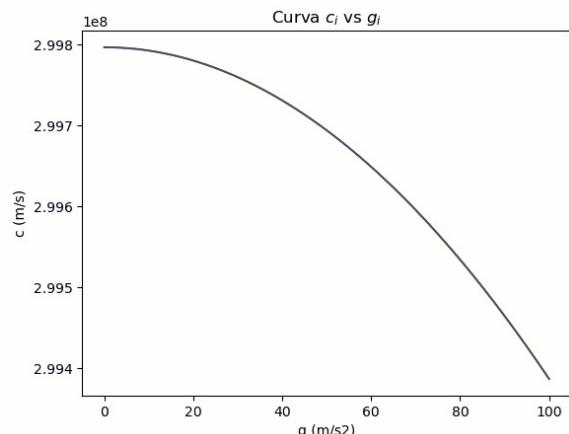


Fig. 1. Comportamiento de la Ec. 3 para valores de gravedad entre 0 y 100 m/s².

3. Experimento propuesto

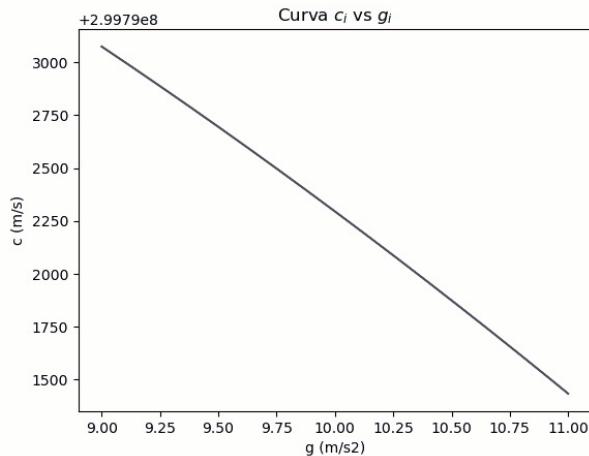


Fig. 2. Comportamiento de la Ec. 3 para valores de gravedad entre 9 y 11 m/s².

Vemos que al graficar para valores amplios de g_i entre 0 y 100 m/s² se evidencia una curva pronunciada, pero al enfocar alrededor de los valores esperados de la gravedad local en la superficie de la Tierra, entre 9 y 11 m/s² encontramos una línea de pendiente negativa. En la Fig. 3 se incluyen los datos proporcionados por Ramdani (Ramdani, 2019) y la línea que predice la hipótesis de Céspedes-Curé; vemos que encajan bastante bien.

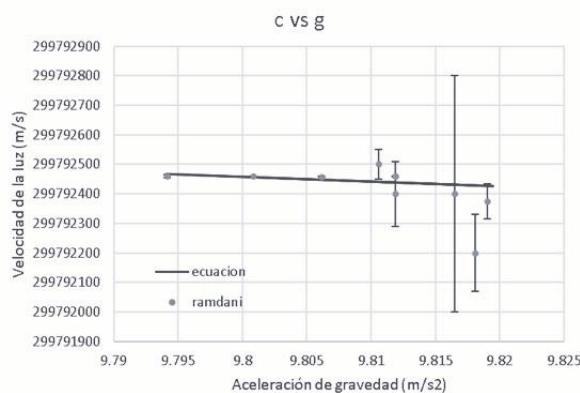


Fig. 3. Datos históricos de velocidad de la luz vs gravedad (Ramdani, 2019) superpuestos a la línea predicha por HCC en Ec. 3.

Para verificar la hipótesis de Céspedes-Curé se propone el uso de un circuito resonante LC conectado en paralelo. Un circuito LC se compone de una bobina de inductancia L y un capacitor de capacitancia C. La característica principal de este tipo de arreglos es que ante una señal alterna suministrada presentan una respuesta que depende de la frecuencia de la señal, de modo que la corriente alterna en el circuito tiene una amplitud de voltaje menor a la original que va aumentando hasta llegar a una frecuencia crítica llamada frecuencia de resonancia f_0 . Si se hace un barrido de frecuencia y se mide la respuesta del circuito es posible determinar la frecuencia de resonancia, ya que será el máximo de la curva.

Por otro lado, la frecuencia de resonancia está dada matemáticamente como

$$f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} \quad (4)$$

A su vez la capacitancia C depende de la permitividad eléctrica ϵ_0 y de la geometría del capacitor. Así mismo la velocidad de la luz se relaciona con la permitividad eléctrica y la permeabilidad magnética μ_0 mediante

$$c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0\mu_0}} \quad (5)$$

Con $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} T \cdot m \cdot A^{-1}$. Entonces, lo que se plantea es usar un mismo circuito resonante, bajo las mismas condiciones ambientales, en tres localidades diferentes donde se ha medido con precisión la gravedad local anteriormente, y hacer el barrido de frecuencias, si se determina que hay un cambio en f_0 se le puede atribuir al cambio en c ya que el resto de las condiciones se mantuvieron iguales.

	La Guaira	USB	Ávila
Gravedad m/s ²	9,7825124	9,77967685	9,777794
Velocidad m/s	299792471,69	299792471,69	299792475,47
Frecuencia Hz	509975,654302	509975,658180	509975,660732

Tabla 1. Valor de la gravedad en las tres localidades y valores estimados de la velocidad de la luz y la frecuencia de resonancia del circuito LC.

En la Tabla 1 se evidencia la necesidad de una gran precisión, ya que el cambio en la frecuencia de resonancia estimado está a partir de la novena cifra significativa.

3.1 Ejecución del experimento

Con el fin de alcanzar la precisión necesaria y la realización correcta del experimento se plantea el uso de diferentes módulos que realizan tareas concretas. El primero módulo es el que genera la señal, para esto se usan dos etapas la primera un modulo integrado AD9833 que se puede controlar mediante Arduino, genera señales sinusoidales estables de hasta 2 MHz y con una precisión de 4 mHz, eso último sería el mínimo paso que puede dar en el barrido de frecuencias. La segunda etapa es un circuito amplificador de voltaje y potencia para la señal del AD9833.

El segundo módulo es el que mide el voltaje de respuesta del circuito LC. De nuevo se plantean dos etapas, la primera es un circuito rectificador que convierte la respuesta alterna del circuito en una señal DC de voltaje igual a la amplitud de la respuesta. La segunda etapa consiste en un convertidor análogo digital de 16 Bits (ADS1115) el cual hará la lectura del voltaje DC.

El tercer módulo es el de automatización y control. Esta parte es de mucha importancia ya que se requiere que el barrido de frecuencias se haga igual en las

tres localidades, de igual modo es conveniente minimizar el error humano en el resto de tareas. Así se propone el uso de una laptop y un Arduino UNO para controlar toda la electrónica anterior.

El módulo estabilizador es el cuarto y último. Este se encargará de mantener las condiciones ambientales iguales en las tres localidades, esto es de gran importancia ya que es conocido que los componentes electrónicos pueden cambiar su comportamiento con factores ambientales como la temperatura. Por ahora este módulo cuenta con un circuito autoregulado que mantiene una temperatura estable alrededor de 36 °C dentro de un recipiente. Se están planteando actualmente algunas mejoras adicionales.

3.2 Situación actual

Los primeros tres módulos están funcionando en conjunto y permiten hacer barridos de frecuencia como los de las figuras Fig. 4 y Fig. 5. Vemos en Fig. 4 una curva suave dibujada por unos puntos casi perfectamente alineados y donde podemos inferir la ubicación de la frecuencia de resonancia. Sin embargo, al hacer un barrido con pasos más pequeños y en una ventana más pequeña (entre 530 KHz y 536 KHz) los puntos empiezan a dispersarse y la cima de la curva se evidencia muy plana, razón por la cual actualmente se está activamente mejorando todo el conjunto electrónico para mejorar el factor Q, decir hacer más estrecha la curva, y así cumplir con el objetivo de hacer un barrido de 2 Hz de ancho y que pueda ser ajustado usando Python.

Prueba del barrido de frecuencia I

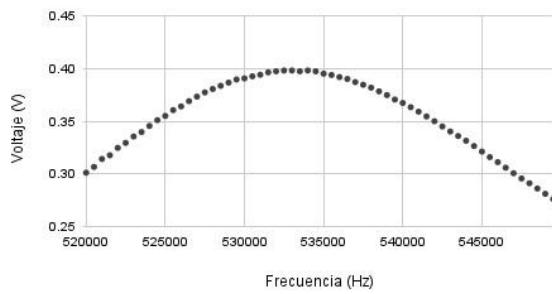


Fig. 4. Prueba de barrido de frecuencia automático de ancho entre 520 KHz y 550 KHz y paso de 500 Hz.

Prueba de barrido de frecuencia II

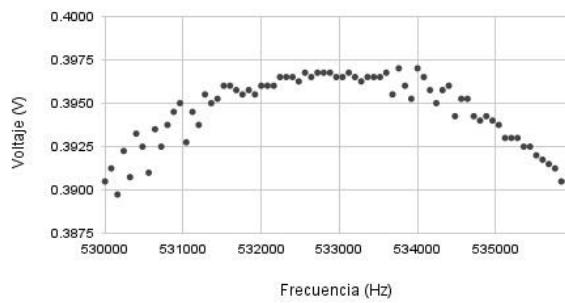


Fig. 5. Prueba de barrido de frecuencia automático de ancho entre 530 KHz y 536 KHz y paso de 80 Hz.

En cuanto al módulo estabilizador, en Fig. 6 vemos que la temperatura interna se mantiene bastante estable durante los meses que ha estado funcionando el circuito estabilizador. Así mismo en Fig. 7 vemos que la temperatura interna se mantiene cerca de 36 °C durante todo el día. Por último, en Fig. 8 vemos como cambia la temperatura interior en función de la exterior, donde para la exterior se registraron temperaturas entre los 20 y 25 °C, la temperatura interna se mantuvo entre 36 °C y 37 °C. Faltaría determinar si esta estabilidad es suficiente para el circuito resonante.

Temperatura desde Abril hasta Julio 2025

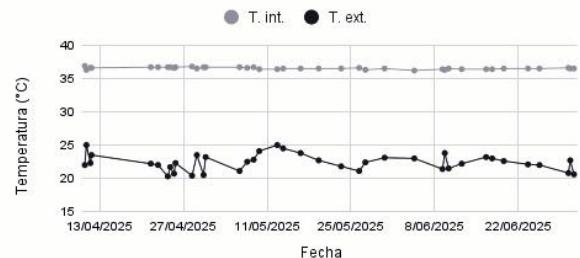


Fig. 6. Comportamiento de la temperatura interna y externa desde abril hasta julio del 2025.

Temperaturas durante el día

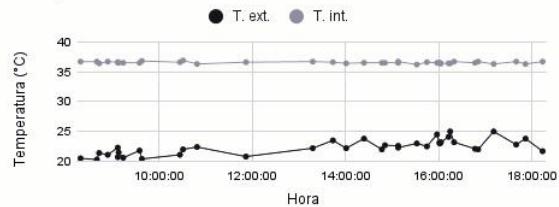


Fig. 7. Comportamiento de la temperatura interna y externa según las horas del día.

Temperatura interior vs exterior

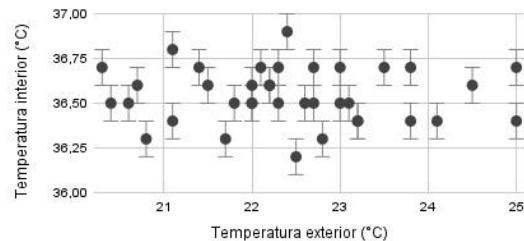


Fig. 8. Temperatura interior versus temperatura exterior.

4. Una propuesta adicional

Si bien el experimento aquí descrito podría dar luces sobre la veracidad de la hipótesis de Céspedes-Curé, no hay que pasar por alto que solo será probado en tres lugares. En esta última propuesta se busca usar la Estación Espacial China (CSS por sus siglas en inglés) ya que la misma parece tener una variabilidad de su altura de operación bastante grande. Esta estación ha estado en funcionamiento desde el 2021 y ya se ha movido entre 340 y 450 Km sobre la

superficie de la tierra; razón por la cual se plantea ubicar todo el sistema del circuito resonante dentro de la estación funcionando de forma automática por un considerable periodo de tiempo. De este modo se podrían obtener múltiples valores de la frecuencia de resonancia para las diferentes alturas mientras la CSS hace sus funciones normales.

5. Conclusiones

La relación entre la velocidad de la luz y la densidad de energía que explica la hipótesis de Céspede-Curé parece estar fuertemente respaldada por los fenómenos de anomalía Pioneer, anomalía de sobrevuelo y lo observado en los datos históricos. Por ello se propuso el uso de un circuito resonante. Se evidencia que la ejecución de este es una tarea delicada debido a la precisión requerida para verificar o no la hipótesis. Actualmente se sigue trabajando en las mejoras correspondientes.

6. Agradecimientos

Agradecemos al Laboratorio de Física Nuclear de la Universidad Simón Bolívar por brindarnos sus equipos y espacios.

7. Bibliografía

Anderson, J., Laing, P., Lau, E., Liu, A., Nieto, M. y Turyshev, S. (2002). Study of the anomalous acceleration of Pioneer 10 and 11. *Phys. Rev. D*, 65:082004.

Cespédes-Curé, J. (2002) Einstein on Trial or Metaphysical Principles of Natural Philosophy. Ramsey Laboratory, Incorporated.

GREAIVES, E. D. NASA's astonishing evidence that c is not constant: The pioneer anomaly [en línea]. 2007. Disponible en: <https://arxiv.org/abs/physics/0701130>

Greaves, Eduardo D. (2017). Propiedades del Espacio Vacío con Campos Gravitacionales: Experiencias Propuestas. Congreso de ABAE.

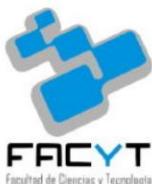
Asociación Bolivariana de Astronomía Espacial. Caracas. Venezuela.

Greaves, E., Bracho, C. y Mikoss, I.(2020) A Solution to the Flyby Anomaly Riddle. *Progress in Physics*. 16: 49–57.

Ramdani, F. (2019) Gravity Constraints on the Measurements of the Speed of Light. *International Journal of Astronomy and Astrophysics*, 9:265–273, Mar 2019.

Toth V. T. and Turyshev S. G. The Pioneer Anomaly: Seeking an explanation in newly recovered data. *Can. J. Phys.*, 2007, v. 84, 1063–1087.

Turyshev S. G., Toth V. T., Kinsella G., Lee Siu-Chun, Lok S. M., and Ellis J. Support for the Thermal Origin of the Pioneer Anomaly *Phys. Rev. Lett.* 108, (2012) 241101



SOME NEW MODELS OF CHARGED DARK ENERGY STARS IN CONFORMAL SYMMETRY

MANUEL MALAVER DE LA F.^{1,2,3} y MARIA ESCULPI³

Department of Basic Sciences, Maritime University of the Caribbean, Catia la Mar, Venezuela¹

Institute of Scholars, Muddhinapalya Bengaluru-560091, Karnataka, India²

Department of Applied Physics, Engineering Faculty, Central University of Venezuela³

{mmf.umc, mariaesculpiw}@gmail.com

Recibido: 29/07/2025, Revisado: 07/08/2025, Aceptado: 07/08/2025

Abstract

We obtained some stellar configurations that represent new models of dark energy stars in presence of a conformal Killing vector with the linear equation of state $p_r = \omega\rho$, where ω is the dark energy parameter, p_r is the radial pressure and ρ is the energy density. By combining the linear equation of state with the Einstein-Maxwell field equations, an equation for electric field is obtained. The generated solution well behaved in the stellar interior but it is important to mention that the denomination of dark energy is applied to fluids which violate the strong energy condition and the causality. Since multiple independent observations suggest that the universe is experiencing accelerated expansion, which can be explained by the presence of undetected dark energy. The models are consistent with the upper limit on the mass of compact stars for 4U1700-377, PSR J1600-3053, PSR J1759+5036 and PSR J1748-2021B.

Keywords: Dark energy, Conformal Killing vector, Linear equation of state, Strong Energy, Causality.

Nuevos modelos de estrellas cargadas de energía oscura en simetría conforme

Resumen

Hemos obtenido algunas configuraciones estelares que representan nuevos modelos de estrellas de energía oscura en presencia de un vector conforme de Killing con la ecuación lineal de estado, donde ω es el parámetro de energía oscura, p_r es la presión radial y ρ es la densidad de energía. Combinando la ecuación lineal de estado con las ecuaciones de campo de Einstein-Maxwell, se obtiene una ecuación para el campo eléctrico. La solución generada se comporta bien en el interior estelar pero es importante mencionar que la denominación de energía oscura se aplica a fluidos que violan la condición de energía fuerte y la causalidad. Varias observaciones independientes sugieren que el universo está experimentando una expansión acelerada, lo que puede explicarse por la presencia de energía oscura no detectada. Los modelos son consistentes con el límite superior de la masa de las estrellas compactas 4U1700-377, PSR J1600-3053, PSR J1759+5036 y PSR J1748-2021B.

Palabras clave: Energía oscura, Vector conforme de Killing, Ecuación lineal de estado, Energía fuerte, Causalidad.

1. Introduction

Most galaxies have gas and dust clouds with a non-uniform matter distribution, which is where stars are produced. White dwarfs and neutron stars that develop at the end of their stellar evolution are typically referred to as "compact objects" in astronomy (Bicak, 2006; Kuhfutting, 2011). Strong gravitational fields and high densities are characteristics of compact objects. In order to investigate powerful gravitational forces, Albert Einstein developed the general theory of relativity (GR) in 1915. The hypothesis is regarded as the fundamental framework for studies in star astrophysics. The structure and behavior of celestial objects can be studied and understood with the use of the Einstein field equations (EFEs). Schwarzschild came up with the first solution to the EFEs in 1916 (Schwarzschild, 1916). Since then, a number of scholars have examined these equations in various ways, and a number of astrophysical models have been developed to offer a thorough explanation of the distribution of mass within star bodies (Chandrasekhar, 1931; Oppenheimer, 1939; Tolman, 1939). By extending Newton's law of universal gravitation and generalizing special relativity, the GR theory describes gravity as a geometric characteristic of space and time (Lobo, 2005; Sushkov, 2005). Currently, several authors (Bibi *et al.*, 2016; Chan *et al.*, 2009; Dayanandan & Smitha, 2021; Lobo, 2005; Lobo, 2006; Malaver, 2013; Malaver & Esculpi, 2013; Malaver *et al.*, 2019; Malaver & Kasmaei, 2020; Morris & Thorne, 1988; Visser, 1995) have produced some solutions to the EFEs for compact star models.

Current astronomical data as the measurements of supernovas of type Ia and microwave background radiation are the most direct evidences of the accelerated expansion of the universe (Lobo, 2006). The explanation for this cosmological behavior in the framework of general relativity requires assumption that a considerable part of the Universe consists of a hypothetical dark energy with a negative pressure component (Sushkov, 2005; Lobo, 2005; Lobo, 2006), which is a cosmic fluid parameterized by $p_r = \omega\rho$ with $-1 \leq \omega \leq -1/3$ where p is the spatially homogeneous pressure and ρ the dark energy density (Bibi, *et al.*, 2016; Lobo, 2006; Malaver, 2013). According to Chan *et al.*, (2009) the denomination of dark energy is applied to fluids which violate only the strong energy condition (SEC) given by $\rho + p_r + 2p_t \geq 0$ where ρ is the energy density, p_t and p_r are the radial pressure and tangential pressure, respectively.

Studying the characteristics and behavior of compact stars has also benefited from the application of conformal symmetry. These potentials are subject to particular constraints when the conformal Killing vector is imposed on the space-time manifold, which makes the process of solving the field equations easier. This method produces a number of models, including (Manjonjo *et al.*, 2017; Rahaman *et al.*, 2010). Equations of state and conformal symmetry with single-layered stars were investigated by some few authors in the past. A relativistic compact star model with a linear equation of state and a conformal Killing vector in the presence of charge was produced by Jape *et al.*, (2023). Christopher *et al.*, (2024) used a quadratic equation of state in

addition to the conformal Killing vector to examine the properties of a relativistic charged compact star.

In this work, we combine a linear equation of state with a dark energy parameter and the conformal Killing vector (CKV) to examine the physics and behavior of a charged dark energy star. In Sec. 2, the Einstein-Maxwell field equations used to generate the model are presented. We give a detailed description of conformal Killing Vector in Sec. 3. By choosing of a gravitational potential that allow the field equations to be solved, we construct new models for charged anisotropic matter in section 4. In Section 5, the physical acceptability requirements are discussed. The validity and physical properties of these new solutions are examined in Section 6. The concluding remarks are provided in Section 7.

2. Einstein Field Equations

We consider a spherically symmetric, static and homogeneous and anisotropic spacetime in Schwarzschild coordinates given by

$$ds^2 = -e^{2\nu(r)}dt^2 + e^{2\lambda(r)}dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2) \quad (1)$$

where $\nu(r)$ and $\lambda(r)$ are two arbitrary functions.

The Einstein field equations for the charged anisotropic matter are given by

$$\frac{1}{r^2}(1-e^{-2\lambda}) + \frac{2\lambda'}{r}e^{-2\lambda} = \rho + \frac{1}{2}E^2 \quad (2)$$

$$-\frac{1}{r^2}(1-e^{-2\lambda}) + \frac{2\nu'}{r}e^{-2\lambda} = p_r - \frac{1}{2}E^2 \quad (3)$$

$$e^{-2\lambda}\left(\nu'' + \nu'^2 + \frac{\nu'}{r} - \nu'\lambda' - \frac{\lambda'}{r}\right) = p_t + \frac{1}{2}E^2 \quad (4)$$

$$\sigma = \frac{1}{r^2}e^{-\lambda}(r^2E)' \quad (5)$$

where ρ is the energy density, p_r is the radial pressure, E is electric field intensity and

p_t is the tangential pressure, respectively. Using the transformations, $x = cr^2$, $Z(x) = e^{-2\lambda(r)}$ and $A_*^2 y^2(x) = e^{2\nu(r)}$ with arbitrary constants A_* and $c > 0$ (Durgapal & Bannerji, 1983), the metric (1) take the form

$$ds^2 = -A^2 y^2(x)dt^2 + \frac{dx^2}{4Z(x)Cx} + \frac{x}{C}(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2)$$

and the Einstein field equations can be written as

$$\frac{1-Z}{x} - 2\dot{Z} = \frac{\rho}{c} + \frac{E^2}{2c} \quad (6)$$

$$4Z\frac{\dot{y}}{y} - \frac{1-Z}{x} = \frac{p_r}{c} - \frac{E^2}{2c} \quad (7)$$

$$4xZ\frac{\ddot{y}}{y} + (4Z + 2x\dot{Z})\frac{\dot{y}}{y} + \dot{Z} = \frac{p_t}{c} + \frac{E^2}{2c} \quad (8)$$

$$p_t = p_r + \Delta \quad (9)$$

$$\frac{\Delta}{c} = 4xZ\frac{\ddot{y}}{y} + \dot{Z}\left(1 + 2x\frac{\dot{y}}{y}\right) + \frac{1-Z}{x} - \frac{E^2}{c} \quad (10)$$

$$\sigma^2 = \frac{4cZ}{x}(\dot{x}E + E^2) \quad (11)$$

σ is the charge density and dots denoting differentiation with respect to x . With the transformations of , the mass within a radius r of the sphere take the form

$$M(x) = \frac{1}{4c^{3/2}} \int_0^x \sqrt{x} \rho(x) dx$$

(12)

The interior metric (1) with the charged matter distribution should match the exterior spacetime described by the Reissner-Nordström metric:

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2}\right)dt^2 + \left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2}\right)^{-1}dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2) \quad (13)$$

where the total mass and the total charge of the star are denoted by M and q^2 , respectively. The junction conditions at the stellar surface are obtained by matching the first and the second fundamental forms for the interior metric (1) and the exterior metric (13).

In this paper, we assume the following equation of state

$$p_r = \omega\rho \quad (14)$$

where ω is the dark energy parameter.

3. Conformal symmetry

We examine the manifold of spacetime that admits conformal symmetry. The system's EFEs (2-4) are made simpler by the conformal Killing vector's imposition (CKV). The application of CKV results in new exact solutions for the core-envelope model in conjunction with the equation of state. The conformal Killing vector is defined as (Herrera *et al.*, 1984)

$$LX(r,t)g_{ab} = 2\phi(r,t)g_{ab} \quad (15)$$

where L is the Lie derivate operator, $X(r,t)$ stands for vector field, g_{ij} is the metric tensor and $\phi(r,t)$ is a conformal factor. With symmetry assumption, the conformal Killing vector and the conformal factor in (15) are given by

$$X = \alpha(t,r)\frac{\partial}{\partial t} + \beta(t,r)\frac{\partial}{\partial r} \quad (16)$$

$$\phi = \phi(r, t)$$

(17)

We take into account the related Weyl tensor integrability requirement (Weyl, 1918) in order to solve equation (15)

$$LX(r, t)C_{jkl}^i = 0$$

(18)

where C_{jkl}^i are the Weyl tensor components. With the eq. (18), eq. (15) can be expressed as

$$\nu'' + (\nu')^2 - \nu'\lambda' - \frac{\nu' - \lambda'}{r} + \frac{1}{r^2} = \frac{e^{2\lambda}(1+k)}{r^2}$$

(19)

where k represents a real constant.

