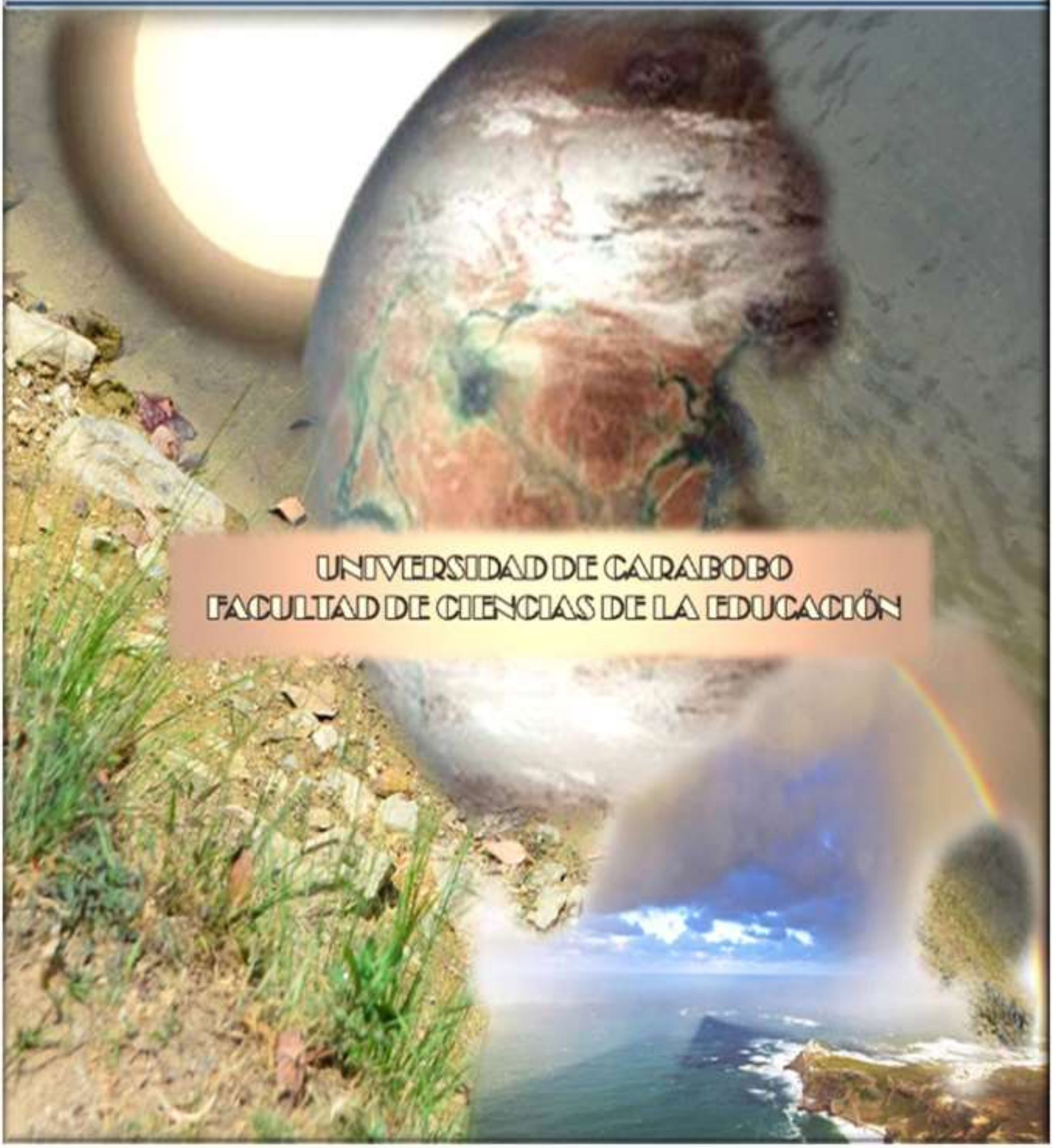
HOMOTECIA

CÁTEDRA DE CÁLCULO - DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA y FÍSICA – FACULTAD DE CIENCIAS DE LA EDUCACIÓN – UNIVERSIDAD DE CARABOBO

 Hecho el Depósito de Ley. Depósito Legal: PPi2012024055 – I. S. S. N.: 2244-7385

E- mail: homotecia2002@gmail.com - N° 9– AÑO 17 Valencia, Lunes 2 de Septiembre de 2019



HOMOTECIA

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA Y FÍSICA - FACE - UC

ADVENTUS NOVUS CALCULUS

CÁTEDRA DE CÁLCULO

Índice

Diseño de Portada y Montaje Gráfico: R. A. A. H.

Para el acceso a todos los números publicados de la Revista HOMOTECIA, conectarse al enlace:
http:/servicio.bc.uc.edu.ve/homotecia/index.htm > Sección: MULTIDISCIPLINARIAS

Revista HOMOTECIA
© Rafael Ascanio H. – 2009
Hecho el Depósito de Ley.
Depósito Legal:
PPi2012024055
I. S. S. N.: 2244-7385

e-mail:
homotecia2002@gmail.com

Publicación Mensual
Revista de acceso libre

Publicada por:

CÁTEDRA DE CÁLCULO
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA Y FÍSICA
FACULTAD DE CIENCIAS DE LA EDUCACIÓN
UNIVERSIDAD DE CARABOBO

Nº 9 - AÑO 17 - Valencia, Lunes 2 de Septiembre de 2019

EDITORIAL

En el anterior editorial hicimos notar que educación y cultura deben desarrollarse y evolucionar a la par, como *gemelas*: la educación, particularmente, permite formar el perfil ciudadano del ser humano y además, lo hace también formarse, quepa el término, concurrentemente en lo cultural. Se persigue la construcción holística del ser social que ha de integrar la comunidad en la cual ha de pervivir.

Pero lo que realmente ocurre, por lo menos en Venezuela, es que ciudadanía y cultura son dos fenómenos sociales que aunque se relacionan, contrariamente a lo que debería ser se suscitan deslindados muy sutilmente uno del otro. No solamente es de hecho sino es una situación normativamente considerada cuando en la Constitución Nacional, en los artículos relacionados, se estima así: se consideran *solo* las manifestaciones artísticas en todos sus perfiles como el *todo cultural* nacional.

Entonces, ajustando nuestra opinión a la lógica difusa, *educación-cultura* es una cualidad que no se forma idealmente en el ciudadano siguiendo de manera secuencial una escala con dos polos opuestos: *negro* y *blanco*, sino que al aceptar esta escala *tonalidades de grises*, posiblemente la educación y la cultura de una persona, transitando la *estructura socio-educativa* nacional, evolucionan por separado, transcurriendo de tal manera que en uno o más momentos éstas se encuentran en posiciones diferentes sobre esta escala, por lo que más que aceptar que no existe correspondencia entre ambas en esos instantes, lo que se tiene realmente es lo que viene a ser una contradicción social.

Pero esto es un lujo que no puede darse la sociedad venezolana. En los últimos años ha sufrido una *descapitalización intelectual y profesional* de tal nivel, que el poco *relativo piso científico* con el cual contaba hace dos o tres décadas atrás casi ha desaparecido y tiene que comenzar *su reconstrucción*. Por ello el desarrollo y evolución de la cualidad *educación-cultura* en los ciudadanos debe darse con la misma calidad y *caminar* la una junto a la otra.

¿Cómo lograrlo? Evidentemente se hacen necesarios en educación la implementación de cambios curriculares de características progresistas, a la par que aumenten en calidad los niveles en cuanto a alimentación, vivienda y todos los factores que permitan al ciudadano una vida digna.

Otra consideración sumamente importante son las herramientas didácticas y de evaluación a utilizar. Durante décadas los docentes en ejercicio y los docentes en formación han dedicado muchos esfuerzos en generar innovadoras estrategias para mejorar el aprendizaje de los estudiantes en las diferentes disciplinas. Pero lo que se puede deducir de todos estos trabajos investigativos es que los mismos no conducen a formar competencias científicas en los estudiantes sino a mejorar sus habilidades y destrezas en procesos de memorización y mecanización. Es más, todavía se observan docentes de matemática, física o química, por citar algunas disciplinas, tener solamente como estrategia didáctica el resolver muchos ejercicios sobre el tema en estudio en el pizarrón o en cuadernos, siendo evidente que en una sociedad en la que se maneja con cierta soltura la tecnología contemporánea estas estrategias no harán posible formar competencias científicas en los discentes. Hay una urgente necesidad de desarrollar en los ciudadanos la imaginación, la invención, la innovación y la creatividad que propicien el ambiente que permita y de propulsión a la formación de estas competencias científicas.

Pero estas reformas educativas probablemente deberían contextualizarse en un paradigma que podemos nombrar *Inclusión: Igualdad y Equidad*. Igualdad: todos y cada uno de los estudiantes tienen las mismas oportunidades bajo los mismos derechos. Equidad: referida al conjunto de oportunidades que se brindan todos y cada uno de los estudiantes en función de sus necesidades, debiendo existir un equilibrio que evite favorecer a unos mientras se perjudica a otros. De este paradigma surgen la *Didáctica Diferenciada* y la *Evaluación Diferenciada*.

¿En qué consiste la *Didáctica Diferenciada* y la *Evaluación Diferenciada*? La importancia de una didáctica y una evaluación diferenciadas radica en que el docente debe prepararse para aprender a manejar estas diferencias, siendo equitativo además de promover la igualdad. En cierta manera, esta preparación consiste en la adaptación: si el docente comprende y estudia lo diverso que hay a su alrededor y lo acepta, ya está un paso de transformarse en el educador que todo docente aspira ser. En la práctica *integrar* no significa *incluir* al estudiante, no se trata de rellenar un salón con cada discente, se trata de hacer que cada uno sea parte del aprendizaje. Esto significa que un estudiante con necesidades especiales no es solamente aquel que tiene dificultades de aprendizaje que evidencia al presentar deficiencias cognitivas y de habilidades y destrezas; también lo es aquel que podemos calificar de *superdotado*.

