HOMOTECIA

CÁTEDRA DE CÁLCULO - DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA y FÍSICA – FACULTAD DE CIENCIAS DE LA EDUCACIÓN – UNIVERSIDAD DE CARABOBO

 Depósito Legal: PPi2012024055 – I. S. S. N.: 2244-7385

E- mail: homotecia2002@gmail.com - Nº 1 – AÑO 17 Valencia, Lunes 7 de Enero de 2019

HOMOTECIA

DEPARTAMENTO DE MATEMATICA Y FISICA - FACE - UC

ADVENTUS NOVUS CALCULUS

CÁTEDRA DE CÁLCULO

Índice

Para el acceso a todos los números publicados de la Revista HOMOTECIA, conectarse al enlace:
http:/servicio.bc.uc.edu.ve/homotecia/index.htm > Sección: MULTIDISCIPLINARIAS

Revista HOMOTECIA
© Rafael Ascanio H. – 2009
Hecho el Depósito de Ley.
Depósito Legal:
PPi2012024055
I. S. S. N.: 2244-7385

e-mail:
homotecia2002@gmail.com

Publicación Mensual
Revista de acceso libre

Publicada por:

CÁTEDRA DE CÁLCULO
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA Y FÍSICA
FACULTAD DE CIENCIAS DE LA EDUCACIÓN
UNIVERSIDAD DE CARABOBO

Nº 1 - AÑO 17 - Valencia, Lunes 7 de Enero de 2019

EDITORIAL

Cortésmente les deseamos un feliz año nuevo y les damos la bienvenida al año 2019. Siempre asumimos con posición positiva nuestro trabajo por un buen presente y un mejor futuro, esperando que cada año nos traiga bondades y mejoras a nuestra patria y a nuestras vidas. Nos toca conducir la Revista HOMOTECIA por su décimo séptimo año de publicación, preocupados siempre en obtener información útil, interesante y entretenida de las fuentes a las cuales acostumbramos recurrir y consultar; por esto, además de esforzarnos en este propósito, nos es fundamental seguir recibiendo los aportes de quienes ya para estos momentos son grandes amigos colaboradores. Es por esta razón que queremos incluir como parte de este editorial, un mensaje que nos llegó vía Facebook, enviado por el apreciado amigo Jeymson Jovier Rojas Rivero el 12 de noviembre de 2017. El mensaje consiste en el texto de la homilía leída por el Papa Francisco el 25 de agosto de 2015 en un momento de los usuales retiros. Jeymson incluye el siguiente comentario: *"Independientemente de la religión, vea que hermoso lo que el Papa Francisco escribió sobre la familia. Un espíritu evangelizador, sin duda"* y agregamos: muy pertinente en estos tiempos. A continuación el mensaje:

FAMILIA, LUGAR DE PERDÓN...

"No hay familia perfecta. No tenemos padres perfectos, no somos perfectos, no nos casamos con una persona perfecta ni tenemos hijos perfectos. Tenemos quejas de los demás. Decepcionamos unos a otros. Por eso, no hay matrimonio sano ni familia sana sin el ejercicio del perdón. El perdón es vital para nuestra salud emocional y la supervivencia espiritual. Sin perdón la familia se convierte en una arena de conflictos y un reducto de penas. Sin perdón la familia se enferma. El perdón es la asepsia del alma, la limpieza de la mente y la alforria del corazón. Quien no perdona no tiene paz en el alma ni comunión con Dios. La pena es un veneno que intoxica y mata. Guardar el dolor en el corazón es un gesto autodestructivo. Es autofagia. El que no perdona se enferma física, emocional y espiritualmente. Y por eso la familia necesita ser lugar de vida y no de muerte; el territorio de la cura y no de la enfermedad; el escenario del perdón y no de la culpa. El perdón trae alegría donde la pena produjo tristeza; en la que el dolor causó la enfermedad".

Papa Francisco

Los Grandes Matemáticos

GREGORIO RICCI-CURBASTRO (1853-1925)

Nació el 12 de enero de 1853 en Lugo, Estado Papal (actualmente en Italia) y murió el 6 de agosto de 1925 en Bolonia, Italia.

El padre de Gregorio Ricci-Curbastro fue Antonio Ricci-Curbastro y su madre Livia Vecchi. Era una familia de alto estatus conocida en toda la provincia de Rávena. Antonio Ricci-Curbastro, aunque ciertamente nunca logró nada en comparación con la fama alcanzada por su hijo Gregorio, fue sin embargo un reconocido ingeniero. Ni Gregorio ni su hermano Doménico asistieron a la escuela. Toda su educación antes de entrar en la Universidad fue realizada en su hogar donde sus padres emplearon tutores privados.

En 1869 Ricci-Curbastro entró en la Universidad de Roma con la intención de estudiar matemáticas y filosofía. Él tenía solamente dieciséis años de edad en aquel momento y, aunque él no había asistido a la escuela, estaba bien preparado académicamente. Los acontecimientos políticos, sin embargo, se confabularon e hicieron de la Universidad de Roma una elección un tanto desafortunada, aunque esta elección era la más natural, por ser esta ciudad su lugar de nacimiento. Cuando Ricci-Curbastro comenzó sus estudios en la Universidad de Roma, aunque el Reino de Italia había sido creado unos años antes, la ciudad de Roma no era parte del reino sino del Estado Papal, considerado como el lugar de nacimiento de Ricci y en el cual también se crió. Roma fue atacada por las tropas italianas en 1867 pero Francia defendió la ciudad y empleó a sus tropas contra el ataque. En 1870, sin embargo, las tropas italianas capturaron Roma y se convirtió en la capital del Reino de Italia. Ricci-Curbastro solo pudo estudiar en la Universidad de Roma un solo año, de 1869 a 1870, volviendo al hogar de sus padres donde permaneció durante dos años antes de comenzar una segunda carrera universitaria.

(CONTINÚA EN LA SIGUIENTE PÁGINA)

Reflexiones

"Si quieres comprender la palabra felicidad, tienes que entenderla como recompensa y no como fin".

ANTOINE DE SAINT-EXÚPERY

(VIENE DE LA PÁGINA ANTERIOR)

Esta vez fue no a Roma sino a la Universidad de Bolonia. Allí estudió durante los años 1872 y 1873, luego se trasladó a Pisa, donde asistió a la Scuola Normale Superiore que, bajo el liderazgo de Betti, se estaba convirtiendo en el principal centro italiano de investigación y educación matemática. Así como asistió a conferencias dadas por Betti en Pisa, Ricci-Curbastro también asistió a las conferencias de Dini. En 1875 Ricci-Curbastro obtuvo su doctorado al presentar su tesis *On Fuchs's research concerning linear differential* equations (Sobre la investigación de Fuchs concerniente a las ecuaciones diferenciales lineales). Permaneció en Pisa, trabajando en un documento que presentó al año siguiente para cumplir con los requisitos necesarios para poder ejercer la docencia. El documento se titula *On a generalisation of Riemann's problem concerning hypergeometric functions* (Sobre una generalización del problema de Riemann concernientes a las funciones hipergeométricas). Tanto este documento como su tesis doctoral no han sido publicados.

Se puede detallar que estas dos primeras obras de Ricci-Curbastro se basaron en las ideas de matemáticos alemanes en lugar de matemáticos italianos. Sus siguientes trabajos tampoco versaron sobre ideas de autores italianos. Primero siguió con una serie de artículos sobre la teoría de la electrodinámica de Maxwell y luego con un trabajo sobre las ideas de Clausius el cual Betti le solicitó que hiciera. Tres de estos artículos aparecieron en el *Nuovo Cimento* en 1877 y, en ese mismo año, un artículo apareció en el *Giornale di matematiche di Battaglini*, el cual Dini le había solicitado escribiera acerca del problema de Lagrange sobre un sistema de ecuaciones diferenciales lineales.

Ricci-Curbastro concursó por una beca y la ganó, lo que le permitió pasar el año de 1877 a 1878 en el extranjero. El que haya decidido ir a Alemania no sorprendió y de hecho decidió estudiar en la Technische Hochschule de Munich (Escuela Técnica de Múnich) donde Klein había sido designado a la Presidencia dos años antes. Así como Klein, Brill también trabajaba en esta y Ricci-Curbastro aprovechó para asistir a las conferencias dadas por estos dos matemáticos famosos. Tal como Speziali escribe en la referencia [1]:

> *Ricci admiraba grandemente a Klein, y pronto le fue correspondida esta estima; sin embargo, Ricci no parece haber sido influenciado marcadamente por lo enseñado por Klein. Fueron, más bien, Riemann y Christoffel Lipschitz quienes inspiraron sus investigaciones futuras. Pero de hecho, todos ellos influyeron más sobre él que sus maestros italianos.*

Regresando a Pisa en 1879, Ricci-Curbastro fue nombrado asistente de Dini. Entonces, desde 1880 hasta su muerte en 1925 fue profesor de física matemática en la Universidad de Padua. Él no solo enseñó física matemática, también en 1891 comenzó a enseñar álgebra avanzada en Padua. Fue sólo después de que lo nombraran Jefe de Cátedra en Padua que sintió la seguridad para casarse y, en 1884, se casó con Bianca Bianchi Azzarani. Tuvieron tres hijos; dos varones y una niña.

Los primeros trabajos de Ricci-Curbastro fueron en física matemática, particularmente sobre las leyes de los circuitos eléctricos y las ecuaciones diferenciales. Cambió de temática cuando se interesó en investigar sobre geometría diferencial y posteriormente fue el inventor del cálculo diferencial absoluto entre 1884 y 1894. Sobre este tema, las contribuciones iniciales habían sido hechas por Gauss; Riemann entonces desarrolló estas ideas en 1854 en *Probevorlesung* y en un documento que escribió en 1861 para concursar por el Premio de la *Académie des Sciences* de París. Sin embargo, fue un trabajo publicado por Christoffel en el *Crelle's Journal* en 1868 la principal influencia sobre Ricci-Curbastro para comenzar sus investigaciones en 1884 sobre formas diferenciales cuadráticas. Primero presentó sistemáticamente las ideas importantes en 1888 en un documento escrito para el 800º aniversario de la Universidad de Bolonia. Speziali escribe en la referencia [1]:

> *El método que él usó para demostrar [la invariación de las cuadráticas] le llevó a la técnica de cálculo diferencial absoluto, que él discutió en su totalidad en cuatro publicaciones, escrita entre 1888 y 1892.*

Muchos de los trabajos de Ricci-Curbastro después de 1900 fueron hechos conjuntamente con su estudiante Tullio Levi-Civita. En un fundamental documento en conjunto de aquel año, titulado *Méthodes de calcul différentiel absolu et leurs applications* (Los métodos del cálculo diferencial absoluto y sus aplicaciones) utiliza por única vez el nombre de Ricci en lugar de su nombre completo. Este documento le había sido solicitado cinco años antes por Klein. Los autores declaran sus objetivos en el prefacio de este importante trabajo de 77 páginas:

> *El algoritmo de cálculo diferencial absoluto, el instrumento material de los métodos... se puede encontrar completo en un comentario de Christoffel. Pero los métodos por sí mismos y las ventajas que ofrecen su razón de ser y su origen en las relaciones íntimas que les unen a la noción de una variedad n-dimensional, se la debemos a las brillantes mentes de Gauss y Riemann. ... Así asociarse de una manera esencial con Vn, es el instrumento natural de todos los estudios que tienen como su tema, tal variedad, o en que uno se encuentra como un elemento característico una forma cuadrática positiva de las diferenciales de n variables o de sus derivadas.*

En el documento, las aplicaciones están dadas por Ricci-Curbastro y Levi-Civita para la clasificación de las formas cuadráticas de los diferenciales y hay otras aplicaciones analíticas; ellos dan aplicaciones a la geometría, incluyendo la teoría de superficies y grupos de movimientos; y aplicaciones mecánicas incluyendo dinámicas y soluciones a las ecuaciones de Lagrange. Las ideas principales de este trabajo se discuten en la referencia [1].

(CONTINÚA EN LA SIGUIENTE PÁGINA)

(VIENE DE LA PÁGINA ANTERIOR)

El cálculo diferencial absoluto de Ricci-Curbastro se convirtió en la base del Análisis Tensorial y fue utilizado por Einstein en su teoría de la relatividad general.

El artículo considerado como referencia [7], escrito por el estudiante de Ricci-Curbastro, Tullio Levi-Civita, enumera sesenta y una de sus publicaciones. Sin embargo, Ricci-Curbastro encontró tiempo para colaborar también con el gobierno local como lo hicieron muchos de los matemáticos italianos de su tiempo. Se desempeñó como concejal de su ciudad natal, Lugo, y en esta ocupación estuvo involucrado en muchos proyectos relacionados con el suministro de agua y drenaje de pantanos (una actividad que muchos matemáticos italianos se involucraron durante varios siglos). Más tarde se desempeñó como concejal de Padua y allí sus intereses incluyeron las finanzas y la educación. Se le ofreció el cargo de alcalde de Padua, sin embargo, lo rechazó.

Ricci-Curbastro recibió muchos honores por sus contribuciones excepcionales, aunque hay que decir que la importancia de su trabajo no fue comprendida completamente en el momento en que lo produjo, esto ocurrió tiempo después. Él fue honrado como miembro de varias academias como el Istituto Veneto donde lo admitieron en 1892 y se desempeñó como su Presidente entre 1916 y 1918. También fue miembro de la Accademia dei Lincei desde 1899, la Accademia di Padua desde 1905, la Academia de Ciencias de Turín desde 1918, la Società dei Quaranta de 1921, la Reale Accademia di Bologna desde 1922 y de la Accademia Pontifica desde 1925.

REFERENCIAS.-

1. P Speziali, Biography in *Dictionary of Scientific Biography* (New York 1970-1990). http://www.encyclopedia.com/doc/1G2-2830903654.html
2. Biography in *Encyclopaedia Britannica.* http://www.britannica.com/biography/Gregorio-Ricci-Curbastro

LIBROS:

3. Celebrazione, in lugo del centenario della nascita di Gregorio Ricci Curbastro, 2 maggio 1954 (Lugo, 1954).
4. D J Struik, From Riemann to Ricci : the origins of the tensor calculus, in *Analysis, geometry and groups : a Riemann legacy volume* (Palm Harbor, FL, 1993), 657--674.

ARTÍCULOS:

5. L Dell'Aglio, The concept of tensor in Ricci-Curbastro (Italian), *Boll. Storia Sci. Mat.* **17** (1) (1997), 13-49.
6. J F Labrador, Gregorio Ricci-Curbastro (Spanish), *Gac. Mat., Madrid* (1) **8** (1956), 3-5.
7. T Levi-Civita, Commemorazione del socio nazionale prof. Gregorio Ricci-Curbastro, letta dal socio T L-C nella seduta del 3 gennaio 1925, *Atti dell'Accademia nazionale dei Lincei.* **1** (1926), 555-567.
8. A Natucci, Nel primo centenario della nascita di Gregorio Ricci-Curbastro, *Giorn. Mat. Battaglini* (5) **2** (82) (1954), 437-442.
9. A Tonolo, Commemorazione de Gregorio Ricci-Curbastro nel primo centenario della nascita, *Rend. Sem. Mat. Univ. Padova* **23** (1954), 1-24.
10. A Tonolo, Sulle origini del Calcolo di Ricci, *Ann. Mat. Pura Appl.* (4) **53** (1961), 189-207.

Versión en español por R. Ascanio H. del artículo en inglés de J. J. O'Connor y E. F. Robertson sobre "Gregorio Ricci-Curbastro" (Julio 2000).
FUENTE: MacTutor History of Mathematics. [http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Ricci-Curbastro.html].

Gregorio Ricci-Curbastro

Imágenes obtenidas de:

Google

Aportes al conocimiento

Elementos Básicos del Cálculo Integral (7)

Por: Prof. Rafael Ascanio Hernández - Prof. Próspero González Méndez

ÍNDICE

INTEGRAL INDEFINIDA. LAS TÉCNICAS DE INTEGRACIÓN.

RESOLUCIÓN DE INTEGRALES POR PARTES (INTEGRACIÓN POR PARTES)

Esta técnica se aplica a una gran variedad de funciones siendo particularmente útil cuando el integrando está formado por funciones algebraicas; o para integrar funciones trascendentes cuyas derivadas son algebraicas, tales como:

$$\int xLnxdx, \quad \int x^2 e^x dx, \quad \int ArcSenxdx, \quad \int ArcTgxdx, \text{ etc.}$$

La regla para la integración por partes tiene su origen en la regla de la derivada del producto de funciones. Basado en esto, se puede proceder de la siguiente manera.

Deducción de la regla para la realización de la Integración por Partes.-

Sean u y v funciones determinadas en la misma variable, por ejemplo x, y ambas con derivadas continuas. Entonces se considera que:

$$\frac{d(u\cdot v)}{dx} = \frac{du}{dx}\cdot v + u\cdot\frac{dv}{dx}$$

Despejando:

$$u\cdot\frac{dv}{dx} = \frac{d(u\cdot v)}{dx} - \frac{du}{dx}\cdot v$$

Luego, integrando a ambos lados de la igualdad y utilizando la definición de diferenciales:

$$\int u\cdot dv = \int d(u\cdot v) - \int v\cdot du \quad \Rightarrow \quad \boxed{\int u\cdot dv = u\cdot v - \int v\cdot du}$$

Esta fórmula describe la regla a utilizar para realizar la *integración por partes*. A la integral $\int u\cdot dv$ se le denominará “integral original” o “integral inicial”, y a la integral $\int v\cdot du$ se le denominará “segunda integral” o “integral secundaria”.

Recomendaciones para la utilización de la integración por partes.-

1. El integrando de la integral original o inicial se debe descomponer en dos factores: *“u”* y *“dv”*.
2. En el caso que la variable sea x, el diferencial de x (dx) debe formar parte del diferencial de v (dv).
3. El *“dv”* debe ser integración inmediata.

Casos que se presentan en la integración por partes.-

1º) El integrando contiene como factor a funciones de la forma: $Ln\,x$, $Ln[Q(x)]$, $ArcSen\,x$, $ArcCos\,x$, $ArcTg\,x$, entre otras. Si como *“u”* se elige una de estas funciones, la expresión *“v·du”* de la segunda integral debe ser más sencilla y de fácil integración por los métodos conocidos.

2º) El integrando contiene como factor a funciones de la forma: $P(x)\cdot e^{ax}$, $P(x)\cdot Sen(ax)$, $P(x)\cdot Cos(ax)$, siendo $P(x)$ un polinomio. El grado del polinomio determina cuántas veces se ha de aplicar la integración por partes al resolver la integral por esta técnica. Se elige, entonces, como *“u”* al polinomio $P(x)$ para que durante el procedimiento, cada segunda integral que se genera quede conformada por un polinomio de menor grado que el de la integral original o el de la segunda integral que le precede, hasta que el grado del polinomio disminuya hasta uno y pueda finalizarse el procedimiento de resolución.

Para este tipo de integrales se estudiará como segunda opción, otra forma de resolverlas que consiste en la abreviación de la reiteración de la aplicación de la integración por partes. A este otro procedimiento se le denomina *Método Alternativo*.

3º) La función integrando tiene alguna de las siguientes formas: $e^{ax}\cdot Senx$, $e^{ax}\cdot Cosx$, $Ln(Senx)$, $Ln(Cosx)$, etc. En este caso, es libre la escogencia de *“u”* y *“dv”*. El detalle al resolverlas, es que al aplicar la integración por partes, surge como integral secundaria la integral original o inicial. Se resuelve *convirtiendo la integral en una ecuación*, despejando la integral inicial al considerarla una incógnita. Este tipo de integrales se llaman *cíclicas*.

Regla nemotécnica.-

La regla a la que se hace referencia a continuación, ha surgido de la práctica constante con la "integración por partes".

Al aplicar la integración por partes, el integrando original se divide en dos factores y se debe elegir cuál es *"u"* y cuál *"dv"*. Pero estos factores son funciones y estas pueden ser: Inversas Trigonométricas, Logarítmicas, Algebraicas, Trigonométricas y Exponenciales.

Si tomamos cada una de las letras iniciales de los nombres de los tipos de funciones y formamos una palabra, esta es: **ILATE**. ¿Cuál es el objetivo que se persigue al hacerlo? Veamos los siguientes ejemplos:

$a)$ $\int xLnx\,dx$: El integrando está formado por x que al ser un polinomio se considera una función Algebraica, y por Lnx que evidentemente es una función Logarítmica. Como en la palabra **ILATE** la inicial de las logarítmicas está primero que la de las algebraicas, entonces se hace $u = Lnx$ y $dv = xdx$.

$b)$ $\int ArcSenxdx$: : En este caso, la integral se puede escribir así: $\int 1\cdot ArcSenx\,dx$ donde 1 como constante, es función Algebraica y $ArcSenx$ es función Inversa Trigonométrica. Entonces, $u = ArcSenx$ y $dv = 1\cdot dx = dx$.

$c)$ $\int e^x Senxdx$: Los factores son e^x que es una función Exponencial y $Senx$ que es una función Trigonométrica. Luego, $u = Senx$ y $dv = e^x dx$.

Aunque esta regla no se menciona en los ejercicios que a continuación se resuelven, resulta muy práctico su uso porque se corresponde con los criterios antes establecidos.

Ejercicios resueltos.-

1. - Evaluar $\int ArcSenxdx.$

Solución:

Resolviendo la integral: Se escoge la sustitución a aplicar en I.

$$\begin{cases} u = ArcSenx \Rightarrow du = \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \\ dv = dx \Rightarrow \int dv = \int dx \Rightarrow v = x + C \end{cases}$$

Luego:

$$I = \int ArcSenxdx = u\cdot v - \int v\cdot du = ArcSenx\cdot x - \int x\cdot\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} + C = x\,ArcSen\,x - \underbrace{\int (1-x^2)^{-\frac{1}{2}}\cdot xdx}_{(I_1)} + C = (*)$$

Cambio de variable para I_1: $a = 1-x^2 \Rightarrow da = -2xdx \qquad \Rightarrow \qquad -\dfrac{da}{2} = xdx$

Volviendo a (*):

$$(*) = x\,ArcSenx - \int a^{-\frac{1}{2}}\cdot\left(-\frac{da}{2}\right) + C = x\,ArcSen\,x + \frac{1}{2}\int a^{-\frac{1}{2}}\,da + C = x\,ArcSenx + \frac{1}{2}\cdot\frac{a^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + C =$$

$$= x\,ArcSenx + \sqrt{a} + C = x\,ArcSenx + \sqrt{1-x^2} + C$$

2. - Evaluar $\int ArcCos\,x\,dx.$

Solución:

Sustitución en I:

$$\begin{cases} u = ArcCosx \Rightarrow du = -\dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \\ dv = dx \Rightarrow \int dv = \int dx \Rightarrow v = x + C \end{cases}$$

Resolviendo la integral:

$$I = \int ArcCosxdx = u\cdot v - \int v\cdot du = ArcCos\,x\cdot x + \int x\cdot\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} + C = x\,ArcCos\,x + \underbrace{\int (1-x^2)^{-\frac{1}{2}}\cdot xdx}_{(I_1)} + C = (*)$$

Cambio de variable para I_1: $a = 1 - x^2 \Rightarrow da = -2xdx \quad \Rightarrow \quad -\frac{da}{2} = xdx$

Volviendo a (*):

$$(*) = x\,ArcCosx + \int a^{-\frac{1}{2}} \cdot \left(-\frac{da}{2}\right) + C = x\,ArcCos\,x - \frac{1}{2}\int a^{-\frac{1}{2}}\,da + C = x\,ArcCosx - \frac{1}{2}\cdot\frac{a^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + C =$$

$$= x\,ArcCosx - \sqrt{a} + C = x\,ArcCos\,x - \sqrt{1-x^2} + C$$

3.- Obtener: $\int x^2 \cdot ArcSec\,\sqrt{x}\,dx$.