With the transformations, $x = cr^2$, $Z(x) = e^{-2\lambda(r)}$ and $A_*^2 y^2(x) = e^{2\nu(r)}$ suggested for Durgapal & Bannerji (1983) and the condition $k = 2(n-1)$ we obtain

$$y(x) = \begin{cases} A\sqrt{x} \exp\left(\frac{1}{2}\sqrt{2n-1} \int \frac{dx}{x\sqrt{Z}}\right) \\ + B\sqrt{x} \exp\left(-\frac{1}{2}\sqrt{2n-1} \int \frac{dx}{x\sqrt{Z}}\right) \rightarrow n > 1/2 \\ A\frac{\sqrt{x}}{2} \int \frac{dx}{x\sqrt{Z}} + B\sqrt{x} \rightarrow n = 1/2 \\ A\sqrt{x} \exp\left(\frac{1}{2}\sqrt{-(2n-1)} \int \frac{dx}{x\sqrt{Z}}\right) + B\sqrt{x} \exp\left(-\frac{1}{2}\sqrt{-(2n-1)} \int \frac{dx}{x\sqrt{Z}}\right) \rightarrow n < 1/2 \end{cases}$$

(20)

where A and B are constant parameters and $n=1$ represents a conformally flat spacetime.

4. A new class of models

In this section, we found the novel solution for the charged dark energy star that admits a linear equation of state and conformal symmetry. Substituting eq. (14) in the equations (6-7) for the electric field intensity we can obtain

$$\frac{E^2}{2C} = \left(\frac{1-Z}{x} \right) - 2\dot{Z} - \frac{1}{\omega+1} \left(4Z \frac{\dot{y}}{y} - 2\dot{Z} \right)$$

(21)

where ω is the dark energy parameter and Z is the chosen metric potential that can be written as

$$Z(x) = \left(\frac{1-ax}{1+ax} \right)^2$$

(22)

With the conformal condition (20) and eq. (22) and considering case $n=1$, the second gravitational potential is written as

$$y(x) = \frac{Ax}{ax-1} + B(ax-1)$$

(23)

With the equations (21) and (22) and substituting eq. (23) in (6), we obtain for the energy density

$$\rho = \frac{C}{\omega+1} \left(\frac{4(1-ax)^2}{(1+ax)^2(ax-1)} \left[\frac{-A+aB(ax-1)^2}{Ax+B(ax-1)^2} \right] + \frac{8a(1-ax)}{(1+ax)^3} \right)$$

(24)

and for the radial pressure

$$P_r = \frac{\omega C}{\omega+1} \left(\frac{4(1-ax)^2}{(1+ax)^2(ax-1)} \left[-A + aB(ax-1)^2 \right] + \frac{8a(1-ax)}{(1+ax)^3} \right) \quad (25)$$

Using the equations (22) and (23) and their derivatives, the electric field intensity can be written as

$$\frac{E^2}{2C} = \frac{4a(3-ax)}{(1+ax)^3} - \frac{1}{\omega+1} \left[\frac{-4A(ax-1) + 4aB(ax-1)^3}{Ax(ax+1)^2 + B(a^2x^2-1)^2} + \frac{8a(1-ax)}{(1+ax)^3} \right] \quad (26)$$

With (22) and (26) the charge density in (11) take the form

$$\sigma^2 = \frac{4C(1-ax)^2}{x(1+ax)^2} \left[\frac{x}{2} \left[\frac{8aC(3-ax)}{(1+ax)^3} - \frac{2CJ(x)}{\omega+1} \right]^{-1/2} \right. \\ \left. + \left[\frac{8aC(3-ax)}{(1+ax)^3} - \frac{2CJ(x)}{\omega+1} \right]^{1/2} \right] \quad (27)$$

Where for convenience we taken

$$J(x) = \frac{-4A(ax-1) + 4aB(ax-1)^3}{Ax(ax+1)^2 + B(a^2x^2-1)^2} + \frac{8a(1-ax)}{(1+ax)^3}$$

and

$$K(x) = \frac{\left[-4aA + 12a^2B(ax-1)^2 \right] \left[Ax(ax+1)^2 + B(a^2x^2-1) \right]}{\left[-4A(ax-1) + 4aB(ax-1)^3 \right] \left[A[(ax+1)^2 + 2ax(ax+1)] + 4Bx(a^2x^2-1) \right]} \quad (31)$$

By comparison of line elements (1) and (13) and considering $E|_{r=R} = Q/R^2$ we obtained for the mass of the star

$$M(x) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{x}{C}} \left[1 - \frac{(1-ax)^2}{(1+ax)^2} + \frac{8ax(3-ax)}{(1+ax)^3} \right. \\ \left. - \frac{2x}{\omega+1} \left[\frac{4(1-ax)^2}{(ax-1)^2} \left[-\frac{A}{(ax-1)^2} + aB \right] + \frac{8a(1-ax)}{(1+ax)^3} \right] \right] \quad (28)$$

With the equations (22) and (23), we have for the metric potentials

$$e^{2\lambda(r)} = \left(\frac{1+ax}{1-ax} \right)^2 \\ e^{2\nu(r)} = A_*^2 \left(\frac{Ax}{ax-1} + B(ax-1) \right)^2 \quad (29)$$

and the measure of anisotropy Δ can be written as

$$\Delta = \frac{8aAx(1-ax)^2}{(1+ax)^2 [Ax(ax-1)^2 + B(ax-1)^4]} - \frac{4a(1-ax)}{(1+ax)^3} \left\{ 1 + 2x \left[\frac{[-A + aB(ax-1)^2]}{[Ax(ax-1) + B(ax-1)^3]} \right] \right\} \\ + \frac{4a}{(1+ax)^2} - \frac{8a(1-ax)}{(1+ax)^3} + \frac{2}{\omega+1} \left[\frac{-4A(ax-1) + 4aB(ax-1)^3}{Ax(ax-1)^2 + B(a^2x^2-1)^2} + \frac{8a(1-ax)}{(1+ax)^3} \right]$$

(31)

5. Conditions of Physical Acceptability

For a model to be physically acceptable, the following conditions should be satisfied (Delgaty & Lake, 1998):

- (i) The metric potentials $e^{2\lambda}$ and $e^{2\nu}$ assume finite values throughout the stellar

interior and are singularity-free at the center $r=0$.

(ii) The energy density ρ should be positive and a decreasing function inside the star.

(iii) The energy density gradient $d\rho/dr \leq 0$

for $0 \leq r \leq R$.

(iv) The anisotropy is zero at the center $r=0$, i.e. $\Delta(r=0)=0$.

(v) Any physically acceptable model must satisfy the causality condition, that is, for the

radial sound speed $v_{sr}^2 = \frac{dP_r}{d\rho}$, we should

have $0 \leq v_{sr}^2 \leq 1$ but the dark energy case this condition nor is it satisfied.

(vi) The consideration of dark energy is applicable only to fluids that violate the strong energy condition

(vii) The charged interior solution should be matched with the Reissner–Nordström exterior solution, for which the metric is given by eq. (13).

The conditions (ii) and (iii) imply that the energy density must reach a maximum at the center and decrease towards the surface of the sphere.

6. Physical Features of the new Models

We now present the analysis of the physical characteristics for the new models. The metric functions $e^{2\lambda}$ and $e^{2\nu}$ have finite values and remain positive throughout the stellar interior. At the center $e^{2\lambda(0)} = 1$ and $e^{2\nu(0)} = A_*^2 B$. We show that in $r=0$ $(e^{2\lambda(r)})'_{r=0} = (e^{2\nu(r)})'_{r=0} = 0$ and this makes it possible to verify that the gravitational potentials are regular at the center. The

energy density and radial pressure are positive and well behaved within the star. Also, we have for the central density and

$$\text{radial pressure } \rho(0) = \frac{4C}{\omega+1} \left(\frac{A+2aB}{B} \right)$$

$$P_r(0) = \frac{4\omega C}{\omega+1} \left(\frac{A+2aB}{B} \right)$$

For a realistic star, it is expected that the gradient of energy density should be decreasing function of the radial coordinate r . In this model, for all $0 \leq r \leq R$, we obtain respectively:

$$\frac{d\rho}{dr} = \frac{C}{\omega+1} \left[\begin{aligned} & - \frac{16aCr(1-aCr^2)(-A+aB(aCr^2-1)^2)}{(1+aCr^2)^2(aCr^2-1)(ACr^2+B(aCr^2-1)^2)} \\ & + \frac{16a^2BCr(1-aCr^2)^2}{(1+aCr^2)^2(ACr^2+B(aCr^2-1)^2)} \\ & - \frac{16aCr(1-aCr^2)^2(-A+aB(aCr^2-1)^2)}{(aCr^2+1)^3(aCr^2-1)(ACr^2+B(aCr^2-1)^2)} \\ & - \frac{8aCr(1-aCr^2)^2(-A+aB(aCr^2-1)^2)}{(1+aCr^2)^2(aCr^2-1)^2(ACr^2+B(aCr^2-1)^2)} \\ & - \frac{4(1-aCr^2)^2(-A+aB(aCr^2-1)^2)(2ACr+4aBCr(aCr^2-1))}{(1+aCr^2)^2(aCr^2-1)(ACr^2+B(aCr^2-1)^2)^2} \\ & - \frac{16a^2Cr}{(1+aCr^2)^3} - \frac{48a^2Cr(1-aCr^2)}{(1+aCr^2)^4} \end{aligned} \right]$$

(32)

On the boundary $r=R$, the solution must match the Reissner-Nordström exterior space-time as:

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2} \right) dt^2 + \left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2} \right)^{-1} dr^2 + r^2$$

and the continuity of e^ν and e^λ across the boundary $r=R$ is

$$e^{2\nu} = e^{-2\lambda} = 1 - \frac{2M}{R} + \frac{Q^2}{R^2}$$

(33)

Then, for the matching conditions, we obtain

$$\frac{2M}{R} = 1 - \left(\frac{1-aCR^2}{1+aCR^2} \right)^2 + \frac{8aR^2(3-aCR^2)}{(1+aCR^2)^3} - \frac{2R^2}{\omega+1} \left\{ \begin{aligned} & \frac{4(1-aCR^2)^2}{(1+aCR^2)^2} \left[-\frac{A}{(aCR^2-1)^2} + aB \right] \\ & \left[\frac{ACR^2}{aCR^2-1} + B(aCR^2-1) \right] \\ & + \frac{8a(1-aCR^2)}{(1+aCR^2)^3} \end{aligned} \right\}$$

(34)

For a physically meaningful solution, the electric field must vanish at the center of the star, i.e,

$$\frac{E^2}{2C} = 12a - \frac{4}{\omega+1} \left(\frac{A+aB}{B} \right) = 0$$

(35)

and therefore the values of B will depend on the ω parameter of dark energy as follows

$$B = \frac{A}{(3\omega+2)a}$$

(36)

In the following table shows the values of B obtained for different values of ω . For all cases $a=0.001$ and $A=0.00003$.

Table 1. Values of B obtained for different dark energy parameters ω with $a=0.001$ and $A=0.00003$

A	a	B	ω
0.0000	0.00	0.0857142857	-
3	1	1	0.5
0.0000	0.00	0.15	-
3	1		0.6
0.0000	0.00	0.27272727	-
3	1		0.6
0.0000	0.00	0.60	-
3	1		0.6
			5

The figures 1-8 represent the plots of $\frac{E^2}{2C}$

, ρ , P_r , $e^{2\nu(r)}$, $e^{2\lambda(r)}$, SEC, Δ , σ^2 , $\frac{d\rho}{dr}$, Z_S and M with the radial coordinate for different values of ω . In all the graphs we considered $C=1$.

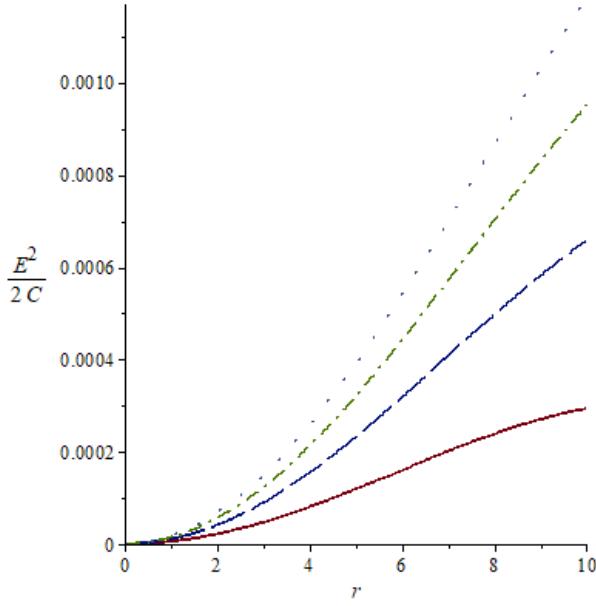


Figure 1: Electric field against the radial coordinate for $\omega = -0.55$ (solid line), $\omega = -0.60$ (long-dash line), $\omega = -0.63$ (dash-dot line) and $\omega = -0.65$ (space-dot line). For all the cases $a=0.001$, $A=0.00003$.

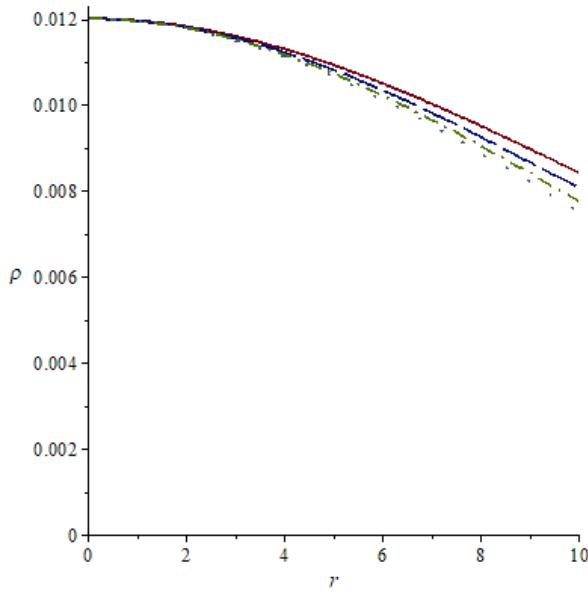


Figure 2: Energy density against the radial coordinate for $\omega = -0.55$ (solid line), $\omega = -0.60$ (long-dash line), $\omega = -0.63$ (dash-dot line) and $\omega = -0.65$ (space-dot line). For all the cases $a=0.001$, $A=0.00003$.

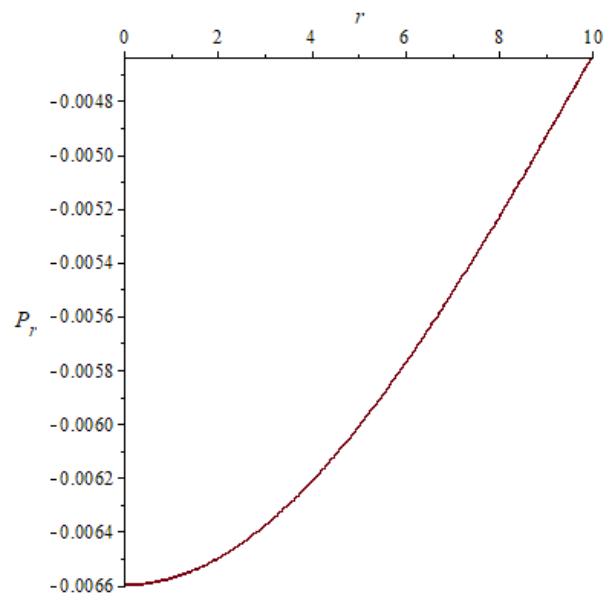


Figure 3: Radial pressure against the radial coordinate for $\omega = -0.55$ (solid line), $\omega = -0.60$ (long-dash line), $\omega = -0.63$ (dash-dot line) and $\omega = -0.65$ (space-dot line). For all the cases $a=0.001$, $A=0.00003$.

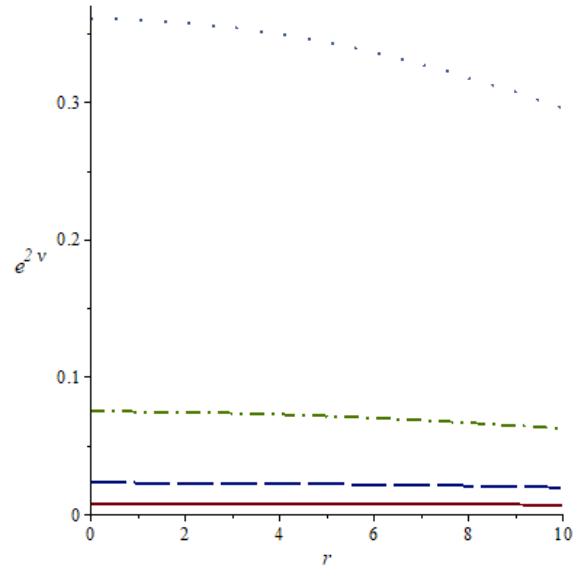


Figure 4: Metric potential $e^{2\nu}$ against the radial coordinate for $\omega = -0.55$ (solid line), $\omega = -0.60$ (long-dash line), $\omega = -0.63$ (dash-dot line) and $\omega = -0.65$ (space-dot line). For all the cases $a=0.001$, $A=0.00003$.

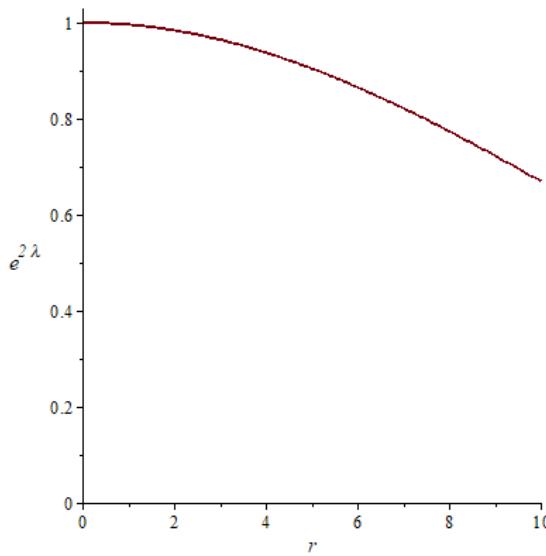


Figure 5: Metric potential $e^{2\lambda}$ against the radial coordinate for $a=0.001$

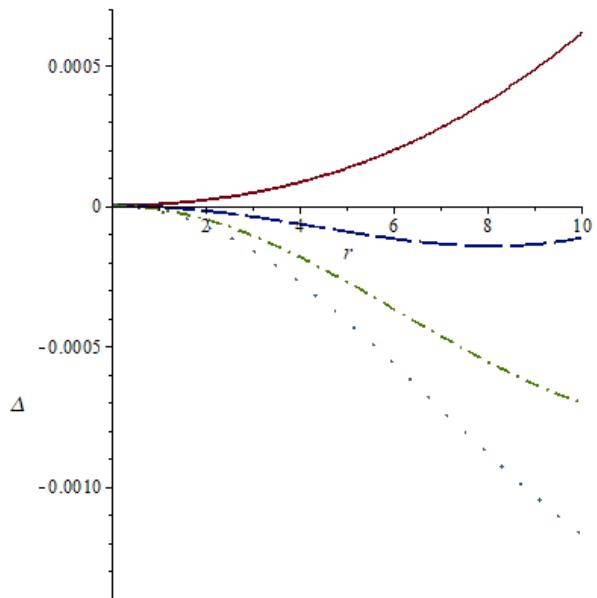


Figure 7: Anisotropy against the radial coordinate for $\omega = -0.55$ (solid line), $\omega = -0.60$ (long-dash line), $\omega = -0.63$ (dash-dot line) and $\omega = -0.65$ (space-dot line). For all the cases $a=0.001$, $A= 0.00003$.

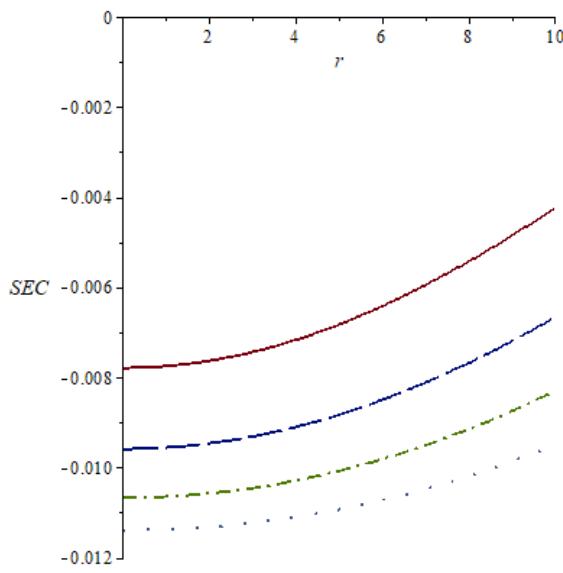


Figure 6: Strong Energy Condition (SEC) against the radial coordinate for $\omega = -0.55$ (solid line), $\omega = -0.60$ (long-dash line), $\omega = -0.63$ (dash-dot line) and $\omega = -0.65$ (space-dot line). For all the cases $a=0.001$, $A= 0.00003$.

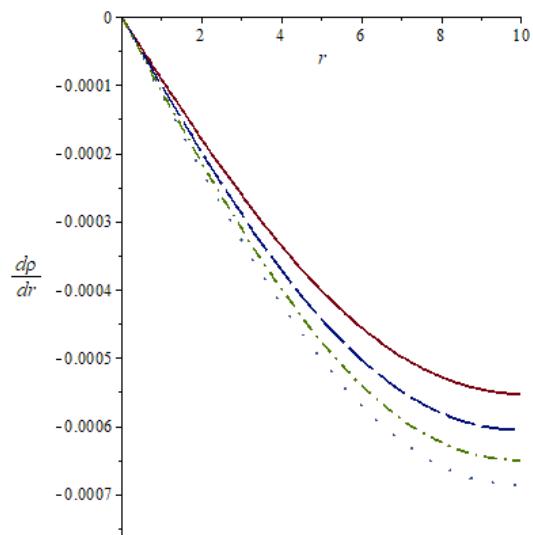


Figure 8: Energy density gradient against the radial coordinate for $\omega = -0.55$ (solid line), $\omega = -0.60$ (long-dash line), $\omega = -0.63$ (dash-dot line) and $\omega = -0.65$ (space-dot line). For all the cases $a=0.001$, $A= 0.00003$.

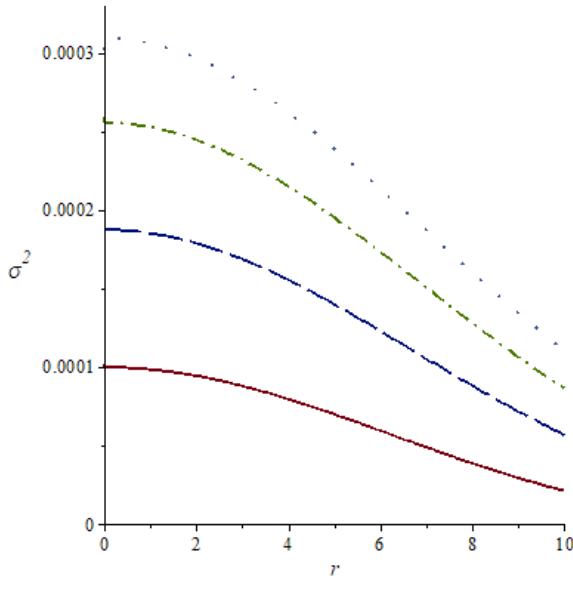


Figure 9: Charge density gradient against the radial coordinate for $\omega = -0.55$ (solid line), $\omega = -0.60$ (long-dash line), $\omega = -0.63$ (dash-dot line) and $\omega = -0.65$ (space-dot line). or all the cases $a=0.001$, $A= 0.0003$.

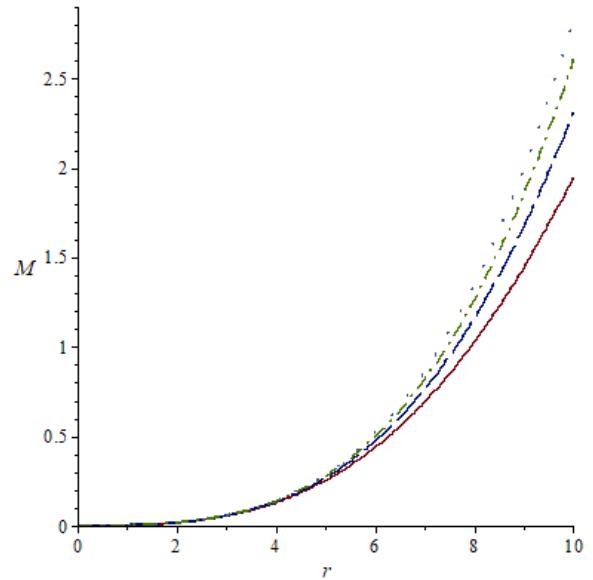


Figure 11: Mass against the radial coordinate for $\omega = -0.55$ (solid line), $\omega = -0.60$ (long-dash line), $\omega = -0.63$ (dash-dot line) and $\omega = -0.65$ (space-dot line). For all the cases $a=0.001$, $A= 0.00003$.