Las estrategias didácticas y de evaluación deben permitir integrar e incluir al estudiante con necesidades especiales, las cuales lo ubican por debajo o por encima de los estudiantes considerados promedios o normales. Al estudiante que presenta deficiencias cognitivas y de habilidades y destrezas, la didáctica y la evaluación con la que se le atienda debe hacerle sentir que se le está tratando igual que a los demás y que no se le está dando ningún beneficio o ayuda para que obtenga el éxito; debe sentir que lo está logrando por sí mismo. Al *superdotado* se le debe atender de acuerdo al desarrollo cognitivo, de habilidades y destrezas que demuestra de acuerdo a su desarrollo etario, su participación en el proceso educativo debe permitir su desarrollo *in crescendo* y no caer en un estado de involución y perjuicio de su autoestima.

Nos falta señalar cuáles estrategias didácticas y de evaluación podrían corresponderse con la configuración del paradigma cuyos parámetros intentamos evidenciar en loa párrafos anteriores. Lo dejaremos para el próximo editorial.

Reflexiones

"El pensamiento autónomo, libre y contestario, motor de la civilización, ha sido siempre el blanco preferido del poder ejercido por hombres pocos ilustrados y perversos".

Dr. Nelson Falcón Veloz

En "Crónicas del Cosmos. Curiosidades de Astronomía y Astrofísica" (p. 15, Diciembre 2006).

Los Grandes Matemáticos

WILLIAM EMERSON
(1701 - 1782)

Nació el 14 de mayo de 1701 y murió el 20 de mayo de 1782; ambos momentos en Hurworth, cerca de Darlington, Inglaterra.

Publicó los libros de texto que popularizaron el trabajo de Isaac Newton.

El Padre de William Emerson, Dudley Emerson, trabajaba en una escuela en Hurworth. Tuvo dos hijos, el más joven, llamado Dudley como él pero murió joven. Dudley Emerson era experto en matemáticas y su escuela era exitosa. Él educó a su hijo William, le enseñó a leer, escribir y matemáticas, así como un poco de Latín. William también estudió idiomas con el cura local que vivía en casa de Dudley. En esta etapa William tenía poco interés en aprender, pasaba muchas horas buscando nidos de pájaros. Para completar su educación, Dudley envió a William a una escuela en Newcastle y luego a otra en York. En estas escuelas quedó fascinado por las matemáticas, que también estudió por su cuenta mediante la lectura de los libros de matemáticas de su padre. Después de la muerte de su padre, William asumió el trabajo en la escuela de Hurworth en 1730. Sin embargo, no fue exitoso en esto; aunque Emerson era un hombre muy inteligente y docto, no tenía ninguna paciencia como maestro y con frecuencia mostraba mal carácter con los alumnos que no pudieron beneficiarse de su enseñanza de gran calidad. La escuela fue obligada a cerrar en 1733 porque los alumnos desertaron. El padre de Emerson le había dejado una finca en Castle Gate, cerca de Eastgate en Weardale, y esta le producía un ingreso de entre £70 y £80 al año. Él decidió que podría vivir con esto, y de ahí en adelante se dedicó a estudiar matemáticas.

Dos años después de cerrada la escuela de Hurworth, Emerson se casó. Chris Lloyd explica los acontecimientos que rodearon el matrimonio [4]:

> *En 1735, se casó con Elizabeth, la hija del Reverendo Dr. John Johnson, el rector de Hurworth. El rector ofreció una dote de £500 con la mano de su hija, pero él desaprobó su elección. Trataba a su yerno desaliñado con desprecio y se negó a pagar, así que Emerson cargó la ropa de su esposa en una carretilla y la rodó hasta la rectoría, diciendo que él se negaba "a ser agradecido con semejante compañero ni por un solo trapo". También se comprometió a desmentir al rector.*

William y Elizabeth Emerson no tuvieron hijos. La descripción del comportamiento de Emerson hacia su suegro parece excéntrica y, de hecho, se debe aclarar que Emerson era un hombre muy excéntrico. En la referencia [4] hacen referencia a esta colorida descripción:

> *... el lenguaje vulgar era típico en Emerson, como la tosquedad en su vestir. Su esposa, Elizabeth, hilaba y blanqueaba el lino que ella convertía en su ropa elaborándola en su máquina de coser. Él siempre se abotonaba la parte de arriba y la de abajo de su capa pero dejaba abierta y arrugada la parte del medio. Para mantener el pecho caliente, llevaba la parte de la camisa correspondiente a la espalda hacia el pecho. Él fue también famoso por inventar los cubre-espinillas: piezas de saqueo atadas arriba de la rodilla con una cuerda. Las cubre-espinillas le permitían sentarse en su silla favorita tan cerca del fuego como fuera posible sin que sus piernas sufrieran graves quemaduras.*

In 1743 Emerson published his first mathematical textbook, *The doctrine of fluxions*. The Preface begins as follows:

En 1743 Emerson publicó su primer libro de texto sobre matemática, *The doctrine of fluxions* (La doctrina de fluxiones). El prefacio comienza como sigue:

> *Decir cualquier cosa en alabanza del Método de Fluxiones, o de su dignidad y rango entre las ciencias matemáticas, sería tan innecesario como describir la excelencia de un sol brillante sobre la luz del centelleo de las estrellas; porque alguien que esté familiarizado con las Ciencias le permitirá ser un método de cálculo incomparablemente superior a todos los otros métodos que jamás fueron conocidos o encontrados, y más allá del cual nada más se esperaba o se espera. Esta lente es su ayuda y asiste a todas las otras ciencias matemáticas, y que en sus más grandes deseos y afligimientos: abre y descubre con nosotros los secretos y recovecos de la naturaleza, que antes siempre han sido encerrados en la oscuridad y en lo oscuro. A esto todos los nobles y valiosos descubrimientos del siglo pasado y el presente son enteramente debido: y por este método Sir Isaac Newton, el inventor digno, determinó y estableció el sistema del mundo entero visible.*

Una segunda edición fue publicada en 1757 y una tercera edición ampliada en 1768. En [3] una carta de Francis Holliday (escrita en septiembre de 1776), él describe los comentarios de William Jones y Abraham de Moivre sobre libro de Emerson:

(CONTINÚA EN LA SIGUIENTE PÁGINA)

(VIENE DE LA PÁGINA ANTERIOR)

[Jones y de Moivre] expresaron su gran aprobación del libro de fluxiones del Sr. Emerson, recientemente impreso, en relación con el método y la pulcritud de la forma de tratar el tema, pero eran de la opinión que comenzó su libro con un nivel demasiado alto para principiantes y que sus 4, 5, etc. propuestas fueron muy elegantes y útiles en la comparación de fluentes, pero demasiado difícil y abstracto.

Esto suena un poco como el maestro fallido al que le resultó imposible descender al nivel de sus alumnos. Sin embargo, Holliday llega en esta carta a expresar sus propias opiniones en cuanto a por qué Emerson pasó tan poco tiempo explicando las ideas básicas:

Yo supongo que el Señor Emerson elaboró su libro con tan alto nivel de forma intencionada; sin duda, consideraba que todos los autores que escribieron sobre fluxiones, pasaron el tiempo explicando con una gran cantidad de palabras los primeros principios, y a veces los más oscuros con una multitud de palabras que bajó al tema de nivel y sobre tales principios incorrectos, que la ciencia no podría defenderse contra los reparos que profesaban los enemigos a la ciencia.

De hecho este punto de vista consigue apoyo al leer el largo prólogo de Emerson donde pasa mucho tiempo defendiendo el método de fluxiones contra la crítica. En 1749 se publicaron dos libros más: *The Projection of the Sphere, Orthographic, Stereographic and Gnomical* (La proyección de la esfera, ortográfica, estereográfica y gnómica) y *The Elements of Trigonometry* (Los elementos de trigonometría) "que contiene las propiedades, relaciones y cálculos de senos, tangentes, secantes, etc. La doctrina de la esfera y los principios de la trigonometría plana y esférica todo llana y claramente demostrado". El segundo trabajo mencionado es en tres volúmenes y este es un breve extracto del prefacio:

En este tratado me he aventurado a establecer tanto la teoría como la práctica; y tomar todas las cosas que de cualquier manera pertenecen al tema. ... No digo que he agotado bastante al tema, pero soy de la opinión que he omitido poco o nada.

En 1754 publicó *Principles of mechanics explaining and demonstration The general laws of motion, the laws of gravity, motion of descending bodies, projectiles, mechanic powers, pendulums, centres of gravity, strength and stress of timber, hydrostatics and construction of machines*(Principios de la mecánica explicación y demostración de las leyes generales del movimiento, leyes de la gravedad, el movimiento de descenso de órganos, proyectiles, energías mecánicas, péndulos, centros de gravedad, fuerza y tensión de la madera, hidrostática y construcción de máquinas). Este, el más popular de sus libros, fue editado seis veces, la última (que fue revisada y corregida) se publicó en 1836. Tal vez uno de los hechos más notables aquí es que Emerson construyó instrumentos, incluyendo la rueca que construyó para su esposa. En 1755 publicó *A Treatise of Navigation* (Un Tratado de navegación) pero un acontecimiento importante tuvo lugar en 1763 cuando se presentó al editor John Nourse por su amigo Edward Montagu. Montagu era matemático de cierto renombre, miembro de la Real Sociedad y también miembro del Parlamento.