Solución:

Resolviendo la integral: Eligiendo la sustitución.

$$\begin{cases} u = ArcSec\sqrt{x} \Rightarrow du = \dfrac{dx}{2x\sqrt{x-1}} \\ dv = x^2dx \Rightarrow \int dv = \int x^2dx \Rightarrow v = \dfrac{x^3}{3} \end{cases}$$

Aplicando la sustitución:

$$I = \int x^2 \cdot ArcSec\,\sqrt{x}\,dx = \frac{x^3 \cdot ArcSec\sqrt{x}}{3} - \int \frac{x^3}{3}\cdot\frac{dx}{2x\sqrt{x-1}} + C = \frac{x^3 \cdot ArcSec\sqrt{x}}{3} - \frac{1}{6}\underbrace{\int \frac{x^2dx}{\sqrt{x-1}}}_{(I_1)} + C = (*)$$

Cambio de variable en I_1: $a = x - 1 \Rightarrow da = dx$

Además: $x = a + 1$

Volviendo a (*):

$$(*) = I = \frac{x^3 \cdot ArcSec\sqrt{x}}{3} - \frac{1}{6}\int \frac{(a+1)^2\,da}{\sqrt{a}} + C = \frac{x^3 \cdot ArcSec\sqrt{x}}{3} - \frac{1}{6}\int \left(a^2 + 2a + 1\right)\cdot a^{-\frac{1}{2}}da + C =$$

$$= \frac{x^3 \cdot ArcSec\sqrt{x}}{3} - \frac{1}{6}\int\left(a^{\frac{3}{2}} + 2a^{\frac{1}{2}} + a^{-\frac{1}{2}}\right)da + C = \frac{x^3 \cdot ArcSec\sqrt{x}}{3} - \frac{1}{6}\int a^{\frac{3}{2}}\,da - \frac{1}{3}\int a^{\frac{1}{2}}\,da - \frac{1}{6}\int a^{-\frac{1}{2}}\,da =$$

$$= \frac{x^3 \cdot ArcSec\sqrt{x}}{3} - \frac{1}{5}a^{\frac{5}{2}} - \frac{2}{9}a^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{3}a^{\frac{1}{2}} + C = \frac{x^3 \cdot ArcSec\sqrt{x}}{3} - \frac{1}{5}\sqrt{a^5} - \frac{2}{9}\sqrt{a^3} - \frac{1}{3}\sqrt{a} + C =$$

$$= \frac{x^3 \cdot ArcSec\sqrt{x}}{3} - \frac{1}{5}a^2\cdot\sqrt{a} - \frac{2}{9}a\sqrt{a} - \frac{1}{3}\sqrt{a} + C = \frac{x^3 \cdot ArcSec\sqrt{x}}{3} - \frac{1}{5}(x-1)^2\cdot\sqrt{x-1} - \frac{2}{9}(x-1)\sqrt{x-1} - \frac{1}{3}\sqrt{x-1} + C$$

4.- Resolver: $\int x \cdot ArcTg\,\sqrt{x}\,dx$.

Solución:

Resolviendo la integral.

Sustitución en I:

$$\begin{cases} u = ArcTg\,\sqrt{x} \Rightarrow du = \dfrac{dx}{2\sqrt{x}\cdot(1+x)} \\ dv = xdx \Rightarrow \int dv = \int xdx \Rightarrow v = \dfrac{x^2}{2} + C \end{cases}$$

Aplicando la sustitución en la integral:

$$I = \int x \cdot ArcTg\,\sqrt{x}\,dx = u\cdot v - \int v\cdot du = \frac{x^2}{2}\cdot ArcTg\,\sqrt{x} - \int \frac{x^2}{2}\cdot\frac{dx}{2\sqrt{x}\cdot(1+x)} + C = \frac{x^2 \cdot ArcTg\,\sqrt{x}}{2} - \frac{1}{4}\int \frac{x^2dx}{x^{\frac{1}{2}}\cdot(1+x)} + C =$$

$$= \frac{x^2 \cdot ArcTg\,\sqrt{x}}{2} - \frac{1}{4}\int \frac{x^{\frac{3}{2}}dx}{\cdot 1 + x} + C = \frac{x^2 \cdot ArcTg\,\sqrt{x}}{2} - \frac{1}{4}\underbrace{\int \frac{x^{\frac{3}{2}}dx}{\cdot 1 + \left(\sqrt{x}\right)^2}}_{(I_1)} + C = (*)$$

Resolviendo a I_1.

Cambio de variable en I_1: $\sqrt{x} = Tg\,\phi \Rightarrow \phi = ArcTg\,\sqrt{x}$

Además: $x = Tg^2\phi \Rightarrow dx = 2Tg\,\phi \cdot Sec^2\phi \cdot d\phi$

También: $x^{\frac{3}{2}} = \left(Tg^2\phi\right)^{\frac{3}{2}} = Tg^3\phi$

Aplicando el cambio en I_1:

$$I_1 = \int \frac{x^{\frac{3}{2}}dx}{\cdot 1 + \sqrt{x}^2} = \int \frac{Tg^3\phi \cdot 2Tg\phi \cdot Sec^2\phi \cdot d\phi}{1 + Tg^2\phi} = 2\int \frac{Tg^4\phi \cdot Sec^2\phi \cdot d\phi}{Sec^2\phi} = 2\int Tg^4\phi\, d\phi =$$
$$= 2\int Tg^2\phi \cdot Tg^2\phi \cdot d\phi = 2\int Tg^2\phi \cdot \left(Sec^2\phi - 1\right) \cdot d\phi = 2\underbrace{\int Tg^2\phi \cdot Sec^2\phi \cdot d\phi}_{(I_2)} - 2\int Tg^2\phi\, d\phi = (**)$$

Cambio de variable en I_2:

$a = Tg\phi \Rightarrow da = Sec^2\phi \cdot d\phi$

Volviendo a (**):

$$(**) = I_1 = 2\int a^2 da - 2\int Sec^2\phi\, d\phi + 2\int d\phi = \frac{2}{3}a^3 - 2Tg\,\phi + 2\phi + C_1 = \frac{2}{3}Tg^3\phi - 2Tg\,\phi + 2\phi + C_1$$

Devolviendo el cambio en I_1:

$$I_1 = \frac{2}{3}Tg^3\phi - 2Tg\,\phi + 2\phi + C_1 = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - 2\sqrt{x} + 2ArcTg\sqrt{x} + C_1.$$

Volviendo a (*):

$$(*) = \frac{x^2 \cdot ArcTg\,\sqrt{x}}{2} - \frac{1}{4}\int \frac{x^{\frac{3}{2}}dx}{\cdot 1 + \sqrt{x}^2} + C = \frac{x^2 \cdot ArcTg\,\sqrt{x}}{2} - \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - 2\sqrt{x} + 2ArcTg\sqrt{x}\right) + C =$$
$$= \frac{x^2 \cdot ArcTg\,\sqrt{x}}{2} - \frac{1}{6}\sqrt{x^3} + \frac{1}{2}\sqrt{x} - \frac{1}{2}ArcTg\sqrt{x} + C = \frac{1}{2}\cdot\left(x^2 - 1\right)\cdot ArcTg\sqrt{x} - \frac{1}{6}x\sqrt{x} + \frac{1}{2}\sqrt{x} + C =$$
$$= \frac{1}{2}\cdot\left(x^2 - 1\right)\cdot ArcTg - \frac{1}{2}\sqrt{x}\cdot\left(\frac{1}{3}x + 1\right) + C = \frac{1}{2}\cdot\left(x^2 - 1\right)\cdot ArcTg - \frac{1}{2}\sqrt{x}\cdot\left(\frac{x+3}{3}\right) + C =$$
$$= \frac{1}{2}\cdot\left(x^2 - 1\right)\cdot ArcTg - \frac{1}{6}\sqrt{x}\cdot(x+3) + C$$

5. – Calcular: $\int Lnxdx.$

Solución:

Resolviendo la integral.

Sustitución a aplicar en I:

$$\begin{cases} u = Lnx \Rightarrow du = \dfrac{dx}{x} \\ dv = dx \Rightarrow \int dv = \int dx \Rightarrow v = x + C \end{cases}$$

Entonces:

$$I = \int Lnxdx = u \cdot v - \int v \cdot du = Lnx \cdot x - \int x \cdot \frac{dx}{x} + C = xLnx - \int dx + C = xLnx - x + C = x(Lnx - 1) + C$$

6.- Determinar $\int x^n Lnxdx \cdot$

Solución:

Resolviendo la integral.

Sustitución en I:

$$\begin{cases} u = Ln\,x \Rightarrow du = \dfrac{dx}{x} \\ dv = x^n dx \Rightarrow \int dv = \int x^n dx \Rightarrow v = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + C \end{cases}$$

Luego:

$$I=\int x^n Lnxdx = u\cdot v-\int vdu = Lnx\cdot\frac{x^{n+1}}{n+1}-\int\frac{x^{n+1}}{n+1}\cdot\frac{dx}{x}+C=\frac{x^{n+1}}{n+1}Lnx-\frac{1}{n+1}\int x^n dx+C=$$

$$=\frac{x^{n+1}}{n+1}Ln-\frac{x^{n+1}}{(n+1)^2}+C=\frac{x^{n+1}}{n+1}\left(Lnx-\frac{1}{n+1}\right)+C$$

7. - Hallar $\int x^2 Lnxdx.$

Solución:

Resolviendo la integral.

Sustitución en I:

$$\begin{cases} u=Ln\,x\Rightarrow du=\dfrac{dx}{x}\\ dv=x^2dx\Rightarrow\int dv=\int x^2dx\Rightarrow v=\dfrac{x^3}{3}+C\end{cases}$$

Luego:

$$I=\int x^2 Lnxdx=\int Lnx\cdot x^2dx=u\cdot v-\int vdu=Lnx\cdot\frac{x^3}{3}-\int\frac{x^3}{3}\cdot\frac{dx}{x}+C=\frac{1}{3}x^3\cdot Lnx-\frac{1}{3}\int x^2dx+C=$$

$$=\frac{1}{3}x^3\cdot Lnx-\frac{1}{3}\cdot\frac{x^3}{3}+C=\frac{1}{3}x^3\cdot Lnx-\frac{1}{9}x^3+C=\frac{1}{3}x^3\cdot\left(Lnx-\frac{1}{3}\right)+C$$

8.- Resuelva $\int x^3 Ln\left(x^2+1\right)dx$.

Solución:

Resolviendo la integral: Se propone la sustitución.

$$\begin{cases} u=Ln\left(x^2+1\right)\Rightarrow du=\dfrac{2xdx}{x^2+1}\\ dv=x^3dx\Rightarrow\int dv=\int x^3dx\Rightarrow v=\dfrac{x^4}{4}+C\end{cases}$$

Aplicando la sustitución:

$$I=\int x^3Ln\left(x^2+1\right)dx=u\cdot v-\int v\cdot du=\frac{x^4}{4}\cdot Ln\left(x^2+1\right)-\int\frac{x^4}{4}\cdot\frac{2xdx}{x^2+1}+C=\frac{x^4\cdot Ln\left(x^2+1\right)}{4}-\frac{1}{2}\int\frac{x^5dx}{x^2+1}+C=$$

$$=\frac{x^4\cdot Ln\left(x^2+1\right)}{4}-\frac{1}{2}\int\left(x^3-x+\frac{x}{x^2+1}\right)dx+C=\frac{x^4\cdot Ln\left(x^2+1\right)}{4}-\frac{1}{2}\int x^3\,dx+\frac{1}{2}\int x\,dx-\frac{1}{2}\int\frac{xdx}{x^2+1}+C=$$

$$=\frac{x^4\cdot Ln\left(x^2+1\right)}{4}-\frac{x^4}{8}+\frac{x^2}{4}-\frac{1}{2}\underbrace{\int\frac{xdx}{x^2+1}}_{(I_1)}+C=(*)$$

Cambio de variable en I_1: $a=x^2+1\Rightarrow da=2xdx\Rightarrow xdx=\dfrac{da}{2}$

Volviendo a (*):

$$I=\frac{x^4\cdot Ln\left(x^2+1\right)}{4}-\frac{x^4}{8}+\frac{x^2}{4}-\frac{1}{4}\int\frac{da}{a}+C=\frac{x^4\cdot Ln\left(x^2+1\right)}{4}-\frac{x^4}{8}+\frac{x^2}{4}-\frac{1}{4}Ln\,|\,a\,|+C=\frac{x^4\cdot Ln\left(x^2+1\right)}{4}-\frac{x^4}{8}+\frac{x^2}{4}-\frac{1}{4}Ln\left(x^2+1\right)+C=$$

$$=\left(\frac{x^4-1}{4}\right)Ln\left(x^2+1\right)+\frac{x^2}{4}\cdot\left(1-\frac{x^2}{2}\right)+C=\left(\frac{x^4-1}{4}\right)Ln\left(x^2+1\right)+\frac{x^2}{4}\cdot\left(\frac{2-x^2}{2}\right)+C=\left(\frac{x^4-1}{4}\right)Ln\left(x^2+1\right)+\frac{x^2}{8}\cdot\left(2-x^2\right)+C$$

9.- Evaluar $\int Ln\left(a^2+x^2\right)dx\cdot$

Solución:

Resolviendo la integral.

Sustitución en I:

$$\begin{cases} u=Ln\left(a^2+x^2\right)\Rightarrow du=\dfrac{2xdx}{a^2+x^2}\\ dv=dx\Rightarrow\int dv=\int dx\Rightarrow v=x+C\end{cases}$$

Entonces:

$$I=\int Ln\,\left(a^2+x^2\right)dx=u.v-\int v.dv=xLn\,\left(a^2+x^2\right)-2\int\frac{x^2dx}{a^2+x^2}+C=xLn\,\left(a^2+x^2\right)-2\int\left(1-\frac{a^2}{a^2+x^2}\right)dx+C=$$

$$=Ln\,\left(a^2+x^2\right)^x-2\int dx+2a^2\int\frac{dx}{a^2+x^2}+C=Ln\,\left(a^2+x^2\right)^x-2x+2a^2\cdot\frac{1}{a}\cdot ArcTg\left(\frac{x}{a}\right)+C=$$

$$=Ln\,\left(a^2+x^2\right)^x-Ln\,e^{2x}+2a\cdot ArcTg\,\left(\frac{x}{a}\right)+C=Ln\left(a^2+x^2\right)^x-\left(Lne^2\right)^x+2a\cdot ArcTg\left(\frac{x}{a}\right)+C=$$

$$=Ln\,\left[\frac{\left(a^2+x^2\right)^x}{\left(e^2\right)^x}\right]+2a\cdot ArcTg\left(\frac{x}{a}\right)+C=Ln\left(\frac{a^2+x^2}{e^2}\right)^x+2a\cdot ArcTg\,\left(\frac{x}{a}\right)+C$$

10. – Comprobar si $\int Ln\left(x^2+2\right)dx=Ln\left(\frac{x^2+2}{e^2}\right)^x+2\sqrt{2}\cdot ArcTg\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)+C\cdot$

<u>Solución</u>:

Resolviendo la integral.

Sustitución en I:

$$\begin{cases} u=Ln\,\left(x^2+2\right)\Rightarrow du=\dfrac{2xdx}{x^2+2}\\ dv=dx\Rightarrow\int dv=\int dx\Rightarrow v=x+C\end{cases}$$

Entonces:

$$I=\int Ln\,\left(x^2+2\right)dx=u.v-\int v.dv=xLn\left(x^2+2\right)-2\int\frac{x^2dx}{x^2+2}+C=Ln\left(x^2+2\right)^x-2\int\left(1-\frac{2}{x^2+2}\right)dx+C=Ln\left(x^2+2\right)^x-2\int dx+4\int\frac{dx}{x^2+2}+C=$$

$$=Ln\left(x^2+2\right)^x-2x+4\int\frac{dx}{x^2+\left(\sqrt{2}\right)^2}+C=Ln\left(x^2+2\right)^x-Lne^{2x}+\frac{4}{\sqrt{2}}ArcTg\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)+C=Ln\,\left(x^2+2\right)^x-Ln\,\left(e^2\right)^x+2\sqrt{2}\cdot ArcTg\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)+C=$$

$$=Ln\left[\frac{\left(x^2+2\right)^x}{\left(e^2\right)^x}\right]+2\sqrt{2}\cdot ArcTg\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)+C=Ln\left(\frac{x^2+2}{e^2}\right)^x+2\sqrt{2}\cdot ArcTg\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)+C$$

L.Q.Q.C.

11.- Compruebe si $\int Ln\left(x+\frac{1}{x}\right)\,dx=Ln\left(\frac{x^2+1}{x\cdot e}\right)^x+ArcTg\;x+C\cdot$

<u>Comprobando</u>:

Resolviendo la integral: Se elige la sustitución a utilizar.

$$\begin{cases} u=Ln\left(x+\dfrac{1}{x}\right)\Rightarrow du=\dfrac{d\left(x+\frac{1}{x}\right)}{x+\frac{1}{x}}=\dfrac{\left(1-\frac{1}{x^2}\right)dx}{\frac{x^2+1}{x}}=\dfrac{\frac{x^2-1}{x^2}}{\frac{x^2+1}{x}}dx=\dfrac{x\left(x^2-1\right)}{x^2\left(x^2+1\right)}dx=\dfrac{x^2-1}{x\left(x^2+1\right)}dx \quad\Rightarrow\quad du=\dfrac{x^2-1}{x\left(x^2+1\right)}dx\\ dv=dx\Rightarrow\int dv=\int dx\Rightarrow v=x+C\end{cases}$$

Aplicando la sustitución:

$$I=\int Ln\left(x+\frac{1}{x}\right)dx=u\cdot v-\int v\cdot du=x\cdot Ln\left(x+\frac{1}{x}\right)-\int x\cdot\frac{x^2-1}{x\left(x^2+1\right)}dx+C=Ln\left(x+\frac{1}{x}\right)^x-\int\frac{x^2-1}{x^2+1}dx+C=$$

$$=Ln\left(\frac{x^2+1}{x}\right)^x-\int\left(1-\frac{1}{x^2+1}\right)dx+C=Ln\left(\frac{x^2+1}{x}\right)^x-\int dx+\int\frac{dx}{x^2+1}+C=$$

$$=Ln\left(\frac{x^2+1}{x}\right)^x-x+ArcTg\;x+C=Ln\left(\frac{x^2+1}{x}\right)^x-Lne^x+ArcTg\;x+C=$$

$$=Ln\left\{\frac{\left(\frac{x^2+1}{x}\right)^x}{e^x}\right\}+ArcTg\;x+C=Ln\left[\frac{\frac{x^2+1}{x}}{e}\right]^x+ArcTg\;x+C=Ln\left(\frac{x^2+1}{x\cdot e}\right)^x+ArcTg\;x+C$$

L. Q. Q. C.

12.- Verifique si $\int x \cdot Ln^3 x\, dx = \frac{1}{8}x^2 \cdot \left(4Ln^3 x - 6Ln^2 x + 6Lnx - 3\right) + C$.

Solución:

Resolviendo la integral: Escogiendo la sustitución.

$$\begin{cases} u = Ln^3 x \Rightarrow du = \dfrac{3Ln^2 xdx}{x} \\ dv = xdx \Rightarrow \int dv = \int xdx \Rightarrow v = \dfrac{x^2}{2} + C \end{cases}$$

Aplicando la sustitución:

$$I = \int x \cdot Ln^3 x\, dx = u \cdot v - \int v \cdot du = \frac{x^2}{2} \cdot Ln^3 x - \int \frac{x^2}{2} \cdot \frac{3Ln^2 xdx}{x} + C = \frac{x^2 \cdot Ln^3 x}{2} - \frac{3}{2}\underbrace{\int x \cdot Ln^2 xdx}_{(I_1)} + C = (*)$$

I_1 se resuelve por partes.

Sustitución 2:

$$\begin{cases} u = Ln^2 x \Rightarrow du = \dfrac{2Ln\, xdx}{x} \\ dv = xdx \Rightarrow \int dv = \int xdx \Rightarrow v = \dfrac{x^2}{2} + C \end{cases}$$

Volviendo a (*) para aplicar la sustitución:

$$(*) = I = \frac{x^2 \cdot Ln^3 x}{2} - \frac{3}{2} \cdot \left(\frac{x^2 \cdot Ln^2 x}{2} - \int \frac{x^2}{2} \cdot \frac{2Lnxdx}{x}\right) + C = \frac{x^2 \cdot Ln^3 x}{2} - \frac{3x^2 \cdot Ln^2 x}{4} + \frac{3}{2}\underbrace{\int \frac{xLnxdx}{x}}_{(I_2)} \cdot + C = (**)$$

I_2 se resuelve por partes.

Sustitución 3:

$$\begin{cases} u = Lnx \Rightarrow du = \dfrac{dx}{x} \\ dv = xdx \Rightarrow \int dv = \int xdx \Rightarrow v = \dfrac{x^2}{2} + C \end{cases}$$

Volviendo a (**) para aplicar la sustitución:

$$(**) = I = \frac{x^2 \cdot Ln^3 x}{2} - \frac{3x^2 \cdot Ln^2 x}{4} + \frac{3}{2} \cdot \left(\frac{x^2 \cdot Lnx}{2} - \int \frac{x^2}{2} \cdot \frac{dx}{x}\right) + C = \frac{x^2 \cdot Ln^3 x}{2} - \frac{3x^2 \cdot Ln^2 x}{4} + \frac{3 \cdot x^2 \cdot Lnx}{4} - \frac{3}{4}\int xdx + C =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot x^2 \cdot Ln^3 x - \frac{3}{4} \cdot x^2 \cdot Ln^2 x + \frac{3}{4} \cdot x^2 \cdot Lnx - \frac{3}{8}x^2 + C = \frac{1}{2}x^2 \cdot \left(Ln^3 x - \frac{3}{2}Ln^2 x + \frac{3}{2}Lnx\right) - \frac{3}{8}x^2 + C =$$

$$= \frac{1}{2}x^2 \cdot \left(Ln^3 x - \frac{3}{2}Ln^2 x + \frac{3}{2}Lnx - \frac{3}{4}\right) + C = \frac{1}{2}x^2 \cdot \left(\frac{4Ln^3 x - 6Ln^2 x + 6Lnx - 3}{4}\right) + C = \frac{1}{8}x^2 \cdot \left(4Ln^3 x - 6Ln^2 x + 6Lnx - 3\right) + C$$

L. Q. Q. V.

13.- Calcule $\int x^2 Ln\left|\sqrt{1-x}\right| dx$.

Solución:

Resolviendo la integral: Se establece la sustitución.

$$\begin{cases} u = Ln\left|\sqrt{1-x}\right| \quad \Rightarrow \quad du = \dfrac{d\left(\sqrt{1-x}\right)}{\sqrt{1-x}} = \dfrac{d\left[(1-x)^{\frac{1}{2}}\right]}{(1-x)^{\frac{1}{2}}} = \dfrac{\frac{1}{2} \cdot (1-x)^{-\frac{1}{2}}(-dx)}{(1-x)^{\frac{1}{2}}} = -\dfrac{dx}{2(1-x)^{\frac{1}{2}}(1-x)^{\frac{1}{2}}} = -\dfrac{dx}{2(1-x)} \\ dv = x^2 dx \quad \Rightarrow \quad \int dv = \int x^2 dx \quad \Rightarrow \quad v = \dfrac{x^3}{3} + C \end{cases}$$

Aplicando la sustitución:

$$I=\int x^2 Ln\left|\sqrt{1-x}\right|dx=u\cdot v-\int v\cdot du=\frac{x^3}{3}\cdot Ln\left|\sqrt{1-x}\right|-\int\frac{x^3}{3}\cdot\left[-\frac{dx}{2(1-x)}\right]+C=$$

$$=\frac{1}{3}x^3\cdot Ln\left|\sqrt{1-x}\right|+\frac{1}{6}\int\frac{x^3}{1-x}dx+C=\frac{1}{3}x^3\cdot Ln\left|\sqrt{1-x}\right|+\frac{1}{6}\int\left(-x^2-x-1+\frac{1}{1-x}\right)dx+C=$$

$$=\frac{1}{3}x^3\cdot Ln\left|\sqrt{1-x}\right|-\frac{1}{6}\int x^2dx-\frac{1}{6}\int xdx-\frac{1}{6}\int dx+\frac{1}{6}\int\frac{dx}{1-x}+C=$$

$$=\frac{1}{3}x^3\cdot Ln\left|\sqrt{1-x}\right|-\frac{1}{18}x^3-\frac{1}{12}x^2-\frac{1}{6}x-Ln\left|1-x\right|+C=$$

$$=\frac{1}{3}x^3\cdot\left(Ln\left|\sqrt{1-x}\right|-\frac{1}{6}\right)-\frac{1}{6}x\cdot\left(\frac{1}{2}x+1\right)-Ln\left|1-x\right|+C$$

14. - Resolver $\int x\sqrt{1+x}dx.$

Solución:

Resolviendo la integral: Eligiendo la sustitución.

$$\begin{cases}u=x\Rightarrow du=dx\\ dv=\sqrt{1+x}dx\quad\Rightarrow\quad dv=(1+x)^{\frac{1}{2}}dx\quad\Rightarrow\quad\int dv=\int(1+x)^{\frac{1}{2}}dx\quad\Rightarrow\quad v=\frac{2}{3}(1+x)^{\frac{1}{2}}+C\quad\Rightarrow\quad v=\frac{2}{3}\sqrt{(1+x)^3}+C\end{cases}$$

Aplicando la sustitución:

$$I=\int x\sqrt{1+x}dx=u\cdot v-\int vdu=x\cdot\frac{2}{3}\sqrt{(1+x)^3}-\int\frac{2}{3}\sqrt{(1+x)^3}dx+C=\frac{2}{3}x\sqrt{(1+x)^3}-\frac{2}{3}\int(1+x)^{\frac{3}{2}}dx+C=$$

$$=\frac{2}{3}x\sqrt{(1+x)^3}-\frac{2}{3}\cdot\frac{(1+x)^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}}+C=\frac{2}{3}x\sqrt{(1+x)^3}-\frac{4}{15}\sqrt{(1+x)^5}+C$$

15.- Comprobar si: $\int\frac{dx}{\left(1+x^2\right)^2}=\frac{1}{2}\cdot\left(ArcTg\,x+\frac{x}{1+x^2}\right)+C$.