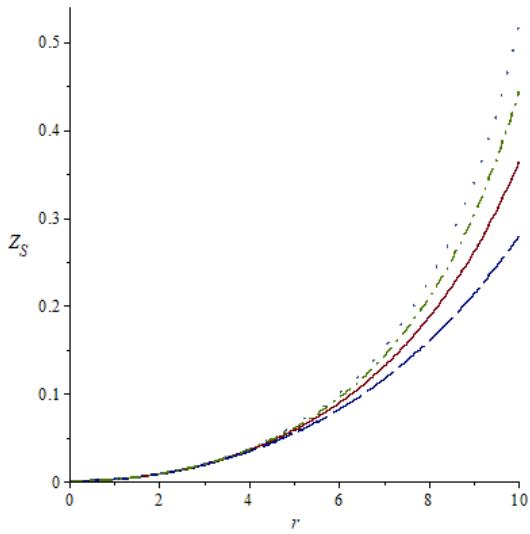


Figure 10: Surface redshift against the radial coordinate for $\omega = -0.55$ (solid line), $\omega = -0.60$ (long-dash line), $\omega = -0.63$ (dash-dot line) and $\omega = -0.65$ (space-dot line). For all the cases $a=0.001$, $A= 0.00003$.

In Figure 1 the electric field intensity is a continuously growing function inside the star. The energy density remains positive, continuous and is monotonically decreasing function throughout the stellar interior as noted in Figure 2 for all the values of ω . The radial pressure is negative, not a decreasing function of the radial parameter and takes lower values when ω reduces as shown in Figure 3. Figure 4 display the behavior of the metric potential function $e^{2\nu}$ and shown that this function well behaved and remains constant for values of $\omega = -0.55; -0.60; -0.63$ but it shows a strong decrease with the radial parameter when $\omega = -0.65$. In Figure 5 the gravitational potential $e^{2\lambda}$ also is continuous and diminishes with the radial coordinate.

The Figure 6 shows that the strong energy condition is violated for all ω values considered. In Figure 7 is it noted that the anisotropy Δ grows gradually for $\omega = -0.55$ and becomes more negative as ω values diminishes and vanishes at the centre of the star. The radial variation of energy density gradient has been shown in Figure 8 and it is

noted that $\frac{d\rho}{dr} < 0$ for all cases studied. In

Figure 9 the charge density is a continuously decreasing function within the stellar interior for all ω values. Figure 10 displays the surface red-shift profiles for all the values of ω and is it note that the surface redshift increases when decreases ω , reaching a maximum value of $Z_s = 0.521260114$ for $\omega = -0.65$. The mass function in Figure 11 is continuous, increasing, takes finite values, and behaves well in the interior of the star for all values of ω taken into consideration. The estimated values are comparable to the four star objects' stellar masses listed in Table 2 (Fan *et al.*, 2024; Rocha, 2023).

We note that the dark energy parameter ω modify the upper limit of the mass of compact stars. For $\omega = -0.55$, the values of a , A and B allow us to obtain a mass of $1.96M_\odot$ which can correspond to astronomic object 4U1700-377 (Rocha, 2023). With $\omega = -0.60$ the resulting mass is very similar to the pulsar J1600-3053 whose observed mass is $2.30M_\odot$ and the values of the parameters $a=0.0001$, $B=0.27272727$ for $\omega = -0.63$ generate the mass $2.62M_\odot$ that can correspond to the pulsar J1759+5036 . For the case $\omega = -0.65$ we obtained a comparable mass with the

binary system J1748-2021B (Freire *et al.*, 2008).

Table 2. The approximate values of the masses for the compact stars

Compact Stars	Value s of ω	Reporte d mass $M(M_\odot)$	Calculated mass $M(M_\odot)$
4U1700-377	- 0.55	1.96 40	1.9463054
PSR J1600-3053	- 0.60	2.30 15	2.3109719
PSR J1759+5036	- 0.63	2.62 40	2.6039561
PSR J1748-2021B	- 0.65	2.92 40	2.8394563

M_\odot = sun's mass

7. Conclusion

- In this work we found new class of solutions which represents a potential model for dark energy stars considering conformal symmetry.
- Relationships between metric potentials were established with the use of the conformal Killing vector.
- The gravitational potentials for the anisotropic dark energy star model generated during this work behave steadily inside the sphere.
- Anisotropy, charge density, energy density, and electric field all showed compatibility

with data in the literature and stayed within reasonable bounds for charged compact stars.

- This model not meet the strong energy criterion, but the metric potentials behave well.

- The new solutions found in this study is a realistic and physically acceptable compact star with astrophysical consequences, as demonstrated by the satisfaction of the physical constraints. We considered some known compact stars such as 4U1700-377, PSR J1600-3053, PSR J1759+5036 and PSR J1748-2021B in order to verify observational data with the model proposed in this research. We have noted that the new stellar masses generated using the new model are in a range acceptable to realistic stars.

8. References

- Bibi R, Feroze T, Siddiqui A. (2016). Solution of the Einstein-Maxwell Equations with Anisotropic Negative Pressure as a Potential Model of a Dark Energy Star. *Canadian Journal of Physics*. 94(8): 758-762.
- Bicak J. (2006). Einstein equations: exact solutions. *Encyclopaedia of Mathematical Physics* 2: 165-173.
- Chan R, da Silva MAF, Villas da Rocha J.F. (2009). On Anisotropic Dark Energy. *Mod Phys Lett A* 24: 1137-1146.
- Chandrasekhar, S. (1931). The Maximum mass of ideal white dwarfs. *Astrophys, J.* 74: 81-82.
- Christopher, J., Jape, J., Sunzu, J.M. (2024). Charged anisotropic conformal star model with a quadratic equation of state. *International Journal of Modern Physics D*. 33: 2450022
- Dayanandan B, Smitha T.T. (2021). Modelling of dark energy stars with Tolman IV gravitational potential. *Chinese Journal of Physics* 71: 683-692.
- Delgaty M.S.R, Lake, K. (1998). Physical acceptability of isolated, static, spherically symmetric, perfect fluid solutions of Einstein's equations. *Comput Phys Commun*. 115: 395
- Durgapal MC, Bannerji R.(1983). New analytical stellar model in general relativity. *Phys Rev D*. 27: 328-331.
- FanY.Z, Han M.Z., Jiang J.L., Shao D.S., Tang, S.P. (2024). Maximum gravitational mass $M_{TOV} = 2.25^{+0.08}_{-0.07} M_{\odot}$ inferred at about 3% precision with multimessenger data of neutron stars. *Phys. Rev. D* 109: 043052.
- Freire, P.C., Wolszczan, A., van der Berg, M., Hessels, J.W. (2008). A massive neutron star in the globular cluster M5. *Astrophys J.* 679: 1433.
- Herrera, L., Jimenez, J., Leal, L., Ponce de Leon, J., Esculpi, M., Galina, V. (1984). Anisotropic fluids and conformal motions in general relativity. *J.Math. Phys*, 25: 3274.
- Jape, J.W., Sunzu, J.M., Maharaj, S.D., Mkenyeleye, J.M. (2023).Charged conformal stars and equation of state. *Indian J. Phys*. 97: 1015
- Kuhfutting, P.K. (2011). Some remarks on exact wormhole solutions. *Adv Stud Theor Phys* 5: 365-367.
- Lobo, F.S.N. (2005). Stability of phantom wormholes. *Phys Rev D* 71: 124022.
- Lobo, F.S.N. (2006). Stable dark energy stars. *Class Quant Grav* 23: 1525-1541
- Lobo, F.S.N., Crawford, P. (2005). Stability analysis of dynamic thin shells.*Class Quant Grav* 22: 4869-4886.
- Malaver, M. (2013) *Black Holes, Wormholes and Dark Energy Stars in General Relativity..* Lambert Academic Publishing, Berlin.
- Malaver, M, Esculpi M, Govender, M. (2019) New Models of Dark Energy Stars with Charge Distributions. *International*

Journal of Astrophysics and Space

Science, 7(2): 27-32.

Malaver M, Kasmaei HD (2020)

Analytical Models of Dark Energy Stars
with Quadratic Equation of State. *Applied Physics* 3: 1-14.

Manjonjo, A.M., Maharaj, S.D.,

Moopanar, S. (2017). Conformal vectors and stellar models. *Eur. Phys. J. Plus* 132: 62

Morris, M.S, Thorne K.S. (1988).

Wormholes in spacetime and their use for interstellar travel: A tool for teaching general relativity. *Am J Phys* 56: 395-412.

Oppenheimer J.R, Volkoff, G. (1939). On Massive Neutron Cores. *Phys Rev* 55: 374-381.

Rahaman, F., Jamil, M., Sharma, R., Chakraborty, K. (2010). A class of solutions for anisotropic stars admitting conformal motion. *Astrophys. Space. Sci.* 330: 249

Rocha, L. (2023). The masses of neutron stars. PhD thesis. Universidade de São Paulo. Instituto de Astronomia, Geofísica e Ciências Atmosféricas. Departamento de Astronomia. São Paulo, Brasil.

Schwarzschild, K. (1916). On the gravitational field of a sphere of incompressible fluid according to Einstein's theory. *Math Phys Tech.* pp: 424-434.

Sushkov, S. (2005). Wormholes supported by a phantom energy. *Phys Rev D* 71: 043520

Tolman, R.C. (1939). Static Solutions of Einstein's Field Equations for Spheres of Fluid. *Phys Rev* 55: 364-373.

Visser, M. (1995). *Lorentzian wormholes: From Einstein to Hawking*. AIP Press, New York, USA

Weyl, H. (1918). Reine Infinitesimalgeometrie. *Matematische Zeitschrift*. 2(3): 384



Estudio del Modelo Inflacionario α -attractor usando Métodos Semiclásicos

Clara Rojas¹

¹ Yachay Tech University, School of Physical Sciences and Nanotechnology, Hda. San José S/N y Proyecto Yachay, 100119, Urcuquí, Ecuador

*Clara Rojas: crojas@yachaytech.edu.ec

Recibido: 23/07/2025, Revisado: 05/08/2025, Aceptado: 12/08/2025

Resumen

En este trabajo resolvemos numéricamente y mediante el método de aproximación uniforme las ecuaciones de las perturbaciones escalares y tensoriales para el modelo inflacionario α -attractor. Este modelo inflacionario ha cobrado gran importancia porque permite describir tanto la expansión acelerada inicial del universo durante la época inflacionaria como la expansión acelerada actual, utilizando el mismo potencial. Una vez calculados los observables, concluimos que el método de aproximación uniforme ofrece resultados excelentes en comparación con la integración numérica.

Palabras Claves: Perturbaciones cosmológicas inflacionarias, Espectros de potencias escalar y tensorial, modelo inflacionario α -attractor.

Study of the α -attractors Inflationary Model Using Semiclassical Methods

Abstract

In this work, we solve the equations for scalar and tensor perturbations for the α -attractor inflationary model both numerically and using the Uniform Approximation Method. This inflationary model has gained great importance because it allows us to describe both the initial accelerated expansion of the universe during the inflationary epoch and the current accelerated expansion, using the same potential. Once the observables are calculated, we conclude that the uniform approximation method provides excellent results in comparison to numerical integration.

Keywords: Inflationary cosmological perturbations, scalar and tensor power spectra, α -attractor inflationary mode.

1. Introducción

En este trabajo estudiamos el modelo inflacionario α -attractor usando el método de aproximación uniforme [1–7]. Estos métodos de aproximación semicásicos han sido utilizado ampliamente en los últimos años para estudiar las perturbaciones cosmológicas [1–8]. El modelo inflacionario α -attractors posee una gran relevancia actualmente ya que establece una justificación teórica entre la época inflacionaria y la aceleración cósmica tardía, permitiendo describir tanto la inflación como la dinámica de la energía oscura usando un sólo potencial $V(\phi)$ [9, 10].

Cuando la inflación es producida por un campo escalar homogéneo, la ecuación dinámica para el inflaton ϕ está dada por la ecuación,

$$\ddot{\phi}(t) + 3H\dot{\phi}(t) + \frac{\partial V(\phi)}{\partial \phi} = 0, \quad (1)$$

donde el punto significa derivada respecto al tiempo t . La evolución del parámetro de Hubble $H(t) = \dot{a}(t)/a(t)$, donde $a(t)$ es el factor de escala, está dada por la ecuación de Friedmann, en unidades de Planck $M_{\text{Pl}} = 1$,

$$H^2 = \left[\frac{1}{2} \dot{\phi}^2 + V(\phi) \right]. \quad (2)$$

Una vez que se resuelven las ecuaciones de movimiento el siguiente paso es construir la ecuación de las perturbaciones escalares. Las perturbaciones escalares u_k en un universo dominado por un campo escalar ϕ satisfacen la ecuación diferencial [11],

$$u_k'' + \left(k^2 - \frac{z_S''}{z_S} \right) u_k = 0, \quad (3)$$

donde la prima indica derivada con respecto al tiempo conforme $\eta = \int dt/a$ y $z_S = a\phi'/\mathcal{H}$ con $\mathcal{H} = a'/a$.

Para las perturbaciones tensoriales, introducimos la función $v_k = ah$, donde h representa la amplitud de la onda gravitacional. Las perturbaciones tensoriales obedecen una ecuación diferencial de segundo orden análoga a la Eq. (3),

$$v_k'' + \left(k^2 - \frac{a''}{a} \right) v_k = 0. \quad (4)$$

Las soluciones de la Ecs. (3) y (4) exhiben el siguiente comportamiento asintótico,

$$u_k \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2k}} e^{-ik\eta}, \quad -k\eta \rightarrow \infty, \quad (5)$$

para escalas de longitud menores que el horizonte de Hubble y

$$u_k \rightarrow A_k z_S, \quad -k\eta \rightarrow 0, \quad (6)$$

para escalas mayores que el horizonte de Hubble.

Una vez que se resuelve las Es. (3) y (4) para diferentes valores del momento k , se puede calcular el espectro de potencias para las perturbaciones escalares y tensoriales a través de la relación,

$$P_S(k) = \lim_{kt \rightarrow \infty} \frac{k^3}{2\pi^2} \left| \frac{u_k(t)}{z_S(t)} \right|^2, \quad (7)$$

$$P_T(k) = \lim_{kt \rightarrow \infty} \frac{k^3}{2\pi^2} \left| \frac{v_k(t)}{a(t)} \right|^2. \quad (8)$$

El índice espectral para las perturbaciones escalares está definido por [12],

$$n_S(k) = 1 + \frac{d \ln P_S(k)}{d \ln k}. \quad (9)$$

Finalmente la relación la relación entre el espectro de potencias tensorial y escalar está dado por,

$$r(k) = 8 \frac{P_T(k)}{P_S(k)}. \quad (10)$$

2. Métodos y Resultados

2.1 El Método de Aproximación Uniforme

Para aplicar el método de aproximación uniforme se debe escribir las Ecs. (3) y (4) en el tiempo físico t y de la siguiente forma,

$$\ddot{U}_k + R_S(k,t)U_k = 0, \quad (11)$$

$$\ddot{V}_k + R_T(k,t)V_k = 0, \quad (12)$$

donde

$$\begin{aligned} R_S(k,t) &= \frac{1}{a^2} \left[k^2 - \frac{(\dot{a}\dot{z}_S a z_S) a}{z_S} \right] \\ &+ \frac{1}{4a^2} (a^2 - 2a\ddot{a}), \end{aligned} \quad (13)$$

$$\begin{aligned} R_T(k,t) &= \frac{1}{a^2} \left[k^2 - (\dot{a}^2 + a\ddot{a}) \right] \\ &+ \frac{1}{4a^2} (a^2 - 2a\ddot{a}), \end{aligned} \quad (14)$$

adicionalmente $U(k)$ satisface las condiciones asintóticas,

$$U_k \rightarrow A_k \sqrt{a(t)} z_S(t), \quad kt \rightarrow \infty, \quad (15)$$

$$U_k \rightarrow \sqrt{\frac{a(t)}{2k}} \exp[-ik\eta(t)], \quad kt \rightarrow 0, \quad (16)$$

las condiciones asintóticas (15) y (16) también se cumplen para V_k .

Queremos obtener una solución aproximada de las ecuaciones diferenciales (11) y (12) en términos de las soluciones conocidas $w_S(\rho_S)$ y $w_T(\rho_T)$ de la ecuación de comparación [2, 3, 13, 14],

$$\frac{d^2 w_S(\rho_S)}{d\rho_S^2} + r_S(\rho_S)w_S(\rho_S) = 0, \quad (17)$$

$$\frac{d^2 w_T(\rho_T)}{d\rho_T^2} + r_T(\rho_T)w_T(\rho) = 0, \quad (18)$$

donde $r_S(\rho_S)$ se elige de manera similar a $R_S(k,t)$ y $r_T(\rho_T)$ se elige de manera similar a $R_T(k,t)$, con el mismo número de ceros, de modo que las soluciones de las ecuaciones (17) y (18) sean conocidas..

Las funciones $U(k,t)$ y $V(k,t)$ también deben ser similares a $w_S(\rho_S)$ y $w_T(\rho_T)$, y pueden relacionarse mediante [13],

$$U_k(k,t) \approx \left\{ \frac{r_S[\rho_S(k,t)]}{R_S(k,t)} \right\}^{1/4} w_S[\rho_S(k,t)], \quad (19)$$

$$V_k(k,t) \approx \left\{ \frac{r_T[\rho_T(k,t)]}{R_T(k,t)} \right\}^{1/4} w_T[\rho_T(k,t)]. \quad (20)$$

La condición de validez para que las Ecs. (19) y (20) sean una buena solución está dada por,

$$\left| \frac{1}{R_{S,T}(t)} \left(\frac{d\rho_{S,T}}{dt} \right) \frac{d^2}{dt^2} \left(\frac{d\rho_{S,T}}{dt} \right)^{1/2} \right| \ll 1. \quad (21)$$

Las Ecs. (19) y (20) proporcionan una aproximación uniforme para $U_k(k,t)$ y $V_k(k,t)$ en todo el rango de t , incluyendo los puntos de retorno.

El objetivo es encontrar una solución aproximada para las ecuaciones diferenciales (11) y (12) en una región donde $Q_S^2(k,t)$ y $Q_T^2(k,t)$ tienen una raíz simple en $t_{\text{ret}} = \tau_S$ y $t_{\text{ret}} = \tau_T$, respectivamente, de modo que $Q_{S,T}^2(k,t) > 0$ para $0 < t < t_{\text{ret}}$ y $Q_{S,T}^2(k,t) < 0$ para $t > t_{\text{ret}}$. Una función de comparación adecuada es $r_S(\rho) = \pm\rho_S$ y $r_T(\rho) = \pm\rho_T$, por lo que existen dos casos:

- a) En la región permitida clásicamente, $Q_{S,T}^2(k,t) > 0$, elegimos $r_{S,T}(\rho_{S,T}) = \rho_{S,T}$ y las ecuaciones de comparación a resolver son,

$$\frac{d^2 w_S}{d\rho_S^2} + \rho_S w_S = 0, \quad (22)$$

$$\frac{d^2 w_T}{d\rho_T^2} + \rho_T w_T = 0. \quad (23)$$

Las ecuaciones (22) y (23) corresponden a la ecuación de Airy, la cual tiene dos soluciones independientes $A_i(-\rho_{S,T})$ y $B_i(-\rho_{S,T})$ [15]. La relación de mapeo está dada por [13],

$$\frac{d\rho_{S,T}}{dt} = [Q_{S,T}^2(k,t)\rho_{S,T}]^{1/2}. \quad (24)$$

$$U_k(k,t) = \left[\frac{\rho_S^1(k,t)}{Q_S^2(k,t)} \right]^{1/4} \{ C_1 A_i[-\rho_S^1(k,t)] + C_2 B_i[-\rho_S^1(k,t)] \}, \quad (25)$$

$$V_k(k,t) = \left[\frac{\rho_T^1(k,t)}{Q_T^2(k,t)} \right]^{1/4} \{ C_1 A_i[-\rho_T^1(k,t)] + C_2 B_i[-\rho_T^1(k,t)] \}, \quad (26)$$

$$\frac{2}{3} [\rho_{S,T}^1(k,t)]^{3/2} = \int_t^{t_{\text{ret}}} [Q_{S,T}^2(k,t)]^{1/2} dt, \quad (27)$$

donde C_1 y C_2 son dos constantes que deben determinarse con la ayuda de las condiciones de frontera (16).

En el límite $kt \rightarrow \infty$, se emplean las fórmulas asintóticas [15],

$$A_i(-\rho) \sim \pi^{-1/2} \rho^{-1/4} \sin \left(\frac{2}{3} \rho^{3/2} + \frac{\pi}{4} \right), \quad (28)$$

$$B_i(-\rho) \sim \pi^{-1/2} \rho^{-1/4} \cos \left(\frac{2}{3} \rho^{3/2} + \frac{\pi}{4} \right), \quad (29)$$

se encuentra que $C_1 = \sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{-i\pi/4}$ y $C_2 = \sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{i\pi/4}$.

b) En la región prohibida clásicamente, $Q_{S,T}^2(k,t) < 0$, elegimos $r_{S,T}(\rho_{S,T}) = -\rho_{S,T}$ y resolvemos las ecuaciones de comparación,

$$\frac{d^2 w_S}{d\rho_S^2} - \rho_S w_S = 0, \quad (30)$$

$$\frac{d^2 w_T}{d\rho_T^2} - \rho_T w_T = 0. \quad (31)$$

Las ecuaciones (30) y (31) tienen la forma de la ecuación diferencial de Airy, la cual posee dos soluciones independientes $A_i(-\rho_{S,T})$ y $B_i(-\rho_{S,T})$ [15]. La relación de mapeo está dada por [13],

$$\frac{d\rho_{S,T}}{dt} = [-Q_{S,T}^2(k,t)\rho_{S,T}]^{1/2}. \quad (32)$$

Las soluciones aproximadas para las ecuaciones diferenciales (11) y (12) son

$$U_k(k,t) = [-\rho_S^r(k,t)Q_S^2(k,t)]^{1/4} \times \{C_1 A_i[\rho_S^r(k,t)] + C_2 B_i[\rho_S^r(k,t)]\}, \quad (33)$$

$$V_k(k,t) = [-\rho_T^r(k,t)Q_T^2(k,t)]^{1/4} \times \{C_1 A_i[\rho_T^r(k,t)] + C_2 B_i[\rho_T^r(k,t)]\}, \quad (34)$$

$$\frac{2}{3} [\rho_{S,T}^r(k,t)]^{3/2} = \int_{t_{\text{ret}}}^t [-Q_{S,T}^2(k,t)]^{1/2} dt. \quad (35)$$

Para el cálculo del espectro de potencias es necesario tomar el límite $k,t \rightarrow \infty$ de las soluciones (33) y (34). En este límite se tiene,

$$A_i(\rho) \sim \frac{\pi^{-1/2}}{2} \rho^{-1/4} \exp \left(-\frac{2}{3} \rho^{3/2} \right), \quad (36)$$

$$B_i(\rho) \sim \pi^{-1/2} \rho^{-1/4} \exp \left(\frac{2}{3} \rho^{3/2} \right). \quad (37)$$

Finalmente,

$$u_k^{\text{ua}}(t) \rightarrow \frac{C}{\sqrt{2a(t)}} [-Q_S^2(k,t)]^{-1/2} \times \left\{ \frac{1}{2} \exp \left(- \int_{\tau_S}^t [-Q_S^2(k,t)]^{1/2} dt \right) + i \exp \left(\int_{\tau_S}^t [-Q_S^2(k,t)]^{1/2} dt \right) \right\}, \quad (38)$$

$$v_k^{\text{ua}}(t) \rightarrow \frac{C}{\sqrt{2a(t)}} [-Q_T^2(k,t)]^{-1/2} \times \left\{ \frac{1}{2} \exp \left(- \int_{\tau_T}^t [-Q_T^2(k,t)]^{1/2} dt \right) + i \exp \left(\int_{\tau_T}^t [-Q_T^2(k,t)]^{1/2} dt \right) \right\}, \quad (39)$$

donde C es un factor de fase. Utilizando la parte creciente de las soluciones (38) y (39), se pueden calcular los espectros de potencias escalar y tensorial empleando el método de aproximación uniforme,

$$P_S^{\text{ua}}(k) = \lim_{kt \rightarrow \infty} \frac{k^3}{2\pi^2} \left| \frac{u_k^{\text{ua}}(t)}{z_S(t)} \right|^2, \quad (40)$$

$$P_T^{\text{ua}}(k) = \lim_{kt \rightarrow \infty} \frac{k^3}{2\pi^2} \left| \frac{v_k^{\text{ua}}(t)}{a(t)} \right|^2. \quad (41)$$

2.2 El modelo

Uno de los potenciales propuestos para este tipo de inflación está dado por un modelo α -attractor que tiene la siguiente forma [9],

$$V(\varphi) = \lambda e^{-n \tanh\left(\frac{\varphi}{\sqrt{6}\alpha}\right)}, \quad (42)$$

donde n y α son parámetros adimensionales, y n depende de α de la siguiente manera: $n = \kappa, \sqrt{6}\alpha$. Los parámetros n y α son fijados por Saló en $n = 124$ y $\alpha = 10^{-2}$ [9].