William Bowe, que conocía personalmente a Emerson, sugiere en la referencia [2] que las primeras publicaciones de Emerson no fueron populares y, que si no hubiera sido por Nourse, nada más hubiera podido publicar. Esto no es totalmente cierto dado que se publicó una segunda edición de *The Doctrine of Fluxions* en 1757, antes de que conociera a Nourse. Sin embargo, es claro que Nourse alentó firmemente a Emerson y de 1763, sus libros fueron publicados por Nourse. El retornó a las fluxiones, publicando *The Method of Increments herein the principles are demonstrated and the Practice thereof shown in the Solution of Problems* (El método de incrementos incluyen la demostración de los principios y la práctica misma se muestra en la solución de problemas) en 1763. El prefacio comienza como sigue:

El que escribe sobre un tema nuevo o extraño, pocos tratados antes; tiene algo que ver con el que escribe sólo sobre asuntos comunes o conocidos. Porque él no sólo tiene su esquema general a poner y las varias partes de su trabajo para conectarlas correctamente juntas; pero él tiene innumerables cálculos para atravesarlo, lo que nunca antes se había intentado; y que, sin juicio, ignora si tendrá éxito o no; como un viajero errante en un país desolado y poco frecuentado, debe a menudo dar marcha atrás y comenzar de nuevo su progreso.

Emerson estaba de acuerdo con John Nourse de escribir un curso de matemáticas y trece volúmenes estaban previstos. Parte de este curso fue la segunda edición de *The Elements of Trigonometry* y un nuevo trabajo de dos volúmenes *A treatise of algebra* (Un Tratado de álgebra) (1765). El prefacio contiene fuertes reclamaciones en cuanto a la importancia del tema:

El tema del siguiente libro es el álgebra, una ciencia de uso universal en la matemática. Su negocio y su uso es para resolver problemas difíciles, para averiguar las reglas y teoremas en cualquier rama de la ciencia; para descubrir las propiedades de las cantidades que se ocupan de cualquier tema tenemos una mente a considerar. Correctamente sigue estas dos ramas fundamentales, aritmética y geometría, pero es muy superior a la naturaleza de ambas, como puede solucionar preguntas absolutamente fuera del alcance de cualquiera de ellas.

Emerson mantuvo una notable producción de libros de texto: *The Elements of Optics* (Los elementos de óptica) (cuatro libros) (1768); *A System of Astronomy* (Un sistema de astronomía) (1769); *Laws of Centripetal and Centrifugal Force* (Las leyes de las fuerzas centrípeta y centrífuga) (1769); *The Mathematical Principles of Geography* (Los principios matemáticos de la geografía) (1770); y *Tracts* (Extensiones) (1770). También en 1770 aparecieron dos obras de fluxiones de Newton. Uno fue *A short comment on Sir I Newton's Principia containing notes upon some difficult places of that excellent book* (Un corto comentario sobre los Principia de Sir I. Newton que contienen notas sobre algunos lugares difíciles de ese excelente libro). Aquí están algunos extractos cortos del prefacio:

The Principia es un libro que se lee universalmente por todo el mundo que pretenda cualquier grado de aprendizaje filosófico; no parece inadecuado para explicar tales pasajes que parecen oscuros y difíciles. Pero aunque está escrito en el más claro estilo que es posible hacer con tan pocas palabras; sin embargo, debido a su concisión y la dificultad de los temas tratados en el, muchas cosas ocurren que requieren alguna explicación adicional, especialmente a los principiantes jóvenes. ... Este pequeño tratado fue escrito durante muchos años. Cuando estudié The Principia, fui con frecuencia paraba, me veía obligado a hacer cálculos aquí y allí, seguía y cuando lo había hecho, yo hacía notas sobre estos lugares. Hacía notas solamente en estos lugares que me parecían difíciles. Esta colección de notas las juntos para conformar el tema del siguiente Comentario.

(CONTINÚA EN LA SIGUIENTE PÁGINA)

(VIENE DE LA PÁGINA ANTERIOR)

La segunda de estas obras sobre fluxiones fue *A Defence of Sir Isaac Newton against the objections that have been made to Several Parts of the Principia* (Una defensa de Sir Isaac Newton contra las objeciones que se han hecho a varias partes de los Principia) (1770). El texto comienza como sigue:

> *Este Tratado incomparable está escrito en un estilo conciso y en el método sintético, y al ser sobre temas absolutamente nuevos y sin haber sido tocados antes, la generalidad de los lectores pudieron hacer poco sobre los mismos. Ya que contiene un nuevo sistema de filosofía basado en la más sublime geometría, los más grandes matemáticos se vieron obligados a estudiarlo con atención y esmero, y pocos se convirtieron en maestros de la materia; por lo que durante mucho tiempo fue poco leído. Pero, al fin, cuando su valor llegó a ser más conocido, obtuvo la aprobación universal y todo el mundo quedó sorprendido por los innumerables nuevos descubrimientos que figuran en él. Y, en su cuenta con el universo de todos los fenómenos de la naturaleza, fue adoptado por todos como el verdadero sistema, excepto por algunos pocos que, por envidia o ignorancia, eran intolerantes a algún otro esquema.*

En este trabajo Emerson responde a las objeciones hechas por Johann Bernoulli, Daniel Bernoulli y Leonhard Euler y defendía el derecho de Newton de ser considerado como el inventor del "método de fluxiones” en lugar de Leibniz. El libro final de Emerson fue *Miscellanies or a Miscellaneous Treatise containing several mathematical subjects* (Misceláneas o un tratado misceláneo que contiene varios temas matemáticos) (1776). Los temas incluidos son: (I) las leyes del azar, (II) Anuarios, (III) Sociedades, (IV) Movimiento de la luna, (V) Construcción de arcos, (VI) Precesión de equinoccios, (VII) Construcción de los logaritmos, (VIII) Interpolación, (IX) La longitud, (X) El interés, (XI) Figura de senos, etc., (XII) Fortificación, (XIII) Artillería, (XIV) Arquitectura, (XV) Música, (XVI) Reglas de la filosofía, (XVII) Conferencias de óptica, (XVIII) Problemas.

No todas las publicaciones matemáticas de Emerson fueron sus libros. También colaboró en diversas publicaciones como *Ladies' Diary*, *The Palladium*, *Miscellanea Curiosa Mathematica*, and the *Gentleman's Magazine*. A menudo usó un seudónimo, especialmente “Merones”, “Nichol Dixon” y “Philofluentimechanalgegeomastrolongo”. Él defendió sus escritos vigorosamente contra las críticas, incluso en el prefacio de algunos de sus libros. Por ejemplo, dos páginas del prefacio de *Miscellanies* consiste en un ataque contra alguien que había criticado su *A System of Astronomy* (Un sistema de astronomía).

William Bowe describe a Emerson con estas palabras [2]:

> *Fue singular y tosco en su vestir y costumbres, y precipitado e impetuoso en su temperamento; pero las fallas que tenía las equilibraba con sus virtudes. Él tenía una gran mente, firme e independiente, que no podía ser sometida por cualquier medio, tuviera base o fuera falso, por ningún poder en la tierra: un amor puro, genuino y ardiente de la verdad y odio a la falsedad de cualquier especie.*

Gow refuerza la opinión de Bowe sobre el carácter de Emerson con lo siguiente (referencia [3]):

> *... era cascarrabias, obstinado, desconfiadamente cuidadoso del dinero y excéntrico. Sin embargo, fue sincero, franco y muy respetado por su amplio conocimiento, adquirido principalmente por propia lectura y estudio.*

A Emerson la Real Sociedad le ofreció una beca, pero la rechazó diciendo:

> *Es condenadamente difícil que un hombre debiera quemar tantas velas de un cuarto de penique como yo lo he hecho y luego tener que pagar todo un año por el honor de una beca de la Real Sociedad cuando ya es una persona de renombre. Cuando un hombre es eminente, él tiene que pagarlo trimestralmente. Esta es la manera de premiar el ingenio en Inglaterra. ¡Malditos ellos y sus becas!*

Emerson fue un hombre fuertemente sano durante gran parte de su vida aunque él no hizo nada por cuidar su salud ya que bebía mucho y disfrutaba de su hobby favorito, el cual era pasar horas de pesca con el agua hasta la cintura. En 1776, sin embargo, su salud comenzó a deteriorarse. Él le escribió en una carta a su editor Nourse ese año (léase referencia [3]):

> *He estado muy afligido con la gota y los cálculos biliares todo este invierno, la gota me ha dejado, pero lo peor, los cálculos todavía continúan.*

Durante seis años se le fue incrementando el dolor de las piedras que lo condujo eventualmente a su muerte. Su epitafio fue escrito en hebreo y latín con palabras del propio Emerson:

> *Aquí reposan los restos mortales de William Emerson; un hombre cuyo mérito y conocimiento permaneció mucho tiempo desapercibido, aunque en él estaban unidas las virtudes de la sencillez y la integridad perfecta, con el genio infrecuente, fue un gran matemático. Si han leído sus obras, esta piedra no necesita informarle. Si no, léanla y aprendan.*

Referencias.

1. Biography by Alsager Vian, rev. Niccolò Guicciardini, in *Dictionary of National Biography* (Oxford, 2004).

Artículos:

2. W Bowe, Some account of the life and writings of the author, in *W Emerson, Tracts* (F Wingrave, London, 1793).
3. R Gow, Letters of William Emerson and Francis Holliday to the publisher, John Nourse, *British Society for the History of Mathematics Bulletin* **21** (1) (2006), 40-50.
4. C Lloyd, Cloddish beer drinker who played the numbers game, *The Northern Echo* (Monday 25 January 2010).

Versión en español por R. Ascanio H. del artículo en inglés de J. J. O’Connor y E. F. Robertson sobre “William Emerson” (Noviembre 2010).
Fuente: MacTutor History of Mathematics [http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Emerson.html].