Comprobación:

Resolviendo la integral, buscando que en el integrando aparezca la integral del arco tangente que se encuentra en la solución:

$$I=\int\frac{dx}{\left(1+x^2\right)^2}=\int\frac{1.dx}{\left(1+x^2\right)^2}=\int\frac{(1+x^2-x^2)dx}{\left(1+x^2\right)^2}=\int\frac{(1+x^2)dx}{\left(1+x^2\right)^2}-\int\frac{x^2dx}{\left(1+x^2\right)^2}=\int\frac{dx}{1+x^2}-\int\frac{x^2dx}{\left(1+x^2\right)^2}=ArcTg\,x-\underbrace{\int\frac{x^2dx}{\left(1+x^2\right)^2}}_{(I_1)}+C=(*)$$

Ahora, I_1 se resuelve por partes:

$$I_1=\int x^2\cdot\left(1+x^2\right)^{-2}dx=\int x\cdot\left(1+x^2\right)^{-2}\cdot x\,dx=u\cdot v-\int v\,du=(**)$$

Sustitución en (**):

$$\begin{cases}u=x\Rightarrow du=dx\\ dv=\left(1+x^2\right)^{-2}\cdot x\,dx\Rightarrow\int dv=\int\left(1+x^2\right)^{-2}\cdot x\,dx=(***)\end{cases}$$

Cambio de variable en (***): $a=1+x^2\Rightarrow da=2x\,dx\Rightarrow x\,dx=\frac{da}{2}$

Volviendo a (***):

$$(***)=\int a^{-2}\cdot\frac{da}{2}=-\frac{1}{2a}+C=-\frac{1}{2\left(1+x\right)^2}+C=v$$

Volviendo a (**) para aplicar la sustitución:

$$(**)=x\cdot\left[-\frac{1}{2\left(1+x^2\right)}\right]-\int\left[-\frac{1}{2\left(1+x^2\right)}\right]dx+C_1=-\frac{x}{2\left(1+x^2\right)}+\frac{1}{2}\int\frac{dx}{1+x^2}+C_1=-\frac{1}{2}\cdot\frac{x}{1+x^2}+\frac{1}{2}ArcTg\,x+C_1=I_1$$

Volviendo a (*):

$$(*) = I = ArcTg\,x - \left(-\frac{1}{2}\cdot\frac{x}{1+x^2} + \frac{1}{2}AarcTg\,x + C_1\right) + C = ArcTg\,x - \frac{1}{2}\cdot\frac{x}{1+x^2} - \frac{1}{2}ArcTg\,x + C =$$

$$= \frac{1}{2}ArcTg\,x + \frac{1}{2}\cdot\frac{x}{1+x^2} + C = \frac{1}{2}\cdot\left(ArcTg\,x + \frac{x}{1+x^2}\right) + C$$

L. Q. Q. C.

16. - Hallar $\int xSenxdx.$

Solución:

Resolviendo la integral.

Sustitución en I:

$$\begin{cases} u = x \Rightarrow du = dx \\ dv = Senxdx \Rightarrow \int dv = \int Senxdx \Rightarrow v = -Cosx + C \end{cases}$$

Aplicando la sustitución:

$$I = \int xSenxdx = u\cdot v - \int vdu = x\cdot(-Cosx) - = \int(-Cosx)dx + C = -xCosx + \int Cosxdx + C = -xCosx + Senx + C$$

17.- Compruebe si $\int x\cdot Sen\,x\cdot Cos\,x\,dx = -\frac{1}{4}x\cdot Cos\,(2x) + \frac{1}{8}Sen\,(2x) + C$.

Comprobando:

Resolviendo la integral: Se elige la sustitución.

$$\begin{cases} u = x \Rightarrow du = dx \\ dv = Sen\,x\cdot Cos\,x\,dx \Rightarrow \int dv = \int Sen\,x\cdot Cos\,x\,dx \Rightarrow v = \dfrac{Sen^2x}{2} + C \end{cases}$$

Aplicando la sustitución:

$$I = \int x\cdot Sen\,x\cdot Cos\,x\,dx = u\cdot v - \int v\cdot du = x\cdot\frac{Sen^2x}{2} - \frac{1}{2}\int Sen^2x\,dx + C = x\cdot\frac{Sen^2x}{2} - \frac{1}{2}\cdot\left[\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}Sen(2x)\right] + C =$$

$$= \frac{x}{2}\cdot Sen^2x - \frac{1}{4}x + \frac{1}{8}Sen(2x) + C = \frac{x}{4}\cdot 2Sen^2x - \frac{1}{4}x + \frac{1}{8}Sen(2x) + C = \frac{1}{4}x\cdot\left(2Sen^2x - 1\right) + \frac{1}{8}Sen(2x) + C =$$

$$= \frac{1}{4}x\cdot\left[-\left(Cos^2x - Sen^2x\right)\right] + \frac{1}{8}Sen(2x) + C = -\frac{1}{4}x\cdot Cos\,(2x) + \frac{1}{8}Sen\,(2x) + C$$

L. Q. Q. C.

18. - Hallar $\int Sen^2xdx.$

Solución:

Resolviendo la integral: Se establece la sustitución.

$$\begin{cases} u = Sen\,x\,dx \Rightarrow du = Cos\,x\,dx \\ dv = Senxdx \Rightarrow \int dv = \int Senxdx \Rightarrow v = -Cosx + C \end{cases}$$

Aplicando la sustitución:

$$I = \int Sen^2xdx = \int Senx\cdot Senxdx = u\cdot v - \int vdu = Senx\cdot(-Cosx) - \int(-Cosx)\cdot Cosxdx + C = -Senx\cdot Cosx + \underbrace{\int Cos^2xdx}_{(I_1)} + C = (*)$$

Utilizando en I_1 la siguiente identidad trigonométrica: $Cos^2x = 1 - Sen^2x$

Volviendo a (*):

$$(*) = -Senx\cdot Cosx + \int(1 - Sen^2x)dx + C = -Senx\cdot Cosx + \int dx - \underbrace{\int Sen^2xdx}_{(I)} + C,$$

Luego, al aparecer I en ambos miembros de la igualdad, se procede a realizar el despeje correspondiente:

$$I = -Senx\cdot Cosx + x - I + C \quad\Rightarrow\quad 2I = -Senx\cdot Cosx + x + C \quad\Rightarrow\quad 2I = -\frac{Sen(2x)}{2} + x + C \quad\Rightarrow\quad \boxed{I = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}Sen(2x) + C}$$

La integral resuelta es de las llamadas *integrales cíclicas*. Además, corresponde con una fórmula elemental.

19. - Evaluar $\int Sec^3 x dx$.

Solución:

Resolviendo la integral: Factorizando el integrando.

$$I = \int Sec^3 x dx = \int Sec\, x \cdot Sec^2 x\, dx = (*)$$

La integral se resuelve por partes. Sustitución a utilizar:

$$\begin{cases} u = Secx \quad \Rightarrow \quad du = Secx \cdot Tgxdx \\ dv = Sec^2 xdx \quad \Rightarrow \quad \int dv = \int Sec^2 xdx \quad \Rightarrow \quad v = Tgx + C \end{cases}$$

Luego:

$$I = \int Sec^3 xdx = \int Sec\, x \cdot Sec^2 x\, dx = u.v - \int vdu = Secx \cdot Tgx - \int Secx \cdot Tg^2 xdx + C = Secx \cdot Tgx - \int Secx \cdot (Sec^2 x - 1)dx + C =$$

$$= Secx \cdot Tgx - \underbrace{\int Sec^3 xdx}_{(I)} + \int Secxdx + C = Secx \cdot Tgx - I + Ln\left|Secx + Tgx\right| + C.$$

La Integral es cíclica. Se procede a despejar a *I*:

$$I = Secx \cdot Tgx - I + Ln\left|Secx + Tgx\right| + C$$

$$I + I = Secx \cdot Tgx + Ln\left|Secx + Tgx\right| + C$$

$$2I = Secx \cdot Tgx + Ln\left|Secx + Tgx\right| + C$$

$$I = \tfrac{1}{2} Secx \cdot Tgx + \tfrac{1}{2} Ln\left|Secx + Tgx\right| + C \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{I = \int Sec^3 xdx = \tfrac{1}{2} Secx \cdot Tgx + \tfrac{1}{2} Ln\left|Secx + Tgx\right| + C}$$

20. - Evaluar $\int Sen^3 xdx$.

Solución:

Resolviendo la integral: Se establece la sustitución a utilizar.

$$\begin{cases} u = Sen^2 x \Rightarrow du = 2Sen\, x \cdot Cos\, x\, dx \\ dv = Senxdx \Rightarrow \int dv = \int Senxdx \Rightarrow v = -Cosx + C \end{cases}$$

Aplicando la sustitución:

$$I = \int Sen^3 xdx = \int Senx \cdot Sen^2 xdx = u \cdot v - \int vdu = -Sen^2 xCosx - \int (-Cosx) \cdot 2SenxCosx\, dx + C = -Sen^2 xCosx + 2\underbrace{\int Cos^2 xSenxdx}_{(I_1)} + C = (*)$$

Cambio de variable en I_1: $a = Cosx \Rightarrow da = -Senxdx \Rightarrow -da = Senxdx$

Volviendo a (*):

$$(*) = -Sen^2 xCosx + 2\int a^2(-da) + C = -Sen^2 xCosx - 2\int a^2 da + C = -Sen^2 xCosx - \frac{2}{3}a^3 + C = -Sen^2 xCosx - \frac{2}{3}Cos^3 x + C$$

21.- Obtenga: $\int e^x \cdot Cos(2x)dx$.

Solución:

Resolviendo la integral: Se escoge la sustitución.

$$\begin{cases} u = Cos(2x) \quad \Rightarrow \quad du = -2Sen(2x)dx \\ dv = e^x dx \quad \Rightarrow \int dv = \int e^x dx \Rightarrow v = e^x + C \end{cases}$$

Aplicando la sustitución:

$$I = \int e^x \cdot Cos(2x)dx = u \cdot v - \int v \cdot du = e^x \cdot Cos(2x) + 2\underbrace{\int e^x \cdot Sen(2x)dx}_{(I_1)} + C = (*)$$

I_1 se resuelve por partes: Se escoge una nueva sustitución.

$$\begin{cases} u = Sen(2x) \quad \Rightarrow \quad du = 2Cos(2x)dx \\ dv = e^x dx \quad \Rightarrow \int dv = \int e^x dx \Rightarrow v = e^x + C \end{cases}$$

Volviendo a (*) para aplicar la nueva sustitución:

$$I = e^{x} \cdot Cos(2x) + 2 \cdot \left[e^{x} \cdot Sen(2x) - 2\int e^{x} \cdot Cos(2x)dx \right] + C = e^{x} \cdot Cos(2x) + 2e^{x} \cdot Sen(2x) - 4I + C.$$

La integral es *cíclica*. Se procede a despejar a la integral inicial.

$$I = e^{x} \cdot Cos(2x) + 2e^{x} \cdot Sen(2x) - 4I + C$$
$$5I = e^{x} \cdot Cos(2x) + 2e^{x} \cdot Sen(2x) + C$$

$$\Rightarrow \boxed{I = \frac{1}{5} e^{x} \cdot \left[Cos(2x) + Sen(2x) \right] + C}$$

22. - Comprobar que $\int e^{2x} Cos(3x)dx = \frac{1}{13} e^{2x} \left[2Cos(3x) + 3Sen(3x) \right] + C$.

Comprobación:

Se resuelve la integral: Se escoge la sustitución.

$$\begin{cases} u = Cos(3x) \Rightarrow du = -3Sen(3x)dx \\ dv = e^{2x}dx \Rightarrow \int dv = \int e^{2x}dx \Rightarrow v = \frac{1}{2}e^{2x} + C \end{cases}$$

Aplicando la sustitución:

$$I = \int e^{2x} Cos(3x)dx = u \cdot v - \int v \cdot du = \frac{1}{2} e^{2x} Cos(3x) + \frac{3}{2} \underbrace{\int e^{2x} Sen(3x)dx}_{(I_1)} + C = (*)$$

I_1 también se resuelve por partes. La sustitución a utilizar es.

$$\begin{cases} u = Sen\ (3x) \quad \Rightarrow \quad du = 3Cos\ (3x)dx \\ dv = e^{2x}dx \Rightarrow \int dv = \int e^{2x}dx \Rightarrow v = \frac{1}{2}e^{2x} + C \end{cases}$$

Volviendo a (*) para aplicar esta sustitución:

$$(*) = \frac{1}{2} e^{2x} Cos\ (3x) + \frac{3}{2} \left(\frac{1}{2} e^{2x} Sen\ (3x) - \frac{3}{2} \int e^{2x} Cos\ (3x)dx \right) + C =$$
$$= \frac{1}{2} e^{2x} Cos\ (3x) + \frac{3}{4} e^{2x} Sen\ (3x) - \frac{9}{4} \int e^{2x} Cos\ (3x)\ dx + C = \frac{1}{2} e^{2x} Cos\ (3x) + \frac{3}{4} e^{2x} Sen\ (3x) - \frac{9}{4} I + C$$

Es una integral cíclica. Así que :

$$\Rightarrow I = \frac{1}{2} e^{2x} Cos\ (3x) + \frac{3}{4} e^{2x} Sen\ (3x) - \frac{9}{4} I + C$$

Luego, despejando a I:

$$I + \frac{9}{4} I = \frac{1}{2} e^{2x} Cos\ (3x) + \frac{3}{4} e^{2x} Sen\ (3x) + C$$
$$\frac{13}{4} I = \frac{1}{2} e^{2x} Cos\ (3x) + \frac{3}{4} e^{2x} Sen\ (3x) + C$$
$$I = \frac{4}{13} \left(\frac{1}{2} e^{2x} Cos\ (3x) + \frac{3}{4} e^{2x} Sen\ (3x) \right) + C$$
$$I = \frac{4}{26} e^{2x} Cos\ (3x) + \frac{12}{52} e^{2x} Sen\ (3x) + C$$
$$I = \frac{2}{13} e^{2x} Cos\ (3x) + \frac{3}{13} e^{2x} Sen\ (3x) + C$$

$$\Rightarrow \boxed{\int e^{2x} Cos\ (3x)\ dx = \frac{1}{13} e^{2x} \left[2Cos(3x) + 3Sen\ (3x) \right] + C}$$

23. - Calcular $\int x\cdot e^{x}dx.$

Solución:

Resolviendo la integral: Escogiendo la sustitución para I:

$$\begin{cases} u = x \Rightarrow du = dx \\ dv = e^{x}dx \Rightarrow \int dv = \int e^{x}dx \Rightarrow v = e^{x} + C \end{cases}$$

Luego: $I = \int x\cdot e^{x}dx = u\cdot v - \int v.du = x\cdot e^{x} - \int e^{x}x + C = x\cdot e^{x} - e^{x} + C = e^{x}\cdot(x-1)+C$

24.- Obtener: $\int (2x+1)\,Sen\,(5x)\,dx$.

Solución:

Resolviendo la integral: Escogiendo la sustitución.

$$\begin{cases} u = 2x+1 \Rightarrow du = 2dx \Rightarrow \dfrac{du}{2} = dx \\ dv = Sen\,(5x)dx \Rightarrow \int dv = \int Sen\,(5x)dx \Rightarrow v = -\tfrac{1}{5}Cos\,(5x)+C \end{cases}$$

Aplicando la sustitución:

$$I = \int (2x+1)\,Sen\;(5x)\,dx = u\cdot v - \int vdu = -\frac{(2x+1)\,Cos\,(5x)}{5} - \int \left(-\tfrac{1}{5}\,Cos\,(5x)\right)\cdot 2dx + C =$$

$$= -\frac{(2x+1)\,Cos\,(5x)}{5} + \tfrac{2}{5}\underbrace{\int Cos\,(5x)\,dx}_{(I_1)} + C = (*)$$

Cambio de Variable en I_1: $a = 5x \Rightarrow da = 5dx \Rightarrow dx = \dfrac{da}{5}$

Volviendo a (*):

$$(*) = -\frac{(2x+1)Cos(5x)}{5} + \tfrac{2}{5}\int Cos a\cdot\frac{da}{5} + C = -\frac{(2x+1)Cos(5x)}{5} + \tfrac{2}{25}Sen a + C = -\frac{(2x+1)Cos(5x)}{5} + \tfrac{2}{25}Sen(5x)+C$$

25. - Hallar $\int e^{x}Senxdx.$

Solución:

Resolviendo la integral.

Sustitución en *I*:

$$\begin{cases} u = e^{x} \Rightarrow du = e^{x}dx \\ dv = Senxdx \Rightarrow \int dv = \int Senxdx \Rightarrow v = -Cosx + C \end{cases}$$

Entonces:

$$I = \int e^{x}Senxdx = u\cdot v - \int vdu = -e^{x}\cdot Cosx = -\int(-Cosx)\cdot e^{x}dx + C = -e^{x}\cdot Cosx + \underbrace{\int e^{x}Cosxdx}_{(I_1)} + C = (*)$$

I_1 también se resuelve por partes. Se escoge la sustitución.

$$\begin{cases} u = e^{x} \Rightarrow du = e^{x}dx \\ dv = Cosxdx \Rightarrow \int dv = \int Cosxdx \Rightarrow v = Senx + C \end{cases}$$

Volviendo a (*):

$$(*) = -e^{x}\cdot Cosx + e^{x}\cdot Senx - \int e^{x}Senxdx + C = -e^{x}\cdot Cosx + e^{x}\cdot Senx - I + C \quad \Rightarrow \quad I = -e^{x}\cdot Cosx + e^{x}\cdot Senx - I + C$$

Luego, despejando a I:

$$I = -e^{x}Cosx + e^{x}Senx - I + C \quad \Rightarrow \quad I + I = e^{x}(-Cosx+Senx)+C \quad \Rightarrow \quad 2I = e^{x}(Senx-Cosx)+C \quad \Rightarrow \quad I = \tfrac{1}{2}e^{x}(Senx-Cosx)+C$$

$$\Rightarrow \boxed{I = \int e^{x}Senxdx = \tfrac{1}{2}e^{x}(Senx-Cosx)+C}$$

26. - Determinar $\int x^2 Senxdx.$

Solución:

Resolviendo la integral. Se elige la sustitución.

$$\begin{cases} u = x^2 \Rightarrow du = 2x\,dx \\ dv = Senxdx \Rightarrow \int dv = \int Senxdx \Rightarrow v = -Cosx + C \end{cases}$$

Aplicando la sustitución:

$$I = \int x^2 Senxdx = u \cdot v - \int v \cdot du = x^2 \cdot (-Cosx) - \int (-Cosx)\cdot(2xdx) + C = -x^2 \cdot Cosx + 2\underbrace{\int x \cdot Cosxdx}_{(I_1)} + C = (*)$$

I_1 también se resuelve por partes: Se escoge la sustitución.

$$\begin{cases} u = x \Rightarrow du = dx \\ dv = Cosxdx \Rightarrow \int dv = \int Cosxdx \Rightarrow v = Senx + C \end{cases}$$

Volviendo a (*):

$$(*) = -x^2 \cdot Cosx + 2\left(x \cdot Senx - \int Senxdx\right) + C = -x^2.Cosx + 2x \cdot Senx - 2\int Senxdx + C = -x^2 \cdot Cosx + 2x \cdot Senx + 2Cosx + C$$

En este ejercicio Nº 26 hubo que aplicar dos veces la técnica de Integración por Partes. Esta es la adecuada oportunidad para explicar y aplicar el ***Método alternativo***.

Para calcular una integral donde el integrando contiene como factor a funciones de la forma: $P(x)\cdot e^{ax}$, $P(x)\cdot Sen\,(ax)$, $P(x)\cdot Cos\,(ax)$, etc., siendo *P(x)* un polinomio de grado n, se construye una tabla de dos columnas. La columna de la izquierda se inicia con el polinomio *P(x)*, que ha sido seleccionado como *"u"* en la sustitución elegida y la de la derecha con la otra función del tipo: e^{ax}, $Sen(ax)$, $Cos(ax)$, quien forma parte del *"dv"* en la misma sustitución. En cada fila posterior y en secuencia, en la primera columna se van escribiendo las derivadas sucesivas del polinomio hasta que la misma se haga igual cero (derivada de una constante), y en la segunda columna se escriben las integrales sucesivas de e^{ax}, $Sen(ax)$, $Cos(ax)$, etc., hasta llegar a la fila donde la primera columna se hace igual a cero. Para escribir el resultado final se procede de la siguiente manera: Se multiplica *primera fila primera columna* por *segunda fila segunda columna* (resultado positivo) más *segunda fila primera columna* por *tercera fila segunda columna* (resultado negativo) más *tercera fila primera columna* por *cuarta fila segunda columna* (resultado positivo), y así sucesivamente.

Tabla

1ª F - 1ª C	
2ª F - 1ª C	(+) 2ª F - 2ª C
3ª F - 1ª C	(-) 3ª F - 2ª C
	(+) 4ª F - 2ª C

RESULTADO DE LA INTEGRAL

I= (1ª F - 1ª C)·(2ª F - 2ª C) - (2ª F - 1ª C)·(3ª F - 2ª C) + (3ª F - 1ª C)·(4ª F - 2ª C) - …

Ahora se resolverá el ejercicio Nº 26 aplicando el *Método Alternativo*.

26. - Determinar $\int x^2 Senx dx.$

Solución:

x^2	$Senx$
$(x^2)' = 2x$	$\int Senxdx = -Cosx + C$
$(2x)' = 2$	$\int (-Cosx)dx = -Senx + C$
$(2)' = 0$	$\int (-Senx)dx = Cosx + C$

Luego, el resultado es:

$$I = \int x^2 Senxdx = x^2 \cdot (-Cosx) - [2x \cdot (-Senx)] + 2 \cdot Cosx + C = -x^2 \cdot Cosx + 2x \cdot Senx + 2Cosx + C$$

Se obtiene la misma solución.

Cuando al resolver una integral por partes y se tiene que aplicar la técnica repetidas veces, puede resultar un procedimiento de significativa dificultad; entonces es cuando el *Método Alternativo* resulta de mucha utilidad, siempre y cuando la integral a resolver permita su aplicación.

En esta sección sobre Integración por Partes, algunas de las integrales de este tipo serán resueltas por ambos métodos.

27. - Hallar $\int (x^2 - x) \cdot Cos\,(2x)dx \cdot$

Solución:

Resolviendo la integral. Sustitución a aplicar en I:

$$\begin{cases} u = x^2 - x \Rightarrow du = (2x-1)dx \\ dv = Cos(2x)dx \Rightarrow \int dv = \int Cos(2x)dx \Rightarrow v = \frac{1}{2} Sen(2x) + C \end{cases}$$

Entonces:

$$I = \int (x^2 - x) \cdot Cos(2x)dx = u.v - \int vdu = \frac{1}{2}(x^2 - x) \cdot Sen(2x) - \frac{1}{2}\underbrace{\int Sen(2x) \cdot (2x-1)dx}_{(I_1)} + C = (*)$$

I_1 también se resuelve por partes: Se selecciona la nueva sustitución.

$$\begin{cases} u = 2x - 1 \Rightarrow du = 2dx \\ dv = Sen\,(2x)dx \Rightarrow \int dv = \int Sen\,(2x)dx \Rightarrow v = -\frac{1}{2} Cos\,(2x) + C \end{cases}$$

Volviendo a (*) para aplicar la nueva sustitución:

$$(*) = \tfrac{1}{2}(x^2 - x) \cdot Sen(2x) - \tfrac{1}{2}\left[-\tfrac{1}{2}(2x-1) \cdot Cos(2x) + \tfrac{1}{2}\underbrace{\int Cos(2x) \cdot 2dx}_{(I_2)}\right] + C = (**)$$

Cambio de variable para I_2: $a = 2x \Rightarrow da = 2dx$

Volviendo a (**):

$$(**) = I = \tfrac{1}{2}(x^2 - x) \cdot Sen\,(2x) + \tfrac{1}{4}(2x-1) \cdot Cos\,(2x) - \tfrac{1}{4}\int Cos\,a \cdot da + C =$$

$$= \frac{1}{2}(x^2 - x) \cdot Sen\,(2x) + \frac{1}{4}(2x-1) \cdot Cos\,(2x) - \frac{1}{4} Sena + C =$$

$$= \frac{1}{2}(x^2 - x) \cdot Sen\,(2x) + \frac{1}{4}(2x-1) \cdot Cos\,(2x) - \frac{1}{4} Sen\,(2x) + C$$

La integral del ejercicio Nº 27 también se puede obtener por el *Método Alternativo*:

27. - Hallar $\int (x^2 - x) Cos(2x) dx \cdot$

Solución:

$x^2 - x$	$Cos(2x)$
$(x^2 - x)' = 2x - 1$	$\int Cos(2x)dx = \frac{1}{2} Sen(2x) + C$
$(2x-1)' = 2$	$\int \frac{1}{2} Sen\,(2x)dx = -\frac{1}{4} Cos\,(2x) + C$
$(2)' = 0$	$\int \left[-\frac{1}{4} Cos\,(2x)\right] dx = -\frac{1}{8} Sen\,(2x) + C$

Luego, el resultado es:

$$I = \int (x^2 - x) Cos\,(2x) dx = (x^2 - x) \cdot \tfrac{1}{2} Sen\,(2x) - (2x-1) \cdot \left[-\tfrac{1}{4} Cos\,(2x)\right] + 2 \cdot \left[-\tfrac{1}{8} Sen(2x)\right] + C =$$

$$= \tfrac{1}{2}(x^2 - x) Sen\,(2x) + \tfrac{1}{4}(2x-1) Cos\,(2x) - \tfrac{1}{4} Sen\,(2x) + C$$

Se obtiene la misma solución.