Método	$n_S(k)$	Error relativo	$r(k)$	Error relativo
Numérico	0,960653	—	$4,29 \times 10^{-5}$	—
Aproximación uniforme	0,960664	$1,14 \times 10^{-5}$	$4,28 \times 10^{-5}$	$2,33 \times 10^{-3}$

Tabla 1. Comparación de los valores para $n_S(k)$, $r(k)$, y sus errores relativos, obtenidos numéricamente y usando el método de aproximación uniforme para el modelo inflacionario α -attractor.

3. Conclusiones

En este artículo se propone el método de aproximación uniforme como un método novedoso para calcular el espectro de potencias escalar $P_S(k)$ y tensorial $P_T(k)$ para el modelo inflacionario α -attractors, así como los observables: el índice espectral escalar $n_S(k)$ y la relación tensor-escalar $r(k)$. Con la aproximación uniforme se obtuvo el índice espectral escalar $n_S(k)$ con un error relativo del orden de 10^{-5} y para la relación tensor-escalar $r(k)$ se obtuvo un error relativo del orden de 10^{-3} , respecto al resultado numérico. En base a estos resultados se puede afirmar que la aproximación uniforme es un método eficiente para estudiar las perturbaciones tanto escalares como tensoriales en cosmología inflacionaria.

La forma de este potencial puede ser observada en la Figura 1,

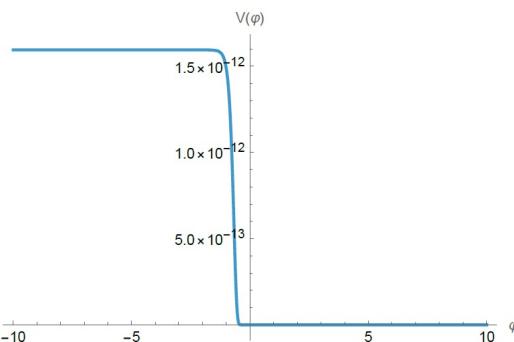


Figura 1. Potencial para el modelo inflacionario α -attractor.

2.3 Resultados

En esta sección se compara la solución numérica para el índice espectral escalar $n_S(k)$ y la relación tensor-escalar $r(k)$ con el resultado obtenido usando la aproximación uniforme, lo que se puede observar en la Tabla 1.

Referencias

- [1] R. Casadio, F. Finelli, M. Luzzi, and G. Venturi. Improved WKB analysis of cosmological perturbations. *Phys. Rev. D*, 71:043517, 2005.
- [2] C. Rojas and V. M. Villalba. Computation of inflationary cosmological perturbations in the power-law inflationary model using the phase-integral method. *Phys. Rev. D*, 75(6):063518, 2007.
- [3] V. M. Villalba and C. Rojas. Application of the phase-integral method in some inflationary scenarios. *J. Phys.: Conf. Ser.*, 66:012034, 2007.
- [4] Clara Rojas and Víctor M. Villalba. Computation of inflationary cosmological perturbations

- in chaotic inflationary scenarios using the phase-integral method. *Phys. Rev. D*, 79:103502, 2009.
- [5] Clara Rojas and Víctor M. Villalba. Computation of the power spectrum in chaotic $\frac{1}{4}\lambda\phi^4$ inflation. *JCAP*, 003:1, 2012.
- [6] T. Tapia, M. Z. Mughal, and C. Rojas. Semi-classical analysis of the Starobinsky inflationary model. *Phys. Dark Univ.*, 30:100650, 2020.
- [7] T. Tapia and C. Rojas. Semiclassical analysis of the tensor power spectrum in the Starobinsky inflationary model. *Int. J. Mod. Phys. D*, 30:2150040, 2021.
- [8] C. Rojas. El Método de Fase Integral aplicado a Perturbaciones Cosmológicas Inflacionarias. *FARAUTE*, 3:27, 2008.
- [9] L. Aresté Saló, D. Benisty, E. I. Guendelman, and J. d. Haro. α -attractors in quintessential inflation motivated by supergravity. *Phys. Rev. D*, 103:123535, 2021.
- [10] Y. Akrami, S. Casas, S. Deng, and V. Vardanyan. Quintessential α -attractor inflation: forecasts for Stage IV galaxy surveys. *JCAP*, 2021:006, 2021.
- [11] F. Mukhanov, H. A. Feldman, and R. H. Brandenberger. Theory of cosmological perturbations. *Phys. Rep.*, 215(5-6):203–333, 1992.
- [12] A. R. Liddle and D. H. Lyth. *Cosmological Inflation and Large-Scale Structure*. Cambridge University Press, Cambridge, 2000.
- [13] M. Berry and K. E. MounT. Semiclassical Approximations in Wave Mechanics. *Rep. Prog. Phys.*, 35:315, 1972.
- [14] S. Habib, K. Heitmann, G. Jungman, and C. Molina-París. The inflationary perturbation spectrum. *Phys. Rev. Lett.*, 89(28):281301, 2002.
- [15] M. Abramowitz and I. A. Stegun. *Handbook of Mathematical Functions*. Dover, New York, 1965.



Simulación de los Parámetros de Diseño de una Antena Parabólica para la Exploración de la Línea de Hidrógeno Neutro

Duarte G. David E.¹ 

¹Departamento de Matemáticas, Facultad de Ingeniería, Universidad de Carabobo. Naguanagua, Edo. Carabobo-Venezuela.

¹Dirección de Informática, Universidad de Carabobo, Rectorado, Edo. Carabobo-Venezuela.

*Autor de correspondencia: deduarte1@uc.edu.ve

Recibido: 31/07/2025, Revisado: 07/08/2025, Aceptado: 15/08/2025

Resumen

Este estudio evalúa una antena parabólica para recibir la línea de emisión del hidrógeno neutro a 1420 MHz, clave en cosmología y energía oscura. Se abordaron aspectos técnicos de modelado y simulación electromagnética, considerando eficiencia, ruido, interferencias y sensibilidad. Las simulaciones ayudan a optimizar el diseño, maximizando sensibilidad y reduciendo distorsiones. Futuras investigaciones incluirán geometrías innovadoras y técnicas avanzadas para mejorar la detección del hidrógeno en entornos contaminados.

Palabras Claves: Simulación; hidrogeno neutro; antena; energia oscura; exploración

Simulation of the Design Parameters of a Parabolic Antenna for Neutral Hydrogen Line Exploration

Abstract

This study evaluates a parabolic antenna designed to receive the neutral hydrogen emission line at 1420 MHz, vital in cosmology and dark energy research. It covers technical aspects of modeling and electromagnetic simulation, considering efficiency, noise, interference, and sensitivity. Simulations help optimize the design by maximizing sensitivity and reducing distortions. Future research will explore innovative geometries and advanced techniques to improve hydrogen detection in contaminated environments.

Keywords: simulation;neutral hydrogen; antenna; dark matter; exploration.

1. Introducción

La detección de la línea de emisión del hidrógeno neutro a 1420 MHz es fundamental en la radioastronomía para estudiar la distribución y dinámica de dicho elemento en galaxias y en el universo. Antes de construir y desplegar antenas parabólicas físicas, las simulaciones computacionales permiten evaluar y optimizar sus parámetros, como la geometría, la ganancia y el patrón de radiación [1].

En este trabajo, se realizará un análisis virtual de una antena parabólica diseñada específicamente para este propósito, utilizando herramientas de modelado y simulación. La simulación ayuda a identificar aspectos críticos relacionados con la eficiencia, la sensibilidad y la reducción de ruido, permitiendo mejorar el diseño y reducir costos. La evaluación previa mediante simulaciones resulta en una mejor adaptación de la antena a los requisitos de detección de señales débil, facilitando futuras investigaciones en radioastronomía y contribuyendo al avance en la exploración del cosmos a través del estudio del hidrógeno neutro.

2. Fundamentos Teóricos

2.1 La línea de 21 cm de Hidrógeno Neutro

La línea de hidrógeno se refiere a la línea espectral de radiación electromagnética que se produce por un cambio en el estado de energía de los átomos de hidrógeno neutro. Esta radiación electromagnética se encuentra en la frecuencia aproximadamente de **1420,4 MHz**, que es equivalente a una longitud de onda de aproximadamente **21 cm**:

$$\lambda = \frac{c}{v} \quad (1)$$

donde c es la velocidad de la luz y v es la frecuencia de la radiación.

Esta longitud de onda cae dentro del rango de radio en el espectro electromagnético y es frecuentemente detectada por astrónomos que estudian el universo. Aunque el mecanismo preciso mediante el cual los átomos de hidrógeno emiten radiación con esa longitud de onda resulta ser algo complejo, no es esencial en este estudio, ya que las observaciones como tal no dependen de ella [2].

2.2 Consideraciones Teóricas sobre la Geometría de Antenas Parabólicas

La forma del patrón de radiación de una antena de apertura circular puede expresarse en términos de la intensidad del campo eléctrico, donde en la distancia de campo lejano, el patrón depende solamente de los ángulos de elevación θ y azimut ϕ , ya que la distancia es constante.

La integral de difracción de Fraunhofer que relaciona el campo radiado $F(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ y la iluminación de la apertura $f(x', y')$ es:

$$F(\phi, \theta) = \frac{1}{2\pi} \iint f(\rho, \psi) e^{ik \sin \theta (\cos \phi \cos \psi + \sin \phi \sin \psi)} \rho d\rho d\psi \quad (2)$$

Para una distribución circularmente simétrica $f(\rho)$, la expresión se reduce a:

$$F(\theta) = \int_0^\infty f(\rho) J_0(k\rho \sin \theta) \rho d\rho \quad (3)$$

Donde J_0 es la función de Bessel de orden cero. El patrón de potencia normalizada $P(\theta)$ se obtiene mediante:

$$P(\theta) = \left[\frac{2J_1(kD/2 \sin \theta)}{kD/2 \sin \theta} \right]^2 \quad (4)$$

Aquí, D es el diámetro de la apertura y $k = 2\pi/\lambda$, con λ la longitud de onda. La resolución angular, o ancho de banda a media potencia, θ_{HPBW} , se estima con:

$$\theta_{HPBW} \approx \frac{q\lambda}{D} \quad (5)$$

donde q es un factor que depende del tipo de iluminación y borde de apilamiento.

Estas formulaciones permiten evaluar y diseñar antenas de apertura circular, considerando su patrón de radiación, eficiencia y resolución angular [3].

2.2.1 Matemáticas del Paraboloide

El paraboloide es una superficie cuádruple definida por la ecuación general en coordenadas Cartesianas:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 2cz \quad (6)$$

donde a, b, c son constantes reales. En caso particular de un paraboloide circular, se toma $a = b$, simplificando la expresión a:

$$\frac{x^2 + y^2}{a^2} = 2cz \quad (7)$$

Trazas del paraboloide

Las trazas principales en los planos coordinados son:

- En el plano xy ($z=0$):

$$x^2/a^2 + y^2/b^2 = R \quad (8)$$

- En el plano xz ($y=0$):

$$z = \frac{x^2}{2ca^2} \quad (9)$$

- En el plano yz ($x=0$):

$$z = \frac{y^2}{2cb^2} \quad (10)$$

Estas trazas corresponden a parábolas en los planos xz y yz .

Condición de forma del paraboloide

El perfil del paraboloide se obtiene imponiendo que el frente de onda en la apertura sea de fase uniforme, lo cual deriva en una condición que relaciona su parámetro geométrico con el foco. La distancia r desde un punto en la superficie hasta el foco $F = (f, 0, 0)$ sigue la relación:

$$r^2 = (x - f)^2 + y^2 + z^2 \quad (11) \quad [4]$$

Para que toda la superficie refleje ondas en fase, debe satisfacerse la condición de que todos los puntos de la superficie tengan la misma distancia focal f , resultando en la ecuación del paraboloide en coordenadas locales:

$$z = \frac{x^2 + y^2}{4f} \quad (12)$$

De esta forma, el perfil del reflector en coordenadas cartesianas corresponde a un paraboloide de revolución definido por:

$$z = \frac{\rho^2}{4f} \quad (13)$$

donde $\rho^2 = x^2 + y^2$.

Relación entre foco y diámetro de apertura

La relación entre la distancia focal f y el diámetro de apertura D_a puede expresarse mediante:

$$f = \frac{D_a^2}{16c} \quad (14)$$

así, si se desea controlar la calidad del enfoque, la relación f/D_a determina parámetros de directividad y eficiencia del reflector.

Ecuaciones vectoriales y ley de reflexión

Para una reflexión en la superficie $z = \frac{\rho^2}{4f}$, el vector normal \mathbf{n} en un punto (x, y, z) se obtiene como:

$$\mathbf{n} = \nabla \left(z - \frac{x^2 + y^2}{4f} \right) = \left(-\frac{x}{2f}, -\frac{y}{2f}, 1 \right) \quad (15)$$

El vector incidente \mathbf{I} y reflejado \mathbf{R} deben cumplir la ley de reflexión:

$$\mathbf{R} = \mathbf{I} - 2(\mathbf{I} \cdot \mathbf{n})\mathbf{n} \quad (16)$$

2.2.2 Caso: Paraboloide Elíptico

Cuando se trata de antenas cuya sección es un Paraboloide Elíptico, entonces debemos considerar que se trata de una superficie cuyas ecuaciones generales, sin rotación ni traslación, se expresa como:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 2cz \quad (17)$$

donde a, b, c son constantes que determinan su tamaño y forma.

Trazas del paraboloide elíptico:

- En el plano xy ($z=0$):

$$x^2/a^2 + y^2/b^2 = 0 \quad (18)$$

que corresponde únicamente al punto $(0, 0, 0)$.

- En el plano xz ($y=0$):

$$z = \frac{x^2}{2a^2c} \quad (19)$$

que es una parábola en la dirección x .

- En el plano yz ($x=0$):

$$z = \frac{y^2}{2b^2c} \quad (20)$$

otra parábola, en la dirección y .

Estas ecuaciones y sus trazas permiten diseñar y analizar el comportamiento de las antenas parabólicas elípticas, optimizando su enfoque y eficiencia para aplicaciones de comunicación y radiodifusión [5].

2.3 Criterios de Diseño de Antenas Parabólicas en Radioastronomía

Fundamentos geométricos y matemáticos del diseño y funcionamiento de las antenas parabólicas, incluyendo conceptos de ganancia, patrón de radiación, eficiencia y directividad. Se explica la relación entre diámetro, frecuencia y ganancia.

2.3.1 Ganancia

La antena parabólica se caracteriza por su alta ganancia, lo cual es esencial para detectar señales débiles. La ganancia G de una antena parabólica varía aproximadamente con el diámetro D según la relación:

$$G \approx \eta \left(\frac{\pi D}{\lambda} \right)^2 \quad (21)$$

donde η es la eficiencia de la antena y λ la longitud de onda. La precisión en el diseño y la elección de materiales son fundamentales para reducir pérdidas y maximizar la sensibilidad [6].

2.3.2 Sensibilidad

La sensibilidad de una antena parabólica es una medida importante que determina su capacidad para detectar señales extremadamente débiles provenientes de fuentes astronómicas. Esta sensibilidad depende fundamentalmente de la relación entre la superficie efectiva de la antena y la temperatura de ruido del sistema, que incluye tanto las pérdidas atmosféricas como las internas. Un aumento en la superficie efectiva, junto con la reducción de la temperatura de ruido, permite mejorar significativamente la capacidad de captar señales débiles, facilitando observaciones más precisas en radioastronomía [7].

La sensibilidad se relaciona directamente con la relación señal-ruido (SNR), donde una mayor sensibilidad implica una menor presencia de ruido comparado con la señal recibida. La temperatura de ruido del sistema, T_{sys} , combina las contribuciones del ambiente, los componentes electrónicos y la superficie reflectora, y es importante minimizarla para mejorar la detección. La relación de la sensibilidad puede expresarse mediante la ecuación:

$$\text{Sensibilidad} \propto \frac{A_{eff}}{T_{sys}} \quad (22)$$

donde A_{eff} es la superficie efectiva de la antena. Un aumento de A_{eff} o una reducción en T_{sys} incrementa la sensibilidad total, permitiendo detectar señales más débiles con mayor precisión.

Por tanto, un diseño óptimo busca maximizar la eficiencia de captura de la energía, que se evalúa mediante el coeficiente de eficiencia η , definido como la relación entre la potencia recogida efectivamente por la superficie reflector y la potencia teórica ideal basada en su área geométrica. La eficiencia incluye pérdidas en la superficie, en los alimentadores y en los materiales, siendo:

$$\eta = \frac{A_{recogida}}{A_{geometrica}} \quad (23)$$

Un alto coeficiente de eficiencia garantiza que la mayor parte de la energía incidente contribuya a la señal útil, crucial para detectar señales débiles con claridad [8].

2.3.3 Eficiencia

La eficiencia de las antenas parabólicas representa un parámetro que refleja la calidad de su desempeño y normalmente se fija en aproximadamente 60 %. Sin embargo, distintos aspectos como la eficiencia de apertura, el desbordamiento o spillover, la eficiencia en iluminación, la eficiencia óhmica, la eficiencia de polarización cruzada y la eficiencia de bloqueo, contribuyen en conjunto a definir el rendimiento global de la antena. La fórmula general que relaciona estas eficiencias es:

$$\eta = \eta_a \eta_s \eta_i \eta_R \eta_p \eta_b \quad (24)$$

Donde cada término representa:

- η_a : eficiencia de apertura
- η_s : eficiencia por desbordamiento o spillover
- η_i : eficiencia en iluminación
- η_R : eficiencia óhmica
- η_p : eficiencia de polarización cruzada
- η_b : eficiencia de bloqueo

[9]

2.4 Aplicaciones y Estudios Precedentes

El estudio titulado: **Simulation of Small Radio Telescope Antenna Parameters at Frequency of 1.42 GHz** analiza las propiedades geométricas y electromagnéticas de paraboloides en antenas de apertura. Resalta que mejorar la precisión del perfil y optimizar la geometría aumenta la sensibilidad y reduce pérdidas, facilitando la detección de señales débiles en radioastronomía. [3].

El artículo llamado **Small Radio Telescope for Observing the Neutral Hydrogen Line of the Milky Way** revisa requisitos de diseño de antenas en radioastronomía, destacando la importancia del tamaño y T_{sys} para mejorar sensibilidad y detectar señales débiles. Propone algoritmos para optimizar la geometría y materiales, elevando la eficiencia y reduciendo pérdidas en observaciones astronómicas. [10].

El estudio **Antena doble Biquad con reflector parabólico para la banda de 2.4 GHz** destaca que la precisión en la geometría del paraboloid mejora la sensibilidad y reduce pérdidas en antenas radioastronómicas. Propone un modelo matemático para optimizar superficies reflector, aumentando la eficiencia y capacidad de detección de señales débiles en sistemas grandes [11].

3. Métodos Aplicados

Para evaluar los parámetros geométricos y electromagnéticos de la antena parabólica de 6 metros de diámetro, se realizó una simulación computacional utilizando el software de código abierto GNU/Octave. La simulación tuvo como objetivo estimar la ganancia, sensibilidad y eficiencia de la antena al ser reutilizada para captar la línea de emisión del hidrógeno neutro a 1420 MHz.

La metodología comprendió los siguientes pasos:

- **Definición de parámetros físicos y de diseño:**
Se establecieron las constantes físicas relevantes, incluida la velocidad de la luz ($c = 3 \times 10^8$ m/s) y el valor de la frecuencia de interés ($f = 1,420 \times 10^9$ Hz). A partir de estos, se calculó la longitud de onda ($\lambda \approx 0,211$ m).
- **Configuración de geometría y materiales:**
Se seleccionó una geometría circular para la

parabólica, con diámetro $D = 6$ m. Se consideraron factores de eficiencia y obstáculos, con valores predeterminados del 70 % de eficiencia ($efficiency = 0,7$) y un factor de reducción por obstáculos de 0.9. Otros parámetros de diseño, como la polarización y la elevación, también fueron definidos.

- **Cálculo de la geometría y área efectiva:** Se determinaron el radio y la superficie de la parabólica (A_{geom}) y, considerando la eficiencia y obstáculos, se obtuvo el área efectiva (A_{eff}).
- **Estimación de la ganancia:** Con base en la área efectiva, se calculó la ganancia teórica utilizando la fórmula

$$G = \frac{4\pi A_{eff}}{\lambda^2}, \quad (25)$$

expresada en decibelios (dB) mediante $G_{dB} = 10\log_{10} G$.

- **Ancho de haz:** Se aproximó el ancho de haz (HPBW) mediante la relación

$$\theta_{HPBW} \approx 70 \times \frac{\lambda}{D} \quad (26)$$

en grados, para evaluar la directividad.

- **Cálculo de la sensibilidad:** Utilizando la temperatura del sistema ($T_{sys} = 50$ K) y la constante de Boltzmann ($k_B = 1,38 \times 10^{-23}$ J/K), se estimó la densidad equivalente de flujo del sistema (SEFD) y, posteriormente, el flujo mínimo detectable (S_{min}) en unidades de Jy, considerando una banda de ancho de ~ 1 MHz.
- **Análisis del patrón de radiación:** Se generó un patrón de radiación simplificado en el régimen de Fraunhofer, normalizado y expresado en dB, para visualizar la distribución angular de la potencia.

Todos los cálculos y resultados fueron almacenados en un archivo .m para su posterior análisis. La simulación permitió evaluar la capacidad de la antena para detectar señales débiles a la frecuencia de interés, contribuyendo a la evaluación de futuras mejoras en su diseño y eficiencia.

4. Resultados

Los resultados de la simulación para la antena parabólica de 6 metros de diámetro, reutilizada para captar señales a 1420 MHz, se muestran a continuación. La ganancia estimada fue de 37.00 dB, indicando una alta directividad y capacidad de concentración de la señal. El ancho de haz (HPBW) calculado fue de 2.46 grados, lo que refleja un patrón de radiación bastante estrecho, adecuado para la observación de señales débiles en radioastronomía.

La sensibilidad mínima de detección (S_{min}) se evaluó en aproximadamente $2,81 \times 10^{-3}$ Jy, demostrando la capacidad de detectar señales muy débiles en las condiciones simuladas. Otros parámetros relevantes incluyen:

- Frecuencia: 1.42 GHz
- Longitud de onda: 0.211 m
- Geometría: circular
- Diámetro/Eje mayor: 6.00 m
- Área efectiva: 17.81 m²
- Polarización: lineal
- Elevación: 45.00°
- Factor de obstáculos: 0.90
- Ancho de banda: 1.00 MHz
- Temperatura de sistema (ruido): 50.00 K

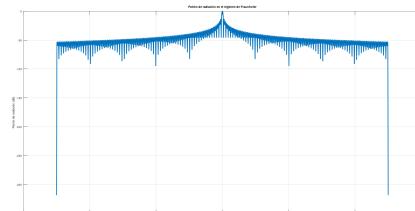


Figura 1. Patrón de radiación simulado de la antena parabólica en el régimen de Fraunhofer. La gráfica muestra la distribución angular de la potencia en dB.

Estos resultados indican que la antena, en su configuración simulada, presenta una buena ganancia (37 dB) lo cual es adecuada para la señal de Hidrógeno Neutro, al igual que un alto rendimiento para la detección de señales débiles relacionadas con la línea de emisión a 1420 MHz, lo que valida la viabilidad

de su reutilización en futuras aplicaciones en radioastronomía.

En este artículo se presenta un estudio exhaustivo sobre la simulación y evaluación de una antena parabólica específicamente diseñada para la recepción de la línea de emisión del hidrógeno neutro en la banda de 1420 MHz, conocida como la línea de 21 cm, que es fundamental en la investigación de la estructura a gran escala del universo y en la comprensión de fenómenos relacionados con la energía oscura y la expansión cósmica. Se abordarán los aspectos técnicos y metodológicos del modelado de la antena, destacando aspectos clave como su geometría, ganancia, patrón de radiación y efectividad de captación, utilizando avanzadas herramientas de simulación electromagnética. Además, se realizará un análisis detallado de factores como la eficiencia de la antena, el nivel de ruido térmico, la reducción de interferencias externas y la sensibilidad ante señales débiles, elementos necesarios para la detección precisa de señales de hidrógeno en entornos con alto nivel de contaminación electromagnética.

El objetivo principal de este estudio fue demostrar cómo las evaluaciones virtuales y simulaciones computacionales contribuyen a la optimización del diseño, permitiendo identificar configuraciones que maximicen la sensibilidad y minimicen las distorsiones antes de la construcción física del prototipo.

Las siguientes son recomendaciones específicas para futuras investigaciones, incluyendo configuraciones de geometrías innovadoras, y técnicas avanzadas de filtrado y procesamiento de señales, que incrementarían aún más la eficacia y precisión de las antenas parabólicas en estudios cosmológicos. La integración de estos avances tecnológicos potenciará los esfuerzos en la exploración del hidrógeno neutro, un componente clave en la comprensión de los fenómenos energéticos y estructurales del universo en el contexto de la cosmología moderna y la energía oscura.