Aportes al conocimiento

Elementos Básicos del Cálculo Integral (15)

Por: Prof. Rafael Ascanio Hernández - Prof. Próspero González Méndez

ÍNDICE

LA INTEGRAL DEFINIDA

TEOREMAS DEL CÁLCULO INTEGRAL.-

TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO INTEGRAL.

Mediante el Teorema Fundamental del Cálculo Integral se afirma que la derivación e integración de una función son operaciones inversas. Esto significa que toda función continua integrable verifica que la derivada de su integral es igual a ella misma.

Desde la época de los antiguos matemáticos griegos, como el caso de Arquímedes, se utilizaban técnicas aproximadas para calcular volúmenes, áreas y longitudes curvas, pero es por las ideas y aportes de Isaac Barrow (inglés, 1630-1677), Isaac Newton (inglés, 1643-1727) y Gottfried Wilhelm von Leibniz (alemán, 1646-1716) que se llegó al enunciado y demostración de este teorema.

En lo que respecta a la utilidad del teorema, cuando se hacen aplicaciones del cálculo integral algunas veces se encuentran funciones como las siguientes:

$$f(x)=\int_5^x t\,dt,\quad f(x)=\int_{Cos\,x}^{Sen\,x}\frac{1}{1-t^2}\,dt,\quad g(y)=\int_{\sqrt{y}}^{2\sqrt{y}} Sen\,t^2 dt,\quad g(x)=\int_x^{x+3} t\cdot(5-t)\,dt,\text{etc.}$$

Es decir, son funciones expresadas mediante ecuaciones integrales donde se utilizan integrales definidas cuyos límites de integración están conformados por variables o por funciones en esas variables, algunas de las cuales pueden ser evaluadas directamente pero otras no. Lo que si puede determinarse para cualquiera de ellas es su derivada y sobre eso trata la Primera Parte del Teorema Fundamental del Cálculo Integral, que se enuncia a continuación.

PRIMERA PARTE DEL TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO INTEGRAL.-

Teorema: Si $f\ (t)$ es continua en el intervalo $[a,\ b]$, y sea F la función definida por la ecuación integral $F(x)=\int_a^x f(t)dt \quad para \quad a\le x\le b$. Entonces F es una primitiva de f; es decir:

$$F'(x)=\frac{d}{dx}\left[\int_a^x f(t)dt\right]=f(x)$$

Comprobación:

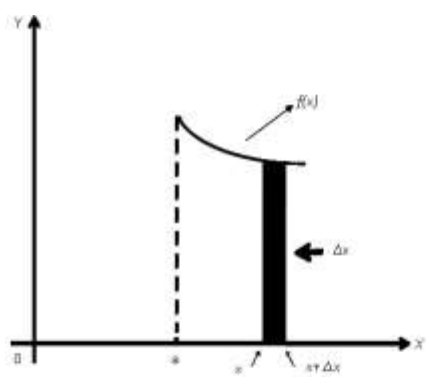
En la figura adjunta, se observa una región delimitada por la curva representativa de la función *f(x)*, el eje x y las rectas verticales *"a"* y *"x"*. Esta región va a depender de donde se coloque la recta *"x"*. El área de esta región se le puede identificar por *F(x)* y hacer igual a:

$$F(x)=\int_a^x f(t)\,dt$$

Si se considera el menor incremento posible, Δx, para esta área, se tendrá entonces que:

$$F(x+\Delta x)=\int_a^{x+\Delta x} f(t)\,dt$$

Al obtener la diferencia entre estas dos expresiones, gráficamente se corresponde con el rectángulo sombreado ubicado a la derecha de la gráfica.



Este rectángulo representa el incremento de la función, y viene dado por:

$$f(x)\,\Delta x \approx F(x+\Delta x)-F(x) \quad \Rightarrow \quad f(x)\approx \frac{F(x+\Delta x)-F(x)}{\Delta x}$$

$$f(x)=\underset{\Delta x\to 0}{Lim}\frac{F(x+\Delta x)-F(x)}{\Delta x} \quad \Rightarrow \quad f(x)=F'(x)$$

Consideración importante:

Si el límite de integración variable es el inferior, es decir: $F(x)=\int_x^a f(t)dt$, entonces se tendrá que:

$$F'(x)=\frac{d}{dx}\left[\int_x^a f(t)dt\right]=\frac{d}{dx}\left[-\int_a^x f(t)dt\right]=-f(x)$$

RESOLUCIÓN DE EJERCICIOS APLICANDO LA PRIMERA PARTE DEL TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO INTEGRAL.-

1.- Halle la derivada de $\int_7^x (2t-3)\,dt$.

Solución:

Aplicando el Teorema Fundamental del Cálculo Integral: $\frac{d}{dx}\left[\int_7^x (2t-3)\,dt\right]=2x-3$

2.- Obtenga: $\frac{d}{dx}\int_2^x Sen\,t^2 dt$.

Solución:

Se aplica el Teorema Fundamental del Cálculo Integral: $\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt=f(x)$.

Luego: $\boxed{\frac{d}{dx}\int_2^x Sen\,t^2\,dt = Sen\,x^2}$

3.- Determine la siguiente derivada: $\frac{d}{dw}\int_{-3}^{w}\frac{1}{t^2+1}dt$.

Solución:

Aplicando el Teorema Fundamental del Cálculo Integral:

$$\boxed{\frac{d}{dw}\int_{-3}^{w}\frac{1}{t^2+1}dt=\frac{1}{w^2+1}}$$

4.- Calcule: $\frac{d}{dy}\int_y^5 \sqrt[3]{1+x^2}\,dx$.

Solución:

Al aplicar el Teorema Fundamental del Cálculo Integral, se debe considerar que el límite inferior de integración es el variable, por lo que debe hacerse:

$$\frac{d}{dx}\left[\int_x^a f(t)dt\right]=\frac{d}{dx}\left[-\int_a^x f(t)dt\right]=-f(x)$$

Luego:

$$\boxed{\frac{d}{dy}\int_y^5 \sqrt[3]{1+x^2}\,dx=\frac{d}{dy}\left[-\int_5^y \sqrt[3]{1+x^2}\right]dx=-\sqrt[3]{1+y^2}}$$

5.- Halle: $\frac{d}{dx}\int_2^{x^4} Sen\,t^2 dt$.

Solución:

Como la derivada no es de la forma $\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt$ puesto que $x^4\neq x$, para calcularla hay que aplicar la Regla de la Derivada de la Función Compuesta (Regla de la Cadena):

$$\frac{d}{dx}[(f\circ g)(x)]=\frac{df[g(x)]}{dx}\cdot\frac{d[g(x)]}{dx}$$

Considérese entonces: $f(x)=\int_2^{g(x)} Sen\,t^2 dt \quad y \quad g(x)=x^4$.

Luego:

$$\frac{d}{dx}\int_2^{x^4} Sen\,t^2\,dt=\frac{d}{dx}\int_2^{g(x)} Sen\,t^2 dt\cdot\left[\frac{d(x^4)}{dx}\right]=Sen[g(x)]^2\cdot 4x^3=4x^3\cdot Sen\,(x^4)^2=\underline{4x^3 Senx^8}$$

6.- Obtenga: $\frac{d}{dx}\int_{-x}^{x} Sen\,t^3 dt$.

Solución:

Como ambos límites de integración son variables, se hace un arreglo a la expresión de la derivada aplicando propiedades de las integrales definidas:

$$\frac{d}{dx}\int_{-x}^{x} Sen t^3 dt=\frac{d}{dx}\int_{-x}^{0} Sen\,t^3 dt+\frac{d}{dx}\int_{0}^{x} Sen\,t^3 dt=(*)$$ [Se utiliza 0 por ser un valor intermedio equidistante a *x* y *-x*]

En el sumando-primera derivada, el límite de integración inferior es el variable. Se hace un segundo arreglo aplicando propiedades de las integrales definidas, para que sea variable solo el límite de integración superior, se aplica la Regla de la Derivada de la Función Compuesta y luego el Teorema Fundamental del Cálculo Integral:

$$(*)=\frac{d}{dx}\left[-\int_0^{-x} Sen\,t^3 dt\right]+\frac{d}{dx}\int_0^{x} Sen\,t^3 dt=\frac{d}{dx}\left[-\int_0^{g(x)} Sen\,t^3 dt\right]\cdot\frac{d(-x)}{dx}+Sen\,x^3=Sen\,(g(x))^3+Sen\,x^3=$$

$$=Sen(-x)^3+Sen\,x^3=Sen(-x^3)+Sen\,x^3=-Sen\,x^3+Sen\,x^3=\underline{0}$$

7.- Determine: $F'(v)=\frac{d}{dv}\int_{-v}^{v}\frac{1}{3+t^2}dt$.

Solución:

Considerando que los límites de integración son variables, se hace un arreglo de la expresión de la derivada utilizando cero por ser intermedio a dos números opuestos:

$$F'(v)=\frac{d}{dv}\int_{-v}^{v}\frac{1}{3+t^2}dt=\frac{d}{dv}\int_{-v}^{0}\frac{1}{3+t^2}dt+\frac{d}{dv}\int_{0}^{v}\frac{1}{3+t^2}dt=\frac{d}{dv}\int_{-v}^{0}\frac{1}{3+t^2}dt+\frac{1}{3+v^2}=(*)$$

Como en la derivada restante el límite inferior es el variable, se hace un segundo arreglo para que sea solo variable el límite de integración superior y se aplican la Regla de la Derivada de la Función Compuesta y el Teorema Fundamental del Cálculo Integral:

$$(*)=F'(v)=\frac{d}{dv}\left[-\int_0^{-v}\frac{1}{3+t^2}dt\right]+\frac{1}{3+v^2}=\frac{d}{dv}\left[-\int_0^{g(v)}\frac{1}{3+t^2}dt\right]\cdot\frac{d(g(v))}{dv}+\frac{1}{3+v^2}=\frac{1}{3+g(v)^2}+\frac{1}{3+v^2}=\frac{1}{3+(-v)^2}+\frac{1}{3+v^2}=$$

$$=\frac{1}{3+v^2}+\frac{1}{3+v^2}=\underline{\frac{2}{3+v^2}}$$

8.- Dada $F(x)=\int_{x^2}^{\sqrt{x}} Cos^2 t\,dt$, obtener $F'(x)$.