28. - Determinar $\int (x^2 - x + 1)\, e^{5x} dx \cdot$

Solución:

Se resuelve la integral: Sustitución a aplicar en I:

$$\begin{cases} u = x^2 - x + 1 \Rightarrow du = (2x-1)\,dx \\ dv = e^{5x}dx \Rightarrow \int dv = \int e^{5x} dx \Rightarrow v = \dfrac{1}{5} e^{5x} + C \end{cases}$$

Entonces, aplicando la sustitución:

$$I = \int (x^2 - x + 1) \cdot e^{5x} dx = u \cdot v - \int v du = \frac{1}{5}(x^2 - x + 1) \cdot e^{5x} - \frac{1}{5} \underbrace{\int (2x-1) \cdot e^{5x} dx}_{(I_1)} + C = (*)$$

I_1 también se resuelve por partes: Se escoge la sustitución.

$$\begin{cases} u = 2x - 1 \Rightarrow du = 2dx \\ dv = e^{5x}dx \Rightarrow \int dv = \int e^{5x} dx \Rightarrow v = \dfrac{1}{5} e^{5x} + C \end{cases}$$

Volviendo a (*):

$$(*) = \frac{1}{5}(x^2 - x + 1) \cdot e^{5x} - \frac{1}{5}\left[\frac{1}{5}(2x-1) \cdot e^{5x} - \frac{2}{5}\int e^{5x} dx\right] + C = \frac{1}{5}(x^2 - x + 1) \cdot e^{5x} - \frac{1}{25}(2x-1) \cdot e^{5x} + \frac{2}{25}\int \frac{1}{5} e^{5x}.5dx + C =$$

$$= \frac{1}{5}(x^2 - x + 1) \cdot e^{5x} - \frac{1}{25}(2x-1) \cdot e^{5x} + \frac{2}{125} e^{5x} + C$$

Aplicando el *Método Alternativo*:

28. - Determinar $\int (x^2 - x + 1) e^{5x} dx \cdot$

Solución:

$x^2 - x + 1$	e^{5x}
$(x^2 - x + 1)' = 2x - 1$	$\int e^{5x} dx = \frac{1}{5} e^{5x} + C$
$(2x-1)' = 2$	$\int \frac{1}{5} e^{5x} dx = \frac{1}{25} e^{5x} + C$
$(2)' = 0$	$\int \frac{1}{25} e^{5x} dx = \frac{1}{125} e^{5x} + C$

Entonces, obteniendo el resultado final:

$$I = \int (x^2 - x + 1) \cdot e^{5x} dx = (x^2 - x + 1) \cdot \tfrac{1}{5} e^{5x} - (2x-1) \cdot \tfrac{1}{25} e^{5x} + 2 \cdot \tfrac{1}{125} e^{5x} + C = \tfrac{1}{5}(x^2 - x + 1) \cdot e^{5x} - \tfrac{1}{25}(2x-1) \cdot e^{5x} + \tfrac{2}{125} e^{5x} + C$$

Se obtiene igual resultado.

29. - Comprobar que $\int x^3 e^{2x}dx = \frac{1}{2}e^{2x}\left(x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{3}{2}x - \frac{3}{4}\right) + C\cdot$

Comprobación:

Resolviendo la integral: Se plantea la sustitución a utilizar en I .

$$\begin{cases} u = x^3 \Rightarrow du = 3x^2dx \\ dv = e^{2x}dx \Rightarrow \int dv = \int e^{2x}dx \Rightarrow v = \frac{1}{2}e^{2x} + C \end{cases}$$

Luego, al aplicar la sustitución:

$$I = \int x^3 e^{2x}dx = u.v - \int v.du = \frac{1}{2}x^3 e^{2x} - \frac{3}{2}\underbrace{\int x^2 e^{2x}dx}_{(I_1)} + C = (*)$$

I_1 se resuelve también por partes. La sustitución a aplicar es:

$$\begin{cases} u = x^2 \Rightarrow du = 2xdx \\ dv = e^{2x}dx \Rightarrow \int dv = \int e^{2x}dx \Rightarrow v = \frac{1}{2}e^{2x} + C \end{cases}$$

Volviendo a (*) para aplicar esta sustitución:

$$(*) = I = \frac{1}{2}x^3e^{2x} - \frac{3}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}x^2e^{2x} - \int xe^{2x}dx\right) + C = \frac{1}{2}x^3e^{2x} - \frac{3}{4}x^2e^{2x} + \frac{3}{2}\underbrace{\int xe^{2x}dx}_{(I_2)} + C = (**)$$

I_2 se resuelve también por partes. La sustitución a aplicar es:

$$\begin{cases} u = x \Rightarrow du = dx \\ dv = e^{2x}dx \Rightarrow \int dv = \int e^{2x}dx \Rightarrow v = \frac{1}{2}e^{2x} + C \end{cases}$$

Volviendo a (**) para aplicar la sustitución:

$$(**) = \frac{1}{2}x^3e^{2x} - \frac{3}{4}x^2e^{2x} + \frac{3}{2}\left(\frac{1}{2}xe^{2x} - \frac{1}{2}\int e^{2x}dx\right) + C = \frac{1}{2}x^3e^{2x} - \frac{3}{4}x^2e^{2x} + \frac{3}{4}xe^{2x} - \frac{3}{4}\int e^{2x}dx + C =$$

$$= \frac{1}{2}x^3e^{2x} - \frac{3}{4}x^2e^{2x} + \frac{3}{4}xe^{2x} - \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}e^{2x} + C = \frac{1}{2}x^3e^{2x} - \frac{3}{4}x^2e^{2x} + \frac{3}{4}xe^{2x} - \frac{3}{8}e^{2x} + C =$$

$$= \frac{1}{2}e^{2x}\left(x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{3}{2}x - \frac{3}{4}\right) + C$$

L. Q. Q. C.

Ahora se resuelve utilizando el *Método Alternativo.*

29. - Comprobar que $\int x^3 e^{2x}dx = \frac{1}{2}e^{2x}\left(x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{3}{2}x - \frac{3}{4}\right) + C\cdot$

Solución:

x^3	e^{2x}
$(x^3)' = 3x^2$	$\int e^{2x}dx = \frac{1}{2}e^{2x} + C$
$(3x^2)' = 6x$	$\int \frac{1}{2}e^{2x}dx = \frac{1}{4}e^{2x} + C$
$(6x)' = 6$	$\int \frac{1}{4}e^{2x}dx = \frac{1}{8}e^{2x} + C$
$(6)' = 0$	$\int \frac{1}{8}e^{2x}dx = \frac{1}{16}e^{2x} + C$

Obteniendo el resultado:

$$I = \int x^3e^{2x}dx = x^3\cdot\tfrac{1}{2}e^{2x} - 3x^2\cdot\tfrac{1}{4}e^{2x} + 6x\cdot\tfrac{1}{8}e^{2x} - 6\cdot\tfrac{1}{16}e^{2x} + C =$$

$$= \tfrac{1}{2}x^3e^{2x} - \tfrac{3}{4}x^2e^{2x} + \tfrac{3}{4}xe^{2x} - \tfrac{6}{16}e^{2x} + C = \frac{1}{2}e^{2x}\left(x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{3}{2}x - \frac{3}{4}\right) + C$$

Resultado esperado.

30.- Compruebe si: $\int \frac{Ln^4 x}{x^3}dx = -\frac{1}{4x^2}\cdot\left(Ln^4 x^{\sqrt[4]{2}} + Ln^3 x^{\sqrt[3]{4}} + Ln^2 x^{\sqrt{6}} + Ln\, x^6 + Ln\, e^3\right) + C$ **.**

Sugerencia: Haga $Ln\, x = z$ **.**

<u>Comprobando</u>:

Resolviendo la integral. Considerando la sugerencia, se tiene lo siguiente: $Ln\, x = z \Rightarrow x = e^z \Rightarrow dx = e^z dz$

Aplicando la sugerencia: $I = \int \frac{Ln^4 x}{x^3}dx = \int \frac{z^4}{e^{3z}}\cdot e^z dz = \int z^4 \cdot e^{-2z}dz$

La integral se resuelve por partes. A esta integral se le puede aplicar el *Método Alternativo*. Se elige la sustitución:

$$\begin{cases} u = z^4 \\ dv = e^{-2z}dz \end{cases}$$

z^4	e^{-2z}
$4z^3$	$-\frac{1}{2}e^{-2z}$
$12z^2$	$\frac{1}{4}e^{-2z}$
$24z$	$-\frac{1}{8}e^{-2z}$
24	$\frac{1}{16}e^{-2z}$
0	$-\frac{1}{32}e^{-2z}$

Obteniendo el resultado:

$$I = z^4\cdot\left(-\frac{1}{2}e^{-2z}\right) - 4z^3\cdot\frac{1}{4}e^{-2z} + 12z^2\cdot\left(-\frac{1}{8}e^{-2z}\right) - 24z\cdot\frac{1}{16}e^{-2z} + 24\cdot\left(-\frac{1}{32}e^{-2z}\right) + C =$$

$$= -\frac{1}{2}z^4e^{-2z} - z^3e^{-2z} - \frac{3}{2}z^2e^{-2z} - \frac{3}{2}ze^{-2z} - \frac{3}{4}e^{-2z} + C = -\frac{2z^4e^{-2z} + 4z^3e^{-2z} + 6z^2e^{-2z} + 6ze^{-2z} + 3e^{-2z}}{4} + C =$$

$$= -\frac{1}{4}e^{-2z}\cdot\left(2z^4 + 4z^3 + 6z^2 + 6z + 3\right) + C$$

Ahora se devuelve el cambio sugerido.

$$I = -\frac{1}{4}x^{-2}\cdot\left(2Ln^4 x + 4Ln^3 x + 2Ln^2 x + 6Ln\, x + 3\right) + C =$$

$$= -\frac{1}{4x^2}\cdot\left[\left(\sqrt[4]{2}\right)^4\cdot Ln^4 x + \left(\sqrt[3]{4}\right)^3\cdot Ln^3 x + \left(\sqrt{2}\right)^2\cdot Ln^2 x + 6Ln\, x + 3\cdot Ln\, e\right] + C =$$

$$= -\frac{1}{4x^2}\cdot\left[\left(\sqrt[4]{2}\cdot Ln\, x\right)^4 + \left(\sqrt[3]{4}\cdot Ln\, x\right)^3 + \left(\sqrt{2}\cdot Ln\, x\right)^2 + Ln\, x^6 + Ln\, e^3\right] + C =$$

$$= -\frac{1}{4x^2}\cdot\left(Ln^4 x^{\sqrt[4]{2}} + Ln^3 x^{\sqrt[3]{4}} + Ln^2 x^{\sqrt{2}} + Ln\, x^6 + Ln\, e^3\right) + C$$

L. Q. Q. C.

31.- Comprobar: $\int (3x-1)^2(3Cosx - Senx)dx = 9\cdot\left(3x^2 - 4x - 5\right)\cdot Sen\, x + 3\cdot\left(3x^2 + 16x - \frac{35}{3}\right)\cdot Cos\, x + C$

<u>Comprobando</u>:

Esta integral se puede resolver utilizando la integración por partes. Por el tipo de integral, se puede aplicar el método alternativo. Como el polinomio es el cuadrado de una diferencia, se desarrolla como producto notable.

Luego:

$$I = \int (3x-1)^2(3Cosx - Senx)dx = \int \left(9x^2 - 6x + 1\right)\cdot(3Cosx - Senx)dx = u\cdot v - \int v\cdot dv = (*)$$

Sustitución:

$$\begin{cases} u = 9x^2 - 6x + 1 \\ dv = 3Cosx - Senx \end{cases}$$

Aplicando el Método Alternativo:

$9x^2 - 6x + 1$	$3Cosx - Senx$
$18x - 6$	$3Senx + Cosx$
18	$-3Cosx + Senx$
0	$-3Senx - Cosx$

Siguiendo la regla del Método Alternativo, se tiene:

$$I=(9x^2-6x+1)\cdot(3Senx+Cosx)-(18x-6)\cdot(-3Cosx+Senx)+18\cdot(-3Senx-Cosx)+C=$$
$$=27x^2Senx+9x^2Cosx-18xSenx-6xCosx+3Senx+Cosx+54xCosx-18xSenx-18Cosx+6Senx-54Senx-18Cosx+C=$$
$$=(27x^2-18x+3-18x+6-54)\cdot Senx+(9x^2-6x+1+54x-18-18)\cdot Cosx+C=$$
$$=(27x^2-36x-45)\cdot Senx+(9x^2+48x-35)\cdot Cosx+C=9\cdot(3x^2-4x-5)\cdot Senx+3\cdot\left(3x^2+16x-\frac{35}{3}\right)\cdot Cosx+C$$

32.- Comprobar que $\int\left[Sen\left(2^x\right)+2^x\cdot x\cdot Cos\left(2^x\right)\cdot Ln\,2\right]dx=x\cdot Sen\left(2^x\right)+C$.

Comprobación:

Resolviendo a la integral:

$$I=\int\left[Sen\left(2^x\right)+2^x\cdot x\cdot Cos\left(2^x\right)\cdot Ln\,2\right]dx=\underbrace{\int Sen\left(2^x\right)dx}_{(I_1)}+\underbrace{\int 2^x\cdot x\cdot Cos\left(2^x\right)\cdot Ln\,2\,dx}_{(I_2)}=(*)$$

Resolviendo a I_2 por partes:

$$I_2=\int 2^x\cdot x\cdot Cos\left(2^x\right)\cdot Ln\,2\,dx=u\cdot v-\int v\cdot du=(**)$$

Sustitución a aplicar:

$$\begin{cases}u=x\Rightarrow du=dx\\ dv=2^x\cdot Cos\left(2^x\right)\cdot Ln2\,dx=Cos\left(2^x\right)\cdot 2^x\cdot Ln2\,dx=Cos\left(2^x\right)\cdot d\left(2^x\right)=d\left[Sen\left(2^x\right)\right]\Rightarrow\int d\left[Sen\left(2^x\right)\right]\Rightarrow v=Sen\left(2^x\right)+C\end{cases}$$

Volviendo a (**):

$$(**)=I_2=x\cdot Sen\left(2^x\right)-\int Sen\left(2^x\right)dx+C_2=x\cdot Sen\left(2^x\right)-I_1+C_2$$

Volviendo a (*):

$$I=\int Sen\left(2^x\right)dx+\int 2^x\cdot x\cdot Cos\left(2^x\right)\cdot Ln\,2\,dx=\int Sen\left(2^x\right)dx+x\cdot Sen\left(2^x\right)-\int Sen\left(2^x\right)dx+C=x\cdot Sen\left(2^x\right)+C$$

Luego:

$$\boxed{\int\left[Sen\left(2^x\right)+2^x\cdot x\cdot Cos\left(2^x\right)\cdot Ln\,2\right]dx=x\cdot Sen\left(2^x\right)+C}$$

L. Q. Q. C.

33.- Verificar que $\int Sen\left(\sqrt{2x}\right)dx=-\sqrt{2x}Cos\left(\sqrt{2x}\right)-Sen\left(\sqrt{2x}\right)+C.$

Verificación:

Resolviendo la integral. Cambio de Variable en *I*: $a=\sqrt{2x}\Rightarrow a^2=2x\Rightarrow 2ada=2dx\Rightarrow dx=ada$

Aplicando el cambio:

$$I=\int Sen\left(\sqrt{2x}\right)dx=\int Sen\,a\cdot ada=(*)$$

Resolviendo la integral por partes: Eligiendo la sustitución.

$$\begin{cases}u=a\Rightarrow du=da\\ dv=Sen\,a\,da\Rightarrow\int dv=\int Sen\,a\,da\Rightarrow v=-Cosa+C\end{cases}$$

Volviendo a (*) para aplicar la sustitución:

$$(*)=I=u\cdot v-\int vdu=-a\cdot Cosa+\int Cosada+C=-a\cdot Cosa+Sena+C=-2\sqrt{x}Cos\left(\sqrt{2x}\right)+Sen\left(\sqrt{2x}\right)+C$$

L. Q. Q. V

34.- Verificar si $\int Sen(Ln\,x)dx=\frac{x}{2}\cdot\left[Sen(Ln\,x)-Cos(Ln\,x)\right]+C$.

Verificando:

Resolviendo la integral: Se escoge la sustitución a utilizar.

$$\begin{cases}u=Sen(Ln\,x)\Rightarrow du=\dfrac{Cos(Ln\,x)dx}{x}\\ dv=dx\Rightarrow\int dv=\int dx\Rightarrow v=x+C\end{cases}$$

Aplicando la sustitución:

$$I=\int Sen\left(Ln\,x\right)dx=u\cdot v+\int v\cdot du=x\cdot Sen\left(Ln\,x\right)-\int x\cdot\frac{Cos\left(Ln\,x\right)dx}{x}+C=x\cdot Sen\left(Ln\,x\right)-\underbrace{\int Cos\left(Ln\,x\right)dx}_{(I_1)}+C=(*)$$

I_1 se resuelve por partes: Se escoge nueva sustitución.

$$\begin{cases} u=Cos\left(Ln\,x\right)\Rightarrow du=-\dfrac{Sen\left(Ln\,x\right)dx}{x} \\ dv=dx\Rightarrow\int dv=\int dx\Rightarrow v=x+C \end{cases}$$

Volviendo a (*) para aplicar esta nueva sustitución.

$$(*)=I=x\cdot Sen\left(Ln\,x\right)-x\cdot Cos\left(Ln\,x\right)-\int x\cdot\frac{Sen\left(Ln\,x\right)dx}{x}+C=x\cdot Sen\left(Ln\,x\right)-x\cdot Cos\left(Ln\,x\right)-\int Sen\left(Ln\,x\right)dx+C=$$
$$=x\cdot Sen\left(Ln\,x\right)-x\cdot Cos\left(Ln\,x\right)-I+C.$$

La integral es cíclica. Se procede a despejar a la integral inicial.

$$I=x\cdot Sen\left(Ln\,x\right)-x\cdot Cos\left(Ln\,x\right)-I+C$$

$$2I=x\cdot\left[Sen\left(Ln\,x\right)-Cos\left(Ln\,x\right)\right]+C\Rightarrow \boxed{I=\frac{x}{2}\cdot\left[Sen\left(Ln\,x\right)-Cos\left(Ln\,x\right)\right]+C}$$

L. Q. Q. V.

35.- Verificar: $\int\left[2t\cdot 10^{2t}\cdot\left(1+t\cdot Ln10\right)\right]dt=t^2\cdot 10^{2t}+C$.

Verificación:

Resolviendo la integral:

$$I=\int\left[2t\cdot 10^{2t}\cdot\left(1+t\cdot Ln10\right)\right]dt=\int 2t\cdot 10^{2t}\,dt+\int 2t\cdot 10^{2t}\cdot t\cdot Ln10\,dt=2\underbrace{\int t\cdot 10^{2t}\,dt}_{(I_1)}+2\underbrace{\int t^2\cdot 10^{2t}\cdot Ln10\,dt}_{(I_2)}=(*)$$

Resolviendo a I_2 por partes:

$$I_2=\int t^2\cdot 10^{2t}\cdot Ln10\,dt=u\cdot v-\int v\,du=(**)$$

Sustituciones:

$$\begin{cases} u=t^2\Rightarrow du=2tdt \\ dv=10^{2t}\cdot Ln10\,dt\Rightarrow\int dv=\underbrace{\int 10^{2t}\cdot Ln10\,dt}_{(I_3)} \end{cases}$$

Cambio de variable en I_3:

$$a=2t\Rightarrow da=2dt\Rightarrow dt=\frac{da}{2}$$

Luego: $v=\frac{1}{2}\int 10^{a}\cdot Ln\,a\cdot da=\frac{1}{2}10^{a}+C=\frac{1}{2}10^{2t}+C\quad\Rightarrow v=\frac{1}{2}10^{2t}+C$

Volviendo a (**):

$$(**)=I_2=\frac{1}{2}t^2\cdot 10^{2t}-\frac{1}{2}\int 10^{2t}\cdot 2t\,dt+C_2=\frac{1}{2}t^2\cdot 10^{2t}-\int t\cdot 10^{2t}\,dt+C_2=\frac{1}{2}t^2\cdot 10^{2t}-I_1+C_2$$

Volviendo a (*):

$$(*)=I=2\int t\cdot 10^{2t}\,dt+2\left[\frac{1}{2}t^2\cdot 10^{2t}-\int t\cdot 10^{2t}\,dt\right]+C=2\int t\cdot 10^{2t}\,dt+t^2\cdot 10^{2t}-2\int t\cdot 10^{2t}\,dt+C=t^2\cdot 10^{2t}+C$$

Luego:

$$\boxed{\int\left[2t\cdot 10^{2t}\cdot\left(1+t\cdot Ln10\right)\right]dt=t^2\cdot 10^{2t}+C}$$

L. Q. Q. V.

36.- Compruebe que: $\int \frac{e^{ArcTg\,x}dx}{\left(1+x^2\right)^{\frac{3}{2}}} = \frac{(1-x)}{2}\cdot\frac{e^{ArcTg\,x}}{\sqrt{1+x^2}} + C$.

Comprobación:

Se factoriza el denominador del integrando:

$$I = \int \frac{e^{ArcTg\,x}}{\left(1+x^2\right)^{\frac{3}{2}}}dx = \int \frac{e^{ArcTg\,x}}{\left(1+x^2\right)^{\frac{1}{2}}\cdot\left(1+x^2\right)}dx = (*)$$

Ahora se utiliza la integración por partes. Sustitución a aplicar en I:

$$u = \begin{cases} \frac{1}{\left(1+x^2\right)^{\frac{1}{2}}} = \left(1+x^2\right)^{-\frac{1}{2}} \quad \Rightarrow \quad du = -\frac{x\,dx}{\left(1+x^2\right)^{\frac{3}{2}}} \\ dv = \frac{e^{ArcTg\,x}}{1+x^2}dx \Rightarrow \int dv = \int \frac{e^{ArcTg\,x}}{1+x^2}dx \Rightarrow v = e^{ArcTg\,x} + C \end{cases}$$

Volviendo a (*):

$$I = u\cdot v - \int v\cdot du = \frac{e^{ArcTg\,x}}{\left(1+x^2\right)^{\frac{1}{2}}} + \int \frac{x\cdot e^{ArcTg\,x}}{\left(1+x^2\right)^{\frac{3}{2}}}dx = \frac{e^{ArcTg\,x}}{\sqrt{1+x^2}} + \underbrace{\int \frac{x\cdot e^{ArcTg\,x}}{\left(1+x^2\right)^{\frac{1}{2}}\cdot\left(1+x^2\right)}dx}_{(I_1)} = (**)$$

Se utiliza nuevamente la integración por partes para resolver a I_1.

$$\begin{cases} u = \frac{x}{\left(1+x^2\right)^{\frac{1}{2}}} \quad \Rightarrow \quad du = \frac{dx}{\left(1+x^2\right)^{\frac{3}{2}}} \\ dv = \frac{e^{ArcTg\,x}}{1+x^2}dx \Rightarrow v = e^{ArcTg\,x} + C \end{cases}$$

Volviendo a (**):

$$I = \frac{e^{ArcTg\,x}}{\sqrt{1+x^2}} + \left[\frac{x\cdot e^{ArcTg\,x}}{\sqrt{1+x^2}} - \int \frac{e^{ArcTg\,x}}{\left(1+x^2\right)^{\frac{3}{2}}}dx\right] = \frac{e^{ArcTg\,x}}{\sqrt{1+x^2}} + \frac{x\cdot e^{ArcTg\,x}}{\sqrt{1+x^2}} - \int \frac{e^{ArcTg\,x}}{\left(1+x^2\right)^{\frac{3}{2}}}dx =$$

$$= (1-x)\cdot\frac{e^{ArxTg\,x}}{\sqrt{1+x^2}} - \underbrace{\int \frac{e^{ArcTg\,x}}{\left(1+x^2\right)^{\frac{3}{2}}}dx}_{(I)} \quad \Rightarrow \quad I = (1-x)\cdot\frac{e^{ArcTg\,x}}{\sqrt{1+x^2}} - I.$$

La integral es *cíclica.*

Luego, despejando a I:

$$2I = (1-x)\cdot\frac{e^{ArcTg\,x}}{\sqrt{1+x^2}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{I = \frac{(1-x)}{2}\cdot\frac{e^{ArcTg\,x}}{\sqrt{1+x^2}}}$$

37.- Calcular: $\int \frac{e^x}{x}dx$.