5. Recomendaciones a Futuro

Teniendo en cuenta que en la realidad existen dos antenas de iguales características ubicadas en puntos geográficamente distantes, pertenecientes a los activos de la Universidad de Carabobo, se recomienda explorar la implementación de sistemas de interfero-

metría para mejorar la sensibilidad y resolución del conjunto de observación. La utilización de una red de antenas, mediante técnicas de interferometría, permitiría obtener imágenes de mayor resolución angular y ampliar el campo de visión, facilitando la detección de señales débiles provenientes de regiones distantes del universo.

Las imágenes muestran las condiciones en las que se encuentran las antenas mencionadas:



Figura 2. Antena ubicada en el Centro Comercial Prebo, coordenadas: 10.2079659,-68.0224749



Figura 3. Antena ubicada en el Centro Escorpio, coordenadas: 10.2083135,-68.0158307

Asimismo, futuras investigaciones deberían centrarse en el diseño y simulación de configuraciones de múltiples antenas interconectadas, considerando aspectos como la calibración, sincronización y procesamiento de datos en tiempo real. La simulación de esquemas de interferometría, combinada con análisis de sensibilidad y eficiencia, permitirá evaluar en qué condiciones la rentabilidad de un sistema de este tipo supera la inversión necesaria, optimizando así los recursos disponibles, con fines investigativos y académicos.

Además, sería recomendable realizar experimentos de validación con prototipos físicos, para contrastar los resultados de las simulaciones y ajustar los modelos teóricos, asegurando que las configuraciones propuestas sean viables técnica y económicamente. La colaboración con instituciones y centros de investigación especializados en radioastronomía sería fundamental para avanzar en la implementación práctica de estos sistemas, ampliando las capacidades de las futuras instalaciones para la exploración del hidrógeno neutro y otros fenómenos cosmológicos de interés.

Este enfoque colaborativo, adelantado desde las eta-

pas de simulación, potenciaría significativamente las capacidades de detección y análisis, contribuyendo a profundizar en nuestro entendimiento del universo, en línea con las estrategias internacionales en cosmología y energía oscura.

Referencias

- [1] J. Rodríguez Pérez *et al.*, “Construcción de un pequeño radiotelescopio para la detección de la línea del hidrógeno neutro,” 2024.
- [2] A. Spanakis-Misirlis, “Building your very first radio telescope,” 2019. Greece.
- [3] U. E. Jallod, H. S. Mahdi, and K. M. Abood, “Simulation of small radio telescope antenna parameters at frequency of 1.42 ghz,” *Iraqi Journal of Physics*, vol. 20, no. 1, pp. 37–47, 2022.
- [4] J. Anguera and A. Perez, “Teoría de antenas. guía de estudio,” *La Salle Universidad Ramon LLull España: Creative Commons License Deed*, 2008.
- [5] J. d. J. Muentes Acevedo, *Un curso de Cálculo Vectorial*. Universidad Tecnológica de Bolívar, 2023.
- [6] J. M. Román Beltrán, “Implementación de un prototipo de antena receptora de televisión satelital, utilizando arreglos de antenas parabólicas tipo offset para el incremento de ganancia,” B.S. thesis, Quito, 2016., 2016.
- [7] A. Raghunathan, K. Satish, A. Sathyamurthy, T. Prabu, B. Girish, K. Srivani, and S. K. Sethi, “Antennas for low-frequency radio telescope of ska,” *Journal of Astrophysics and Astronomy*, vol. 44, no. 1, p. 43, 2023.
- [8] J. Cumner, E. de Lera Acedo, D. I. de Villiers, D. Anstey, C. I. Kolitsidas, B. Gurdon, N. Fagnoni, P. Alexander, G. Bernardi, H. T. Bevins, *et al.*, “Radio antenna design for sky-averaged 21 cm cosmology experiments: The reach case,” *Journal of Astronomical Instrumentation*, vol. 11, no. 01, p. 2250001, 2022.
- [9] K. Neto, “Estudio de un prototipo de antena parabólica que funcione en banda C de microondas para la recepción de comunicaciones satelitales,” 2008.

- [10] A. Reckziegel, D. Stalder, and J. Molina, “Small radio telescope for observing the neutral hydrogen line of the milky way,” 2022.
- [11] D. R. Jiménez, D. B. Casanova, and T. C. Rodríguez, “Antena doble biquad con reflector parabólico para la banda de 2.4 ghz,” *Mare Ingenii*, vol. 4, no. 2, 2022.



Fundamentos del Modelo Cosmológico FLRW: Derivación Completa desde Relatividad General

Ramírez, Leopoldo^{1,2*}; Falcón, Nelson²

¹Coordinación de Óptica, Instituto Nacional de Astrofísica, Óptica y Electrónica (INAOE), Tonantzintla, Puebla, México.

²Departamento de Física, Facultad de Ciencias y Tecnología, Universidad de Carabobo. Naguanagua, Edo. Carabobo-Venezuela

*Autor de correspondencia: leopoldo.ramirez@inaoep.mx

Recibido: 27/07/2025, Revisado: 03/08/2025, Aceptado: 12/08/2025

Resumen

Se presenta una derivación sistemática y completa del modelo cosmológico de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker (FLRW) desde primeros principios de la relatividad general. Partiendo del principio cosmológico de homogeneidad e isotropía, se deduce la métrica FLRW, se calculan los tensores de curvatura correspondientes y se aplican las ecuaciones de campo de Einstein para obtener las ecuaciones de Friedmann que gobiernan la evolución del universo. Se incluyen las soluciones para diferentes épocas cosmológicas, el análisis de la evolución de los parámetros de densidad, y se discuten las implicaciones observacionales del modelo. Esta derivación proporciona los fundamentos teóricos completos del modelo cosmológico estándar Λ CDM, conectando la geometría diferencial con la física observable del cosmos.

Palabras Claves: Cosmología, métrica FLRW, ecuaciones de Friedmann, relatividad general, principio cosmológico.

Foundations of the FLRW Cosmological Model: Complete Derivation from General Relativity

Abstract

We present a systematic and complete derivation of the Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker (FLRW) cosmological model from first principles of general relativity. Starting from the cosmological principle of homogeneity and isotropy, we deduce the FLRW metric, calculate the corresponding curvature tensors, and apply Einstein's field equations to obtain the Friedmann equations that govern the evolution of the universe. Solutions for different cosmological epochs are included, along with analysis of the evolution of density parameters and discussion of the observational implications of the model. This derivation provides the complete theoretical foundations of the standard Λ CDM cosmological model, connecting differential geometry with the observable physics of the cosmos.

Keywords: Cosmology, FLRW metric, Friedmann equations, general relativity, cosmological principle.

1. Introducción

El modelo cosmológico de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker (FLRW) constituye el pilar fundamental de la cosmología moderna y el núcleo teórico

del paradigma cosmológico estándar. Este modelo elegante, basado en el principio cosmológico de homogeneidad e isotropía del universo a gran escala, proporciona el marco conceptual esencial para interpretar las observaciones cosmológicas más fun-

damentales, desde la expansión de Hubble hasta las sutiles anisotropías del fondo cósmico de microondas que revelan las semillas de la estructura cósmica [1].

La historia del modelo FLRW representa uno de los capítulos más extraordinarios de la física teórica del siglo XX. Alexander Friedmann, trabajando en 1922 con las ecuaciones de Einstein recién formuladas, fue el primero en descubrir que las ecuaciones de campo admitían soluciones dinámicas, revelando un universo en expansión mucho antes de que existiera evidencia observacional [2]. Georges Lemaître, el físico-sacerdote belga, profundizó estas ideas entre 1927-1931 y propuso el concepto revolucionario del “átomo primitivo.” “huevo cósmico”, anticipando lo que eventualmente se conocería como la teoría del Big Bang.

Howard Robertson (1935) y Arthur Walker (1937) completaron el marco geométrico al deducir rigurosamente todas las métricas compatibles con un universo homogéneo e isotrópico, estableciendo las bases matemáticas que conectan la geometría del espacio-tiempo con la dinámica de la materia cósmica. Juntos, estos pioneros transformaron una ecuación matemática abstracta en un relato coherente del origen, evolución y destino del cosmos.

La derivación rigurosa de las ecuaciones de Friedmann a partir de la relatividad general no es meramente un ejercicio académico; representa la cristalización de uno de los triunfos más notables del intelecto humano en su búsqueda por comprender la naturaleza fundamental del universo. En estas ecuaciones se encuentra codificada la historia completa del cosmos, desde los primeros instantes después del Big Bang hasta las predicciones sobre su destino final.

En este trabajo presentamos una derivación sistemática y pedagógicamente estructurada del modelo FLRW desde primeros principios, siguiendo la secuencia lógica natural: principio cosmológico → métrica FLRW → símbolos de Christoffel → tensores de curvatura → ecuaciones de Einstein → ecuaciones de Friedmann → soluciones cosmológicas. Esta aproximación permite comprender tanto los aspectos geométricos fundamentales como las profundas implicaciones físicas del modelo, estableciendo conexiones claras entre la matemática abstracta y la realidad observable del universo.

2. El Principio Cosmológico y sus Fundamentos Observacionales

2.1 Formulación del Principio Cosmológico

El principio cosmológico establece que el universo es estadísticamente homogéneo e isotrópico en escalas suficientemente grandes, típicamente superiores a ~ 100 Mpc. Esta suposición fundamental, que inicialmente podría parecer una simplificación drástica de la complejidad evidente del cosmos, ha encontrado una validación observacional extraordinaria a través de múltiples líneas de evidencia independientes.

La homogeneidad implica que las propiedades físicas del universo (densidad de materia, temperatura, campos electromagnéticos) son estadísticamente las mismas en todos los puntos del espacio cuando se promedian sobre volúmenes suficientemente grandes. Matemáticamente, esto se expresa como la invariancia bajo traslaciones espaciales:

$$\langle \rho(\vec{r}) \rangle = \langle \rho(\vec{r} + \vec{a}) \rangle \quad (1)$$

para cualquier vector de traslación \vec{a} y escalas mayores que la escala de homogeneidad.

La isotropía, por su parte, establece que no existe dirección privilegiada alguna en el espacio. Las propiedades físicas deben ser las mismas cuando se observan en cualquier dirección desde cualquier punto. Esta condición se expresa matemáticamente como invariancia bajo rotaciones:

$$\langle \rho(\hat{n}) \rangle = \langle \rho(R\hat{n}) \rangle \quad (2)$$

donde \hat{n} es un vector unitario direccional y R representa cualquier matriz de rotación.

2.2 Evidencia Observacional del Principio Cosmológico

La validación empírica del principio cosmológico proviene de diversas fuentes observacionales convergentes:

Fondo Cósmico de Microondas: Las observaciones del satélite Planck han revelado que la radiación del fondo cósmico de microondas presenta una isotropía extraordinaria, con anisotropías de temperatura de amplitud $\Delta T/T \sim 10^{-5}$ [3]. Esta uniformidad

representa la evidencia más directa de que el universo primitivo era extraordinariamente homogéneo e isotrópico.

Distribución de Galaxias a Gran Escala: Los análisis estadísticos de catálogos galácticos masivos como el Sloan Digital Sky Survey (SDSS) han demostrado que la función de correlación de galaxias alcanza la homogeneidad estadística en escalas superiores a los 100-150 Mpc. La transición de la estructura jerárquica (galaxias, cúmulos, supercúmulos) a la homogeneidad estadística confirma las predicciones del principio cosmológico.

Distribución de Cuásares: Los cuásares, siendo los objetos astronómicos más luminosos conocidos, permiten sondear la estructura del universo hasta corrimientos al rojo $z \sim 6$. Su distribución angular muestra isotropía estadística, confirmando que el principio cosmológico se mantiene válido incluso en el universo temprano.

2.3 Implicaciones Matemáticas de la Simetría Máxima

La combinación de homogeneidad e isotropía constituye lo que los geómetras llaman “simetría máxima” para un espacio tridimensional. Esta condición impone restricciones algebraicas extremadamente fuertes sobre la forma posible del tensor métrico, reduciendo el número de funciones independientes que describen la geometría del espacio-tiempo de las infinitas componentes generales a una sola función del tiempo: el factor de escala cósmico $a(t)$.

Esta “democratización matemática” del cosmos no es simplemente una conveniencia calculacional; refleja una profunda simplicidad subyacente en la arquitectura del universo que permite que las leyes físicas más complejas se reduzcan a un conjunto manejable de ecuaciones diferenciales.

3. Derivación Detallada de la Métrica FLRW

3.1 Construcción Geométrica desde Simetrías

Consideremos una variedad cuatro-dimensional \mathcal{M} cuyo tensor métrico $g_{\mu\nu}$ satisface las condiciones de homogeneidad e isotropía. El elemento de línea

fundamental debe admitir una foliación natural mediante hipersuperficies de tiempo constante, cada una caracterizada por simetría esférica máxima.

El punto de partida es el reconocimiento de que la métrica debe tener la forma general:

$$ds^2 = g_{00}(t)dt^2 + 2g_{0i}(t,x^j)dtdx^i + g_{ij}(t,x^k)dx^i dx^j \quad (3)$$

donde los índices latinos recorren las coordenadas espaciales $i, j, k = 1, 2, 3$. **Paso 1: Normalización Temporal**

La condición de que observadores comoviles (aquejlos en reposo respecto al flujo de Hubble) sigan líneas de tiempo coordinado requiere que el tiempo propio coincida con el tiempo coordinado para estos observadores. Esto establece:

$$g_{00} = 1 \quad (4)$$

Paso 2: Ortogonalidad Espacio-Temporal

La homogeneidad implica que no puede existir un flujo preferencial de materia en ninguna dirección espacial. Esto requiere que las hipersuperficies de tiempo constante sean ortogonales a las líneas temporales:

$$g_{0i} = 0 \quad \text{para todo } i = 1, 2, 3 \quad (5)$$

Paso 3: Factorización del Factor de Escala

Para una hipersuperficie temporal específica $t = t_0 = \text{constante}$, el elemento de línea espacial se expresa como:

$$ds_{t_0}^2 = -h_{ij}(t_0, x^k)dx^i dx^j \quad (6)$$

La condición de homogeneidad e isotropía impone que para cualquier otra hipersuperficie temporal $t = t_1$, la métrica espacial debe mantener la misma forma geométrica, difiriendo únicamente por un factor de escala temporal:

$$ds_{t_1}^2 = f(t_0, t_1)h_{ij}(t_0, x^k)dx^i dx^j \quad (7)$$

Generalizando para un tiempo arbitrario t :

$$ds_t^2 = -a^2(t)h_{ij}(x^k)dx^i dx^j \quad (8)$$

donde $a(t)$ es el factor de escala cósmico que encapsula toda la dinámica temporal de la expansión universal.

3.2 Implementación de la Simetría Esférica

Para espacios tridimensionales con simetría esférica máxima (isotropía completa alrededor de cualquier punto), la métrica espacial h_{ij} debe adoptar la forma canónica en coordenadas esféricas:

$$ds^2 = e^{2\Delta(r)} dr^2 + r^2 d\Omega^2 \quad (9)$$

donde $\Delta(r)$ es una función de la coordenada radial que determina la curvatura intrínseca del espacio, y el elemento angular se define como:

$$d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2 \quad (10)$$

3.3 Determinación del Parámetro de Curvatura

Para determinar la función $\Delta(r)$ que caracteriza la curvatura intrínseca del espacio tridimensional, utilizamos la condición fundamental de que las hipersuperficies espaciales deben poseer curvatura constante como consecuencia directa del principio cosmológico.

Para una métrica espacial tridimensional con simetría esférica, el escalar de curvatura de Ricci tridimensional se expresa como:

$${}^{(3)}R = \frac{2}{r^2} \left(1 - \frac{d}{dr}(re^{-2\Delta}) \right) \quad (11)$$

La condición de curvatura constante impone:

$${}^{(3)}R = 6k = \text{constante} \quad (12)$$

donde k es el parámetro de curvatura espacial.

Desarrollando la derivada:

$$\frac{d}{dr}(re^{-2\Delta}) = e^{-2\Delta} - 2re^{-2\Delta} \frac{d\Delta}{dr} \quad (13)$$

Sustituyendo en la ecuación de curvatura constante y resolviendo la ecuación diferencial resultante con la condición de regularidad en el origen, obtenemos:

$$e^{2\Delta(r)} = \frac{1}{1 - kr^2} \quad (14)$$

3.4 La Métrica FLRW Completa

Combinando todos los elementos desarrollados, la métrica de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker completa se expresa como:

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t) \left[\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \right] \quad (15)$$

Esta forma canónica describe completamente la geometría del espacio-tiempo cosmológico bajo las suposiciones del principio cosmológico.

3.5 Interpretación Geométrica de los Parámetros

Los diferentes valores del parámetro de curvatura k corresponden a geometrías espaciales fundamentalmente distintas:

$$k = +1 : \text{Geometría esférica (universo cerrado)} \quad (16)$$

$$k = 0 : \text{Geometría euclídea (universo plano)} \quad (17)$$

$$k = -1 : \text{Geometría hiperbólica (universo abierto)} \quad (18)$$

Para $k = +1$, las hipersuperficies espaciales son esferas tridimensionales con volumen finito. Para $k = 0$, son espacios euclidianos planos con volumen infinito. Para $k = -1$, son espacios hiperbólicos con curvatura negativa y volumen infinito.

Geometrías del Espacio-Tiempo en Cosmología FLRW

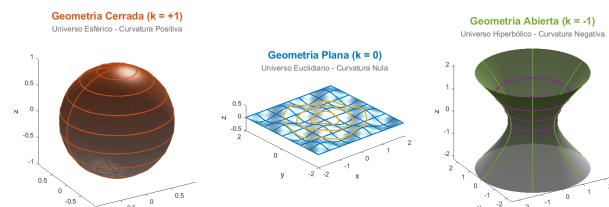


Figura 1. Geometrías del espacio-tiempo en cosmología FLRW. Se muestran las tres posibles geometrías espaciales: cerrada ($k = +1$, esférica), plana ($k = 0$, euclídea) y abierta ($k = -1$, hiperbólica). Cada geometría determina el destino final del universo.

4. Análisis Completo de los Tensores de Curvatura

4.1 Componentes del Tensor Métrico y sus Inversas

Del elemento de línea FLRW obtenemos las componentes del tensor métrico:

$$g_{00} = 1 \quad g^{00} = 1 \quad (19)$$

$$g_{11} = -\frac{a^2(t)}{1-kr^2} \quad g^{11} = -\frac{1-kr^2}{a^2(t)} \quad (20)$$

$$g_{22} = -a^2(t)r^2 \quad g^{22} = -\frac{1}{a^2(t)r^2} \quad (21)$$

$$g_{33} = -a^2(t)r^2 \sin^2 \theta \quad g^{33} = -\frac{1}{a^2(t)r^2 \sin^2 \theta} \quad (22)$$

Todas las componentes no diagonales son nulas debido a la ortogonalidad inherente del sistema de coordenadas FLRW.

4.2 Derivadas del Tensor Métrico

Para calcular los símbolos de Christoffel, necesitamos las derivadas parciales del tensor métrico. Las derivadas no nulas son:

Derivadas temporales:

$$\partial_0 g_{11} = -\frac{2a(t)\dot{a}(t)}{1-kr^2} \quad (23)$$

$$\partial_0 g_{22} = -2a(t)\dot{a}(t)r^2 \quad (24)$$

$$\partial_0 g_{33} = -2a(t)\dot{a}(t)r^2 \sin^2 \theta \quad (25)$$

Derivadas radiales:

$$\partial_1 g_{11} = -\frac{a^2(t) \cdot 2kr}{(1-kr^2)^2} \quad (26)$$

$$\partial_1 g_{22} = -2a^2(t)r \quad (27)$$

$$\partial_1 g_{33} = -2a^2(t)r \sin^2 \theta \quad (28)$$

Derivada angular:

$$\partial_2 g_{33} = -2a^2(t)r^2 \sin \theta \cos \theta \quad (29)$$

4.3 Cálculo Detallado de los Símbolos de Christoffel

Los símbolos de Christoffel se calculan mediante la fórmula fundamental:

$$\Gamma_{\mu\nu}^\lambda = \frac{1}{2} g^{\lambda\sigma} (\partial_\mu g_{\nu\sigma} + \partial_\nu g_{\mu\sigma} - \partial_\sigma g_{\mu\nu}) \quad (30)$$

Debido a las simetrías de FLRW, de los 64 símbolos posibles, solo 12 son no nulos:

Grupo 1: Símbolos Temporales (Expansión Cósmica)

$$\Gamma_{11}^0 = \frac{1}{2} g^{00} (-\partial_0 g_{11}) = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \frac{2a(t)\dot{a}(t)}{1-kr^2} = \frac{a\ddot{a}}{1-kr^2} \quad (31)$$

$$\Gamma_{22}^0 = \frac{1}{2} g^{00} (-\partial_0 g_{22}) = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 2a(t)\dot{a}(t)r^2 = a\dot{a}r^2 \quad (32)$$

$$\Gamma_{33}^0 = \frac{1}{2} g^{00} (-\partial_0 g_{33}) = a\dot{a}r^2 \sin^2 \theta \quad (33)$$

Grupo 2: Símbolos Radiales (Curvatura y Expansión)

$$\Gamma_{01}^1 = \Gamma_{10}^1 = \frac{1}{2} g^{11} (\partial_0 g_{11}) = \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{1-kr^2}{a^2(t)}\right) \cdot \left(-\frac{2a(t)\dot{a}(t)}{1-kr^2}\right) = \frac{\dot{a}}{a} \quad (34)$$

$$\Gamma_{11}^1 = \frac{1}{2} g^{11} (\partial_1 g_{11}) = \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{1-kr^2}{a^2(t)}\right) \cdot \left(-\frac{a^2(t) \cdot 2kr}{(1-kr^2)^2}\right) = \frac{kr}{1-kr^2} \quad (35)$$

$$\Gamma_{22}^1 = \frac{1}{2} g^{11} (-\partial_1 g_{22}) = -r(1-kr^2) \quad (36)$$

$$\Gamma_{33}^1 = \frac{1}{2}g^{11}(-\partial_1 g_{33}) = -r(1-kr^2)\sin^2\theta \quad (37)$$

Grupos 3 y 4: Símbolos Angulares

$$\Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^2 = \frac{1}{r} \quad (38)$$

$$\Gamma_{33}^2 = -\sin\theta\cos\theta \quad (39)$$

$$\Gamma_{13}^3 = \Gamma_{31}^3 = \frac{1}{r} \quad (40)$$

$$\Gamma_{23}^3 = \Gamma_{32}^3 = \cot\theta \quad (41)$$

$$-\frac{\partial\Gamma_{0\rho}^\rho}{\partial x^0} = -\frac{\partial}{\partial t}(\Gamma_{01}^1 + \Gamma_{02}^2 + \Gamma_{03}^3) \quad (44)$$

$$= -3\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\dot{a}}{a}\right) \quad (45)$$

$$= -3\left(\frac{\ddot{a}}{a} - \frac{\dot{a}^2}{a^2}\right) \quad (46)$$

El cuarto término contribuye:

$$-\Gamma_{0\sigma}^\rho\Gamma_{0\rho}^\sigma = -3\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 \quad (47)$$

Por tanto:

$$R_{00} = -3\left(\frac{\ddot{a}}{a} - \frac{\dot{a}^2}{a^2}\right) - 3\frac{\dot{a}^2}{a^2} = -3\frac{\ddot{a}}{a} \quad (48)$$

Componentes Espaciales:

Mediante cálculos similares, las componentes espaciales resultan:

$$R_{11} = -\frac{1}{1-kr^2}\left(\frac{\ddot{a}}{a} + 2\frac{\dot{a}^2}{a^2} + 2\frac{k}{a^2}\right) \quad (49)$$

$$R_{22} = -r^2\left(\frac{\ddot{a}}{a} + 2\frac{\dot{a}^2}{a^2} + 2\frac{k}{a^2}\right) \quad (50)$$

$$R_{33} = -r^2\sin^2\theta\left(\frac{\ddot{a}}{a} + 2\frac{\dot{a}^2}{a^2} + 2\frac{k}{a^2}\right) \quad (51)$$

4.6 Escalar de Ricci

El escalar de Ricci se calcula como la traza del tensor de Ricci:

$$R = g^{\mu\nu}R_{\mu\nu} \quad (52)$$

$$= g^{00}R_{00} + g^{11}R_{11} + g^{22}R_{22} + g^{33}R_{33} \quad (53)$$

Sustituyendo y simplificando:

$$R = -6\left(\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{k}{a^2}\right) \quad (54)$$

Componente Temporal R_{00} :

El cálculo detallado procede como:

$$R_{00} = \frac{\partial\Gamma_{00}^\rho}{\partial x^\rho} - \frac{\partial\Gamma_{0\rho}^\rho}{\partial x^0} + \Gamma_{00}^\rho\Gamma_{\rho\sigma}^\sigma - \Gamma_{0\sigma}^\rho\Gamma_{0\rho}^\sigma \quad (43)$$

Dado que $\Gamma_{00}^\rho = 0$ para todos los ρ , el primer y tercer términos se anulan. El segundo término es:

5. Aplicación de las Ecuaciones de Campo de Einstein

5.1 El Tensor de Energía-Momento para un Fluido Perfecto

En cosmología, el contenido material del universo se modela como un fluido perfecto caracterizado por una densidad de energía $\rho(t)$ y una presión $p(t)$, ambas funciones únicamente del tiempo cósmico debido a la homogeneidad.