Solución:

Visto los ejercicios anteriores, al ser ambos límites variables se hace un primer arreglo descomponiendo la derivada en la suma de dos (aplicación propiedades de las integrales definidas). Se debe considerar un valor constante intermedio entre ambos límites pero como no se conoce el valor de estos límites, entonces sea válido *k* como este valor numérico constante. Se hace un segundo arreglo para que sean variables solamente los límites superiores (nuevamente aplicación propiedades integral definida). Se aplica la Regla de la Derivada de la Función Compuesta y el Teorema Fundamental del Cálculo Integral.

$$F'(x)=\frac{d}{dx}\int_{x^2}^{\sqrt{x}} Cos^2 t\,dt=\frac{d}{dx}\int_{x^2}^{k} Cos^2 t\,dt+\frac{d}{dx}\int_{k}^{\sqrt{x}} Cos^2 t\,dt=\frac{d}{dx}\left(-\int_{k}^{x^2} Cos^2 t\,dt\right)+\frac{d}{dx}\int_{k}^{\sqrt{x}} Cos^2 t\,dt=$$

$$=\frac{d}{dx}\left(-\int_{k}^{g(x)} Cos^2 t\,dt\right)\cdot\frac{d(g(x))}{dx}+\frac{d}{dx}\int_{k}^{h(x)} Cos^2 t\,dt\cdot\frac{d(h(x))}{dx}=-Cos^2(g(x))\cdot\frac{d(x^2)}{dx}+Cos^2(h(x))\cdot\frac{d(\sqrt{x})}{dx}=$$

$$=-2x\cdot Cos^2(x^2)+\frac{Cos^2(\sqrt{x})}{2\sqrt{x}}=\underline{\frac{Cos^2(\sqrt{x})}{2\sqrt{x}}-2x\cdot Cos^2(x^2)}$$

9.- Dada $F(x)=\int_{Ln^3\left(x^2\right)}^{Ln^2\left(x^3\right)} t^3\,dt$ **, obtenga** $\frac{dF}{dx}$.

Solución:

Se procede igual que en el ejemplo anterior:

$$\frac{dF}{dx}=F'(x)=\frac{d}{dx}\left(\int_{Ln^3\left(x^2\right)}^{Ln^2\left(x^3\right)} t^3dt\right)=\frac{d}{dx}\left(\int_{Ln^3\left(x^2\right)}^{k} t^3dt\right)+\frac{d}{dx}\left(\int_{k}^{Ln^2\left(x^3\right)} t^3dt\right)=$$

$$=\frac{d}{dx}\left(-\int_{k}^{Ln^3\left(x^2\right)} t^3dt\right)+\frac{d}{dx}\left(\int_{k}^{Ln^2\left(x^3\right)} t^3dt\right)=\frac{d}{dx}\left(-\int_{k}^{g(x)} t^3dt\right)\cdot\frac{d\left[g(x)\right]}{dx}+\frac{d}{dx}\left(\int_{k}^{h(x)} t^3dt\right)\cdot\frac{d\left[h(x)\right]}{dx}=$$

$$=-\left[g(x)\right]^3\cdot\frac{d\left[Ln^3\left(x^2\right)\right]}{dx}+\left[h(x)\right]^3\cdot\frac{d\left[Ln^2\left(x^3\right)\right]}{dx}=-Ln^9\left(x^2\right)\cdot\frac{6\cdot Ln^2\left(x^2\right)}{x}+Ln^6\left(x^3\right)\cdot\frac{6\cdot Ln\left(x^3\right)}{x}=$$

$$=\frac{6\cdot\left[Ln^7\left(x^3\right)-Ln^{11}\left(x^2\right)\right]}{x}$$

10.- Dada la función $F(x)=\int_{2}^{\int_{3}^{\int_{5}^{x^3}\left(1+t^2\right)dt}(1-t^2)\,dt}(t^2-1)\,dt$ **, verifique que al obtener su derivada aplicando la Primera Parte del Teorema Fundamental del Cálculo Integral, se cumple que:**

$$F'(x)=\frac{dF}{dx}=\frac{x^2\cdot\left(1+x^6\right)}{19083}\cdot\left\{\left[27\cdot\left(x^9+3x^3-140\right)-\left(x^9+3x^3-140\right)^3+486\right]^2-6561\right\}\cdot\left[9-\left(x^9+3x^3-140\right)^2\right]$$

Verificación:

Este ejemplo presenta mayor dificultad que los anteriores. Hay que detallar minuciosamente los pasos a seguir para que sea clara su resolución. Se hace evidente que debe derivarse considerando una función compuesta.

$$F'(x)=\frac{d\left(\int_{2}^{\int_{3}^{\int_{5}^{x^3}\left(1+t^2\right)dt}(1-t^2)\,dt}(t^2-1)\,dt\right)}{dx}=\frac{d}{dx}\left(\int_{2}^{g(x)}(t^2-1)\,dt\right)\cdot\frac{d\left[g(x)\right]}{dx}=$$

$$=\frac{d}{dx}\left(\int_{2}^{g(x)}(t^2-1)\,dt\right)\cdot\frac{d\left[\int_{3}^{\int_{5}^{x^3}\left(1+t^2\right)dt}(1-t^2)\,dt\right]}{dx}=$$

$$=\frac{d}{dx}\left(\int_{2}^{g(x)}(t^2-1)\,dt\right)\cdot\frac{d\left[\int_{3}^{h(x)}(1-t^2)\,dt\right]}{dx}\cdot\frac{d\left[h(x)\right]}{dx}=$$

$$=\frac{d}{dx}\left(\int_{2}^{g(x)}(t^2-1)\,dt\right)\cdot\frac{d\left[\int_{3}^{h(x)}(1-t^2)\,dt\right]}{dx}\cdot\frac{d\left[\int_{5}^{x^3}\left(1+t^2\right)dt)\right]}{dx}=$$

$$=\frac{d}{dx}\left(\int_{2}^{g(x)}(t^2-1)\,dt\right)\cdot\frac{d\left[\int_{3}^{h(x)}(1-t^2)\,dt\right]}{dx}\cdot\frac{d\left[\int_{5}^{s(x)}\left(1+t^2\right)dt)\right]}{dx}\cdot\frac{d\left[s(x)\right]}{dx}=$$

$$=\frac{d}{dx}\left(\int_{2}^{g(x)}(t^2-1)\,dt\right)\cdot\frac{d\left[\int_{3}^{h(x)}(1-t^2)\,dt\right]}{dx}\cdot\frac{d\left[\int_{5}^{s(x)}\left(1+t^2\right)dt)\right]}{dx}\cdot\frac{d\left(x^3\right)}{dx}=$$

$$=\frac{d}{dx}\left(\int_{2}^{g(x)}(t^2-1)\,dt\right)\cdot\frac{d\left[\int_{3}^{h(x)}(1-t^2)\,dt\right]}{dx}\cdot\frac{d\left[\int_{5}^{s(x)}\left(1+t^2\right)dt)\right]}{dx}\cdot 3x^2=$$

$$= \frac{d}{dx}\left(\int_2^{g(x)}(t^2-1)\,dt\right)\cdot\frac{d\left[\int_3^{h(x)}(1-t^2)\,dt\right]}{dx}\cdot\left[1+s^2(x)\right]\cdot 3x^2 =$$

$$= \frac{d}{dx}\left(\int_2^{g(x)}(t^2-1)\,dt\right)\cdot\left[1-h^2(x)\right]\cdot\left[1+s^2(x)\right]\cdot 3x^2 =$$

$$= \left[g^2(x)-1\right]\cdot\left[1-h^2(x)\right]\cdot\left[1+s^2(x)\right]\cdot 3x^2 =$$

$$= 3x^2\cdot\left[\left(\int_3^{\int_5^{x^3}(1+t^2)dt}(1-t^2)\,dt\right)^2-1\right]\cdot\left[1-\left(\int_5^{x^3}\left(1+t^2\right)dt\right)^2\right]\cdot\left[1+\left(x^3\right)^2\right]=(*)$$

Resolviendo la integral presente en (*). Para hacerlo, debe aplicarse la Segunda Parte del Teorema Fundamental del Cálculo Integral:

$$I = \int_5^{x^3}\left(1+t^2\right)dt = \left[t+\frac{t^3}{3}\right]_5^{x^3} = x^3+\frac{x^9}{3}-5-\frac{125}{3} = \frac{x^9+3x^3-140}{3}$$

Volviendo a (*)

$$(*) = 3x^2\cdot\left[\left(\int_3^{\frac{x^9+3x^3-140}{3}}(1-t^2)\,dt\right)^2-1\right]\cdot\left[1-\left(\frac{x^9+3x^3-140}{3}\right)^2\right]\cdot\left[1+\left(x^3\right)^2\right]=(**)$$