Solución:

Si se ha de resolver por partes esta integral, hay dos posibilidades:

1ª Sustitución: $\begin{cases} u = e^x \Rightarrow du = e^x dx \\ dv = \frac{dx}{x} \Rightarrow v = Ln|x| + C \end{cases}$

2ª Sustitución: $\begin{cases} u = \frac{1}{x} \Rightarrow du = -\frac{1}{x^2}dx \\ dv = e^x dx \Rightarrow v = e^x + C \end{cases}$

Utilizando la 1ª sustitución, resulta:

$$I=\int\frac{e^x}{x}dx=u\cdot v-\int v\cdot du=e^x\cdot Ln|x|-\underbrace{\int Ln|x|\cdot e^x dx}_{(I_1)}+C=(*)$$

También se integra por partes a I_1, haciendo la siguiente sustitución:

$$\begin{cases} u=Ln|x|\Rightarrow du=\dfrac{dx}{x} \\ dv=e^x dx\Rightarrow v=e^x+C \end{cases}$$

Luego:

$$(*)=e^x\cdot Ln|x|-\left(e^x\cdot Ln|x|-\int\frac{e^x}{x}dx\right)+C=e^x\cdot Ln|x|-e^x\cdot Ln|x|+\int\frac{e^x}{x}dx+C=\int\frac{e^x}{x}dx+C$$

Al resultar la misma integral, entonces, por esta sustitución no hay solución. Considérese ahora la 2ª Sustitución:

$$I=\int\frac{e^x}{x}dx=u\cdot v-\int v\cdot du=\frac{e^x}{x}+\underbrace{\int\frac{e^x}{x^2}dx}_{(I_2)}+C=(*)$$

Integrando por partes a I_2, haciendo la siguiente sustitución:

$$\begin{cases} u=e^x\Rightarrow du=e^x dx \\ dv=\dfrac{dx}{x^2}=x^{-2}dx\Rightarrow v=-\dfrac{1}{x}+C \end{cases}$$

Luego:

$$(*)=\frac{e^x}{x}+\left(-\frac{e^x}{x}+\int\frac{e^x}{x}dx\right)+C=\frac{e^x}{x}-\frac{e^x}{x}+\int\frac{e^x}{x}dx+C\quad=\int\frac{e^x}{x}dx+C$$

Al resultar la misma integral, entonces, por esta sustitución tampoco hay solución. ¿Cómo conseguir una solución? Considérese el siguiente planteamiento: Numéricamente, $\frac{1}{x}>\frac{1}{x^2}$ pero la diferencia entre el valor de $\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}\right)$ y el de $\frac{1}{x}$ es sumamente pequeña, por lo que puede proponerse que: $\frac{1}{x}\approx\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}\right)$. Esto también permite considerar que: $\int\frac{e^x}{x}dx=\int e^x\cdot\frac{1}{x}dx\approx\int e^x\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}\right)dx$. Si se resuelve esta nueva integral, el resultado es muy aproximado a la solución de la integral original. El procedimiento es:

$$I=\int\frac{e^x}{x}dx\approx\int e^x\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}\right)dx=\int\frac{e^x}{x}dx-\underbrace{\int\frac{e^x}{x^2}dx}_{(I_3)}=(*)$$

A I_3 se integra por partes, haciendo la siguiente sustitución:

$$\begin{cases} u=e^x\Rightarrow du=e^x dx \\ dv=\dfrac{1}{x^2}dx=x^{-2}dx\Rightarrow v=-\dfrac{1}{x}+C \end{cases}$$

Luego:

$$(*)=\int\frac{e^x}{x}dx-\left(-\frac{e^x}{x}+\int\frac{e^x}{x}dx+C\right)=\int\frac{e^x}{x}dx+\frac{e^x}{x}-\int\frac{e^x}{x}dx+C=\frac{e^x}{x}+C$$

Como es una posible solución, entonces:

$$\boxed{\int\frac{e^x}{x}dx=\frac{e^x}{x}+C}$$

Considérese válida la solución.

38.- Integrar: $\int \frac{Ln\,(2x)}{Ln\,(4x)}dx$.

Solución:

Resolviendo la integral por partes. Sustitución en I:

$$\begin{cases} u = \frac{Ln\,(2x)}{Ln\,(4x)} \Rightarrow du = \frac{Ln2}{x \cdot Ln^2(4x)}dx \\ dv = dx \Rightarrow \int dv = \int dx \Rightarrow v = x + C \end{cases}$$

Aplicando la sustitución:

$$I = \int \frac{Ln\,(2x)}{Ln\,(4x)}dx = u \cdot v - \int v \cdot du = \frac{x \cdot Ln2}{Ln\,(4x)} - \int x \cdot \frac{Ln2}{xLn^2(4x)}dx + C =$$

$$= \frac{x \cdot Ln2}{Ln\,(4x)} - Ln2 \cdot \int \frac{dx}{Ln^2(4x)} + C = \frac{x \cdot Ln2}{Ln\,(4x)} - Ln2 \cdot \underbrace{\int Ln^{-2}(4x)dx}_{(I_1)} + C = (*)$$

Cambio de variable en I_1: $Ln\,(4x) = a \quad \Rightarrow \quad e^{Ln4x} = e^a \quad \Rightarrow \quad 4x = e^a \quad \Rightarrow \quad x = \frac{e^a}{4} \Rightarrow \quad dx = \frac{1}{4}e^a da$

Volviendo a (*):

$$(*) = \frac{x \cdot Ln2}{Ln\,(4x)} - Ln2 \cdot \int a^{-2} \cdot \frac{1}{4}e^a da + C = \frac{x \cdot Ln2}{Ln\,(4x)} - \frac{Ln2}{4} \cdot \underbrace{\int a^{-2}e^a da}_{(I_2)} + C = (**)$$

Integrando por Partes a I_2.

Sustitución:

$$\begin{cases} u = e^a \Rightarrow du = e^a da \\ dv = a^{-2}da \quad \Rightarrow \quad \int dv = \int a^{-2}da \quad \Rightarrow \quad v = -\frac{1}{a} + C \end{cases}$$

Volviendo a (**):

$$(**) = \int a^{-1}e^a da = u \cdot v - \int v \cdot du = -\frac{e^a}{a} - \int\left(-\frac{1}{a}\right) \cdot e^a da + C = -\frac{e^a}{a} + \underbrace{\int \frac{e^a}{a}da}_{(I_3)} + C = (***)$$

Con base en el resultado obtenido en el ejercicio Nº 37: $\boxed{I_3 = \int \frac{e^a}{a}da = \frac{e^a}{a} + C}$

Luego, volviendo a (***):

$$(***) = I_2 = -\frac{e^a}{a} + \frac{e^a}{a} = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{I_2 = 0}$$

Volviendo a (*): $I = \frac{x \cdot Ln2}{Ln\,(4x)} - \frac{Ln2}{4} \cdot 0 + C = \frac{x \cdot Ln2}{Ln\,(4x)} + C$

Entonces: $\boxed{I = \int \frac{Ln\,(2x)}{Ln\,(4x)}dx = \frac{x \cdot Ln2}{Ln\,(4x)} + C}$

Considérese válida la solución.

39.- Verifique si: $\int \frac{x^2}{\left(x\,Sen\,x + Cos\,x\right)^2}dx = \frac{Sen\,x - xCos\,x}{Cos\,x + xSen\,x} + C$.

Verificación:

Resolviendo la integral. Obteniendo la derivada del binomio entre paréntesis ubicado en el denominador, se tiene que: $\frac{d\left(xSen\,x + Cos\,x\right)}{dx} = xCos\,x$

Entonces, buscando que aparezca en el numerador esta derivada, se hace $x^2 = x \cdot x$ y se multiplica tanto al numerador y como al denominador por $Cos\,x$:

$$I = \int \frac{x \cdot x \cdot Cos\,x}{Cos\,x \cdot (x\,Sen\,x + Cos\,x)^2}dx = \int \underbrace{\frac{x}{Cos\,x} \cdot \frac{xCosx}{(x\,Sen\,x + Cos\,x)^2}dx}_{(I_1)} = (*)$$

I_1 se resuelve por partes. Sustitución a aplicar:

$$\begin{cases} u = \dfrac{x}{Cos\,x} \Rightarrow \quad du = \dfrac{Cos\,x + xSen\,x}{Cos^2 x} \\ dv = \dfrac{xCosx}{(x\,Sen\,x + Cos\,x)^2}dx \Rightarrow \int dv = \int \dfrac{xCosx}{(x\,Sen\,x + Cos\,x)^2}dx = (**) \end{cases}$$

Cambio de variable en (**): $a = xSen\,x + Cos\,x \Rightarrow da = xCos\,x\,dx$

Volviendo a (**):

$$(**) = \int dv = \int \frac{da}{a^2} = \int a^{-2}da \quad \Rightarrow \quad v = -\frac{1}{a} + C \quad \Rightarrow \quad v = -\frac{1}{xSen\,x + Cos\,x} + C$$

Volviendo a (*):

$$(*) = I = u \cdot v - \int vdu = \frac{x}{Cos\,x} \cdot \left(-\frac{1}{xSen\,x + Cos\,x} \right) - \int \left(-\frac{1}{xSen\,x + Cos\,x} \right)\left(\frac{Cos\,x + xSen\,x}{Cos^2 x} \right)dx + C =$$

$$= -\frac{x}{Cos\,x \cdot (xSen\,x + Cos\,x)} + \int \frac{Cos\,x + xSen\,x}{xSen\,x + Cos\,x} \cdot \frac{dx}{Cos^2 x} + C = -\frac{x}{Cos\,x \cdot (xSen\,x + Cos\,x)} + \int \frac{dx}{Cos^2 x} + C =$$

$$= -\frac{x}{Cos\,x \cdot (xSen\,x + Cos\,x)} + \int Sec^2 x\,dx + C = -\frac{x}{Cos\,x \cdot (xSen\,x + Cos\,x)} + Tg\,x + C = -\frac{x}{Cos\,x \cdot (xSen\,x + Cos\,x)} + \frac{Sen\,x}{Cos\,x} + C =$$

$$= \frac{-x + Sen\,x(xSen\,x + Cos\,x)}{Cos\,x \cdot (xSen\,x + Cos\,x)} + C = \frac{-x + xSen^2 x + Sen\,x \cdot Cos\,x}{Cos\,x \cdot (xSen\,x + Cos\,x)} + C = \frac{-x(1 - Sen^2 x) + Sen\,x \cdot Cos\,x}{Cos\,x \cdot (xSen\,x + Cos\,x)} + C =$$

$$= \frac{-xCos^2 x + Sen\,x \cdot Cos\,x}{Cos\,x \cdot (xSen\,x + Cos\,x)} + C = \frac{Cos\,x(-xCosx + Sen\,x)}{Cos\,x \cdot (xSen\,x + Cos\,x)} + C = \frac{Sen\,x - xCosx}{Cos\,x + xSen\,x} + C$$

L. Q. Q. V.

40.- Determine si: $\int \frac{x^2}{(x \cdot Cos\,x - Sen\,x)^2}dx = \frac{x \cdot Sen\,x + Cos\,x}{x \cdot Cos\,x - Sen\,x} + C$.

Determinando:

Resolviendo la integral. Obteniendo la derivada del binomio entre paréntesis ubicado en el denominador, se tiene que:

$$\frac{d\,(x \cdot Cosx - Sen\,x)}{dx} = -x \cdot Sen\,x.$$

Entonces, buscando que aparezca en el numerador esta derivada, se hace $x^2 = x \cdot x$ y se multiplica tanto al numerador y como al denominador por $-Sen\,x$:

$$I = \int \frac{x \cdot x\,dx}{(x \cdot Cos\,x - Sen\,x)^2} = \int \frac{x \cdot x(-Sen\,x)dx}{(-Sen\,x)(x \cdot Cos\,x - Sen\,x)^2} = \int \underbrace{\left(-\frac{x}{Sen\,x} \right) \cdot \left[\frac{-x \cdot Sen\,x\,dx}{(x \cdot Cos\,x - Sen\,x)^2} \right]}_{(I_1)} = (*)$$

I_1 se resuelve por partes.

Sustitución a aplicar:

$$\begin{cases} u = -\dfrac{x}{Sen\,x} \Rightarrow \quad du = \dfrac{x \cdot Cos\,x - Sen\,x}{Sen^2 x} \\ dv = -\dfrac{x \cdot Senx}{(x \cdot Cos\,x - Sen\,x)^2}dx \Rightarrow \int dv = \int -\dfrac{x \cdot Senx}{(x \cdot Cos\,x - Sen\,x)^2}dx = (**) \end{cases}$$

Cambio de variable en (**): $a = x \cdot Cos\,x - Sen\,x \Rightarrow da = -xSen\,x\,dx$

Volviendo a (**):

$$(**)=\int dv=\int \frac{da}{a^2}=\int a^{-2}da \quad \Rightarrow \quad v=-\frac{1}{a}+C \quad \Rightarrow \quad v=-\frac{1}{x\cdot Cos\,x-Sen\,x}+C$$

Volviendo a (*):

$$(*)=u\cdot v-\int vdu=\frac{x}{Sen\,x}\cdot\frac{1}{x\cdot Cos\,x-Sen\,x}-\int\left(-\frac{1}{x\cdot Cos\,x-Sen\,x}\right)\left(-\frac{Sen\,x-x\cdot Cos\,x}{Sen^2x}\right)dx+C=$$

$$=\frac{x}{Sen\,x\cdot(x\cdot Cos\,x-Sen\,x)}+\int\frac{x\cdot Cos\,x-Sen\,x}{x\cdot Cos\,x-Sen\,x}\cdot\frac{dx}{Sen^2x}+C=\frac{x}{Sen\,x\cdot(x\cdot Cos\,x-Sen\,x)}+\int\frac{dx}{Sen^2x}+C=$$

$$=\frac{x}{Sen\,x\cdot(x\cdot Cos\,x-Sen\,x)}+\int Cos\sec^2 x\,dx+C=\frac{x}{Sen\,x\cdot(x\cdot Cos\,x-Sen\,x)}+Cotg\,x+C=$$

$$=\frac{x}{Sen\,x\cdot(x\cdot Cos\,x-Sen\,x)}+\frac{Cos\,x}{Sen\,x}+C=\frac{x-Cos\,x\cdot(x\cdot Cos\,x-Sen\,x)}{Sen\,x\cdot(x\cdot Cos\,x-Sen\,x)}+C=\frac{x-x\cdot Cos^2\,x+Cos\,x\cdot Sen\,x}{Sen\,x\cdot(x\cdot Cos\,x-Sen\,x)}+C=$$

$$=\frac{x\cdot\left(1-Cos^2x\right)+Cos\,x\cdot Sen\,x}{Sen\,x\cdot(x\cdot Cos\,x-Sen\,x)}+C=\frac{x\cdot Sen^2x+Cos\,x\cdot Sen\,x}{Sen\,x\cdot(x\cdot Cos\,x-Sen\,x)}+C=\frac{Sen\,x\cdot(x\cdot Sen\,x+Cos\,x)}{Sen\,x\cdot(x\cdot Cos\,x-Sen\,x)}+C=\frac{x\cdot Sen\,x+Cos\,x}{x\cdot Cos\,x-Sen\,x}+C$$

L. Q. Q. D.

41.- Resuelva: $\int e^{2w}\cdot Sen(2w)dw$.

Solución:

Resolviendo la integral. Sustitución a aplicar:

$$\begin{cases} u=Sen(2w)\Rightarrow du=Cos(2w)dw \\ dv=e^{2w}dw\Rightarrow v=\frac{1}{2}e^{2w}+C \end{cases}$$

Luego:

$$I=\int e^{2w}\cdot Sen(2w)dw=u\cdot v-\int v\cdot du=Sen(2w)\cdot\tfrac{1}{2}e^{2w}-\int\tfrac{1}{2}e^{2w}\cdot Cos(2w)dw+C=$$

$$=\tfrac{1}{2}e^{2w}Sen(2w)-\tfrac{1}{2}\underbrace{\int e^{2w}\cdot Cos(2w)dw}_{(I_1)}+C=(*)$$

Resolviendo a I_1 por partes.

Sustitución:

$$\begin{cases} u=Cos(2w)\Rightarrow du=-2Sen(2w)dw \\ dv=e^{2w}dw\Rightarrow v=\frac{1}{2}e^{2w}+C \end{cases}$$

Luego:

$$I_1=\int e^{2w}\cdot Cos(2w)dw=u\cdot v-\int v\cdot du=Cos(2w)\cdot\tfrac{1}{2}e^{2w}-\int\tfrac{1}{2}e^{2w}\cdot[-2Sen(2w)]dw+C=$$

$$=\tfrac{1}{2}e^{2w}\cdot Cos(2w)+\int e^{2w}\cdot Sen(2w)dw+C=\tfrac{1}{2}e^{2w}\cdot Cos(2w)+I+C$$

Volviendo a (*):

$$I=\tfrac{1}{2}e^{2w}Sen(2w)-\tfrac{1}{2}\int e^{2w}\cdot Cos(2w)dw+C=\tfrac{1}{2}e^{2w}Sen(2w)-\tfrac{1}{2}I_1+C=$$

$$=\tfrac{1}{2}e^{2w}Sen(2w)-\tfrac{1}{2}\cdot\left[\tfrac{1}{2}e^{2w}\cdot Cos(2w)+I\right]+C=\tfrac{1}{2}e^{2w}Sen(2w)-\tfrac{1}{4}e^{2w}\cdot Cos(2w)-\tfrac{1}{2}I+C$$

Entonces:

$$I+\tfrac{1}{2}I=\tfrac{1}{2}e^{2w}Sen(2w)-\tfrac{1}{4}e^{2w}\cdot Cos(2w)+C$$

$$\tfrac{3}{2}I=\tfrac{1}{2}e^{2w}Sen(2w)-\tfrac{1}{4}e^{2w}\cdot Cos(2w)+C$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{I=\tfrac{1}{3}e^{2w}Sen(2w)-\tfrac{3}{2}e^{2w}\cdot Cos(2w)+C}$$

42.- Comprobar si $\int \frac{x \cdot Cos\, x}{Sen^2 x} dx = -\frac{x}{Sen\, x} - Ln\left| CoTg\left(\frac{x}{2}\right)\right| + C$.

Comprobando:

Resolviendo la integral: Acomodando el integrando para integrar por partes.

$$I = \int \frac{x \cdot Cos\, x}{Sen^2 x} dx = \int x \cdot \frac{Cos\, x}{Sen^2 x} dx = u \cdot v - \int v du = (*)$$

Sustitución en I:

$$\begin{cases} u = x \Rightarrow du = dx \\ dv = \dfrac{Cos\, x}{Sen^2 x} dx \Rightarrow \int dv = \underbrace{\int \dfrac{Cos\, x}{Sen^2 x} dx}_{(I_1)} = \int \dfrac{da}{a^2} = \int a^{-2} da = -\dfrac{1}{a} + C = -\dfrac{1}{Sen\, x} + C = v \end{cases}$$

$c.v.$ en I_1 : $a = Sen\, x \quad \Rightarrow \quad da = Cos\, x dx$

Volviendo a (*):

$$(*) = I = -\frac{x}{Sen\, x} + \int \frac{dx}{Sen\, x} + C = -\frac{x}{Sen\, x} + \int Cosec\, x\, dx + C = -\frac{x}{Sen\, x} + Ln\left|Cosec\, x - CoTg\, x\right| + C =$$

$$= -\frac{x}{Sen\, x} + Ln\left|\frac{1}{Sen\, x} - \frac{Cos\, x}{Sen\, x}\right| + C = -\frac{x}{Sen\, x} + Ln\left|\frac{1 - Cos\, x}{Sen\, x}\right| + C = -\frac{x}{Sen\, x} + Ln\left|\sqrt{\frac{(1 - Cos\, x)^2}{Sen^2\, x}}\right| + C =$$

$$= -\frac{x}{Sen\, x} + Ln\left|\sqrt{\frac{(1 - Cos\, x)^2}{1 - Cos^2\, x}}\right| + C = -\frac{x}{Sen\, x} + Ln\left|\sqrt{\frac{(1 - Cos\, x)^2}{(1 + Cos\, x)\cdot(1 - Cos\, x)}}\right| + C =$$

$$= -\frac{x}{Sen\, x} + Ln\left|\sqrt{\frac{1 - Cos\, x}{1 + Cos\, x}}\right| + C = -\frac{x}{Sen\, x} + Ln\left|Tg\left(\tfrac{x}{2}\right)\right| + C = -\frac{x}{Sen\, x} + Ln\left|\frac{1}{CoTg\left(\frac{x}{2}\right)}\right| + C =$$

$$= -\frac{x}{Sen\, x} + Ln 1 - Ln\left|CoTg\left(\tfrac{x}{2}\right)\right| + C = -\frac{x}{Sen\, x} - Ln\left|CoTg\left(\tfrac{x}{2}\right)\right| + C$$

L. Q. Q. C.

43.- Determine si es cierto que $\int Ln\left[Sec\left(ArcTg\ \theta\right)\right] d\theta = Ln\left[\frac{Sec^{\theta}\left(ArcTg\ \theta\right)}{e^{\theta - ArcTg\ \theta}}\right] + C$.

Determinando:

Resolviendo la integral: Para utilizar la integración por partes, se plantea la sustitución correspondiente.

$$\begin{cases} u = Ln\left[Sec\left(ArcTg\ \theta\right)\right] \Rightarrow du = \dfrac{\left[Sec\left(ArcTg\ \theta\right)\right]'}{Sec\left(arcTg\ \theta\right)} = \dfrac{Sec\left(ArcTg\ \theta\right)\cdot Tg\left(ArcTg\ \theta\right)\cdot\left(ArcTg\ \theta\right)'}{Sec\left(rcTg\ \theta\right)} d\theta \Rightarrow du = \dfrac{\theta\, d\theta}{1 + \theta^2} \\ dv = d\theta \Rightarrow \int dv = \int d\theta \Rightarrow v = \theta + C \end{cases}$$

Aplicando la sustitución en la integral:

$$I = \int Ln\left[Sec\left(ArcTg\ \theta\right)\right] d\theta = \theta \cdot Ln\left[Sec\left(ArcTg\ \theta\right)\right] - \int \frac{\theta^2}{1 + \theta^2} d\theta + C =$$

$$= Ln\left[Sec\left(ArcTg\ \theta\right)\right]^{\theta} - \int\left(1 - \frac{1}{1 + \theta^2}\right) d\theta + C = Ln\left[Sec^{\theta}\left(ArcTg\ \theta\right)\right] - \int d\theta + \int \frac{d\theta}{1 + \theta^2} + C =$$

$$= Ln\left[Sec^{\theta}\left(ArcTg\ \theta\right)\right] - \theta + ArcTg\ \theta + C = Ln\left[Sec^{\theta}\left(ArcTg\ \theta\right)\right] - \left(\theta - ArcTg\ \theta\right) + C =$$

$$= Ln\left[Sec^{\theta}\left(ArcTg\ \theta\right)\right] - \left(\theta - ArcTg\ \theta\right)\cdot Lne + C = Ln\left[Sec^{\theta}\left(ArcTg\ \theta\right)\right] - \cdot Ln\left(e^{\theta - ArcTg\ \theta}\right) + C =$$

$$= Ln\left[\frac{Sec^{\theta}\left(ArcTg\ \theta\right)}{e^{\theta - ArcTg\ \theta}}\right] + C$$

L. Q. Q. D.

44.- Verifique si: $\int Ln\left[Sec\left(ArcTg\sqrt{1+x^2}\right)\right]dx = Ln\left[\dfrac{Sec\left(ArcTg\sqrt{1+x^2}\right)}{e}\right]^x + \sqrt{2}\cdot ArcTg\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}x\right)+C$.

Verificando:

Resolviendo la integral: Para utilizar la integración por partes, se plantea la sustitución correspondiente.