El tensor de energía-momento para un fluido perfecto en relatividad general se expresa como:

$$T_{\mu\nu} = (\rho + p)u_\mu u_\nu + p g_{\mu\nu} \quad (55)$$

donde u_μ es la cuadrvelocidad del fluido, que satisface la condición de normalización:

$$u_\mu u^\mu = 1 \quad (56)$$

Para observadores comóviles en el sistema de coordenadas FLRW, la cuadrvelocidad tiene componentes:

$$u^\mu = (1, 0, 0, 0), \quad u_\mu = (1, 0, 0, 0) \quad (57)$$

Por tanto, las componentes del tensor de energía-momento resultan:

$$T_{00} = (\rho + p) \cdot 1 \cdot 1 + p \cdot 1 = \rho \quad (58)$$

$$T_{11} = (\rho + p) \cdot 0 \cdot 0 + p \cdot g_{11} = pg_{11} \quad (59)$$

$$T_{22} = pg_{22} \quad (60)$$

$$T_{33} = pg_{33} \quad (61)$$

con todas las componentes no diagonales nulas.

5.2 Cálculo del Tensor de Einstein

El tensor de Einstein se define como:

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R \quad (62)$$

Componente G_{00} :

$$G_{00} = R_{00} - \frac{1}{2}g_{00}R \quad (63)$$

$$= -3\frac{\ddot{a}}{a} - \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \left(-6 \left(\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{k}{a^2} \right) \right) \quad (64)$$

$$= -3\frac{\ddot{a}}{a} + 3 \left(\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{k}{a^2} \right) \quad (65)$$

$$= 3 \left(\frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{k}{a^2} \right) \quad (66)$$

Definiendo el parámetro de Hubble $H = \dot{a}/a$:

$$G_{00} = 3 \left(H^2 + \frac{k}{a^2} \right) \quad (67)$$

Componente G_{11} :

$$G_{11} = R_{11} - \frac{1}{2}g_{11}R \quad (68)$$

$$= -\frac{1}{1-kr^2} \left(\frac{\ddot{a}}{a} + 2\frac{\dot{a}^2}{a^2} + 2\frac{k}{a^2} \right) \quad (69)$$

$$- \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{a^2}{1-kr^2} \right) \cdot \left(-6 \left(\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{k}{a^2} \right) \right) \quad (70)$$

Simplificando:

$$G_{11} = -\frac{a^2}{1-kr^2} \left(2\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{k}{a^2} \right) \quad (71)$$

Componentes G_{22} y G_{33} :

Por simetría esférica:

$$G_{22} = -a^2r^2 \left(2\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{k}{a^2} \right) \quad (72)$$

$$G_{33} = -a^2r^2 \sin^2 \theta \left(2\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{k}{a^2} \right) \quad (73)$$

5.3 Derivación de las Ecuaciones de Friedmann

Las ecuaciones de campo de Einstein establecen:

$$G_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu} \quad (74)$$

donde G es la constante gravitacional de Newton.

Primera Ecuación de Friedmann (Ecuación 00):

$$G_{00} = 8\pi G T_{00} \quad (75)$$

$$3\left(H^2 + \frac{k}{a^2}\right) = 8\pi G\rho \quad (76)$$

Dividiendo por 3:

$$H^2 + \frac{k}{a^2} = \frac{8\pi G\rho}{3} \quad (77)$$

Esta es la primera ecuación de Friedmann, que relaciona la tasa de expansión del universo con su densidad de energía y curvatura espacial.

Segunda Ecuación de Friedmann (Ecuación 11):

$$G_{11} = 8\pi G T_{11} \quad (78)$$

$$-\frac{a^2}{1-k^2} \left(2\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{k}{a^2}\right) = 8\pi G p \left(-\frac{a^2}{1-k^2}\right) \quad (79)$$

Simplificando:

$$2\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{k}{a^2} = -8\pi G p \quad (80)$$

Usando la primera ecuación de Friedmann para eliminar $H^2 + k/a^2$:

$$2\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{8\pi G\rho}{3} = -8\pi G p \quad (81)$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}(\rho + 3p) \quad (82)$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}(\rho + 3p) \quad (83)$$

Esta es la segunda ecuación de Friedmann, que determina la aceleración de la expansión cósmica.

5.4 Ecuación de Continuidad

La conservación del tensor energía-momento ($\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0$) en el espacio-tiempo FLRW conduce a la ecuación de continuidad:

$$\dot{\rho} + 3H(\rho + p) = 0 \quad (84)$$

Esta ecuación expresa la conservación local de la energía en el universo en expansión.

6. Interpretación Física de las Ecuaciones de Friedmann

6.1 Significado de la Primera Ecuación

La primera ecuación de Friedmann:

$$H^2 + \frac{k}{a^2} = \frac{8\pi G\rho}{3} \quad (85)$$

tiene una interpretación física profunda. El lado izquierdo representa los términos cinemáticos:

- H^2 : El cuadrado de la tasa de expansión actual - k/a^2 : La contribución de la curvatura espacial (que decrece con la expansión)

El lado derecho es proporcional a la densidad de energía total del universo. Esta ecuación establece que la velocidad de expansión del universo está determinada completamente por su contenido energético y su geometría espacial.

6.2 Significado de la Segunda Ecuación

La segunda ecuación de Friedmann:

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}(\rho + 3p) \quad (86)$$

determina si el universo acelera o decelera su expansión. El término $(\rho + 3p)$ es la densidad de energía gravitacionalmente activa:

- Si $\rho + 3p > 0$: $\ddot{a} < 0$ (expansión desacelerada) - Si $\rho + 3p < 0$: $\ddot{a} > 0$ (expansión acelerada)

La presión contribuye tres veces más que la densidad a la gravedad en relatividad general, lo que permite la expansión acelerada con energía oscura ($p = -\rho$).

6.3 Casos Físicos Importantes

Materia No Relativista ($p \ll \rho$):

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}\rho < 0 \Rightarrow \text{Desaceleración} \quad (87)$$

Radiación ($p = \rho/3$):

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}(\rho + p) = -\frac{8\pi G}{3}\rho < 0 \Rightarrow \text{Desaceleración intensa} \quad (88)$$

Energía Oscura ($p = -\rho$):

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}(\rho - 3p) = \frac{8\pi G}{3}\rho > 0 \Rightarrow \text{Aceleración} \quad (89)$$

7.2 Épocas Cosmológicas Específicas

Era de la Materia ($\omega = 0$):

$$\rho_m(a) = \rho_{m0}a^{-3} \quad (94)$$

Para un universo plano dominado por materia, la primera ecuación de Friedmann da:

$$H^2 = \frac{8\pi G\rho_{m0}}{3}a^{-3} \quad (95)$$

7. Soluciones para Diferentes Épocas Cosmológicas

7.1 Soluciones Generales para Fluidos Barotrópicos

Para fluidos que satisfacen una ecuación de estado de la forma $p = \omega\rho$, donde ω es constante, la ecuación de continuidad se integra para dar:

$$\dot{\rho} + 3H\rho(1 + \omega) = 0 \quad (90)$$

Integrando:

$$\frac{d\rho}{\rho} = -3(1 + \omega)\frac{da}{a} \quad (91)$$

$$\ln \rho = -3(1 + \omega) \ln a + \text{const} \quad (92)$$

Por tanto:

$$\rho(a) = \rho_0 a^{-3(1+\omega)} \quad (93)$$

donde ρ_0 es la densidad actual.

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G\rho_{m0}}{3}a^{-3} \quad (96)$$

Separando variables e integrando:

$$\int a^{1/2}da = \sqrt{\frac{8\pi G\rho_{m0}}{3}} \int dt \quad (97)$$

$$\frac{2}{3}a^{3/2} = \sqrt{\frac{8\pi G\rho_{m0}}{3}}t + C \quad (98)$$

Con la condición inicial $a(0) = 0$:

$$a(t) = \left(\frac{9 \cdot 8\pi G\rho_{m0}}{4 \cdot 3}t^2\right)^{1/3} = (6\pi G\rho_{m0})^{1/3}t^{2/3} \quad (99)$$

Era de la Radiación ($\omega = 1/3$):

$$\rho_r(a) = \rho_{r0}a^{-4} \quad (100)$$

Siguiendo el mismo procedimiento:

$$a(t) = (32\pi G\rho_{r0})^{1/4}t^{1/2} \quad (101)$$

Era de la Energía Oscura ($\omega = -1$):

$$\rho_\Lambda = \text{constante} \quad (102)$$

La ecuación de Friedmann da:

$$H^2 = \frac{8\pi G \rho_\Lambda}{3} = H_\Lambda^2 = \text{constante} \quad (103)$$

Integrando:

$$a(t) = a_0 e^{H_\Lambda(t-t_0)} \quad (104)$$

Esta es la solución de de Sitter, que describe expansión exponencial.

Época	ω	$\rho(a)$	$a(t)$	Desaceleración
Inflación	-1	$\rho = \text{const}$	e^{Ht}	$q = -1$
Radiación	1/3	$\rho \propto a^{-4}$	$t^{1/2}$	$q = +1$
Materia	0	$\rho \propto a^{-3}$	$t^{2/3}$	$q = +1/2$
Energía oscura	-1	$\rho = \text{const}$	e^{Ht}	$q = -1$

Tabla 1. Soluciones de las ecuaciones de Friedmann para diferentes épocas cosmológicas en un universo plano ($k = 0$). El parámetro de desaceleración se define como $q = -\ddot{a}a/\dot{a}^2$.

7.3 El Parámetro de Densidad y la Geometría del Universo

Definimos el parámetro de densidad crítica:

$$\rho_c(t) = \frac{3H^2(t)}{8\pi G} \quad (105)$$

Esta es la densidad necesaria para un universo espacialmente plano ($k = 0$).

El parámetro de densidad adimensional se define como:

$$\Omega(t) = \frac{\rho(t)}{\rho_c(t)} \quad (106)$$

De la primera ecuación de Friedmann:

$$\Omega(t) - 1 = \frac{k}{a^2 H^2} \quad (107)$$

Esta relación establece la conexión fundamental entre la densidad del universo y su geometría espacial:

$$\Omega > 1 \Rightarrow k = +1 \quad (\text{universo cerrado}) \quad (108)$$

$$\Omega = 1 \Rightarrow k = 0 \quad (\text{universo plano}) \quad (109)$$

$$\Omega < 1 \Rightarrow k = -1 \quad (\text{universo abierto}) \quad (110)$$

8. El Modelo Cosmológico Estándar Λ CDM

8.1 Componentes del Universo Actual

Las observaciones cosmológicas contemporáneas indican que el universo actual está dominado por tres componentes principales:

1. Materia bariónica ($\Omega_b \approx 0,05$): Protones, neutrones, electrones
2. Materia oscura fría ($\Omega_{dm} \approx 0,26$): Partículas no bariónicas no relativistas
3. Energía oscura ($\Omega_\Lambda \approx 0,69$): Componente con presión negativa

La densidad total de materia es $\Omega_m = \Omega_b + \Omega_{dm} \approx 0,31$.

8.2 Evolución del Parámetro de Hubble

Para un universo conteniendo materia no relativista y energía oscura:

$$H^2(z) = H_0^2 [\Omega_{m0}(1+z)^3 + \Omega_{\Lambda0}] \quad (111)$$

donde z es el corrimiento al rojo cosmológico definido por:

$$1+z = \frac{a_0}{a(t)} \quad (112)$$

La figura (2) ilustra de manera cuantitativa el destino de universos con diferentes balances entre materia y energía oscura. Los modelos con $\Omega_\Lambda < 0$ (energía de vacío atractiva) alcanzan un tamaño máximo determinado por $a_{max} = (\Omega_m / (\Omega_m - 1))^{1/3}$ y posteriormente

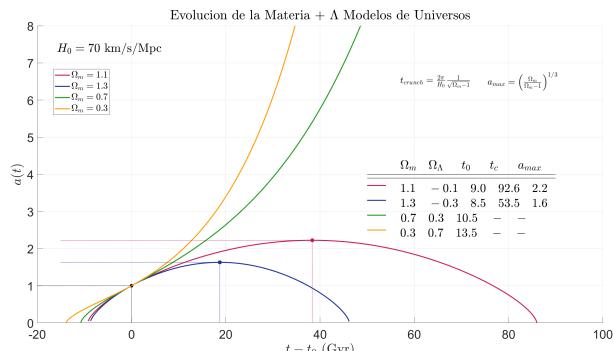


Figura 2. Evolución del factor de escala $a(t)$ para modelos cosmológicos planos con diferentes combinaciones de Ω_m y $\Omega_\Lambda = 1 - \Omega_m$. Las curvas roja ($\Omega_m = 1,1$, $\Omega_\Lambda = -0,1$) y azul ($\Omega_m = 1,3$, $\Omega_\Lambda = -0,3$) representan universos con energía oscura negativa que alcanzan un factor de escala máximo a_{max} y posteriormente colapsan en un Big Crunch en los tiempos t_{crunch} indicados. Las curvas verde ($\Omega_m = 0,7$, $\Omega_\Lambda = 0,3$) y naranja ($\Omega_m = 0,3$, $\Omega_\Lambda = 0,7$) muestran universos con energía oscura positiva que experimentan expansión acelerada eterna, siendo la curva naranja la más compatible con las observaciones actuales.

colapsan en un tiempo $t_{crunch} = (2\pi/H_0)/\sqrt{\Omega_m - 1}$. En contraste, los modelos con $\Omega_\Lambda > 0$ evolucionan asintóticamente hacia expansión exponencial tipo de Sitter. El modelo naranja, con parámetros cercanos a los observados en nuestro universo, predice una edad actual de aproximadamente 13.5 Gyr y expansión acelerada sin límite temporal, consistente con las observaciones de supernovas tipo Ia que revelaron la expansión acelerada del cosmos.

8.3 Historia Térmica y Cronología del Universo

El modelo FLRW predice una secuencia específica de épocas cosmológicas:

Era Primordial ($z > 10^{10}$) : - Nucleosíntesis primordial ($z \approx 10^9$) - Producción de elementos ligeros (H, He, Li)

Era de la Radiación ($10^4 < z < 10^{10}$) : - Universo dominado por fotones y neutrinos - Temperatura $T \propto (1+z)^{-1}$

Era de la Materia ($0,3 < z < 10^4$) : - Recombinación ($z \approx 1100$) - Formación de estructura jerárquica -

Formación de primeras estrellas y galaxias

Era de la Energía Oscura ($z < 0,3$) : - Transición a expansión acelerada - Época actual del universo

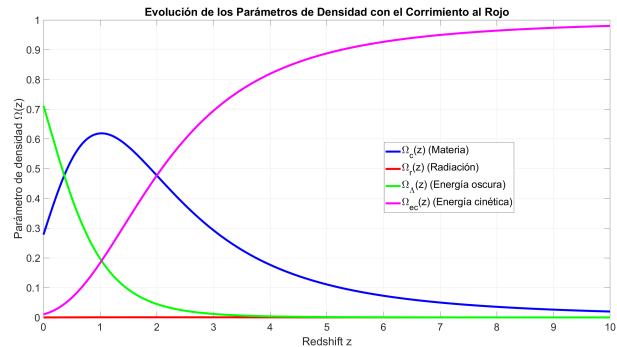


Figura 3. Evolución de los parámetros de densidad con el corrimiento al rojo. Se observa cómo la energía cinética domina en el universo muy temprano, seguida por la radiación, luego la materia, y finalmente la energía oscura en la época actual. Las transiciones entre épocas ocurren cuando las densidades se igualan.

8.4 Parámetros Cosmológicos del Modelo Estándar

Las observaciones del satélite Planck (2020) han determinado los parámetros cosmológicos con precisión extraordinaria:

$$H_0 = 67,4 \pm 0,5 \text{ km s}^{-1} \text{Mpc}^{-1} \quad (113)$$

$$\Omega_{m0} = 0,315 \pm 0,007 \quad (114)$$

$$\Omega_{\Lambda0} = 0,685 \pm 0,007 \quad (115)$$

$$\Omega_{k0} = 0,001 \pm 0,002 \quad (\text{universo plano}) \quad (116)$$

$$t_0 = 13,8 \pm 0,1 \text{ Gyr} \quad (\text{edad del universo}) \quad (117)$$

8.5 Condiciones para Expansión Acelerada

La segunda ecuación de Friedmann establece que la expansión acelerada ($\ddot{a} > 0$) requiere:

$$\rho + 3p < 0 \quad (118)$$

Para un universo con materia ($p_m = 0$) y energía oscura ($p_\Lambda = -\rho_\Lambda$):

$$\rho_m + \rho_\Lambda + 3(-\rho_\Lambda) = \rho_m - 2\rho_\Lambda < 0 \quad (119)$$

Por tanto, la aceleración requiere:

$$\rho_\Lambda > \frac{\rho_m}{2} \Rightarrow \Omega_\Lambda > \frac{\Omega_m}{2} \quad (120)$$

La Figura 3 ilustra la evolución completa de los parámetros de densidad desde el universo primitivo hasta la época actual. Se observa claramente cómo la energía cinética (línea magenta) domina en corrimientos al rojo extremadamente altos, seguida por la radiación (línea roja) que decrece como $(1+z)^4$, luego la materia (línea azul) que evoluciona como $(1+z)^3$, y finalmente la energía oscura (línea verde) que permanece constante y domina en la época actual ($z \approx 0$).

9. Verificación Observacional y Desafíos del Modelo

9.1 Éxitos del Modelo FLRW

El modelo FLRW ha demostrado una capacidad predictiva extraordinaria:

1. Ley de Hubble: Predicción teórica de la expansión cósmica antes de su descubrimiento observational
2. Nucleosíntesis Primordial: Las abundancias observadas de elementos ligeros (H, He, Li) concuerdan precisamente con las predicciones
3. Fondo Cósmico de Microondas: La temperatura de 2.7 K y el espectro de cuerpo negro fueron predichos teóricamente
4. Formación de Estructura: La evolución de perturbaciones de densidad explica la estructura jerárquica observada
5. Expansión Acelerada: El modelo acomoda naturalmente la energía oscura requerida por las observaciones de supernovas

9.2 Limitaciones y Problemas Abiertos

A pesar de sus éxitos, el modelo FLRW enfrenta desafíos significativos:

Problema de la Materia Oscura: Aunque se requiere para explicar las curvas de rotación galácticas y la formación de estructura, la naturaleza física de la materia oscura permanece desconocida.

Problema de la Energía Oscura: La densidad de energía del vacío cuántico predicha por la física de partículas excede la densidad de energía oscura observada por 120 órdenes de magnitud.

Problema de la Coincidencia: ¿Por qué las densidades de materia y energía oscura son comparables precisamente en la época actual?

Problema del Horizonte: ¿Cómo regiones causalmente desconectadas del universo primitivo alcanzaron el mismo estado térmico?

Problema de la Planitud: ¿Por qué el universo está tan cerca de la densidad crítica?

9.3 Extensiones y Modificaciones

Varias extensiones del modelo FLRW han sido propuestas:

1. Inflación Cósmica: Período de expansión exponencial en el universo muy temprano
2. Energía Oscura Dinámica: Modelos donde $\omega \neq -1$ y puede evolucionar con el tiempo
3. Gravedad Modificada: Teorías f(R), gravedad escalar-tensor, dimensiones extra
4. Cosmologías Anisotrópicas: Modelos de Bianchi para universos con anisotropía primordial

10. Conclusiones y Perspectivas Futuras

La derivación sistemática del modelo cosmológico FLRW presentada en este trabajo ilustra la elegancia conceptual y el poder predictivo de este marco teórico fundamental. Partiendo del principio cosmológico de homogeneidad e isotropía, hemos demostrado cómo la aplicación rigurosa de la relatividad general conduce naturalmente a las ecuaciones de Friedmann que gobiernan la evolución del universo.

Las ecuaciones de Friedmann representan mucho más que simples relaciones matemáticas; constituyen el código genético del cosmos, encapsulando la historia completa del universo desde el Big Bang hasta su destino final. Su extraordinario éxito en explicar observaciones que van desde la expansión de Hubble

hasta las anisotropías del fondo cósmico de microondas las convierte en uno de los logros más notables de la física teórica.

El modelo FLRW ha transformado la cosmología de una disciplina especulativa en una ciencia de precisión, donde los parámetros fundamentales del universo se conocen con precisiones de pocos por ciento. Esta precisión ha revelado también los límites del modelo, señalando hacia nueva física que debe incorporarse para una comprensión completa del cosmos.

Las observaciones futuras, incluyendo ondas gravitacionales primordiales, surveys de galaxias de siguiente generación, y estudios de alta precisión de la energía oscura, continuarán poniendo a prueba y refinando nuestra comprensión del universo basada en los fundamentos sólidos del modelo FLRW.

La belleza del modelo FLRW radica no solo en su elegancia matemática, sino en su capacidad para conectar los aspectos más abstractos de la geometría diferencial con la realidad más tangible del universo observable. En sus ecuaciones encontramos la manifestación más clara del programa einsteiniano de unificar geometría y física, revelando que el cosmos mismo es una manifestación de los principios más profundos de la relatividad general.

Agradecimientos

Los autores agradecen las discusiones fructíferas con colegas del Instituto Nacional de Astrofísica, Óptica y Electrónica (INAOE) y la Universidad de Carabobo que enriquecieron este trabajo. Se agradece el financiamiento del Ministerio del Poder Popular para la Ciencia y Tecnología a través del proyecto CFP 20250000038: Modificación a gran escala de la Gravedad: alternativa a la Materia oscura y Energía Oscura del Universo.

Referencias

- [1] Peebles, P. J. E. (1993). *Principles of Physical Cosmology*. Princeton University Press, Princeton.
- [2] Friedmann, A. (1922). Über die Krümmung des Raumes. *Zeitschrift für Physik*, **10**(1), 377-386.
- [3] Planck Collaboration (2020). Planck 2018 results. VI. Cosmological parameters. *Astronomy & Astrophysics*, **641**, A6.
- [4] Weinberg, S. (1972). *Gravitation and Cosmology: Principles and Applications of the General Theory of Relativity*. John Wiley & Sons, New York.
- [5] Carroll, S. M. (2004). *Spacetime and Geometry: An Introduction to General Relativity*. Addison Wesley, San Francisco.
- [6] Perlmutter, S., et al. (1999). Measurements of Ω and Λ from 42 High-Redshift Supernovae. *The Astrophysical Journal*, **517**(2), 565-586.
- [7] Riess, A. G., et al. (1998). Observational Evidence from Supernovae for an Accelerating Universe and a Cosmological Constant. *The Astronomical Journal*, **116**(3), 1009-1038.
- [8] Wald, R. M. (1984). *General Relativity*. University of Chicago Press, Chicago.
- [9] Misner, C. W., Thorne, K. S., & Wheeler, J. A. (1973). *Gravitation*. W. H. Freeman, San Francisco.
- [10] Lemaître, G. (1927). Un univers homogène de masse constante et de rayon croissant rendant compte de la vitesse radiale des nébuleuses extra-galactiques. *Annales de la Société Scientifique de Bruxelles*, **47**, 49-59.
- [11] Robertson, H. P. (1935). Kinematics and world structure. *Astrophysical Journal*, **82**, 284-301.
- [12] Walker, A. G. (1937). On Milne's theory of world structure. *Proceedings of the London Mathematical Society*, **42**, 90-127.
- [13] Hubble, E. (1929). A relation between distance and radial velocity among extra-galactic nebulae. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, **15**(3), 168-173.
- [14] Weinberg, S. (2008). *Cosmology*. Oxford University Press, Oxford.
- [15] Dodelson, S. (2003). *Modern Cosmology*. Academic Press, San Diego.



LA TENSIÓN DE HUBBLE COMO DESAFÍO: OPORTUNIDADES DE PRUEBAS PARA EL CAMPO YUKAWA INVERSO (IYF)

FABIÁN ROBLEDO¹

Universidad de Carabobo. Facultad de Ingeniería. Escuela de Ingeniería de Telecomunicaciones. Departamento de Señales y Sistemas¹.

frobledo@uc.edu.ve

Recibido: 27/07/2025, Revisado: 03/08/2025, Aceptado: 12/08/2025

Resumen

La tensión de Hubble, una discrepancia significativa entre las estimaciones de la constante de Hubble H_0 del Universo temprano basadas en la CMB de Planck ($67.4 \pm 0.5 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}$), del Universo local (escalera de distancias SH0ES, $73.0 \pm 1.0 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$) y otros métodos de estimación, desafía el modelo estándar Λ CDM. Este artículo analiza esta discrepancia comparando métodos como CMB, escalera de distancias, lentes gravitacionales, BAO y el modelo del Campo Yukawa Inverso (IYF), entre otros. El IYF deriva teóricamente $H_0^{\max} \approx 86.31 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$, sugiriendo una expansión más rápida sin necesidad de energía oscura. Aunque innovador, el IYF enfrenta desafíos por su discrepancia con datos modernos y la falta de validación contra la CMB. Se propone analizar el IYF con datos de Pantheon+, DESI y simulaciones con CLASS/CAMB en futuros estudios complejos, para evaluar su consistencia, incentivando nuevas perspectivas sobre la dinámica cósmica.