Resolviendo la integral presente en (**):

$$I = \int_3^{\frac{x^9+3x^3-140}{3}}(1-t^2)\,dt = \left[t-\frac{t^3}{3}\right]_3^{\frac{x^9+3x^3-140}{3}} = \frac{x^9+3x^3-140}{3}-\frac{\left(\frac{x^9+3x^3-140}{3}\right)^3}{3}+6=$$

$$= \frac{x^9+3x^3-140}{3}-\frac{\left(x^9+3x^3-14\right)^3}{81}+6=\frac{27\cdot\left(x^9+3x^3-140\right)-\left(x^9+3x^3-14\right)^3+486}{81}$$

Volviendo a (**)

$$(**) = 3x^2\cdot\left[\left(\int_3^{\frac{x^9+3x^3-140}{3}}(1-t^2)\,dt\right)^2-1\right]\cdot\left[1-\left(\frac{x^9+3x^3-140}{3}\right)^2\right]\cdot\left[1+x^6\right]=$$

$$= 3x^2\cdot\left\{\frac{\left[27\cdot\left(x^9+3x^3-140\right)-\left(x^9+3x^3-140\right)^3+486\right]^2-6561}{6561}\right\}\cdot\left[\frac{9-\left(x^9+3x^3-140\right)^2}{9}\right]\cdot\left(1+x^6\right)=$$

$$= \frac{x^2\cdot\left(1+x^6\right)}{19083}\cdot\left\{\left[27\cdot\left(x^9+3x^3-140\right)-\left(x^9+3x^3-140\right)^3+486\right]^2-6561\right\}\cdot\left[9-\left(x^9+3x^3-140\right)^2\right]$$

L. Q. Q. V.

REGLA DE LEIBNIZ.-

La Regla de Leibniz, al igual que con la Primera Parte del Teorema Fundamental del Cálculo Integral, también trata sobre derivadas de funciones expresadas mediante ecuaciones integrales donde se utilizan integrales definidas cuyos límites de integración están conformados por variables o por funciones en esas variables; pero permite utilizar un procedimiento de menor complejidad. Lo que sí está claro es que al aplicar ambos procedimientos, se obtiene el mismo resultado.

A continuación, se enuncia la Regla de Leibniz:

Si $u(x)$ y $v(x)$ son funciones de x derivables, entonces:

$$\frac{d}{dx}\left[\int_{v(x)}^{u(x)} f(t)\,dt\right] = f[u(x)]\cdot\frac{du}{dx} - f[v(x)]\cdot\frac{dv}{dx}$$

Esta expresión también se conoce como Fórmula Newton-Leibniz.

<u>Comprobación</u>:

Considérese la ecuación integral $\int_{v(x)}^{u(x)} f(t)\,dt$ y a F una antiderivada de f en $[a, b]$. Si se evalúa aplicando la Segunda Parte del Teorema Fundamental del Cálculo Integral, resulta:

$$\int_{v(x)}^{u(x)} f(t)\,dt = F[u(x)] - F[v(x)]$$

Luego si se deriva en ambos miembros de la igualdad, se obtiene:

$$\frac{d}{dx}\left[\int_{v(x)}^{u(x)} f(t)\,dt\right] = \frac{d}{dx}\{F[u(x)] - F[v(x)]\}$$

$$\frac{d}{dx}\left[\int_{v(x)}^{u(x)} f(t)\,dt\right] = F'[u(x)]\cdot\frac{du}{dx} - F'[v(x)]\cdot\frac{dv}{dx}$$

$$\boxed{\frac{d}{dx}\left[\int_{v(x)}^{u(x)} f(t)\,dt\right] = f[u(x)]\cdot\frac{du}{dx} - f[v(x)]\cdot\frac{dv}{dx}}$$

Quedando así comprobada la fórmula correspondiente a la Regla de Leibniz.

RESOLUCIÓN DE EJERCICIOS APLICANDO LA REGLA DE LEIBNIZ.-

1.- Determine la derivada de $F(x) = \int_{Senx}^{Cosx} \sqrt{1+t^2}\,dt$.

<u>Solución</u>:

Se aplica la Regla de Leibniz. Debe considerarse, entonces, que:

$$f(t) = \sqrt{1+t^2}$$
$$u(x) = Cosx$$
$$v(x) = Senx$$

Luego:

$$f(u) = \sqrt{1+Cos^2x}$$
$$f(v) = \sqrt{1+Sen^2x}$$
$$\frac{du}{dx} = -Senx$$
$$\frac{dv}{dx} = Cosx$$

De aquí que:

$$\boxed{\frac{d}{dx}\left[\int_{Senx}^{Cosx} \sqrt{1+t^2}\,dt\right] = \sqrt{1+Cos^2x}\cdot(-Senx) - \sqrt{1+Sen^2x}\cdot Cosx = -Senx\sqrt{1+Cos^2x} - Cosx\sqrt{1+Sen^2x}}$$

2.- Obtenga la derivada de $F(x)=\int_{\sqrt{x}}^{x^2-3x} Tg\, t\, dt$ **.**

Solución:

Para aplicar la Regla de Leibniz, se debe considerar que:

$f(t)=Tg\,t$
$u(x)=x^2-3x$
$v(x)=\sqrt{x}$

Por lo que:

$f(u)=Tg(x^2-3x)$
$f(v)=Tg\sqrt{x}$
$\frac{du}{dx}=2x-3$
$\frac{dv}{dx}=\frac{1}{2\sqrt{x}}$

Entonces:

$$\boxed{\frac{dF}{dx}=\frac{d}{dx}\left[\int_{\sqrt{x}}^{x^2-3x} Tg\,t\,dt\right]=Tg(x^2-3x)\cdot(2x-3)-Tg\sqrt{x}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}=(2x-3)Tg(x^2-3x)-\frac{Tg\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}}$$

SEGUNDA PARTE DEL TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO INTEGRAL.-

Esta segunda parte es una consecuencia del propósito que se persigue con la aplicación inicial del teorema, y permite calcular la integral de una función utilizando la antiderivada que se obtiene cuando ésta es integrada.

El procedimiento que permite calcular el valor de la integral definida se conoce como ***Regla de Barrow***.

A continuación se enuncia esta segunda parte del teorema:

Teorema: Si *f(x)* es continua en el intervalo $a \le x \le b$ y *F(x)* es cualquier primitiva de *f(x)* entonces:

$$\int_a^b f(x)dx=\left[F(x)\right]_a^b=F(b)-F(a)$$

Comprobación:

Sea $F(x)=\int_a^x f(t)\,dt$ una primitiva de *f*, tal que $F'(x)=\frac{d}{dx}\left[\int_a^x f(t)dt\right]=f(x)$. Considérese a otra función $G(x)=\int_a^x f(t)\,dt$ también primitiva de la función *f*, es decir, se cumple que $G'(x)=\frac{d}{dx}\left[\int_a^x f(t)\,dt\right]=f(x)$; ambas situaciones para todo valor *x* en el intervalo $[a,b]$.

Siendo tanto *F* como *G* primitivas de *f*, la diferencia entre ellas será una constante: *F(x)=G(x) + C*

Como *F* y *G* son continuas en [*a*, *b*], se puede asumir que: *F(a)=G(a) + C* y *F (b)=G (b) + C*

Restando *F (b)* y *F(a)*, se obtiene:

$F(b) - F(a) = [G(b) + C] - [G(a) + C]$

$F(b) - F(a) = G(b) - G(a)$

Como $G(x)=\int_a^x f(t)\,dt$, entonces $G(b)=\int_a^b f(t)\,dt$ y $G(a)=\int_a^a f(t)\,dt=0$ por propiedades de la integral definida.

Sustituyendo el valor de *G (b)* en *F (b)* y el de *G(a)* en *F(a)*, se tiene que: $F(b) - F(a)=\int_a^b f(t)\,dt$

Se entiende entonces que: $\boxed{\int_a^b f(t)\,dt = F(b) - F(a)}$

Se comprueba así la segunda parte del Teorema Fundamental del Cálculo Integral.

Ejemplo: Obtener $\int_1^4 x^2dx$.

Solución:

Las integrales definidas se identifican con I_0. Esto indica que se le hará corresponder un valor numérico determinado.

$$I_0 = \int_1^4 x^2dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_1^4 = \frac{4^3}{3} - \frac{1^3}{3} = \frac{64}{3} - \frac{1}{3} = \frac{63}{3} = 21$$

$$\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow$$

$$\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

RESOLUCIÓN DE INTEGRALES APLICANDO LA SEGUNDA PARTE DEL TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO INTEGRAL.-

1. - Calcular $\int_{-1}^1 (2x^2 - x^3)dx.$

Solución:

Resolviendo la integral:

$$I_0 = \int_{-1}^1 (2x^2 - x^3)dx = 2\int_{-1}^1 x^2dx - \int_{-1}^1 x^3dx = \left[\frac{2x^3}{3} - \frac{x^4}{4}\right]_{-1}^1 = \left(\frac{2.1^3}{3} - \frac{1^4}{4}\right) - \left[\frac{2.(-1)^3}{3} - \frac{(-1)^4}{4}\right] = \frac{2}{3} - \frac{1}{4} + \frac{2}{3} + \frac{1}{4} = \underline{\frac{4}{3}}$$

2. - Obtener $\int_1^4 \frac{dx}{\sqrt{x}}.$

Solución:

Resolviendo la integral:

$$I_0 = \int_1^4 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \int_1^4 x^{-\frac{1}{2}}dx = \left[\frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}\right]_1^4 = \left[2\sqrt{x}\right]_1^4 = 2\sqrt{4} - 2\sqrt{1} = 4 - 2 = \underline{2}$$

3. - Evaluar $\int_{-3}^{-1} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3}\right)dx.$

Solución:

Resolviendo la integral:

$$I_0 = \int_{-3}^{-1}\left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3}\right)dx = \int_{-3}^{-1}\frac{dx}{x^2} - \int_{-3}^{-1}\frac{dx}{x^3} = \int_{-3}^{-1} x^{-2}dx - \int_{-3}^{-1} x^{-3}dx = \left[-\frac{1}{x} + \frac{1}{2x^2}\right]_{-3}^{-1} = \left[-\frac{1}{-1} + \frac{1}{2\cdot(-1)^2}\right] - \left[-\frac{1}{-3} + \frac{1}{2\cdot(-3)^2}\right] =$$

$$= 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{18} = \frac{18 - 6 + 9 - 1}{18} = \frac{27 - 7}{18} = \frac{20}{18} = \underline{\frac{10}{9}}$$

4. - Evaluar $\int_{-2}^3 e^{-\frac{x}{2}}dx.$

Solución:

Resolviendo la integral.