Seleccionando a *"u"*: $u = Ln\left[Sec\left(ArcTg\sqrt{1+x^2}\right)\right]$

$$du = \frac{d\left[Sec\left(ArcTg\sqrt{1+x^2}\right)\right]}{\left[Sec\left(ArcTg\sqrt{1+x^2}\right)\right]} = \frac{Sec\left(ArcTg\sqrt{1+x^2}\right)\cdot Tg\left(ArcTg\sqrt{1+x^2}\right)\cdot d\left(ArcTg\sqrt{1+x^2}\right)}{Sec\left(ArcTg\sqrt{1+x^2}\right)} =$$

$$= \sqrt{1+x^2}\cdot\frac{1}{1+\left(\sqrt{1+x^2}\right)^2}\cdot d\left[\sqrt{1+x^2}\right] = \frac{\sqrt{1+x^2}}{1+1+x^2}\cdot d\left[\left(1+x^2\right)^{\frac{1}{2}}\right] = \frac{\sqrt{1+x^2}}{2+x^2}\cdot\frac{xdx}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{xdx}{2+x^2}$$

$$\Rightarrow\quad du = \frac{xdx}{2+x^2}$$

Seleccionando a *"dv"*: $dv = dx \;\Rightarrow\; \int dv = \int dx \;\Rightarrow\; v = x + C$

Aplicando la sustitución en la integral:

$$I = \int Ln\left[Sec\left(ArcTg\sqrt{1+x^2}\right)\right]dx = x\cdot Ln\left[Sec\left(ArcTg\sqrt{1+x^2}\right)\right] - \int\frac{x^2}{2+x^2}dx + C =$$

$$= Ln\left[Sec\left(ArcTg\sqrt{1+x^2}\right)\right]^x - \int\left(1-\frac{2}{2+x^2}\right)dx + C = Ln\left[Sec\left(ArcTg\sqrt{1+x^2}\right)\right]^x - \int dx + 2\int\frac{dx}{2+x^2} + C =$$

$$= Ln\left[Sec\left(ArcTg\sqrt{1+x^2}\right)\right]^x - x + 2\int\frac{dx}{\sqrt{2}^2+x^2} + C = Ln\left[Sec\left(ArcTg\sqrt{1+x^2}\right)\right]^x - x\cdot Ln\, e + \frac{2}{\sqrt{2}}\cdot ArcTg\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) + C =$$

$$= Ln\left[Sec\left(ArcTg\sqrt{1+x^2}\right)\right]^x - Ln\, e^x + \sqrt{2}\cdot ArcTg\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) + C = Ln\,\frac{\left[Sec\left(ArcTg\sqrt{1+x^2}\right)\right]^x}{e^x} + \sqrt{2}\cdot ArcTg\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) + C =$$

$$= Ln\left[\frac{Sec\left(ArcTg\sqrt{1+x^2}\right)}{e}\right]^x + \sqrt{2}\cdot ArcTg\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) + C$$

L. Q. Q. V.

45.- Comprueben, utilizando técnicas de integración, la siguiente igualdad:

$$\int\frac{\sqrt{2-x-x^2}}{x^2}dx = -\frac{\sqrt{2-x-x^2}}{x} + \frac{\sqrt{2}}{4}Ln\left|\frac{(4-x)-2\sqrt{2}\cdot\sqrt{2-x-x^2}}{3x}\right| - ArcSen\left(\frac{2x+1}{3}\right) + C$$

Comprobando:

Iniciemos la resolución de la integral completando cuadrados en el radicando:

$$2-x-x^2 = -\left(x^2+x-2\right) = -\left(x^2+x+\tfrac{1}{4}-\tfrac{1}{4}-2\right) = -\left[\left(x+\tfrac{1}{2}\right)^2-\tfrac{9}{4}\right] =$$

$$= -\left[\left(\frac{2x+1}{2}\right)^2-\frac{9}{4}\right] = -\left[\frac{(2x+1)^2}{4}-\frac{9}{4}\right] = -\frac{1}{4}\left[(2x+1)^2-9\right] = \frac{1}{4}\left[9-(2x+1)^2\right]$$

Procedemos a transformar el integrando:

$$I = \int\frac{\sqrt{\frac{1}{4}\left[9-(2x+1)^2\right]}}{x^2}dx = \frac{1}{2}\int\frac{\sqrt{9-(2x+1)^2}}{x^2}dx = \frac{1}{2}\int\sqrt{9-(2x+1)^2}\cdot x^{-2}\,dx$$

La integral resultante la resolvemos por partes.

Cambio:

$$\begin{cases} u = \sqrt{9-(2x+1)^2} & \Rightarrow\; du = \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{9-(2x+1)^2}}\cdot\left[-4\cdot(2x+1)\right]dx = -\dfrac{2\cdot(2x+1)}{\sqrt{9-(2x+1)^2}}dx \\ dv = x^{-2}dx & \Rightarrow\; \int dv = \int x^{-2}dx \;\Rightarrow\; v = -\dfrac{1}{x} \end{cases}$$

Volviendo a la integral:

$$I=\frac{1}{2}\cdot\left(u\cdot v-\int v\cdot du\right)=-\frac{\sqrt{9-(2x+1)^2}}{2x}-\frac{1}{2}\cdot\int\left[\left(-\frac{1}{x}\right)\cdot\left(-\frac{2\cdot(2x+1)}{\sqrt{9-(2x+1)^2}}\right)\right]dx+C=$$

$$=-\frac{\sqrt{9-(2x+1)^2}}{2x}-\int\frac{2x+1}{x\cdot\sqrt{9-(2x+1)^2}}dx+C=-\frac{\sqrt{9-(4x^2+4x+1)}}{2x}-\int\frac{2x\cdot dx}{x\cdot\sqrt{9-(2x+1)^2}}-\int\frac{dx}{x\cdot\sqrt{9-(2x+1)^2}}+C=$$

$$=-\frac{\sqrt{9-4x^2-4x-1}}{2x}-\underbrace{\int\frac{2dx}{\sqrt{9-(2x+1)^2}}}_{(I_1)}-\underbrace{\int\frac{dx}{x\cdot\sqrt{9-(2x+1)^2}}}_{(I_2)}+C=$$

$$=-\frac{\sqrt{8-4x^2-4x}}{2x}-I_1-I_2+C=$$

$$=-\frac{\sqrt{4(2-x^2-x)}}{2x}-I_1-I_2+C=$$

$$=-\frac{2\cdot\sqrt{2-x^2-x}}{2x}-I_1-I_2+C=$$

$$=-\frac{\sqrt{2-x^2-x}}{x}-I_1-I_2+C=(*)$$

Resolviendo a I_1:

$$I_1=\int\frac{2dx}{\sqrt{9-(2x+1)^2}}$$

Cambio de variable en I_1:

$$w=2x+1\quad\Rightarrow\quad dw=2dx$$

Luego:

$$I_1=\int\frac{dw}{\sqrt{9-w^2}}=\int\frac{dw}{\sqrt{3^2-w^2}}=ArcSen\left(\frac{w}{3}\right)=ArcSen\left(\frac{2x+1}{3}\right)+C_1$$

Volviendo a (*):

$$(*)=I=-\frac{\sqrt{2-x^2-x}}{x}-ArcSen\left(\frac{2x+1}{3}\right)-I_2+C=-\frac{\sqrt{2-x^2-x}}{x}-ArcSen\left(\frac{2x+1}{3}\right)-\underbrace{\int\frac{dx}{x\cdot\sqrt{9-(2x+1)^2}}}_{(I_2)}+C=(**)$$

Al comparar la expresión anterior con la respuesta propuesta, solo falta determinar a qué es igual I_2. Se entiende entonces que I_2, según la respuesta propuesta, debe ser igual a:

$$\frac{\sqrt{2}}{4}Ln\left|\frac{(4-x)-2\sqrt{2}\cdot\sqrt{2-x-x^2}}{3x}\right|$$

Resulta muy útil que se indique cuál es el resultado que se ha de obtener. En este caso, según la respuesta indicada, de la integral I_2 se debe obtener un *logaritmo neperiano.* Como por tablas se tiene la *fórmula elemental*:

$$\int\frac{du}{u}=Ln|u|+C$$

Un camino para resolver esta integral, es arreglar el integrando de tal manera que su estructura sea similar a la de la fórmula elemental citada.

Pero también se tiene por el Teorema Fundamental del Cálculo Integral que la derivación e integración de una función son operaciones inversas. Esto significa que toda función continua integrable verifica que la derivada de su integral es igual a ella misma. Y esta es la opción que vamos a considerar.

Entonces, ahora vamos a utilizar la respuesta propuesta y transformarla según criterios matemáticos adecuados.

$$\int \frac{\sqrt{2-x-x^2}}{x^2}\,dx = -\frac{\sqrt{2-x-x^2}}{x} + \frac{\sqrt{2}}{4} Ln\left|\frac{(4-x)-2\sqrt{2}\cdot\sqrt{2-x-x^2}}{3x}\right| - ArcSen\left(\frac{2x+1}{3}\right) + C$$

$$I = -\frac{\sqrt{2-x-x^2}}{x} - ArcSen\left(\frac{2x+1}{3}\right) + \frac{\sqrt{2}}{4} Ln\left|\frac{(4-x)-2\sqrt{2}\cdot\sqrt{2-x-x^2}}{3x}\right| + C$$

$$I = P(x) + \frac{\sqrt{2}}{4} Ln\left|\frac{(4-x)-2\sqrt{2}\cdot\sqrt{2-x-x^2}}{3x}\right| + C$$

Se sustituye por $P(x)$ los términos de la integral que están identificados como parte de la solución.

$$I = P(x) + \frac{\sqrt{2}}{4} Ln\left[(4-x)-2\sqrt{2}\cdot\sqrt{2-x-x^2}\right] - \frac{\sqrt{2}}{4} Ln|3x| + C$$

Aplicando propiedades de logaritmos.

$$I = P(x) + \frac{\sqrt{2}}{4} Ln\left[(4-x)-2\sqrt{2}\cdot\sqrt{2-x-x^2}\right] - \frac{\sqrt{2}}{4} Ln|x| - \frac{\sqrt{2}}{4} Ln\,3 + C$$

$$I = P(x) + \frac{\sqrt{2}}{4} Ln\left[(4-x)-2\sqrt{2}\cdot\sqrt{2-x-x^2}\right] - \frac{\sqrt{2}}{4} Ln|x| + C$$

La constante mayor, de valor indeterminado, absorbe a la menor.

$$I = P(x) + \frac{\sqrt{2}}{4}\int \frac{\left[(4-x)-2\sqrt{2}\cdot\sqrt{2-x-x^2}\right]'}{(4-x)-2\sqrt{2}\cdot\sqrt{2-x-x^2}}\,dx - \frac{\sqrt{2}}{4}\int \frac{dx}{x} + C$$

Aplicando la fórmula elemental

$$\int \frac{du}{u} = Ln|u| + C$$

Obteniendo ahora la derivada del numerador de la primera integral:

$$\left[(4-x)-2\sqrt{2}\cdot\sqrt{2-x-x^2}\right]' = \frac{d\left[(4-x)-2\sqrt{2}\cdot\sqrt{2-x-x^2}\right]}{dx} = \frac{\sqrt{2}\cdot(2x+1)}{\sqrt{2-x-x^2}} - 1$$

Sustituyendo la derivada obtenida en la integral:

$$I = P(x) + \frac{\sqrt{2}}{4}\int \frac{\dfrac{\sqrt{2}\cdot(2x+1)}{\sqrt{2-x-x^2}} - 1}{(4-x)-2\sqrt{2}\cdot\sqrt{2-x-x^2}}\,dx - \frac{\sqrt{2}}{4}\int \frac{dx}{x} + C$$

Siguiendo el procedimiento:

$$I = P(x) + \frac{\sqrt{2}}{4}\int \left[\frac{1}{(4-x)-2\sqrt{2}\cdot\sqrt{2-x-x^2}}\right]\cdot\left[\frac{\sqrt{2}\cdot(2x+1)}{\sqrt{2-x-x^2}} - 1\right]dx - \frac{\sqrt{2}}{4}\int \frac{dx}{x} + C$$

$$I = P(x) + \frac{\sqrt{2}}{4}\int \left[\frac{1}{(4-x)-2\sqrt{2}\cdot\sqrt{2-x-x^2}}\right]\cdot\left[\frac{\sqrt{2}\cdot(2x+1)-\sqrt{2-x-x^2}}{\sqrt{2-x-x^2}}\right]dx - \frac{\sqrt{2}}{4}\int \frac{dx}{x} + C$$

$$I = P(x) + \frac{\sqrt{2}}{4}\int \left[\frac{\sqrt{2}\cdot(2x+1)-\sqrt{2-x-x^2}}{\left(4-x-2\sqrt{2}\cdot\sqrt{2-x-x^2}\right)\cdot\sqrt{2-x-x^2}}\right]dx - \frac{\sqrt{2}}{4}\int \frac{dx}{x} + C$$

$$I = P(x) + \frac{\sqrt{2}}{4}\int \left[\frac{\sqrt{2}\cdot(2x+1)-\sqrt{2-x-x^2}}{\left(4-x-2\sqrt{2}\cdot\sqrt{2-x-x^2}\right)\cdot\sqrt{2-x-x^2}} - \frac{1}{x}\right]dx + C$$

Aplicando propiedades de las integrales indefinidas.

$$I = P(x) + \frac{\sqrt{2}}{4}\int \left[\frac{x\cdot\left[\sqrt{2}\cdot(2x+1)-\sqrt{2-x-x^2}\right]-\left(4-x-2\sqrt{2}\cdot\sqrt{2-x-x^2}\right)\cdot\sqrt{2-x-x^2}}{x\cdot\left(4-x-2\sqrt{2}\cdot\sqrt{2-x-x^2}\right)\cdot\sqrt{2-x-x^2}}\right]dx + C$$

$$I = P(x) + \frac{\sqrt{2}}{4}\int \left[\frac{2\sqrt{2}x^2+\sqrt{2}x-x\cdot\sqrt{2-x-x^2}-4\sqrt{2-x-x^2}+x\cdot\sqrt{2-x-x^2}+2\sqrt{2}.(2-x-x^2)}{x\cdot\left(4-x-2\sqrt{2}\cdot\sqrt{2-x-x^2}\right)\cdot\sqrt{2-x-x^2}}\right]dx + C$$

$$I = P(x) + \frac{\sqrt{2}}{4}\int \left[\frac{2\sqrt{2}x^2+\sqrt{2}x-4\sqrt{2-x-x^2}+4\sqrt{2}-2\sqrt{2}x-2\sqrt{2}x^2}{x\cdot\left(4-x-2\sqrt{2}\cdot\sqrt{2-x-x^2}\right)\cdot\sqrt{2-x-x^2}}\right]dx + C$$

$$I = P(x) + \frac{\sqrt{2}}{4}\int \left[\frac{4\sqrt{2}-\sqrt{2}x-4\sqrt{2-x-x^2}}{x\cdot\left(4-x-2\sqrt{2}\cdot\sqrt{2-x-x^2}\right)\cdot\sqrt{2-x-x^2}}\right]dx + C$$

$$I = P(x) + \frac{\sqrt{2}}{4}\int\left[\frac{4\sqrt{2} - \sqrt{2}x - 2\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{2-x-x^2}}{x\cdot\left(4 - x - 2\sqrt{2}\cdot\sqrt{2-x-x^2}\right)\cdot\sqrt{2-x-x^2}}\right]dx + C$$

$$I = P(x) + \frac{\sqrt{2}}{4}\int\left[\frac{\sqrt{2}\cdot\left[4 - x - 2\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{2-x-x^2}\right]}{x\cdot\left(4 - x - 2\sqrt{2}\cdot\sqrt{2-x-x^2}\right)\cdot\sqrt{2-x-x^2}}\right]dx + C$$

$$I = P(x) + \frac{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}{4}\int\left[\frac{4 - x - 2\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{2-x-x^2}}{x\cdot\left(4 - x - 2\sqrt{2}\cdot\sqrt{2-x-x^2}\right)\cdot\sqrt{2-x-x^2}}\right]dx + C$$

$$I = P(x) + \frac{1}{2}\int\left[\frac{1}{x\cdot\sqrt{2-x-x^2}}\cdot\frac{\left(4 - x - 2\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{2-x-x^2}\right)}{\left(4 - x - 2\sqrt{2}\cdot\sqrt{2-x-x^2}\right)\cdot}\right]dx + C$$

$$I = P(x) + \frac{1}{2}\int\frac{dx}{x\cdot\sqrt{2-x-x^2}} + C$$

Buscando verificar que esta última integral sea I_2, podemos utilizar la completación de cuadrados realizada al inicio de la resolución de este ejercicio: $2 - x - x^2 = \frac{1}{4}\left[9 - (2x+1)^2\right]$

Sustituyendo en la integral:

$$I = P(x) + \frac{1}{2}\int\frac{dx}{x\cdot\sqrt{\frac{1}{4}\left[9-(2x+1)^2\right]}} + C$$

$$I = P(x) + \frac{1}{2}\int\frac{dx}{\frac{1}{2}x\cdot\sqrt{9-(2x+1)^2}} + C$$

$$I = P(x) + \frac{1/2}{1/2}\int\frac{dx}{x\cdot\sqrt{9-(2x+1)^2}} + C$$

$$I = P(x) + \int\frac{dx}{x\cdot\sqrt{9-(2x+1)^2}} + C$$

La integral obtenida es igual a I_2:

$$\int\frac{dx}{x\cdot\sqrt{9-(2x+1)^2}} = I_2$$

Es decir:

$$I_2 = \int\frac{dx}{x\cdot\sqrt{9-(2x+1)^2}} = \frac{\sqrt{2}}{4}Ln\left|\frac{(4-x) - 2\sqrt{2}\cdot\sqrt{2-x-x^2}}{3x}\right|$$

Luego, volviendo a (**):

$$(**) = I = -\frac{\sqrt{2-x^2-x}}{x} - ArcSen\left(\frac{2x+1}{3}\right) - \int\frac{dx}{x\cdot\sqrt{9-(2x+1)^2}} + C =$$

$$= -\frac{\sqrt{2-x^2-x}}{x} - ArcSen\left(\frac{2x+1}{3}\right) - \frac{\sqrt{2}}{4}Ln\left|\frac{(4-x) - 2\sqrt{2}\cdot\sqrt{2-x-x^2}}{3x}\right| + C$$

L. Q. Q. C.

Ejercicios propuestos.-

I. - Comprobar si:

1) $\int x^3 e^{x^2} dx = \frac{1}{2} e^{x^2}\left(x^2 - 1\right) + C$

2) $\int x \cdot Cosxdx = x \cdot Senx + Cosx + C$

3) $\int x \cdot Sec^2(3x)dx = \frac{1}{3} x \cdot Tg(3x) - \frac{1}{9} Ln\left|Sec(3x)\right| + C$

4) $\int ArcCos(2x)dx = x \cdot ArcCos(2x) - \frac{1}{2}\sqrt{1-4x^2} + C$

5) $\int ArcTgxdx = x \cdot ArcTgx - Ln\sqrt{1+x^2} + C$

6) $\int x^2 \cdot \sqrt{1-x}dx = -\frac{2}{105}\sqrt{(1-x)^3} \cdot \left(15x^2 + 12x + 8\right) + C$

7) $\int \frac{xe^x dx}{(1+x)^2} = \frac{e^x}{1+x} + C$

8) $\int x \cdot ArcTgxdx = \frac{1}{2}\left(x^2+1\right) \cdot ArcTg - \frac{1}{2} x + C$

9) $\int x^2 e^{-3x} dx = -\frac{1}{3} e^{-3x}\left(x^2 + \frac{2}{3}x + \frac{2}{9}\right) + C$

10) $\int Sen^3 xdx = -\frac{2}{3} Cos^3 x - Sen^2 x \cdot Cosx + C$

11) $\int x^3 Senxdx = -x^3 Cosx + 3x^2 Senx + 6xCosx - 6Senx + C$

12) $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{1+x}} = \frac{2}{15}\left(3x^2 - 4x + 8\right)\sqrt{1+x} + C$

13) $\int x \cdot ArcSenx^2 dx = \frac{1}{2} x^2 \cdot ArcSenx^2 + \frac{1}{2}\sqrt{1-x^4} + C$

14) $\int Senx \cdot Sen3xdx = \frac{1}{8} Sen3x \cdot Cosx - \frac{3}{8} Senx \cdot Cos3x + C$

15) $\int Sen(Lnx)dx = \frac{1}{2} x\left[Sen(Lnx) - Cos(Lnx)\right] + C$

16) $\int w^5 e^{w^3} dw = \frac{w^3 e^{w^3}}{3} - \frac{e^{w^3}}{3} + C$

17) $\int e^{2x} Cos3x\, dx = \frac{e^{2x} Cos3x}{13} + \frac{3e^{2x} Sen3x}{13} + C$

18) $\int \frac{dx}{\left(1-x^2\right)^3} = \frac{x \cdot \left(5-3x^2\right)}{8\left(1-x^2\right)^2} + \frac{3}{16} Ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right| + C$

19) $\int \sqrt{\left(x^2-1\right)^5} dx = \frac{1}{48} x \cdot \left(8x^4 - 26x^2 + 33\right)\sqrt{x^2-1} - \frac{5}{16} Ln\left|x + \sqrt{x^2-1}\right| + C$

20) $\int Sen^4 xdx = \frac{3}{8} x - \frac{3}{8} Senx \cdot Cosx - \frac{1}{4} Sen^3 x \cdot Cosx + C$

21) $\int Cos^5 xdx = \frac{1}{15}\left(3Cos^4 x + 4Cos^2 x + 8\right) Senx + C$

22) $\int Sen^3 x \cdot Cos^2 xdx = -\frac{1}{5} Cos^3 x\left(Sen^2 x + \frac{2}{3}\right) + C$

23) $\int \frac{xdx}{e^x} = -\frac{x+1}{e^x} + C$

24) $\int x \cdot 2^{-x} dx = -\frac{x\,Ln\,2}{2^x\,Ln^2\,2} + C$

25) $\int x\,SenxCosxdx = -\frac{xCos2x}{4} + \frac{Sen2x}{8} + C$

26) $\int (x^2 + 5x + 6)\,Cos2x\,dx = \frac{(2x^2 + 10x + 11) \cdot Sen2x}{16} + \frac{(2x+5) \cdot Cos2x}{4} + C$

27) $\int \frac{\theta \cdot e^{\theta} d\theta}{(1+\theta)^2} = \frac{e^{\theta}}{1+\theta} + C$

28) $\int e^{2t} \cdot Cos\left(e^t\right)dt = e^t \cdot Sen\left(e^t\right) + Cos\left(e^t\right) + C$

29) $\int Cos\left(\sqrt{1-x}\right)dx = -2\sqrt{1-x} \cdot \left[Sen\left(\sqrt{1-x}\right) + \frac{Cos\left(\sqrt{1-x}\right)}{\sqrt{1-x}}\right] + C$

30) $\int (1+x)Cos\left(\sqrt{x}\right)dx = 2x\sqrt{x} \cdot Sen\sqrt{x} - 10\,Cos\left(\sqrt{x}\right) + 2x\sqrt{x} \cdot Sen\left(\sqrt{x}\right) + 6x \cdot Cos\left(\sqrt{x}\right) + C$

31) $\int \frac{n^2}{2} \cdot Sen\left(\frac{n}{b}\right)dn = \frac{b}{a} \cdot \left[\left(2b^2 - n^2\right) \cdot Cos\left(\frac{n}{b}\right) + 2bn \cdot Sen\left(\frac{n}{b}\right)\right] + C$

32) $\int (3^x \cdot Cos\,x)\,dx = \frac{3^x\,(Sen\,x + Ln\,3 \cdot Cos\,x)}{1 + Ln^2 3} + C$

33) $\int 5\theta^3 Ln(3\theta)\,d\theta = \frac{5}{4}\theta^4 \cdot Ln(3\theta) - \frac{5}{16}\theta^4 + C.$

34) $\int x^3 e^x dx = \left[\left(x^2+6\right) \cdot (x-1) - 2x^2\right] \cdot e^x + C.$

35) $\int x \cdot \frac{ArcSenx}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = x - \sqrt{1-x^2} \cdot ArcSenx + C.$

36) $\int xe^{\sqrt[3]{x}}dx = 3e^{\sqrt[3]{x}} \cdot \left(\sqrt[3]{x^5} - 5\sqrt[3]{x^4} + 20x - 60\sqrt[3]{x^2} + 120\sqrt[3]{x} - 120\right) + C.$

37) $\int Cos\,\sqrt{x}\,dx = 2\sqrt{x} \cdot Sen\,\sqrt{x} + 2Cos\,\sqrt{x} + C$

38) $\int \frac{x^3 dx}{\sqrt{1-x^2}} = -x^2 \cdot \sqrt{1-x^2} - \frac{2}{3}\left(1-x^2\right)^{\frac{1}{2}} + C$