Palabras clave: Tensión de Hubble, constante de Hubble, gravedad modificada, Campo Yukawa Inverso, Cosmología Λ CDM.

The Hubble tension as a challenge: Opportunities for testing the Inverse Yukawa Field (IYF)

Abstract

The Hubble tension, a significant discrepancy between estimates of the Hubble constant H_0 from the early Universe based on Planck's CMB ($67.4 \pm 0.5 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}$), from the local Universe (SH0ES distance ladder, $73.0 \pm 1.0 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$), and other estimation methods, challenges the standard Λ CDM model. This paper analyzes this discrepancy by comparing methods such as CMB, distance ladder, gravitational lensing, BAO, and the Inverse Yukawa Field (IYF) model, among others. The IYF theoretically derives $H_0^{\max} \approx 86.31 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$, suggesting a faster expansion without the need for dark energy. Although innovative, the IYF faces challenges due to its discrepancy with modern data and the lack of validation against the CMB. It is proposed to analyze the IYF with data from Pantheon+, DESI, and simulations with CLASS/CAMB in future complex studies, to assess its consistency, encouraging new perspectives on cosmic dynamics.

Keywords: Hubble tension, Hubble constant, modified gravity, Inverse Yukawa field, Λ CDM cosmology.

1. Introducción

La constante de Hubble H_0 , un pilar fundamental de la cosmología, mide la velocidad de expansión actual del Universo, indicando cuán rápido se alejan las galaxias unas de otras en función de su distancia, de acuerdo a la ley de Hubble:

$$v = H_0 r \quad (1)$$

Donde v es la velocidad de recesión de una galaxia (km/s) y r es la distancia a la galaxia (Mpc). Sin embargo, las mediciones modernas de H_0 revelan una discrepancia significativa, conocida como la “tensión de Hubble”, entre los valores obtenidos del Universo temprano, basados en el análisis del fondo cósmico de microondas (CMB), y los del Universo local, derivados de observaciones de estrellas variables Cefeidas, supernovas tipo Ia y métodos alternativos de estimación, que incluyen oscilaciones acústicas de bariones (BAO), lentes gravitacionales, modelos MoND y ondas gravitacionales, entre otros.

Esta discrepancia, con una significación estadística de aproximadamente 5σ , sugiere que el modelo estándar de cosmología Λ CDM podría ser incompleto o que existen errores sistemáticos en las mediciones (Di Valentino et al., 2021).

Las mediciones del CMB, como las realizadas por la colaboración Planck, indican $H_0 = 67.4 \pm 0.5 \text{ km s}^{-1}\text{Mpc}^{-1}$, mientras que la escalera de distancias cósmicas, liderada por el equipo SH0ES, reporta $H_0 = 73.0 \pm 1.0 \text{ km s}^{-1}\text{Mpc}^{-1}$ (Planck Collaboration, 2020; Riess et al., 2022). Otros métodos, como las lentes gravitacionales y las BAO, ofrecen valores intermedios, pero no resuelven la tensión. Este desafío ha motivado propuestas de nueva física, incluyendo teorías de gravedad modificada.

Entre estas propuestas, se ha propuesto que un potencial escalar o Campo Yukawa Inverso (IYF), añadido a la gravedad

en un marco de dinámica newtoniana modificada (MoND), puede derivar la ley de Hubble y estimar teóricamente un valor máximo $H_0 \approx 86.31 \text{ km s}^{-1}\text{Mpc}^{-1}$ (Falcón, 2014, 2017). Este valor, significativamente más alto que las mediciones del CMB y la escalera de distancias, plantea un desafío para su conciliación con datos observacionales modernos, pero ofrece una perspectiva alternativa para modelar la dinámica cósmica.

Este artículo tiene dos objetivos principales: Primero, analizar la tensión de Hubble y comparar las mediciones de H_0 de diferentes métodos, incluyendo la propuesta del IYF; segundo, evaluar críticamente ese modelo, destacando sus fortalezas, limitaciones y el potencial de su formalismo para contribuir a la cosmología, sujeto a validaciones adicionales frente a observaciones cosmológicas y análisis computacional multidimensional.

2. Análisis de las estimaciones de H_0 de acuerdo a diversas técnicas

La tensión de Hubble se manifiesta en la discrepancia entre las mediciones de H_0 derivadas de diferentes enfoques. Las observaciones del CMB (Planck), basadas en las fluctuaciones de densidad del Universo temprano, específicamente las de temperatura y polarización a un desplazamiento al rojo $z \approx 1100$, proporcionan una estimación robusta de $H_0 = 67.4 \pm 0.5 \text{ km s}^{-1}\text{Mpc}^{-1}$ asumiendo el modelo Λ CDM (Planck Collaboration, 2020). Este valor es ampliamente aceptado en el contexto de medidas cosmológicas tempranas. Su principal fortaleza es su alta precisión, además es independiente de calibraciones locales, lo que elimina errores asociados a la escalera de distancias. Sin embargo, su principal debilidad es que asume la validez del modelo Λ CDM, y cualquier física desconocida en la evolución del universo desde $z \approx 1100$ hasta la actualidad podría introducir sesgos. También depende de procesos de sustracción de fuentes

en primer plano, lo que podría introducir errores sistemáticos si no se modelan correctamente.

En contraste con Planck, la escalera de distancias del equipo SH0ES (Supernovae and H₀ for the Equation of State of dark energy), un proyecto que busca medir a H_0 con precisión, utiliza cefeidas (ley de Leavitt) para calibrar el brillo de supernovas tipo Ia y medir distancias a galaxias lejanas, ofreciendo un valor de $H_0 = 73.0 \pm 1.0 \text{ km s}^{-1}\text{Mpc}^{-1}$ (Riess et al., 2022). Este valor es más rápido que el estimado por medio de la CMB, y es la razón que acuñó la frase “tensión de Hubble”. Este método es robusto debido a la alta luminosidad de las cefeidas, que permite observaciones precisas, y la calibración con datos de paralaje de Gaia y máseres en NGC 4258. Su fortaleza radica en su enfoque directo, basado en observaciones locales, y su independencia de modelos cosmológicos globales. Sin embargo, es susceptible a errores sistemáticos relacionados con el polvo galáctico, la metalicidad de las cefeidas y efectos de aglomeración estelar, que pueden afectar las estimaciones de distancia. Además, la rareza de supernovas Ia cercanas limita la muestra estadística.

En este sentido, el CCHP (Carnegie-Chicago Hubble Program), empleando un método que combina cefeidas con calibraciones de rama gigante: JAGB (J-Branch Asymptotic Giant Branch), TRGB (Tip of the Red Giant Branch), usando observaciones del Telescopio Espacial James Webb (JWST), ofrece la estimación intermedia dada por $H_0 = 69.96 \pm 1.12 \text{ km s}^{-1}\text{Mpc}^{-1}$, que reduce la tensión entre SH0ES y Planck, en una medición reciente y robusta (Freedman et al., 2024). Su fortaleza radica en la combinación de múltiples calibradores y el uso de observaciones infrarrojas de alta precisión con JWST, que reducen efectos de polvo y aglomeración, con diferentes enfoques basados en poblaciones estelares. Este valor

intermedio sugiere una posible reconciliación de la tensión de Hubble. Sin embargo, las diferencias entre los calibradores (especialmente cefeidas) y los métodos de SH0ES indican que aún existen problemas sistemáticos no resueltos.

Otros métodos, como las lentes gravitacionales fuertes de H0LiCOW (H0 Lenses in COSMOGRAIL’s Wellspring), que mide H_0 a través de retrasos temporales en imágenes de cuásares “lensados”, reportan un valor para la constante de $H_0 = 73.3 \pm 1.8 \text{ km s}^{-1}\text{Mpc}^{-1}$ (H0LiCOW Collaboration, 2020). Su punto fuerte es que es un método independiente tanto del CMB como de la escalera de distancias, basado en geometría relativista y observaciones a desplazamientos al rojo intermedios, $z < 2$. La precisión ha mejorado con técnicas ciegas de análisis y observaciones multibanda. Sin embargo, depende de modelos del perfil de masa de las galaxias elípticas que actúan como lentes, lo que introduce errores sistemáticos si el modelo no es exacto. La muestra limitada de lentes gravitacionales también aumenta la incertidumbre.

Por otra parte, la aplicación del método de las oscilaciones acústicas de bariones (BAO) propuesto por la colaboración DESI (Dark Energy Spectroscopic Instrument) estima una $H_0 = 68.4 \pm 0.9 \text{ km s}^{-1}\text{Mpc}^{-1}$, (DESI Collaboration, 2024), utilizando correlaciones de galaxias y cuásares a desplazamientos al rojo intermedios y altos. Este método es robusto debido a su gran muestra estadística (millones de galaxias) y su dependencia de una escala física bien definida (el horizonte sónico). Es compatible con el CMB, y refuerza el modelo Λ CDM. Su debilidad principal es su dependencia de un modelo cosmológico para extrapolar H_0 , lo que podría introducir sesgos si el modelo es incompleto. Además, requiere combinar datos de BAO con otras observaciones, como nucleosíntesis del Big Bang, para obtener H_0 .

En un ámbito similar, el proyecto TDCOSMO (Lentes Gravitacionales con

Datos Cinemáticos, SLACS) propone $H_0 = 67.4 \pm 4.1 \text{ km s}^{-1} \text{Mpc}^{-1}$, ofreciendo un valor más cercano a las estimaciones cosmológicas, reduciendo errores sistemáticos en el perfil de galaxias elípticas (Birrer, 2020), y refinando a H0LiCOW. Su atractivo es la mejora en el modelado de perfiles de masa, lo que lo hace más compatible con las estimaciones cosmológicas. Sin embargo, la suposición de que las lentes comparten el mismo perfil de masa puede introducir sesgos, y la incertidumbre sigue siendo mayor que la de Planck o SH0ES.

Es oportuno referir también la estimación independiente de H_0 basada en la supernova Refsdal, que posee $z = 1.49$ y es la primera observada con múltiples imágenes debido al fenómeno de lente gravitacional, empleándose el método de Cosmografía de Retraso Temporal (TDC, Time-Delay Cosmography), estimándose $H_0 = 67.4 \pm 11 \text{ km s}^{-1} \text{Mpc}^{-1}$, si bien con mayor incertidumbre debido a la complejidad del modelo del lente, y no resuelve el problema de la tensión, (Kelly et al., 2018). En el análisis de la supernova Refsdal, se utilizan retrasos temporales de los caminos distintos seguidos por la luz en imágenes múltiples de una supernova “lensada”, relativamente fáciles de medir. Su particularidad es su independencia de otros métodos y su base en un solo evento bien estudiado. Sin embargo, la gran incertidumbre y la dependencia de modelos de lentes gravitacionales limitan su precisión, y la escasez de supernovas lensadas dificulta la mejora estadística.

En relación a propuestas de tipo gravedad modificada (MoND), el modelo del Campo Yukawa Inverso (IYF) define la adición de un campo escalar adicional al potencial gravitacional newtoniano. Este campo actúa como un complemento no local a la gravitación, permitiendo modelar la dinámica de objetos astronómicos a gran escala dentro del marco cosmológico de Friedmann-Robertson-Walker (AFRW).

El IYF está caracterizado por una escala de longitud, expresando el potencial total $U(r)$ con un término perturbativo adicional altamente significativo a grandes distancias, como:

$$U(r) = -\frac{GM}{r} + U_0(r - r_0)e^{-\frac{\alpha}{r}} \quad (2)$$

Donde G es la constante gravitacional, $U_0 = U_0(M)$, es un campo escalar heurístico, siendo M la masa, r es la distancia, y r_0 y α son parámetros que modulan la interacción gravitacional a grandes escalas, ajustados de acuerdo a mediciones de objetos estelares (Falcón 2014, 2017).

En la Fig. 1 se ilustra el IYF normalizado, dependiente de la distancia, reflejando su efecto gradual en la transición desde distancias cercanas, estelares, de cúmulos y cosmológicas. describiéndose los cambios y su efecto dinámico.

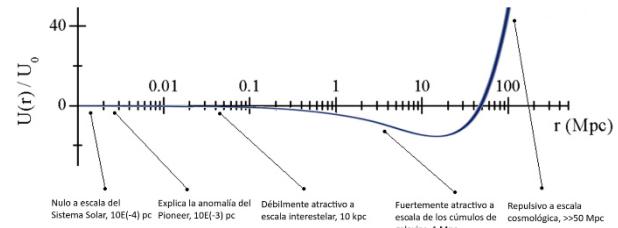


Fig. 1. Efectos del potencial IYF normalizado según la distancia. Adaptado de (Falcón, 2014).

A partir del modelo IYF, se deriva una cota superior para la constante de Hubble:

$$H_0^{\max} = \frac{4\pi G}{c} \approx 86.31 \text{ km s}^{-1} \text{Mpc}^{-1} \quad (3)$$

Siendo G es la constante gravitacional y c es la velocidad de la luz. Esta ecuación surge al modelar la dinámica de expansión cósmica para distancias mayores a 50 Mpc, donde el campo de Yukawa inverso se vuelve relevante y repulsivo. Al calibrar los parámetros del IYF con datos de 392 objetos de la NASA/IPAC Extragalactic Database (NED), se obtiene la cota indicada en la

ecuación (3). (Falcón 2017). La compatibilidad del IYF con experimentos de tipo Eötvös y curvas de rotación galácticas refuerza su potencial teórico (Falcón, 2014).

Este resultado excede significativamente las estimaciones observacionales modernas, lo que sugiere desafíos para su conciliación con datos del CMB y la escalera de distancias, pero debe tenerse presente que se trata de una cota superior teórica, si bien con el soporte experimental referido. Este enfoque busca explicar la expansión del Universo sin recurrir a la energía oscura o al modelo Λ CDM estándar.

La ventaja de este modelo radica en su intento de ofrecer una alternativa a las teorías gravitacionales convencionales, lo que podría ser relevante si las discrepancias en H_0 reflejan una física más allá de Λ CDM. Un valor tan alto como $86.31 \text{ km s}^{-1}\text{Mpc}^{-1}$ podría, en teoría, indicar una expansión más rápida en escalas cosmológicas y un Universo más joven, desafiando las estimaciones presentes. Sin embargo, este modelo tiene varias debilidades críticas. El valor de H_0 (cota superior) es significativamente más alto que cualquier medición observacional moderna, lo que lo hace inconsistente con datos de CMB, BAO, lentes gravitacionales y la escalera de distancias. La literatura no muestra aún una aceptación amplia de este modelo, y no se encuentra evidencia aún de que haya sido corroborado por observaciones independientes.

Otros modelos de gravedad modificada, como la propuesta $f(T, T)$ de teleparalelismo, calibrada con datos de la escalera de distancias de SH0ES, han abordado la tensión de Hubble ajustando parámetros con datos de supernovas tipo Ia y BAO, obteniendo $H_0 = 70.5 \pm 1.2 \text{ km s}^{-1}\text{Mpc}^{-1}$ (Duchaniya et al., 2024). Su punto robusto es que explora alternativas al modelo Λ CDM, lo que podría explicar discrepancias si la relatividad general no es suficiente. Sin embargo, depende de los datos

de SH0ES, heredando sus posibles errores sistemáticos, y el modelo $f(T, T)$ no está ampliamente aceptado, lo que limita su fortaleza frente a métodos observacionales directos.

De manera alternativa, el modelo teórico de Relatividad General con Autointeracción, GR-SI (General Relativity Self-Interaction), propone que H_0 varía con el redshift z , desde $73.06 \text{ km s}^{-1}\text{Mpc}^{-1}$ a bajos z , hasta $67.28 \text{ km s}^{-1}\text{Mpc}^{-1}$ a altos z (Sargent et al., 2024). En este contexto, se asume que el campo gravitatorio no solo es generado por la materia, sino que también puede interactuar consigo mismo, es decir, el campo gravitatorio puede influir en su propia dinámica o evolución.

Su punto fuerte es que intenta reconciliar las discrepancias entre medidas locales y cosmológicas, introduciendo un parámetro teórico adicional. Sin embargo, la falta de barras de error en los resultados y la naturaleza especulativa del modelo, que no está respaldado por observaciones directas, lo hacen menos robusto. Además, su dependencia de z complica las comparaciones directas con otras técnicas.

En el ámbito de otros métodos de estimación muy distintos, cabe referir la basada en ondas gravitacionales, como la de la colaboración LIGO/Virgo, basadas en GW170817, que estima $H_0 = 70 \pm 14 \text{ km s}^{-1}\text{Mpc}^{-1}$ (LIGO Scientific Collaboration et al., 2017). Su fortaleza radica en su novedad y su independencia de otros métodos, utilizando fusiones de estrellas de neutrones y agujeros negros como “sirenas” estándar. Esto permite medir distancias directamente, sin necesidad de una escalera. Sin embargo, su gran incertidumbre refleja la escasez de eventos detectados. La precisión mejorará con más detecciones, pero actualmente es limitada para resolver la tensión.

Resumiendo lo hasta ahora discutido, la Tabla 1 presenta una comparación de las estimaciones de H_0 , indicando sus métodos.

Método/ Modelo	H_0 $\text{km s}^{-1}\text{Mpc}^{-1}$	Referencia
CMB (Planck)	67.4 ± 0.5	Planck Collaboration (2020)
Escalera de Distancias (SH0ES)	73.0 ± 1.0	Riess et al. (2022)
CCHP con JWST	69.96 ± 1.12	CCHP (2024)
Lentes Gravitacionales (H0LiCOW)	73.3 ± 1.8	H0LiCOW Collaboration (2020)
BAO (DESI)	68.4 ± 0.9	DESI Collaboration (2024)
Lentes Gravitacionales (TDCOSMO con SLACS)	67.4 ± 4.1	TDCOSMO (2020)
Lentes gravitacionales (Supernova Refsdal)	64 ± 11	Kelly et al. (2018)
MoND Potencial Yukawa Inverso	≤ 86.31	Falcón (2017)
Teleparalelismo $f(T,T)$ con SH0ES	70.5 ± 1.2	Duchaniya et al. (2024)
GR-SI (Autointeracción)	73.06 (bajo z) 67.28 (alto z)	Sargent et al. (2024)
Ondas gravitacionales (LIGO/VIRGO)	70 ± 14	LIGO/VIRGO (2017)

Tabla 1. Comparación de estimaciones de la constante de Hubble, obtenidas por medio de diferentes técnicas.

Estos enfoques proporcionan un contexto para profundizar en la evaluación de la propuesta del IYF, destacando la importancia de pruebas observacionales rigurosas, disponibles actualmente al emplear paquetes computacionales y nuevos conjuntos de datos emergentes desde la concepción del mencionado campo escalar perturbativo, dependiente de la escala.

3. Oportunidades para el modelo IYF, mediciones y validaciones potenciales

A los fines de identificar las oportunidades de validaciones para continuar

el desarrollo del modelo teórico-heurístico-experimental del modelo IYF, se propone un marco metodológico para futuras investigaciones. Este marco incluye el ajuste de los parámetros del IYF: $U_0(M)$, r_0 y α utilizando datos de supernovas tipo Ia (compilación ampliada y mejorada de las curvas de luz Pantheon+), de BAO (DESI 2024) y de lentes gravitacionales (H0LiCOW).

También se sugiere evaluar el modelo IYF mediante simulaciones cosmológicas de CMB con códigos computacionales como CLASS (Cosmic Linear Anisotropy Solving System) o CAMB (Code for Anisotropies in the Microwave Background), para verificar su consistencia con las observaciones del CMB y la formación de estructuras a gran escala.

CLASS es un código en C que calcula espectros de potencia de anisotropías de la CMB y otras cantidades cosmológicas, basado en la teoría de perturbaciones lineales (Lesgourges et al., 2011) y CAMB es un código en Fortran y Python que calcula espectros de potencia de CMB, basado en el código CMBFAST (Lewis et al., 2000).

Los códigos CLASS y CAMB modelan el espectro de potencia del CMB a partir de parámetros cosmológicos, incluyendo H_0 . Comparando los espectros calculados con datos observacionales (Planck), se ajustan los parámetros mediante técnicas como MCMC (Monte Carlo-Markov Chain), integrando CLASS con MontePython, un código de Monte Carlo basado en Python creado para la inferencia de parámetros en cosmología, y CAMB con CosmoMC, un código de inferencia estadística también basado en Monte Carlo para estimar parámetros cosmológicos a partir de datos observacionales, lo que daría un marco referencial para análisis del IYF.

Además, el potencial IYF dado por la ecuación (2) introduce una escala de longitud que amplifica la dinámica de expansión a grandes distancias (>50 Mpc), resultando en una tasa de expansión mayor que la predicha por el modelo Λ CDM. Una fortaleza clave del

modelo propuesto IYF es su capacidad para explicar la dinámica cósmica sin recurrir a materia oscura ni energía oscura, ofreciendo una alternativa simplificada al modelo estándar.

No obstante, el modelo IYF enfrenta limitaciones significativas. Su estimación de $H_0^{\text{máx}} \approx 86.31 \text{ km/s/Mpc}$ no se alinea con las observaciones más modernas, lo que sugiere que la calibración del potencial IYF requiere ajustes para reflejar datos cosmológicos recientes, como los de Pantheon+ o DESI. Esto contrasta con otros modelos de gravedad modificada, como $f(T, T)$, que han sido validados con grandes conjuntos de datos (Duchaniya et al., 2024). También, el modelo no ha sido probado contra las fluctuaciones del CMB ni la formación de estructuras a gran escala, lo que limita su capacidad para reemplazar o complementar a ΛCDM . Por ejemplo, las observaciones del CMB requieren alta precisión en la predicción de los espectros de potencia, algo que el potencial IYF aún no aborda. Finalmente, los parámetros $U_0(M)$, r_0 y α pudieran constreñirse aún más, para facilitar su aplicación práctica y la comparación con observaciones de diferentes orígenes.

Comparado el IYF con otros enfoques, como la gravedad teleparalela $f(T, T)$ o GR-SI, el modelo IYF es susceptible de desarrollarse más en términos de validación observacional. Sin embargo, su valor elevado de H_0 estimula la investigación futura al sugerir que modificaciones gravitacionales no locales podrían influir en la dinámica cósmica de manera distinta a lo predicho por ΛCDM . Por ejemplo, el modelo GR-SI indica que H_0 varía con el redshift, una idea que podría integrarse con el potencial de Yukawa inverso para explorar el grado en que las modificaciones gravitacionales dependen de la escala cósmica (Sargent et al., 2024). En este sentido, el trabajo de Jusufi (Jusufi et al., 2024), basado precisamente en la cosmología

del IYF, y el cual ajusta parámetros con datos de supernovas, sugiere que enfoques similares al de IYF podrían ser viables con un análisis más robusto. En este sentido, Jusufi ajusta los parámetros del campo IYF para obtener resultados más cercanos a observaciones modernas, como Pantheon+ y DESI.

4. Conclusiones

La tensión de Hubble, con valores variables de H_0 plantea un desafío fundamental para la cosmología moderna, con números distintos obtenidos según técnicas de medición muy diferentes y en ciertos casos independientes, y donde las incertidumbres (bajas, medias y altas) impiden una conciliación precisa en los actuales momentos.

El modelo IYF ofrece una predicción teórica que excede las mediciones observacionales, fijando una cota superior. Este valor elevado puede originarse por la propiedad del potencial de amplificar la dinámica de expansión a grandes escalas. La simplicidad del modelo, que elimina la necesidad de recurrir a las esquivas materia oscura y energía oscura, junto con su compatibilidad con fenómenos como las curvas de rotación galácticas, representa una fortaleza significativa. Sin embargo, su discrepancia con datos modernos, la falta de pruebas contra el CMB y la estructura a gran escala, y los parámetros no constreñidos restringen su validez actual. El campo IYF, a pesar de sus limitaciones, estimula la investigación futura al sugerir que modificaciones gravitacionales no locales podrían influir en la tasa de expansión cósmica de maneras no previstas por ΛCDM .

Las pruebas propuestas, como el ajuste de parámetros con datos observacionales (Pantheon+, BAO DESI) mediante análisis estadísticos como MCMC y simulaciones cosmológicas elaboradas con los códigos CLASS y/o CAMB permitirían constreñir a $U_0(M)$, r_0 y α con mayor precisión y evaluar si el valor elevado de H_0 puede reconciliarse con observaciones, para evaluar la consistencia del

modelo con las observaciones del CMB y la estructura a gran escala.

Comparado con enfoques como $f(T, T)$ o GR-SI, que han avanzado en la validación observational, el modelo IYF tiene ahora la posibilidad de una nueva etapa de desarrollo. Este desafío es una oportunidad para que investigadores y sus estudiantes exploren nuevas ideas en cosmología, combinando enfoques teóricos con técnicas modernas, como procesos gaussianos en simulación computacional, para mejorar la precisión de las predicciones de H_0 (Yang et al., 2024).