Se realiza el cambio de variable: $u = -\frac{x}{2} \Rightarrow du = -\frac{dx}{2} \Rightarrow dx = -2du$

Luego:

$$I_0 = \int_{-2}^3 e^{-\frac{x}{2}}dx = \int_{-2}^3 e^u \cdot (-2du) = -2\int_{-2}^3 e^u du = \left[-2e^u\right]_{-2}^3 = \left[-2e^{-\frac{x}{2}}\right]_{-2}^3 = -2\cdot\left(e^{-\frac{3}{2}} - e\right) = -2\cdot\left(\frac{1}{e^{\frac{3}{2}}} - e\right) =$$

$$= -2\cdot(0{,}2231 - 2{,}7182) = -2\cdot(-2{,}4951) = \underline{4{,}9902}$$

$(utilizando\ aproximaciones\ por\ redondeo\ con\ e_A < 0{,}0001^{(*)})$

(*) e_A: Error de aproximación.

5. - Hallar $\int_{-6}^{6}\frac{dx}{x+2}$.

Solución:

Resolviendo la integral:

$$I_0=\int_{-6}^{6}\frac{dx}{x+2}=\left[Ln|x+2|\right]_{-6}^{6}=Ln|8|-Ln|-4|=Ln8-Ln4=Ln\left(\frac{8}{4}\right)=Ln2=0{,}6931471$$

6. - Obtener $\int_{-5}^{-3}\sqrt{x^2-4}\,dx$.

Solución:

Resolviendo la integral:

$$I_0=\int_{-5}^{-3}\sqrt{x^2-4}\,dx=\int_{-5}^{-3}\sqrt{x^2-2^2}\,dx=\left[\frac{1}{2}x\sqrt{x^2-4}-\frac{1}{2}\cdot 4Ln(x+\sqrt{x^2-4})\right]_{-5}^{-3}=\left[\frac{1}{2}x\sqrt{x^2-4}-2Ln(x+\sqrt{x^2-4})\right]_{-5}^{-3}=$$

$$=\left[\frac{1}{2}\cdot(-3)\cdot\sqrt{9-4}-2Ln\left|(-3)+\sqrt{9-4}\right|\right]-\left[\frac{1}{2}\cdot(-5)\cdot\sqrt{25-4}-2Ln\left|-5+\sqrt{25-4}\right|\right]=$$

$$=-\frac{3}{2}\sqrt{5}-2Ln\left|-3+\sqrt{5}\right|+\frac{5}{2}\sqrt{21}+2Ln\left|-5+\sqrt{21}\right|=-\frac{3}{2}\cdot 2{,}2361-2Ln|-0{,}7639|+\frac{5}{2}\cdot 4{,}5826+2Ln|-0{,}4174|=$$

(utilizando aproximaciones por redondeo con $e_A<0{,}0001$*)*

$$=-3{,}3541-2\cdot(-0{,}2693)+11{,}4565+2\cdot(-0{,}8737)=-3{,}3541+0{,}5386+11{,}4565-1{,}7474=6{,}8936$$

7. - Hallar $\int_{-2}^{2}\frac{dx}{x^2+4}$.

Solución:

Resolviendo la integral:

$$I_0=\int_{-2}^{2}\frac{dx}{x^2+4}=\int_{-2}^{2}\frac{dx}{x^2+2^2}=\left[\frac{1}{2}ArcTg\left(\frac{x}{2}\right)\right]_{-2}^{2}=\frac{1}{2}\left[ArcTg(1)-ArcTg(-1)\right]=\frac{1}{2}\left[\frac{\pi}{4}-\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right]=\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{4}$$

8. - Resolver $\int_{-1}^{2}\frac{dx}{x^2-9}$.

Solución:

Resolviendo la integral:

$$I_0=\int_{-1}^{2}\frac{dx}{x^2-9}=\int_{-1}^{2}\frac{dx}{x^2-3^2}=\frac{1}{2\cdot 3}\left[Ln\left|\frac{x-3}{x+3}\right|\right]_{-1}^{2}=\frac{1}{6}\left[Ln\left|\frac{x-3}{x+3}\right|\right]_{-1}^{2}=\frac{1}{6}Ln\left|-\frac{1}{5}\right|-\frac{1}{6}Ln|-2|=$$

$$=\frac{1}{6}Ln\frac{1}{5}-\frac{1}{6}Ln2=\frac{1}{6}Ln\frac{1}{10}=\frac{1}{6}Ln(0{,}1)=\frac{1}{6}\cdot(-2{,}3026)=-\frac{2{,}3026}{6}=-0{,}3838$$

9. - Obtener $\int_{1}^{e}Lnx\,dx$.

Solución:

Resolviendo la integral:

$$I_0=\int_{1}^{e}Lnx\,dx=\left[xLnx\right]_{1}^{e}-\int_{1}^{e}\frac{xdx}{x}=\left[xLnx\right]_{1}^{e}-\int_{1}^{e}dx=\left[xLnx-x\right]_{1}^{e}=\left[x(Lnx-1)\right]_{1}^{e}=$$

$$=e\cdot(Lne-1)-1\cdot(Ln1-1)=e\cdot(1-1)-Ln1+1=e\cdot 0-0+1=1$$

10. - Hallar $\int_3^6 xydx \quad cuando \quad x = 6Cos\theta, \quad y = 2Sen\theta \cdot$

Solución:

Se resuelve la integral.

Se expresan *"x"*, la *"y"* y el *"dx"* en la integral en términos del parámetro θ y $d\theta$ para cambiar los límites de integración y así calcular la integral resultante.

Luego:

$$dx = -6Sen\theta \cdot d\theta$$

$$x = 6 \quad \wedge \quad x = 6Cos\theta \quad \Rightarrow Cos\theta = 1 \quad \Rightarrow \quad \theta = 0$$

$$x = 3 \quad \wedge \quad x = 6Cos\theta \quad \Rightarrow Cos\theta = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \theta = \frac{\pi}{3}$$

De aquí que:

$$I_0 = \int_3^6 xydx = \int_{\frac{\pi}{3}}^0 (6Cos\theta)(2Sen\theta)(-6Sen\theta)\,d\theta = -72\int_{\pi/3}^0 Sen^2\theta \cdot Cos\theta \cdot d\theta = \left[-24Sen^3\theta\right]_{\frac{\pi}{3}}^0 = -24 \cdot \left[0 - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3\right] = 9\sqrt{3}$$

11.- Verifique si $\int_{-\pi}^{\pi} Sen\,(mx)\,Cos\,(nx)\,dx = 0$

Solución:

Se resuelve aplicando la respectiva Fórmula de Werner:

$$I_0 = \int_{-\pi}^{\pi} Sen\ (mx)\,Cos\ (nx)\,dx = \int_{-\pi}^{\pi} \tfrac{1}{2}\left\{Sen\ (m-n)x + Sen\ (m+n)x\right\}dx =$$

$$= \tfrac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} Sen\ [(m-n)x]\,dx + \tfrac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} Sen\ [(m+n)x]\ dx =$$

$$= \tfrac{1}{2}\left[-\frac{1}{m-n}\cdot Cos\ [(m-n)\,x] - \frac{1}{m+n}\cdot Cos\ [(m+n)\,x]\right]_{-\pi}^{\pi} =$$

$$= -\tfrac{1}{2(m-n)}\cdot Cos[(m-n)\,\pi] - \tfrac{1}{2(m+n)}\cdot Cos[(m+n)\,\pi] - \left\{-\tfrac{1}{2(m-n)}\cdot Cos[(m-n)(-\pi)] - \tfrac{1}{2(m+n)}\cdot Cos[(m+n)(-\pi)]\right\} =$$

$$= -\tfrac{1}{2(m-n)}\cdot Cos[(m-n)\,\pi] - \tfrac{1}{2(m+n)}\cdot Cos[(m+n)\,\pi] + \tfrac{1}{2(m-n)}\cdot Cos[(m-n)\,\pi] + \tfrac{1}{2(m+n)}\cdot Cos[(m+n)\,\pi] = 0$$

L. Q. Q. V.

Nota: Se debe recordar que Coseno es función par.

12.- Compruebe si $\int_{-\pi}^{\pi} Sen\,(mx)\,Sen\,(nx)\,dx = \begin{cases} \pi & si \quad m = n \\ 0 & si \quad m \neq n \end{cases}$

Solución:

(*) Si $m = n$:

Se utiliza la identidad trigonométrica:

$$Sen^2 u = \frac{1 - Cos(2u)}{2}$$

Luego:

$$I_0 = \int_{-\pi}^{\pi} Sen\,(mx)\,Sen\,(nx)\,dx = \int_{-\pi}^{\pi} Sen^2\ (mx)\,dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1 - Cos\,(2mx)}{2}\,dx = \tfrac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\left[1 - Cos\,(2mx)\right]dx =$$

$$= \tfrac{1}{2}\left[x - \tfrac{1}{2m}\,Sen\,(2mx)\right]_{-\pi}^{\pi} = \tfrac{1}{2}\left[\pi - (-\pi)\right] - \tfrac{1}{4m}\left[Sen\,(2m\pi) - Sen\,(-2m\pi)\right] = \pi - \tfrac{1}{2m}\,Sen\,(2m\pi) = \pi - 0 = \pi$$

L. Q. Q. C.

Nota: Se debe recordar que Seno es función impar.