39) $\int x \cdot \frac{ArcSenx}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = x - \sqrt{1-x^2} \cdot ArcSenx + C$

40) $\int ArcSen\sqrt{\frac{x}{a+x}} \cdot dx = (a+x) \cdot ArcSen\sqrt{\frac{x}{x+a}} - \sqrt{ax} + C$

41) $\int \frac{3x^2-1}{\sqrt{x\left(x^2-1\right)}} \cdot ArcSen\left(\frac{x+1}{x-1}\right)dx = 2\sqrt{x\left(x^2-1\right)} \cdot ArcSen\left(\frac{x+1}{x-1}\right) - 2ArcSenx + 2\sqrt{1-x^2} + C$

42) $\int Ln\,\sqrt{x-3}\,dx = x \cdot Ln\left|\sqrt{x-3}\right| - \frac{1}{2}x - \frac{3}{2}Ln\left(x-3\right) + C \qquad con \quad x > 3$

43) $\int Sen\,\sqrt{x}\,dx = -2\sqrt{x} \cdot Cos\,\sqrt{x} + 2Sen\,\sqrt{x} + C \qquad con \quad x > 0$

44) $\int e^{2x} Sen\,(2x)\,dx = \frac{1}{3}e^{2x} \cdot Sen\,(2x) - \frac{3}{2}e^{2x} \cdot Cos\,(2x) + C$

45) $\int \frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \frac{x^4}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{x^6}{24} + \frac{x^8}{32} + C$

46) $\int 7x \cdot e^x dx = 7e^x \cdot (x-1) + C$

47) $\int Sen\,x \cdot Ln^2(Cos\,x)\,dx = -Cos\,x \cdot Ln^2(Cos\,x) + 2Cos\,x \cdot Ln\,(Cos\,x) - 2Cos\,x + C$

48) $\int \left(x^2 - x + 3\right) \cdot e^{3x}dx = \frac{1}{27} \cdot \left(9x^2 - 15x + 32\right) \cdot e^{3x} + C$

49) $\int \frac{Ln\,(x+4)}{\sqrt{x+4}}\,dx = 2\sqrt{x+4} \cdot Ln\left(\frac{x+4}{e^2}\right) + C \qquad con \quad x \geq 0$

50) $\int \frac{Ln\left(Sen\,x\right)}{Sen^2 x}\,dx = -Cotg\,x \cdot \left[Ln\left(Sen\,x\right) + 1\right] - x + C$

51) $\int x^2 \cdot 3^x\,dx = \frac{\left(x^2 \cdot Ln^2 3 - 2x \cdot Ln3 + 2\right) \cdot 3^x}{Ln^3 3} + C$

52) $\int (x+5) \cdot Ln\,(x-2)\,dx = \frac{\left(2x^2 + 20x + 48\right) \cdot Ln\,(x-2) - x^2 - 24x}{4} + C \qquad con \quad x > 2$

53) $\int \left(x^3 + 2x\right) \cdot Cos\,x\,dx = \left(x^3 + 2x - 6x\right) \cdot Cos\,x + \left(4 - 3x^2\right) \cdot Sen\,x + C$

54) $\int \frac{5x \cdot Cos\,(2x)}{Sen^2\,(2x)}\,dx = -\frac{5}{2}x \cdot Cosec\,(2x) + \frac{5}{4}Ln\left|Cosec\,(2x) - Cotg\,(2x)\right| + C$

55) $\int e^x \cdot Cos\left(\frac{x}{3}\right)dx = \frac{9}{10}e^x \cdot \left[Cos\left(\frac{x}{3}\right) + \frac{1}{3}Sen\left(\frac{x}{3}\right)\right] + C$

56) $\int Sec^5 x\,dx = \frac{1}{4}Sec^3 x \cdot Tg\,x - \frac{3}{8}Sec\,x \cdot Tg\,x - \frac{3}{8}Ln\left|Sec\,x + Tg\,x\right| + C$

57) $\int Ln\left(x^2+4\right)dx = x \cdot Ln\left(x^2+4\right) - 2x + 4\,ArcTg\left(\frac{x}{2}\right) + C$

58) $\int \frac{x-6}{e^{3x}}dx = \frac{17-3x}{9e^{3x}} + C$

59) $\int Sen(Ln\,x)dx = \frac{1-x}{2}\cdot Cos(Ln\,x) + C \quad con \ x>0$

60) $\int \sqrt{x+5}\cdot Ln(x+5)dx = \frac{2}{3}(x+5)\sqrt{x+5}\cdot Ln\left(\frac{x+5}{e^{\frac{2}{3}}}\right) + C \qquad con \ x \ge 0$

61) $\int [Ln(4x)]^3 dx = x\cdot\left[Ln^3(4x) - Ln^2(4x)^{\sqrt{3}} - Ln(16x^2) - Ln\,e^4\right] + C$

62) $\int \frac{x^2\cdot Ln(x^3)}{\sqrt{x^3}}dx = \frac{2}{3}x\sqrt{x}\cdot Ln\left(\sqrt[3]{\frac{x^3}{e^2}}\right) + C \qquad con \ x>0$

63) $\int \frac{Cotg\,x\cdot Cos\,x}{Sen^2(2x)}dx = -\frac{1}{2}Cotg\,x\cdot Cosec\,x + \frac{1}{2}Ln\left|Cosec\,x - Cotg\,x\right| + C$

64) $\int x\cdot e^x\cdot Ln(x-1)dx = e^x.[(x-1)\cdot Ln(x-1) - 1] + C \qquad con \quad x>1$

65) $\int \frac{Ln^2 x}{x^2}dx = -\left[\frac{Ln^2 x + Ln(x^2) + 2}{x}\right] + C$

II. - Resolver utilizando la integración por partes:

1) $\int xe^{2x}dx$

2) $\int xe^{x^2}dx$

3) $\int xe^{-2x}dx$

4) $\int x^3e^x dx$

5) $\int x^3 Lnx dx$

6) $\int tLn(t+1)dt$

7) $\int (Lnx)^2 dx$

8) $\int \frac{(Lnx)^2}{x}dx$

9) $\int \frac{xe^{2x}}{(2x+1)^2}dx$

10) $\int (x^2-1)e^x dx$

11) $\int \frac{e^{\frac{1}{t}}}{t^2}dt$

12) $\int \frac{x^3e^{x^2}}{(x^2+1)^2}dt$

13) $\int \frac{dx}{xLn^3x}$

14) $\int ySec^2y\,dy$

15) $\int 3ze^{2z}dz$

16) $\int 7x^3 Sen\,(1+x^2)\,dx$

17) $\int \frac{t+1}{\sqrt[3]{t-5}}dt$

18) $\int Ln\,(2q+1)\,dq$

19) $\int \frac{w^7}{\sqrt[3]{1+w^4}}dw$

20) $\int e^z Senz\,dz$

21) $\int Sen\,(Lnx)\,dx$

(*Sugerencia: cambio de variable:* $z = Lnx$)

22) $\int 5\theta^3 Ln(3\theta)\,d\theta$

23) $\int p^2 Cos(2p)\,dp$

24) $\int ArcSen\,(\frac{t}{3})\,dt$

25) $\int \frac{y^3}{\sqrt{y^2+1}}dy$

26) $\int e^{2w}Cos\,(3-5w)\,dw$

27) $\int ze^{2z^2}Cos\,(-5z^2)\,dz$

28) $\int Sec^3(7\theta)d\theta$

29) $\int Co\sec^3\left(\frac{r}{8}\right)dr$

30) $\int v\ arcTgv\,dv$

31) $\int e^{-15q}Cos\,(1+4q)\,dq$

32) $\int Ln^2(6x)\,dx$

33) $\int Ln(6x^2)\,dx$

34) $\int Ln^2(6x^2)\,dx$

35) $\int \frac{Ln^2(6x)}{6x}dx \qquad (x>0)$

36) $\int Ln\sqrt{5u+3}\,du$

37) $\int t^3 Ln\,(3t+7)\,dt$

38) $\int \frac{Ln\,(2y+1)}{(2y+1)^3}dy$

39) $\int \frac{Ln\,(6w-3)}{6w-3}dw \qquad (w>\frac{1}{2})$

40) $\int \frac{Ln\,(2q)}{5\sqrt[4]{q^3}}dq$

41) $\int zLn\left(\frac{2}{z}\right)dz$

42) $\int 3x\cdot 3^x dx$

43) $\int x^3e^x dx$

44) $\int x^5e^{x^3}dx$

45) $\int ArcSen(2z)dz$

46) $\int \theta^3\cdot\sqrt[4]{7+\theta^2}\,d\theta$

47) $\int e^x\left(\frac{1}{x+1}\right) + Ln\,(x+1)\,dx \quad (x>-1)$

48) $\int \frac{xe^x}{(x+2)^2}dx \qquad (x>-1)$

49) $\int e^{\sqrt{q}}dq$ (*Sugerencia: multiplique y divida el integrando por* $\sqrt{q}$*, luego haga* $z = \sqrt{q}$)

50) $\int t\ Ln\ (t+1)\ dt$

51) $\int xLn2xdx$

52) $\int Ln^2 4xdx$

53) $\int \left(\frac{Lnx}{x}\right)^2 dx$

54) $\int x^4 Ln(2x)dx$

55) $\int Sen(2Lnx)dx$

56) $\int e^{-2x}Cos(4x)dx$

57) $\int e^x Sen(3x)dx$

58) $\int x\,ArcSen(4x)\,dx$

59) $\int x\,ArcTgx\,dx$

60) $\int (3x+1)\,ArcTg\,2x\,dx$

61) $\int Ln\,(2x+3)\,dx$

62) $\int xe^{4x}dx$

63) $\int (3x+2)e^{-x}dx$

64) $\int (x^2+5x-1)e^x dx$

65) $\int xSen3x\,dx$

66) $\int x^2Cos4x\,dx$

67) $\int (3x+1)Cos2x\,dx$

68) $\int (x^2+x+1)Senx\,dx$

69) $\int x^2\cdot ArcSenx dx$

70) $\int ArcSen^2 x\,dx$

71) $\int xSen^2 3x\,dx$

72) $\int Ln(x+\sqrt{1+x^2})\,dx$

73) $\int \frac{e^{ArcTgx}}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}dx$

74) $\int xe^x Senx dx$

75) $\int xe^x Cosxdx$

III.- Compruebe las siguientes integrales, utilizando el *Método Alternativo*:

1) $\int (3x^3 - 2x^2 + 4x + 2)\, e^{-x}\, dx = -e^{-x}\,(3x^3 + 7x^2 + 18x + 20) +$

2) $\int (3x^5 - 2x^2 + 9x - 7)\, e^{2x} dx = e^{2x}\left(\frac{3}{2}x^5 - \frac{15}{4}x^4 + \frac{15}{2}x^3 - \frac{49}{4}x^2 + \frac{67}{4}x - \frac{95}{8}\right) + C$

3) $\int (x^2 + 2)\, Senx\, dx = -x^2 Cosx + 2xSenx + C$

4) $\int (x^3 - x^2 + 3x + 2)\, Cos\,(4x)dx = \left(\frac{1}{4}x^3 - \frac{1}{4}x^2 + \frac{21}{32}x + \frac{17}{32}\right)Sen\,(4x) + \left(\frac{3}{16}x^2 - \frac{1}{8}x + \frac{21}{128}\right)Cos\,(4x) + C$

5) $\int (3x^2 + 2x + 5)\, Cos^2(2x)\, dx = \frac{x^3 + x^2 + 5x}{2} + \frac{(24x^2 + 16x + 37)\, Sen\,(4x)}{64} + \frac{(3x+1)\, Cos\,(4x)}{16} + C$

6) $\int x^2 \cdot e^{3x} dx = \frac{1}{27} e^{3x} \cdot \left(9x^2 - 6x + 2\right) + C$

7) $\int xe^{\sqrt[3]{x}} dx = 3e^{\sqrt[3]{x}} \cdot \left[(x - 60)\cdot\sqrt[3]{x^2} + (120 - 5x)\cdot\sqrt[3]{x} + 20x - 120\right] + C$

$(Sugerencia:\quad Haga\ \ x = z^3)$

8) $\int x^5 \cdot e^{2x} dx = \frac{1}{8} e^{2x} \cdot \left(4x^5 - 10x^4 + 20x^3 - 30x^2 + 30x - 15\right) + C$

9) $\int x^4 \cdot e^{7x} dx = \frac{1}{7} e^{7x} \cdot \left(x^4 - \frac{4}{7}x^3 + \frac{12}{49}x^2 - \frac{24}{343}x + \frac{24}{2401}\right) + C$

10) $\int x \cdot e^{\sqrt[3]{3x}} dx = 3 \cdot e^{\sqrt[3]{3x}} \cdot \left[(x - 20)\cdot\sqrt[3]{\frac{x^2}{3}} + (40 - 5x)\cdot\sqrt[3]{\frac{x}{9}} + \frac{20x}{3} - \frac{40}{3}\right] + C$

IV.- Resuelva aplicando el *Método Alternativo*. Utilice cuando considere necesario Cambio de Variable:

1) $\int (3x^2 + 7x + 1)\, e^x dx$

2) $\int (x^2 - 5x + 1)\, e^{-x} dx$

3) $\int x^3 e^{2x} dx$

4) $\int \frac{x^2 + 3x + 4}{e^x} dx$

5) $\int \left(\frac{x+1}{e^x}\right)^2 dx$

6) $\int x^4 e^{-2x} dx$

7) $\int x^3 e^{x-1} dx$

8) $\int (x-1)^3 e^{x-1} dx$

9) $\int (x+1)^3 e^{2x} dx$

10) $\int (xe^{-x} + 1)^2\, dx$

11) $\int (e^x + x)^2 x dx$

12) $\int (xe^x + 2)^2 e^{-x} dx$

13) $\int (e^x + x)^2 xe^x dx$

14) $\int \frac{(x^2 + 2e^x)^3}{e^x} dx$

15) $\int xSen\,(4x)dx$

16) $\int (4x + 3)Cos(3x)dx$

17) $\int x^2 Cos(6x)dx$

18) $\int (x+1)^2 Cosxdx$

19) $\int (x+2)^3 Senxdx$

20) $\int x^2 (Senx + Cosx)dx$

21) $\int (x^2 + 2x + 5)\cdot(2Senx + 3Cosx)dx$

22) $\int (3x - 1)^2 (3Cosx - Senx)dx$

23) $\int x^2 Sen^2 x\, dx$

$\left[Sugerencia:\ \ Haga\ Sen^2 x = \frac{1}{2}(1 - Cos2x)\right]$

24) $\int (xCosx)^2\, dx$

25) $\int (x^3 + 2x + 1)Sen^2(3x)dx$

26) $\int (x^2 + 3x + 1)\cdot(Sen^2 x - 2Cos^2 x)dx$

27) $\int (x+2)^2 (Senx + Cosx)^2 dx$

28) $\int e^{\sqrt{x}} dx$

29) $\int (3x + 2)\cdot e^{\sqrt{x+1}} dx$

30) $\int \frac{xe^x}{(x+1)^2}\, dx$

V.- Obtenga fórmulas generales para las integrales indicadas:

1) $\int e^{ax} Sen(bx)dx$

2) $\int e^{ax} Cos(bx)dx$

3) $\int (ax + b)e^{ax} dx$

4) $\int (ax^2 + bx + c)e^{ax} dx$

5) $\int (ax + b)\, Ln\,(ax)dx$

6) $\int (ax^2 + bx + c)\, Ln(ax)dx$

7) $\int (ax + b)Sen(ax)dx$

8) $\int (ax + b)Cos\,(ax)dx$

9) $\int (ax^2 + bx + c)Sen\,(ax)dx$

10) $\int (ax^2 + bx + c)Cos\,(ax)dx$

Escritos del Postgrado

CONTEXTO ACADÉMICO:

ENSEÑANZA DE LA MATEMÁTICA

"Una visión holística desde el paradigma de la complejidad".

ENSAYO

"Educación para y por la vida"

Por: EMILY BASTIDAS – C. I. Nº: 19.620.446 > Abril 2016
Cel. Nº: 0426-4759096. E-mail: bastidasemily24@gmail.com
MAESTRÍA EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA – FACE - UC

Basado en la ponencia: *"Didáctica Diferenciada y Evaluación Diferenciada: Educar por y para la vida"*. (FACE-UC, 13-02-2016).
PONENTE: *Magister María Laura Ascanio Rojas.*

Son muchas las reflexiones que surgen al pensar en educación. Los educadores de hoy nos encontramos en una búsqueda constante de actualizaciones educativas, con la finalidad de satisfacer y/o despertar las perspectivas educativas de cada estudiante.

La educación del siglo XXI está cargada de retos, tanto para los docentes como para los estudiantes. Los educadores de este siglo debemos desarrollar tres características o habilidades especiales, que deben ir aunadas a nuestro proceso educativo. Dichas características radican en: la trascendencia, la adaptabilidad y la inclusión.

La trascendencia hace mención a las estrategias aplicadas en el ambiente áulico, es decir, conocer los efectos positivos que dichas estrategias han dejado en cada estudiante, *"se transciende cuando se logran superar las propias metas"* unidas a estas, continúa la adaptabilidad, por lo tanto, no **existe** transcendencia si durante el proceso no se producen cambios, (cambios de mentalidad, cambios positivos en el comportamiento, las calificaciones), y por último pero no menos importante se encuentra la inclusión, y en este punto el docente debe ser audaz, atento, conocer claramente el número y rasgos principales de sus estudiantes, deben incluirse a todos en sus metas educativas.

Siendo la inclusión fundamental en el proceso educativo, surge una forma diferente de llevar este a cabo, se trata de la didáctica diferenciada, que para algunos autores se define de la siguiente manera:

> La Enseñanza Diferenciada es brindar oportunidades para que los estudiantes tengan múltiples opciones para recibir la información, comprender las ideas y expresar lo que han aprendido. Es decir, es: proveer diferentes caminos para adquirir contenidos, procesar la información y elaborar productos. (Tomlinson, 1995).

Siendo esta una definición clara y sencilla, que refresca en pocas líneas lo que el docente de hoy no puede obviar. Dentro de esta "nueva" didáctica diferenciada por la cual debemos guiar nuestros planes educativos – evaluativos, se deben tomar en cuenta puntos importantes, tales como, si dentro del estudiantado se encuentra(n) alguno(s) con necesidades especiales (físicas, psicológicas), para los cuales la planificación debe tener un plan "b" que además de la integración promueva y aplique la inclusión del mismo, tomando en cuenta estos detalles, se podría asegurar el éxito en el proceso educativo.

Así mismo, el docente de este siglo basado en una didáctica diferenciada es importante que resalte las características positivas de cada estudiante, sus respuestas correctas, sus participaciones sustentadas, su cambio positivo hacia el aprendizaje…

Por otra parte, dicha didáctica, debe estar comprometida con el inicio, desarrollo y cierre de cada objetivo, donde los mismos, deben estar totalmente entrelazados, representando ante el estudiante una forma diferente de aprender, captando su atención total, llenándolo de nuevas ideas que incremente en ellos la necesidad de aprender, de mejorar, de ser cada vez mejores y más capaces de obtener sus objetivos propios.

Algunas diferencias entre la enseñanza no diferenciada y la enseñanza diferenciada:

ENSEÑANZA NO DIFERENCIADA	ENSEÑANZA DIFERENCIADA
La enseñanza es poco flexible y limita las oportunidades de aprendizaje y de participación de los alumnos.	La enseñanza se sustenta en intereses, conocimientos previos, estilos y ritmos de aprendizaje. Utiliza recursos, tiempos, espacios y estrategias didácticas de forma creativa.
Todos adquieren los contenidos a través de los mismos métodos y estrategias.	Los alumnos aprenden a través de métodos y estrategias basadas en los estilos de aprendizaje, inteligencias y modos de aprender de cada alumno.
Los intereses de los alumnos no son tomados en cuenta. Existen pocas opciones que consideren los perfiles de aprendizaje.	Las aptitudes, intereses y perfiles de aprendizaje de los alumnos conforman la base de la enseñanza.
Los libros de texto marcan las pautas de la enseñanza.	Se usan múltiples e innovadoras técnicas de enseñanza.
Orientado exclusivamente a determinar lo que “no saben” los alumnos.	La evaluación es continua y busca mejorar las estrategias de enseñanza y del logro educativo de los estudiantes.
En las planificaciones no se realizan ajustes cuando son requeridos por un estudiante.	Las planificaciones incluyen ajustes individuales y/o grupales que facilitan el acceso al contenido para todos los alumnos que lo requieren.

Finalizo con un pensamiento, que provino de una entrevista realizada en **Venevisión** a una docente: *“Todo lo antes mencionado se queda en papel, si el docente de hoy, no educa con el corazón”*.

Educación con corazón = educación para y por la vida

DATOS DE LA AUTORA:

Emily del Carmen Bastidas Ramírez. Licenciada en Educación Mención Física (Universidad Nacional Experimental de los Llanos Occidentales Ezequiel Zamora. UNELLEZ. Barinas, Edo. Barinas). Actualmente cursando Maestría en Educación Matemática. Se ha desempeñado como docente en Universidad Nacional Experimental De La Fuerza Armada Nacional Bolivariana (U.N.E.F.A).

¿Para qué sirve la música?

Por: JOANA OLIVEIRA - @joanaoliv
Enviado por José Agustín González “Pepe”, vía Facebook.

Así nos hace humanos la música. Tan antigua como el hombre, ha sido esencial en nuestro desarrollo social. Decía Nietzsche que “sin música, la vida sería un error” y recientes investigaciones de neurocientíficos, musicólocos, psicólogos y antropólogos parecen darle la razón… La música actúa en el cerebro de manera similar a las drogas, el sexo o la comida. Así influye en nuestra socialización, nuestras emociones e incluso en nuestra salud.

“Sin música, la vida sería un error”, decía Friedrich Nietzsche. Un siglo después de que el filósofo alemán hiciera la famosa afirmación, diferentes **neurocientíficos, musicólogos, psicólogos y antropólogos** han comprobado que tenía razón. Basándose en el hallazgo de flautas hechas con huesos, que se encontraron en una cueva de Alemania y que son los instrumentos más antiguos registrados hasta el momento, los investigadores estiman que **la música podría ser al menos tan antigua como el *Homo sapiens*,** que apareció aproximadamente hace 200.000 años. Pero ¿cuál es su función?

La pregunta atormenta a los expertos desde hace siglos y todavía no hay una respuesta concluyente. **Pitágoras** propuso, en el siglo V a.C., que **la música regía la armonía de los astros**, mientras que la investigación científica actual —desde la perspectiva evolutiva y biológica— considera que la música sirve más bien para regir la armonía entre los seres humanos.

“La función de la música es la sociabilización”, explica Jeremy Montagu, músico y catedrático de la Universidad de Oxford. En un ensayo publicado en la revista *Frontiers in Sociology*, Montagu defiende que la música es tan primitiva que sería anterior al lenguaje. Él argumenta que el tarareo que hace una madre para calmar a su bebé es música y que eso, probablemente, ocurrió antes de que pudiéramos hablar.

Para el experto, el vínculo que la música establece entre madre y niño también está presente en un grupo de trabajadores o en los hombres ancestrales que bailaban y cantaban antes de una cacería o batalla. “Al establecer semejante vínculo entre los individuos, **la música creó no solo la familia, sino la sociedad misma**”, sostiene.

COMUNICAR EMOCIONES.

La hipótesis de que **la música tuvo una función esencial en la formación y supervivencia de grupos** y en la mitigación de conflictos es una de las más aceptadas. Mark Tramo, del Instituto para la Música y la Ciencia del Cerebro en la Universidad de Harvard, la define como un factor de cohesión social. “Los hombres necesitaban organizarse para cazar y defenderse. Allanó el camino para que nos comunicáramos y compartiéramos emociones”, explica.

SEGÚN UN ESTUDIO DE LA UNIVERSIDAD DE CAMBRIDGE, LA MÚSICA REVELA LA PERSONALIDAD DE CADA UNO.
CRÉDITO IMAGEN: CREATIVE COMMONS, PXHERE.

La capacidad de comunicar emociones fue justamente lo que hizo que la música persistiera después del desarrollo lingüístico. Un estudio realizado por psicólogos de la Universidad de Londres demostró, por ejemplo, que incluso al escuchar un fragmento corto de una pieza musical, un individuo es más propenso a interpretar tristeza o felicidad en su interlocutor, aunque este mantenga una expresión facial neutral.

En su tarea de forjar lazos entre las personas, la música también revela la personalidad de cada uno, según un estudio de expertos en Psicología Social de la Universidad de Cambridge. Un grupo de desconocidos fue dividido en parejas y tuvieron seis semanas para conocerse. **Se pidió a los participantes que juzgaran la personalidad de la otra persona en base, únicamente, a su lista de 10 canciones favoritas.** Los psicólogos notaron que los participantes identificaron correctamente los rasgos de personalidad de sus parejas de estudio y concluyeron que el gusto musical es una fuente fiable de información sobre un individuo.