Finalmente, pudiera ser oportuno comparar H_0 el método de análisis de la tasa de expansión del Universo conocido como Cosmic Chronometers (Cronómetros Cósmicos), que emplea galaxias masivas y pasivas como relojes cósmicos debido a su evolución estelar homogénea, con un enfoque modelo-independiente, estimándose su edad a diferentes z , lo que podría validar la aplicabilidad del modelo IYF en diferentes rangos de Redshift, midiendo una $H_0(z)$. (Favale et al., 2013).

El valor elevado de la cota superior de H_0 derivado del IYF, resalta la necesidad de explorar modelos alternativos de gravedad, incentivando a la comunidad científica a investigar si modificaciones no locales pueden ofrecer nuevas perspectivas sobre la tensión. La resolución de la tensión de Hubble, impulsada por propuestas innovadoras adecuadamente contrastadas, no solo enriquecerá nuestra comprensión del Universo, sino que también inspirará a futuras generaciones de científicos a abordar los misterios del cosmos.

5. Agradecimientos

Se agradece el financiamiento parcial a través del proyecto MinCyT CFP 20250000038: Modificación a gran escala de la Gravedad: alternativa a la Materia oscura y Energía Oscura del Universo.

6. Bibliografía

Birrer, S. et al. (2020), TDCOSMO IV: Hierarchical time-delay cosmography -- joint inference of the Hubble constant and galaxy density profiles. *A&A*, 643, A165,2020, arXiv:2007.02941.

DESI Collaboration. (2024). DESI 2024: Baryon acoustic oscillations and the Hubble constant. *The Astrophysical Journal Letters*, 978, L33. <https://doi.org/10.3847/2041-8213/ada37f>

Di Valentino, E., et al. (2021). In the realm of the Hubble tension—a review of solutions. *Classical and Quantum Gravity*, 38, 153001. <https://doi.org/10.1088/1361-6382/ac086d>

Duchaniya, L. K., Lohakare, S. V., & Mishra, B. (2024). Cosmological models in $f(T, T)$ gravity and the dynamical system analysis. *Physics of the Dark Universe*, 43, 101402. <https://doi.org/10.1016/j.dark.2023.101402>

Falcón, N. (2014). Modified gravity and the Hubble law. *International Journal of Astronomy and Astrophysics*, 4, 551–559. <https://doi.org/10.4236/ijaa.2014.44051>

Falcón, N. (2014). Theoretical Deduction of the Hubble Law Beginning with a MoND Theory in Context of the Λ FRW-Cosmology. *International Journal of Astronomy and Astrophysics*, 4(4), 607-615. doi:10.4236/ijaa.2014.44055

Falcón, N. (2017). A theoretical deduction from the Hubble law based on a modified Newtonian dynamics with field of Yukawa inverse. *International Journal of Astronomy and Astrophysics*, 7, 83–92. <https://doi.org/10.4236/ijaa.2017.72007>

Favale, A., et al. (2023), Cosmic chronometers to calibrate the ladders and measure the curvature of the Universe. A model-

independent study. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 518(3) 4567–4580. arXiv:2301.09591, <https://doi.org/10.1093/mnras/stad1621>

H0LiCOW Collaboration. (2020). H0LiCOW XIII. A 2.4% measurement of $\langle H_0 \rangle$ from lensed quasars: 5.3 σ tension between early and late universe probes. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 498, 1420–1439. <https://doi.org/10.1093/mnras/staa2066>

Huang, et al. (2020). Hubble Space Telescope Observations of Mira Variables in the Type Ia Supernova Host NGC 1559: An Alternative Candle to Measure the Hubble Constant. *ApJ*, 889, 5, 2020. arXiv:1908.10883. <https://doi.org/10.48550/arXiv.1908.10883>

Jusufi, K., et al. (2024). Addressing the Hubble tension in Yukawa cosmology? *arXiv preprint*, arXiv:2403.12345. <https://arxiv.org/abs/2403.12345>

Kelly, P. L. et al. (2018). Constraints on the Hubble constant from Supernova Refsdal's reappearance. *Science*, 380, 6649, 2023, arXiv:1801.02745, arXiv:2305.06367v2 <https://doi.org/10.48550/arXiv.2305.06367>

Lesgourgues, J., et al. (2011). The Cosmic Linear Anisotropy Solving System (CLASS) II: Approximation schemes. *JCAP*, 2011(07), 034.

Lewis, A., et al. (2000). Efficient Computation of CMB anisotropies in closed FRW models. *ApJ*, 538, 473.

LIGO Scientific Collaboration, Virgo Collaboration, et al. (2017). A gravitational-wave standard siren measurement of the Hubble constant. *Nature*, 551, 85–88. doi: 10.1038/nature24471.

Planck Collaboration. (2020). Planck 2018

results. VI. Cosmological parameters. *Astronomy & Astrophysics*, 641, A6. <https://doi.org/10.1051/0004-6361/201833910>

Riess, A. G., et al. (2022). A comprehensive measurement of the local Hubble constant with 1% precision from HST and JWST. *The Astrophysical Journal Letters*, 934, L7. <https://doi.org/10.3847/2041-8213/ac5c5b>

Sargent, C., et al. (2024). Hubble tension and gravitational self-interaction. *Physica Scripta*, 99, 075043. <https://doi.org/10.1088/1402-4896/ad570f>

Yang, W., et al. (2024). In search of an interaction in the dark sector through Gaussian process and ANN approaches. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 528, 1234–1245. <https://doi.org/10.1093/mnras/stae123>

GUIA PARA LOS AUTORES

La Revista FARAUTE UC de la Facultad de Ciencias y Tecnología (FACYT) considerará, para su difusión, trabajos inéditos relacionados con las ramas de las Ciencias Básicas y la Tecnología, tanto de carácter técnico como de carácter divulgativo, siempre que el mismo sea el producto de un proceso de investigación objetivo y comprobable. Se aceptan artículos o notas en español e inglés.

Tipos de Trabajos

- Artículos científicos con un máximo de doce (12) páginas.
- Artículos divulgativos de investigación con un máximo de doce (12) páginas.
- Notas Técnicas con un máximo de cinco (5) páginas.
- Artículos de Actualización Científica que resuman el “Estado del Arte” de un área específica de las ciencias y tecnología con un máximo de doce (12) páginas.
- Artículos de invitados especiales con un máximo de cinco (5) páginas.
- Cartas al Editor, que consistan en observaciones técnicas de artículos publicados en la revista.

Requerimientos de formato para manuscritos enviados para su evaluación:

El formato del manuscrito debe seguir las siguientes recomendaciones:

- Tipo de letra: *Times New Roman* 12 ptos, a excepción del título en español.
- Texto del artículo a doble columna a excepción del título, la información del(os) autor(es) y el resumen.
- Espaciado: simple
- Tamaño de papel: Carta con márgenes justificado de 2,5 cm por cada lado.
- Los artículos deben constar de las siguientes secciones:
 - **Título:** en español e inglés. El título en español debe ser en letra Times New Roman, tamaño 14, en mayúsculas, negritas, centrado. Dejando una línea de por medio, en letra tamaño 12, el título en inglés, negrita, en mayúsculas únicamente las iniciales de los nombres, pronombres, verbos, adjetivos y adverbios.

Información del(os) autor(es). Colocar el primer nombre completo, inicial del segundo, primer apellido completo e inicial del segundo, en mayúscula y centrado. En la siguiente línea colocar la dirección física de los autores y en la última línea la dirección de correo electrónico. Emplear superíndices numéricos para la identificación de los autores y sus respectivas direcciones. En caso de que varios autores posean correos electrónicos bajo un mismo dominio, utilizar el formato siguiente {login1, login2, ... loginn}@dominio. Ejemplo:

{sardito, hvasquez, jrodrigu}@uc.edu.ve

- **Resumen:** máximo de 150 palabras a una sola columna justificada, sin incluir referencias bibliográficas. Luego colocar entre tres (03) y cinco (05) palabras clave en orden alfabético (el resumen y las palabras clave deben incluirse en idioma inglés).
- **Introducción.**
- **Cuerpo del artículo:** Materiales y métodos (en caso de ser necesario), resultados y discusión.

- **Conclusiones** (opcional).
- **Agradecimientos** (opcional).
- **Bibliografía.** Las referencias bibliográficas serán listadas en orden alfabético, incluirán primer apellido, inicial del nombre y en caso de ser varios autores, inicial del nombre seguido del primer apellido, año de publicación, título de la obra o del trabajo citado (se debe colocar en mayúscula solo la letra inicial de la primera palabra). Ejemplos según sea el caso:
 - Publicaciones periódicas: Autor. Año. Titulo del artículo. *Nombre de la Revista abreviada*. Volumen (Número): páginas.

Baum, L. E., T. Petrie, G. Soules & N. Weiss. (1970). A maximization technique occurring in the statistical analysis of a probabilistic functions of Markov chains. *Ann. Math. Stat.* 41(1):164–171.

- Libros: Autor. Año. *Titulo del libro*. Casa editora. Ciudad.

Bernardo, J. & A. Smith. (1994). *Bayesian theory*. Wiley. New York.

- Libros colegiados: Autor. Año. Titulo del capítulo. In: *Titulo del libro* (editores), paginas. Casa editora. Ciudad.

Steyermark, J. (1994). Aspectos morfológicos del Parque Nacional Morrocoy. In: Flora del Parque Nacional Morrocoy (B. Manara, ed.), 66-103. Fundación Instituto Botánico de Venezuela y Agencia Española de Cooperación Internacional. Caracas, Venezuela.

- Proceddings o memorias: Autor. Año. Nombre del Evento. Institución donde se realizó el mismo. Ciudad. País. Páginas.

Toyota, M. (1999). Caracterização química e citológica como subsídios à taxonomia de grupos-problema. VIII Reunião brasileira de fitoquímica. Sociedade brasileira de fitoquímica. Pernambuco. Brasil. 41.

- Tesis o trabajos de ascenso: Autor. Año. Titulo. Tipo de Trabajo. Facultad. Universidad. Ciudad, País.

Vera, B. (2000). Estudio fitoflorístico de la región oriental del litoral central de Venezuela, Edo. Vargas, Venezuela. Trabajo de ascenso a la categoría de Asistente. Facultad de Ciencias. Universidad Central de Venezuela. Caracas, Venezuela.

- Documento en electrónico: citar según las indicaciones del documento electrónico o seguir los formatos indicados en la norma ISO 690-2, disponible en la dirección:

http://www.ugr.es/~pwlac/G00_Referencias_electronicas.html

- Las referencias deben ser citadas en el artículo, de acuerdo a:
 - **Un solo autor:** se indica el primer apellido del autor seguido por el año de la publicación, todo esto entre paréntesis.

..... (Vargas, 1999)....

- **Dos autores:** se coloca el primer apellido del primer autor, el símbolo & y el primer apellido del segundo autor, seguidamente la fecha de publicación; todo esto entre paréntesis.

..... (Vargas & Rodríguez, 2002).....

- **Más de dos autores:** se coloca el primer apellido del primer autor, luego se coloca “*et al.*”, seguidamente la fecha de publicación; todo esto entre paréntesis.

..... (Vega *et al.*, 2005)

- **Más de dos referencias:** se coloca cada referencia de acuerdo a lo anterior, separados por puntos y comas (;). Se deben ordenar primariamente en orden cronológico y en segundo lugar alfabéticamente, todo esto entre paréntesis. el primer apellido del primer autor, luego se coloca “*et al.*”, seguidamente la fecha de publicación; todo esto entre paréntesis.

..... (Vargas, 1999; Vargas & Rodríguez, 2002; Graterol *et al.*, 2005; Vega *et al.*, 2005)

- Los encabezados de cada sección se escribirán en negritas y deben estar enumerados.
- Las figuras, fotografías, diagramas y gráficos deben denominarse como “Fig.”. Las tablas deben denominarse “Tabla”. Las tablas y figuras deben enumerarse correlativamente y estar citadas en el texto en el mismo formato anterior. Se presentarán insertas en el cuerpo del artículo y además se debe entregar una copia en versión digital de las mismas. Las figuras deben estar en blanco y negro o escala de grises en formato JPEG o TIFF a una resolución de 300 dpi. Para la entrega de la versión final se requieren las imágenes en archivos a parte.
- Unidades de medida. Los valores se deben expresar en el sistema métrico decimal de acuerdo con el Sistema Internacional de Unidades (SI). La mayoría de los símbolos se escriben abreviados, en minúscula, salvo algunas excepciones como aquellos derivados de nombres propios, no llevan punto y se separan del valor numérico por un espacio. Ejemplos: cm (centímetro), h (hora), °C (Celsius).
- Las ecuaciones deben identificarse con un número entre paréntesis correspondiente a la enumeración correlativa de las ecuaciones. Estas deben estar en cursiva. Ejemplo:

$$I_F = I_B = - I_C = A^2 I_{A1} + A I_{A2} + I_{A0} = \frac{- J \sqrt{3} E_A}{Z_1 + Z_2} \quad (1)$$

Las ecuaciones tienen que estar citadas en el manuscrito y deben identificarse como “Ec”.

- Los algoritmos o códigos fuentes de programas se deben identificar con la palabra “Algoritmo” seguida de un número correspondiente a la numeración correlativa de los algoritmos y un título que lo identifique. Estos deben respetar la identación y en letra courier tamaño 9. Ejemplo:

```
(1) void * sum(void * arg) {
(2) int * p; p = (int *)arg;
(3) pthread_mutex_lock(&m);
(4) s = s + *p;
(5) pthread_mutex_unlock(&m);
(6) }
```

Algoritmo 1. Hilo que efectúa la suma.

- Nombres y coordenadas geográficas. Los nombres geográficos sólo se escriben en mayúscula cuando forman parte de un nombre propio, por ejemplo: Península de Paraguana, Río Cabriales. Las coordenadas deben citarse utilizando las siglas correspondientes: Lat. (latitud), Long. (longitud), N (norte), S (sur), E (este), O (oeste), ejemplo: 10°31'01" Lat. N., 67°06'10" Long. O.

Envío de manuscritos para arbitraje:

Los *manuscritos iniciales* deben ser enviados en formato electrónico PDF o MSWord (al menos en la versión XP) a la siguiente dirección:

farautecienciauc@gmail.com

Hojas de estilo para artículos aceptados para su publicación:

El arte final de los artículos aceptados para su publicación debe respetar todos los requerimientos anteriores. Para ello se ponen a disposición de los autores las hojas de estilo correspondiente a cada formato (LATEX o Microsoft WORD), las cuales pueden ser obtenidas electrónicamente en la siguiente dirección electrónica:

<http://www.facyt.uc.edu.ve/investigacion/faraute>

Hoja de Estilos para LATEX:

[CyT_UC.sty](#)
[CyT_UC.tex](#)

Hoja de Estilos para WORD:

[CyT_UC.doc](#)

Notas finales:

Los artículos serán sometidos a arbitraje en extenso previa publicación. Los artículos arbitrados sujetos a modificación, deben ser corregidos en un plazo de tres semanas para su incorporación en el número correspondiente. En caso de no ser entregados, permanecerán por un período de espera de seis meses como máximo, para la entrega de la versión corregida. Una vez vencido este plazo el trabajo será arbitrado nuevamente previa solicitud por parte del autor.

La Revista Faraute de Ciencias y Tecnología es el órgano de difusión y divulgación de las actividades científicas de la Facultad de Ciencias y Tecnología de la Universidad de Carabobo, la cual es de Acceso Abierto No comercial (AANC).

GUIDE FOR AUTHORS

“Faraute” Journal of the Experimental Faculty of Science and Technology (Facyt) publishes original papers of interest to a broad group of readers from the basic Science and Technology community.

A submission to Faraute UC must be the original contribution of the author(s) and must not be published elsewhere or be under consideration for another publication in its submitted or a substantially similar form in any language. Contributions in Spanish and English in the following categories may be submitted.

Types of contributions

- Research articles with original results in the basic science and technology. Maximum twelve (12) pages.
- Technical notes. Maximum five (5) pages.
- Reviews. Critical surveys of specific field of science and technology in which existing published information is analyzed and discussed. Maximum twenty (20) pages.
- Articles of special guest. Maximum five (5) pages.
- Letters to the editor regarding technical observations of articles published in the journal.

Preparation of text:

The format of the manuscript must follow the following recommendations:

- Type of letter: *Times New Roman* size 12, except the title in Spanish.
- Text of the article in double columns, except the title, the information of the author(s) and the abstract..
- Spacing: single,
- Size of paper: letter, with justified margins of 2.5 cm on either space.
- The article must have the following sections:
 - **Title:** In Spanish and English. The title in Spanish must be in Times New Roman, size 14, in capital letters, bold, centered, leaving one line size 12 between. The title in English will be bold; capital letters are to be used only for the initial names, pronouns, verbs, adjectives and adverbs. Cursive words are allowed, only when referring to the scientific name of a species. For example:

DETERMINACIÓN Y CARACTERIZACIÓN PARCIAL DE PROTEASAS OBTENIDAS DEL FRUTO DE *Thevetia ahouai* (L.) A.DC.

- **Information of the author(s).** Place the first name, initial of the second one, last name and initial of the second one, in capital letters and centered. In the following line place the physical address of the authors, and in the last line the electronic address. Use numeric super indexes to identify authors and their addresses. In case of various authors having electronic addresses under the same domain, use the following format: {login1, login2, ... loginn} @domain. For example:

{sardito, hvasquez, jrodrigu}@uc.edu.ve

- **Abstract:** The abstract must contain a maximum of 150 words in one column, justified, without including bibliographic references. Afterwards, add between three (3) and five (5) keywords in alphabetical order.
- **Introduction:** This section should provide a comprehensible statement of the problem, a relevant literature of the subject, and the proposed approach or solution.
- **Body of the article:** The paper may include a section of material and methods, if necessary, and must contain both a result and a discussion section.
- **Conclusions:** A conclusions section is optional.
- **Acknowledgments:** This section is also optional.
- **Bibliography:** Bibliographical references will be listed in alphabetical order. They will include, for the first author, first surname and initial of the first name. For the rest of the authors, if there are any, initial of first name followed by first surname. After the authors names it follows the year of publication in parenthesis. The next information should be the title of the work referenced. Only the first letter of the first word should be in capital letters. Examples of possible referenced works are given in the following paragraphs:
 - Periodic publications: Author or authors. Year. Title of the article. Abreviated name of the publication (in italics). Volume (Number): pages.
 Baum, L. E., T. Petrie, G. Soules & N. Weiss. (1970). A maximization tecniqe occurringin the statistical analysis of a probabilistic functions of Markov chains. *Ann. Math. Stat.* 41(1):164–171.
 - Books: Author or authors. Year. Title of book. Publishers. City.
 Bernardo, J. & A. Smith. (1994). *Bayesian theory*. Wiley. New York.
 - Collaborative books: Author or authors. Year. Title of chapter. In: Title of book (editors), pages. Publishers. City.
 Steyermark, J. (1994). Aspectos morfológicos del Parque Nacional Morrocoy. In: Flora del Parque Nacional Morrocoy (B. Manara, ed.), 66-103. Fundación Instituto Botánico de Venezuela y Agencia Española de Cooperación Internacional. Caracas, Venezuela.
 - Proceedings or memoirs: Author or authors. Year. Name of presentation. Name of the Event. Institution where the event took place. City. Country. Pages.
 Toyota, M. (1999). Caracterização química e citológica como subsídios à taxonomia de grupos-problema. VIII Reunião brasileira de fisiologia. Sociedade brasileira de fisiologia. Pernambuco. Brasil. 41.
 - Thesis or promotion research projects: Author or authors. Year. Title. Type of work. Faculty. University. City, Country.
 Vera, B. (2000). Estudio fícolflorístico de la región oriental del litoral central de Venezuela, Edo. Vargas, Venezuela. Trabajo de ascenso a la categoría de Asistente. Facultad de Ciencias. Universidad Central de Venezuela. Caracas, Venezuela.

- Document in electronic format: Cite according to indications of the electronic document or follow the formats indicated the norm ISO 690-2, available in the address:

http://www.ugr.es/~pwlac/G00_Referencias_electronicas.html

- The references must be cited in the article according to:

- **One author:** Indicate the first surname of the author followed by the year of publication, all in parenthesis.

..... (Vargas, 1999).....

- **Two authors:** indicate the first surname of the first author, the symbol & and the surname of the second author, followed by the year of publication, all in parenthesis.

..... (Vargas & Rodríguez, 2002).....

- **More than two authors:** Indicate the last name of the first author, the add “*et al.*”, followed by the year of publication, all in parenthesis.

..... (Vega *et al.*, 2005)

- **More than two references:** Write each reference according to the previous information, separated by semi-colons (;). They should be sorted chronologically firstly and them alphabetically, all in parenthesis.

..... (Vargas, 1999; Vargas & Rodríguez, 2002; Graterol *et al.*, 2005; Vega *et al.*, 2005)

- The headings of each section must be written in bold, and should be numbered.
- Figures, photographs and graphics should be identified “Fig.”. Tables should be called “Table”. These words should be placed under the figure or table aligned to the left. There should follow a description, in Times New Roman letters, size 10. The tables and figures must be numbered correlative and be cited in the text in the same previous format.

- Figures will be inserted in the body of the article, and a digital copy should be handed in. They should be in JPEG or TIFF, a resolution of 300 dpi, and the file should be named as “Fig”, followed by the corresponding number of the article.
- Units of measure. The values must be expressed in the decimal metric system, according to the Système International d’Unités (SI). Most symbols are abbreviated, in common letters, except in some cases, as those derived from proper names, they do not take a period, and are separated from the numeric value by a space. Examples: cm (centimeter), h (hour), °C (Celsius).
- Equations must be identified with a number in parenthesis corresponding to the correlative numbers of the equation. These must be in cursive. For example:

$$I_F = I_E = -I_C = A^2 I_{A1} + AI_{A2} + I_{A0} = \frac{-J\sqrt{3}E_A}{Z_1 + Z_2} \quad (1)$$

To refer these equation in the manuscript should be identified as “Eq”.

- Algorithms or codes of program sources must be identified with the word “Algorithms”, followed by a number corresponding to the correlative number of the algorithms and the title identifies it, all centered in a placed I the lower part. Each line must be numbered as show below. These must respect indentation and be in “Courier” size 9. Example:

```
(1) void * sum(void * arg) {
(2) int * p; p = (int *)arg;
(3) pthread_mutex_lock(&m);
(4) s = s + *p;
(5) pthread_mutex_unlock(&m);
(6) }
```

Algorithm 1. Hilo que efectúa la suma.

- Names and geographical coordinates. Geographical names are only written in capital letters when they are part of a proper name, for example: Península de Paraguana, Río Cabriales. Coordinates must be cited using the corresponding abbreviation: Lat. (latitude), Long. (length), N (north), S (south), E (east), W (west), for example: 10°31'01" Lat. N., 67°06'10" Long. O.

Sending manuscripts for arbitration:

The initial manuscripts must be sent in PDF or MSW electronic format to the following address:

farautecienciauc@gmail.com

Style pages for articles accepted for publication:

The final art of the article accepted for publication must respect all the previous requirements. Therefore, the authors are offered the style pages that correspond to each format (LATEX or Microsoft WORD), which can be obtained at the following electronic address: <http://www.facyt.uc.edu.ve/investigacion/faraute>

For LATEX style pages:

[CyT UC.sty](#)
[CyT UC.tex](#)

For WORD style pages:

[CyT UC.doc](#)

Final notes:

The articles will undergo complete arbitration prior to publication. The arbitrated articles subjected to modifications, must be corrected in three weeks to be included in the corresponding number. In case they are not turned in they will be held for a maximum of six months, awaiting for the corrected version. Once that period expires the article will be subjected to arbitration again upon the author's request.

Faraute de Ciencias y Tecnología is the organ of diffusion and dissemination of the scientific activities of the Facultad de Ciencias y Tecnología of the Universidad de Carabobo, which is Non-commercial Open Access (AANC).



UNIVERSIDAD DE CARABOBO
FACULTAD EXPERIMENTAL DE CIENCIAS Y TECNOLOGIA

AUTORIDADES UNIVERSITARIAS

Jessy Divo de Romero
Rectora

Ulises Rojas
Vicerrector Académico

José A. Ferreria
Vicerrector Administrativo

Pablo Aure
Secretario

**AUTORIDADES DE LA FACULTAD
EXPERIMENTAL DE CIENCIAS Y TECNOLOGÍA**

Profesor José Gregorio Marcano
Decano

Profesora Elizabeth Perozo
Directora Departamento de Química

Profesor José Henríquez
Director Departamento de Computación

Profesor Richard Barrios
Director Departamento de Física

Profesor Luis Rodríguez
Director Departamento de Matemática

Profesora Carmen Rodríguez
Directora Departamento de Biología

Profesora Rosa de Muñoz
Coordinadora de la unidad de formación
Socio-Humanística

Profesor Reimer Romero
Director de Investigación

Profesor Juan Carlos Pereyra
Director de Postgrado

Profesor Orestes Montilla
Director de Asuntos Estudiantiles

Profesora Ysmel la Rosa
Directora de extensión

Lic. José Antonio Ramírez
Director de asuntos profesionales

Profesora Rosa Bravo
Directora de currículum