FAVORECE LA FELICIDAD Y LA CREATIVIDAD.

La ciencia también ha encontrado una explicación para una función más instintiva de la música: hacernos sentir bien. Una investigación publicada recientemente por la revista Nature y liderada por Daniel Levitin, neurocientífico y autor del libro *"Tu cerebro y la música. El estudio científico de una obsesión humana",* indica que **actúa en el cerebro de manera similar a las drogas, el sexo o la comida.** Las canciones activan el lóbulo frontal, **producen dopamina y actúan en el cerebelo, que es capaz de "sincronizarse" en el ritmo de la música, lo que provoca placer.** "Es como un juguete para el cerebro", afirma Levitin.

Y ese "juguete" también estimula la creatividad. Una investigación de la Universidad de Oxford indica que la música en un nivel moderado **intensifica la capacidad de procesamiento abstracto**, lo que favorece la creatividad a la hora de realizar actividades o solucionar problemas.

LA MÚSICA PRODUCE DOPAMINA Y ACTÚA EN EL CEREBELO, QUE ES CAPAZ DE "SINCRONIZARSE" AL RITMO DE LA MÚSICA, LO QUE PROVOCA PLACER. CRÉDITO IMAGEN: EDDIE BERTHIER.

En el cerebro de los niños, la actividad musical aumenta las capacidades cognitivas y motoras. Un equipo de neurólogos de la Universidad de St. Andrews (Escocia) comprobó que los niños que tienen tres años o más de entrenamiento con instrumentos tienen mejor coordinación motriz y habilidad de discriminación auditiva, aprenden el vocabulario más fácilmente y tienen mejores habilidades de razonamiento no verbal, lo que implica comprender y analizar mejor la información visual, como identificar relaciones, similitudes y diferencias entre formas y patrones.

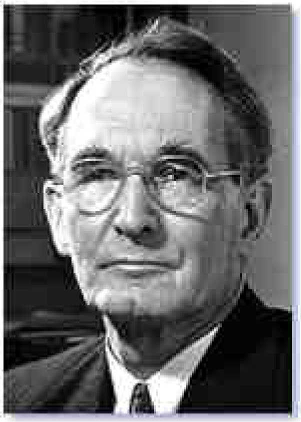
ES TERAPÉUTICA.

De todas las funciones de la música, quizá la más misteriosa corresponda a su posible uso terapéutico. El neurólogo británico Oliver Sacks relató en sus libros casos de **pacientes con Alzhéimer o Párkinson cuyos síntomas mejoraban cuando escuchaban canciones.**

Otras investigaciones mencionan pacientes con accidentes cerebrovasculares que mostraron una mejor atención visual al escuchar música clásica.

Según afirma el pianista Robert Jourdain en el libro "*Música, Cerebro y Éxtasis*", vence los síntomas porque "relaja el flujo cerebral", a la vez que "estimula y coordina las actividades cerebrales". Para él, esa "magia" ocurre con todas las personas. "La música nos saca de hábitos mentales congelados y hace que la mente se mueva como habitualmente no es capaz", afirma.

FÍSICOS NOTABLES


PERCY WILLIAMS BRIDGMAN
(1882-1961)

Percy Williams Bridgman

Nació el 21 de abril de 1882 en Cambridge, Massachusetts, y murió el 20 de agosto de 1961 en Randolph, Nuevo Hampshire: ambas localidades en EE. UU.

Ganador en 1946 del Premio Nobel en Física.

Por su trabajo sobre la física de altas presiones.

Fuente: Biografiasyvidas - Wikipedia

Físico y filósofo de la ciencia norteamericano. Ejerció la docencia en Harvard como profesor de Matemáticas y de Filosofía Natural, pero más que en el campo científico (donde se ocupó preferentemente de los fenómenos relacionados con las presiones muy elevadas) su mayor contribución la realizó en filosofía y en metodología científica, gracias a sus obras *La lógica de la física moderna* (1927) y *The nature of Physical Theory*, (1936), así como a otras obras menores como el ensayo *Quo Vadis*.

El objetivo de Bridgman fue extrapolar la teoría pragmática a la construcción de los conceptos científicos, y de la física en particular, sosteniendo una hipótesis operativa ("operacionismo"). Reconducir una teoría a las propias operaciones mentales y físicas, permite una génesis y un control empírico de la ciencia. El ejemplo básico presentado por Bridgman es el de la relatividad restringida de Einstein. Cada concepto debe ser referido a las operaciones efectivas que el científico lleva a cabo cuando lo elabora; éste, según Bridgman, es el único método posible para comprender el significado del concepto. El operacionismo fue acogido y desarrollado por el ala más liberal de la corriente neopositivista estadounidense contemporánea (por ejemplo, por Hempel).

PERCY WILLIAMS BRIDGMAN

Imágenes obtenidas de:
Google

QUÍMICOS DESTACADOS

Arne Wilhelm Kaurin Tiselius

Nació el 10 de agosto de 1902 en Estocolmo, y murió el 29 de octubre de 1971 en Upsala; ambas localidades en Suecia.

Ganador del Premio Nobel en Química en 1948.

Por su trabajo en la separación de coloides mediante electroforesis.

FUENTES: Ecured - Wikipedia

ARNE WILHELM KAURIN TISELIUS (1902-1971)

Bioquímico sueco. Obtiene en 1948 el Premio Nobel de Química por su trabajo en la separación de coloides mediante electroforesis, el transporte de partículas con carga a través de un líquido inmóvil bajo la influencia de un campo eléctrico para lo que utilizó un aparato conocido como tubo de Tiselius. También fue el primero en desarrollar plasma sanguíneo sintético.

Síntesis biográfica

Nació 10 de agosto de 1902, en Estocolmo. Después de la pérdida temprana de su padre, la familia se trasladó a Gotemburgo.

Estudios

Después de la graduación en el "Real gymnasium" en 1921, estudió en la Universidad de Uppsala, donde se especializa en química. Obtuvo su doctorado en 1930 con la tesis "El método en movimiento y en la frontera de estudiar la electroforesis de las proteínas"

Docencia

Ingresó en el claustro de la Universidad de Uppsala en 1925 y fue profesor de bioquímica en 1939. Fue primero alumno y más tarde auxiliar de Theodor Svedberg.

Fue nombrado docente (Profesor Asistente) en Química a partir de 1930.

Investigaciones

Estimulado por muchos contactos con los bioquímicos americanos y físico-químicos, Tiselius a su regreso a Uppsala reanudó su interés en las proteínas, y la aplicación de métodos físicos a los problemas bioquímicos en general.

Tiselius contribuyó al desarrollo y mejora de una serie de métodos útiles en la bioquímica, tales como la electroforesis, cromatografía, la fase de partición, filtración en gel, etc.

Estos y otros métodos se han aplicado a los estudios de sustancias de gran peso molecular principalmente proteínas y enzimas, pero también polisacáridos (dextrano) y ácidos nucleicos.

Estudió las proteínas sanguíneas e hizo ver que las proteínas del suero sanguíneo, una vez separadas, se distribuyen en cuatro grupos, emparentados entre sí: las albúminas y globulinas alfa, beta y gamma. Por adsorción obtuvo la separación de diversos aminoácidos

Tiselius tomó parte activa en la reorganización de la investigación científica en Suecia en los años posteriores a la Segunda Guerra Mundial.

Muerte

Murió el 29 de octubre de 1971 en Uppsala, Suecia

Publicaciones

Tiselius publicó una serie de artículos sobre los fenómenos de difusión y la absorción de forma natural en el intercambio de base de zeolitas.

Reconocimientos

- Presidente de la Agencia Sueca de Ciencias Naturales del Consejo de Investigación 1946-1950
- Presidente de la Comisión de Investigación de la Sociedad Sueca del Cáncer 1951-1955.
- Presidente de la Unión Internacional de Química Pura y Aplicada 1951-1955
- Vicepresidente de la Fundación Nobel en 1947 y Presidente desde 1960.
- Miembro del Comité del Premio Nobel de Química desde 1946.
- Premio Nobel de Química en 1948.
- Presidente de la Fundación Nobel desde 1960 a 1964
- Presidente del Comité Nobel de Química en 1965.

ARNE WILHELM KAURIN TISELIUS

Imágenes obtenidas de: Google

17 de enero de 2002:
Fallece el escritor español

Camilo José Cela

Tomado de: Notitarde.com > Cultura

Camilo José Cela Trulock nació el 11 de mayo de 1916 en la población gallega de Iria Flavia, de padre español y madre inglesa. Su nombre completo era *Camilo José Manuel Juan Ramón Francisco de Jerónimo Cela Trulock*.

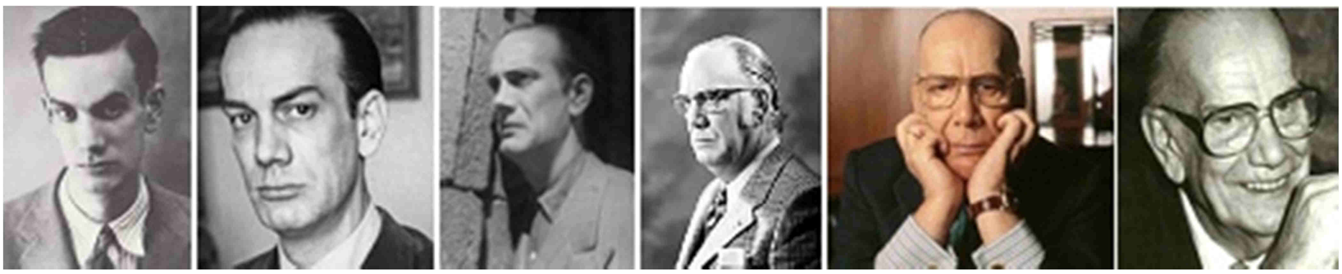
Allí vivió, aseguraba él, una infancia feliz. En 1925, cuando tenía nueve años, toda la familia se trasladó a Madrid, adonde había sido destinado el padre.

Antes de concluir sus estudios de bachillerato cayó enfermo de tuberculosis pulmonar, y durante los años 1931 y 1932 tuvo que ser internado en el sanatorio de tuberculosos de Guadarrama. El reposo obligado por la enfermedad lo emplea Cela en inacabables sesiones de lectura.

En 1934 ingresa en la Facultad de Medicina de la Universidad Complutense de Madrid. Sin embargo, pronto la abandona para asistir como oyente a la Facultad de Filosofía y Letras, donde el poeta Pedro Salinas da clase de literatura contemporánea. Cela le muestra sus primeros poemas, y recibe de él estímulo y consejos. Este encuentro resultará fundamental para el joven Cela, ya que, según él mismo creía, fue lo que decidió definitivamente su vocación literaria.

El 10 de marzo de 1991 se casó con Marina Castaño. En 1996, el día de su octogésimo cumpleaños, el Rey don Juan Carlos I le concedió el título de Marqués de Iria Flavia; el lema que Cela adoptó para el escudo de marquesado fue *El que resiste, gana*.

Camilo José Cela falleció en Madrid el 17 de enero de 2002.

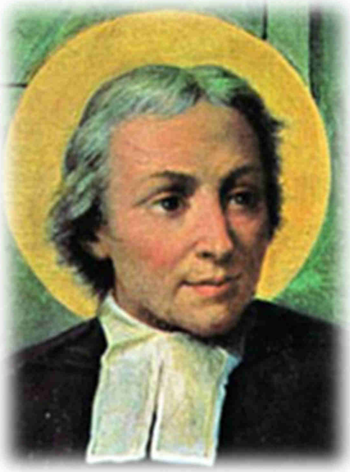


CAMILO JOSÉ CELA

Imágenes obtenidas de:
Google

San Juan Bautista de la Salle

Patrono de los educadores



Nació en Reims en 1561 y murió en Rouen en 1719, las ciudades francesas a las que la hoy Santa Juana de Arco, hizo famosas. Su vida coincide casi exactamente con los años del reinado de Luis XIV.

Fue el primogénito de su familia. Desde niño soñó con ser sacerdote. Recibió a la edad de 11 años la tonsura, círculo rasurado que llevan algunos clérigos en la coronilla. Fue nombrado canónigo de la Catedral de Reims a los 35. Cuando murieron sus padres tuvo que encargarse de la administración de los bienes de la familia.

Probablemente su existencia habría pasado desapercibida si se hubiera contentado con vivir de acuerdo a su clase social adinerada, sin preocuparse por hacer ninguna obra excepcional en favor del pueblo necesitado. Pero la fuerza misteriosa de la gracia de Dios encontró en él un instrumento dócil para renovar la pedagogía y fundar las primeras escuelas profesionales y las más antiguas escuelas normales y fundar una Comunidad religiosa que se ha mantenido en principalísimos puestos en la educación en todo el mundo. Este santo fue un genio de la pedagogía, o arte de educar.

Se graduó como Maestro en Artes e ingresó al Seminario de San Sulpicio en París.

Fue ordenado sacerdote a los 27 años, con el tiempo parecía que ocuparía altos cargos eclesiales por su destacado desempeño, pero San Juan veía que Dios lo llamaba al servicio de los más pobres.

El 24 de junio de 1681, Juan Bautista de La Salle y sus maestros inician vida en comunidad en una casa alquilada.

Es así que se empieza a reunir con un grupo de maestros, brindándoles formación humana, pedagógica y cristiana, con el fin de llevar una educación de calidad de la mano de valores que hicieran del niño y joven un ser autentico.

Solía viajar a pie solicitando alojamiento y alimento, pasaba muchas horas en oración y les insistía a los miembros de su comunidad que lo que más éxito consigue en la labor de un educador es orar, dar buen ejemplo y tratar a todos como Cristo hizo.

Murió el 7 de abril de 1719, que ese año fue Viernes Santo. Sus últimas palabras fueron**:** *"Adoro en todo la voluntad de Dios para conmigo"*. Fue canonizado el 24 de mayo de 1900, día de la Virgen, y el 15 de mayo de 1950 fue nombrado *Patrono de los Educadores*.

Venezuela, personajes, anécdotas e historia.

Pedro Gual

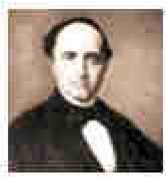
Pedro Gual nació en Caracas, Venezuela, el 17 de enero de 1783. Fue abogado, periodista, político, estadista y diplomático, participando de manera importante en la creación de la política exterior de Venezuela y de la Gran Colombia. Estuvo encargado de la presidencia de Venezuela en tres oportunidades. Fue el primer diplomático de la denominada América hispana.

Egresó como abogado de la Universidad de Caracas en 1808, sufrió persecuciones por sus ideas sobre la emancipación política; en 1809 se mudó a la isla de Trinidad, donde permaneció hasta pocos días después de la revolución que estalló en Caracas en 1810. Fue nombrado síndico de la ciudad de Caracas, y en 1811 fue elegido primer diputado a la Legislatura de la provincia. Ese mismo año desempeñó el cargo de secretario del general Francisco de Miranda, junto con el licenciado Miguel Sanz,

A la caída de la Segunda República, en 1812, marchó a los Estados Unidos, desde donde apoyó la lucha independentista venezolana. Viajó a Saint Thomas y luego a Haití y Jamaica, donde se incorporó a la expedición de Mariano Montilla y Luis Brión, que lograría la emancipación de las provincias de Santa Marta, Riohacha y Cartagena. Más tarde, en 1821, asistió al Congreso de Cúcuta como diputado de la provincia de Cartagena. Terminados los trabajos de este cuerpo, se trasladó Gual a Bogotá, donde fue nombrado ministro de Relaciones Exteriores, cargo que desempeñó hasta 1826, año que fue elegido representante de Colombia ante el Congreso de Panamá.

Una vez disuelta la Gran Colombia, en 1830, residió en Bogotá, alejado completamente de los asuntos públicos hasta 1837, en que el gobierno de Ecuador le comisionó para que solucionase en Europa varios asuntos relacionados con aquella República. Llevó a cabo su misión en Inglaterra y negoció en Madrid el tratado de reconocimiento de la independencia ecuatoriana.

Celebradas en 1860 las elecciones generales, en plena Guerra Federal, Gual resultó electo vicepresidente de la República y, por renuncia del presidente Manuel Felipe de Tovar, asumió, por tercera vez, la primera magistratura a la avanzada edad de 78 años. A pesar de enfrentar con energía a los federalistas, no logró controlar los propósitos conspirativos del bando paecista, siendo derrocado el 29 de agosto de 1861 y arrestado en su casa por el jefe de la guarnición de Caracas, el coronel José Echezuría. Posteriormente se dirigió a Guayaquil, donde murió a los pocos meses. Sus restos descansan en la Catedral Primada de Colombia en Bogotá.



PEDRO GUAL

Imágenes obtenidas de:

Google

GALERÍA

Domokos Szász

Imágenes obtenidas de:

Google

Nació el 18 de Agosto de 1941 en Budapest, Hungría.

Domokos Szász fue criado y educado en Budapest. Después de graduarse en la escuela secundaria en 1959, ingresó en la Facultad de Ciencias de la Universidad de Eötvös Loránd en Budapest donde se sintió atraído por la teoría de la probabilidad. Se graduó en 1964 con un Diploma en Matemáticas y continuó estudiando en la Universidad de Eötvös Loránd donde fue nombrado Profesor Asistente en el Departamento de Probabilidad. En 1967 publicó su primera publicación *On the general branching process with continuous time parameter* (Sobre el proceso de ramificación general con parámetro de tiempo continuo). Joseph Doob explica que en este trabajo, Szász:

> *... da una presentación sistemática de los procesos de ramificación de parámetro continuo general. La aplicación se hace para encontrar bajo qué tipo de ramificación una distribución de punto aleatorio de Poisson sigue siendo uno.*

También en 1967, obtuvo su segundo título, Dr. rer. nat (Doctor rerum naturalium o Doctor en Ciencias Naturales) por su tesis *Spreading processes* (Procesos de propagación) (en húngaro). Él continuó trabajando en la Universidad de Eötvös Loránd hasta 1968 cuando se fue a Moscú para estudiar para el Grado de Candidato en la Universidad Lomonosov de Moscú. Su asesor de tesis fue Boris Vladimirovich Gnedenko, pero también fue fuertemente influenciado por Roland Lvovich Dobrushin y Yakov Grigorevich Sinaí, quienes habían sido estudiantes de Andrey Nikolaevich Kolmogorov.

En 1969 Szász recibió el Premio Conmemorativo Géza Grünwald de la Sociedad Matemática János Bolyai, un premio otorgado a destacados matemáticos jóvenes. Obtuvo el Grado de Candidato (con distinción) de la Universidad Lomonosov de Moscú en 1971 por su tesis *The asymptotic behaviour of sums of a random number of independent random variables* (Comportamiento asintótico de las sumas de un número aleatorio de variables aleatorias independientes) (en ruso). Este fue un momento muy productivo para Szász quien publicó seis trabajos en 1971, uno en inglés, dos en Húngaro y tres en ruso. Szász fue designado para el Instituto de Matemática de la Academia Húngara de Ciencias en 1971. Ocupó este cargo hasta 1999. Obtuvo un doctorado en ciencias (equivalente a una habilitación) en 1981 por sus tesis *Random point distributions and their applications in reliability theory and statistical physics* (Distribuciones de puntos aleatorios y sus aplicaciones en la teoría de la fiabilidad y la física estadística) (en húngaro). En la referencia [2], él explica los principales ejes de su investigación:

> *Mi encuentro con la escuela matemática de Moscú, en particular con Dobrushin y Sinaí y sus alumnos, dio vuelta a mi interés a mediados de los 70, hacia la matemática estadística de la física y más tarde a los sistemas dinámicos, ambos en un florecimiento esclavizante entonces y posteriormente. A partir de principios de los 80, he estado pensando mucho sobre ergódica y propiedades estocásticas de los sistemas de bola dura y el billar, y sistemas dinámicos hiperbólicos con singularidades, en general. Las preguntas centrales ha sido cómo establecer la Hipótesis Ergódica Boltzmann-Sinaí y cómo probar probabilística o estadísticamente las propiedades interesantes físicamente propiedades de estos sistemas. Me interesa también mucho en la teoría dinámica del movimiento browniano. Pude convencer a varias personas inteligentes en Budapest, lo atractivo de la matemática estadística de la física y los sistemas dinámicos.*

En 1984 recibió el Premio de Investigación de la Academia Húngara de Ciencias y en 1990 fue elegido como Miembro Correspondiente de la Academia Húngara de Ciencias, siendo elegido Miembro Ordinario cinco años más tarde. También en 1995 obtuvo el Premio Tibor Szele por la Sociedad Matemática János Bolyai. Este premio se otorga a destacados investigadores que han fundado escuelas científicas importantes. Ha sido invitado como Profesor Visitante a varias universidades: Universidad de Dartmouth, Estados Unidos (6 meses en 1977), Universidad de Goethe, Francfort (6 meses en 1977-1978), Dartmouth College, Estados Unidos (6 meses en 1985) y la Universidad de Princeton, Estados Unidos (1990-1991).

En 1999 fue nombrado Director del Instituto de Matemáticas de la Universidad de Budapest de Tecnología y Economía. En 2000 fue nombrado Profesor Széchenyi Distinguido en la Universidad de Budapest University de Tecnología y Economía. Obtuvo el Premio Széchenyi en 2005, un premio dado por el Estado Húngaro a quienes han hecho una contribución sobresaliente a la vida académica en Hungría. El premio fue entregado a Szász el día de fiesta nacional (15 de marzo) por Ferenc Mádl, Presidente de Hungría.

A continuación, se revisan brevemente un par de problemas a los que Szász ha hecho importantes contribuciones. Uno es la conjetura de Boltzmann-Sinaí y citando comentarios de Nikolai Chernov sobre la historia del problema en su informe sobre el trabajo *Hard ball systems are completely hyperbolic* (Sistemas de bola dura y totalmente hiperbólica) (1999) escrito por Szász y Nándor Simányi:

El artículo presenta una solución parcial de un problema clásico sin resolver (problema abierto) en física matemática, el cual prueba la rigurosidad de la ergodicidad de un sistema que consiste en cualquier número de pelotas duras idénticas en una caja con periódicas condiciones de límite (es decir, en un toro). Este problema se atribuye a una hipótesis indicada por L. Boltzmann hace más de cien años. Una versión rigurosa de esta hipótesis es debida a Ya A. Sinaí, quien probó para dos bolas en 1970 e hizo varias contribuciones cruciales en el estudio del problema más tarde, desde 1973 a 1987, incluyendo la prueba del llamado "Teorema fundamental en la teoría de la dispersión del billar". El trabajo seminal de Sinai en 1970 abrió la puerta a una nueva rama de la física matemática - la teoría de sistemas hiperbólicos (caóticos) del billar. La conjetura de Boltzmann-Sinaí fue probada para tres bolas en 1991 por A. Krámli, N. Simányi y D. Szász. Al año siguiente los mismos autores demostraron la conjetura para cuatro bolas. Bajo ciertas restricciones adicionales sobre la dimensión de las bolas o el gráfico de colisiones permisibles, la conjetura fue probada para un mayor número de bolas. Este documento establece la hiperbolicidad completa de un sistema de cualquier número de bolas duras en un toro. La única restricción es que las masas de las bolas deben ser "genéricas", es decir, evitar algunas subvariedades excepcionales de codimensión uno. ... La prueba se basa en construcciones fascinantes.

El sistema de Lorentz describe el movimiento de una partícula de un punto libre que es reflejado desde los límites de un dispersor convexo. Szász, trabajando con distintos co-investigadores, examinó la repetición de un sistema cuando hay una configuración periódica de difusores. En un trabajo de 1985, *The problem of recurrence for Lorentz processes* (El problema de la repetición para procesos de Lorentz) en conjunto con András Krámli, demostró una forma débil de la repetición mientras que en *Local limit theorem for the Lorentz process and its recurrence in the plane* (Teorema del límite local para procesos de Lorentz y su repetición en el plano) (2004) escrito en conjunto con Tamás Varjœ, ambos demostraron propiedades de recurrencia fuertes. Este trabajo está relacionado con que el que hizo Lai-Sang Young.

Szász se casó en 1975 y tiene una hija y dos hijos.

Referencias.-

Artículos:

1. Curriculum Vitae of Domokos Szász http://www.math.bme.hu/~szasz/
2. Domokos Szász Home Page http://www.math.bme.hu/~szasz/
3. List of Publications by Domokos Szász http://www.math.bme.hu/~szasz/
4. Szasz Domokos, Hungarian Academy of Science http://mta.hu/oldmta/?pid=421&TID=730

Versión en español por R. Ascanio H. del artículo en inglés de J. J. O'Connor y E. F. Robertson sobre "Domokos Szász" (Marzo 2011).
Fuente: MacTutor History of Mathematics [http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Szasz_Domokos.html]