(*) Si $m \neq n$: Se utiliza la correspondiente Fórmula de Werner:

$$Sen\ (mu)\,Sen\,(nx) = \tfrac{1}{2}\left[Cos\,(m-n)\,u - Cos\,(m+n)\,u\right]$$

Luego:

$$I_0 = \int_{-\pi}^{\pi} Sen\,(mx)\,Sen\,(nx)\,dx = \int_{-\pi}^{\pi} \tfrac{1}{2}\left[Cos\,(m-n)\,x - Cos\,(m+n)\,x\right]dx =$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} \tfrac{1}{2}\left[Cos\,(m-n)\,x\right]dx - \int_{-\pi}^{\pi} \tfrac{1}{2}\left[Cos\,(m+n)\,x\right]dx = \left[\tfrac{1}{2(m-n)}\,Sen\,(m-n)x\right]_{-\pi}^{\pi} - \left[\tfrac{1}{2(m+n)}\,Sen\,(m+n)x\right]_{-\pi}^{\pi} =$$

$$= \tfrac{1}{(m-n)}\,Sen\,(m-n)\pi - \tfrac{1}{(m-n)}\,Sen\,(m-n)\pi = 0$$

L. Q. Q. C.

Nota: Se debe recordar que Seno es función impar.

13.- Dada: $f(x)=\begin{cases}1-x, & -1\le x<0\\ x^2, & 0\le x<2\\ -1, & 2\le x\le 3\end{cases}$ **, obtener** $\int_a^b f(x)\,dx$ **.**

Solución:

Resolviendo la integral. La función *f(x)* es una función definida por tramos, siendo su dominio el intervalo [-1, 3].

Por la forma como está definida *f(x)*, se tiene que:

$$I_0=\int_{-1}^{3} f(x)\,dx=\int_{-1}^{0}(1-x)\,dx+\int_0^2 x^2\,dx+\int_2^3(-1)\,dx=\left[x-\frac{x^2}{2}\right]_{-1}^{0}+\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^2+\left[-x\right]_2^3=\frac{3}{2}+\frac{8}{3}-1=\frac{19}{6}\quad\Rightarrow\quad\boxed{I_0=\frac{19}{6}}$$

14.- Compruebe que $\int_{-1}^{7}|x-5|\,dx=20$ **.**

Comprobando:

Resolviendo la integral. El integrando está conformado por una función valor absoluto, $f(x)=|x-5|$.

Esta función queda definida de la siguiente manera: $|x-5|=\begin{cases}x-5, \; si\ x\ge 5\\ -(x-5),\; si\ x<5\end{cases}$.

Entonces, al resolver la integral, se tiene que:

$$I_0=\int_{-1}^{7}|x-5|\,dx=\int_{-1}^{5}[-(x-5)]\,dx+\int_5^7(x-5)\,dx=\int_{-1}^{5}(5-x)\,dx+\int_5^7(x-5)\,dx=$$

$$=\left[5x-\frac{x^2}{2}\right]_{-1}^{5}+\left[\frac{x^2}{2}-5x\right]_5^7=25-\frac{25}{2}+5+\frac{1}{2}+\frac{49}{2}-35-\frac{25}{2}+25=20\qquad\Rightarrow\quad\boxed{I_0=20}$$

L. Q. Q. C.

15.- Compruebe si: $\int_{-2}^{4}|x-2|\,dx=10$

Comprobando:

Resolviendo la integral. Siendo *f(x)* una función valor absoluto, se puede expresar de la siguiente manera:

$$f(x)=|x-2|=\begin{cases}-(x-2), & si\ x<-2\\ x-2, & si\ x\ge 2\end{cases}$$

Luego:

$$I_0=\int_{-2}^{4}|x-2|\,dx=\int_{-2}^{2}(2-x)\,dx+\int_2^4(x-2)\,dx=\left[2x-\frac{x^2}{2}\right]_{-2}^{2}+\left[\frac{x^2}{2}-2x\right]_2^4=(4-2)-(-4-2)+(8-8)-(2-4)=2+6+0+2=10$$

L. Q. Q. C.

16.- Verifique si $\int_{-1}^{1}\sqrt{|x|-x}\,dx=\frac{2\sqrt{2}}{3}$ **.**

Verificando:

Resolviendo la integral. El integrando está conformado por una raíz cuadrada cuyo radicando presenta una función valor absoluto, $f(x)=\sqrt{|x|-x}$.

Esta función queda definida de la siguiente manera: $\sqrt{|x|-x}=\begin{cases}0, \; si\ x\ge 0\\ \sqrt{-2x},\; si\ x<0\end{cases}$.

Entonces, al resolver la integral, se tiene que:

$$I_0=\int_{-1}^{1}\sqrt{|x|-x}\,dx=\int_{-1}^{0}\sqrt{-2x}\,dx+\int_0^1 0\cdot dx=\int_{-1}^{0}\sqrt{-2x}\,dx=-\frac{1}{2}\int_{-1}^{0}\sqrt{-2x}\cdot(-2dx)=-\frac{1}{2}\int_{-1}^{0}(-2x)^{1/2}\cdot(-2\,dx)=$$

$$=-\frac{1}{2}\cdot\left[\frac{2}{3}\cdot(-2x)^{3/2}\right]_{-1}^{0}=-\frac{1}{3}\cdot\left[(-2x)^{3/2}\right]_{-1}^{0}=0+\frac{1}{3}\cdot 2^{3/2}=\frac{\sqrt{2^3}}{3}=\frac{2\sqrt{2}}{3}\quad\Rightarrow\quad\boxed{I_0=\frac{2\sqrt{2}}{3}}$$

L. Q. Q. V.

17.- Obtener el valor de: $\int_{-2}^{2} \sqrt{2+|x|}\, dx$

Verificando:

Resolviendo la integral. Por ser *f(x)* una función radical con radicando donde la variable aparece como argumento de un valor absoluto, se expresa de la siguiente manera:

$$f(x) = \sqrt{2+|x|} = \begin{cases} \sqrt{2+x}, & si\ x \geq 0 \\ \sqrt{2-x}, & si\ x < 0 \end{cases}$$

Luego:

$$I_0 = \int_{-2}^{2} \sqrt{2+|x|}\, dx = \int_{-2}^{0} \sqrt{2-x}\, dx + \int_{0}^{2} \sqrt{2+x}\, dx = \int_{-2}^{0} (2-x)^{\frac{1}{2}}\, dx + \int_{0}^{2} (2+x)^{\frac{1}{2}}\, dx = (*)$$

Cambios de variable:

$$u = 2-x \quad \Rightarrow \quad du = -dx \quad \Rightarrow \quad dx = -du$$
$$v = 2+x \quad \Rightarrow \quad dv = dx$$

Volviendo a (*):

$$(*) = I_0 = -\int_{-2}^{0} u^{\frac{1}{2}}\, du + \int_{0}^{2} v^{\frac{1}{2}}\, dv = -\frac{2}{3}\cdot\left[u^{\frac{3}{2}}\right]_{-2}^{0} + \frac{2}{3}\cdot\left[v^{\frac{3}{2}}\right]_{0}^{2} = -\frac{2}{3}\cdot\left[\sqrt{(2-x)^3}\right]_{-2}^{0} + \frac{2}{3}\cdot\left[\sqrt{(2+x)^3}\right]_{0}^{2} =$$

$$= -\frac{2}{3}\cdot\left(\sqrt{2^3} - \sqrt{4^3}\right) + \frac{2}{3}\cdot\left(\sqrt{4^3} - \sqrt{2^3}\right) = -\frac{4}{3}\sqrt{2} + \frac{16}{3} + \frac{16}{3} - \frac{4}{3}\sqrt{2} = \frac{32}{3} - \frac{8}{3}\sqrt{2} = \frac{32 - 8\sqrt{2}}{3} = 6{,}8954305$$

18. - Verifique si $\int_{-1}^{1} \sqrt{|x| - x}\, dx = \frac{2\sqrt{2}}{3}$.

Verificando:

Resolviendo la integral. Se tiene una función radical donde el radicando presenta a la variable formando el argumento de un valor absoluto.

Entonces, esta función se puede expresar de la siguiente manera:

$$f(x) = \sqrt{|x| - x} = \begin{cases} 0, & si\ x \geq 0 \\ \sqrt{-2x}, & si\ x < 0 \end{cases}.$$

Al resolver la integral, se tiene lo siguiente:

$$I_0 = \int_{-1}^{1} \sqrt{|x| - x}\, dx = \int_{-1}^{0} \sqrt{-2x}dx + \int_{0}^{1} 0\cdot dx = \int_{-1}^{0} \sqrt{-2x}dx = -\frac{1}{2}\int_{-1}^{0} \sqrt{-2x}\cdot(-2dx) =$$

$$= -\frac{1}{2}\int_{-1}^{0} (-2x)^{1/2}\cdot(-2\,dx) = -\frac{1}{2}\cdot\left[\frac{2}{3}\cdot(-2x)^{3/2}\right]_{-1}^{0} = -\frac{1}{3}\cdot\left[(-2x)^{3/2}\right]_{-1}^{0} = 0 + \frac{1}{3}\cdot 2^{3/2} = \frac{\sqrt{2^3}}{3} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

L. Q. Q. V.

19.- Resolver: $\int_{4}^{t} \sqrt{2|x|+1}\, dx.$

Solución:

Resolviendo la integral. El integrando está conformado por una raíz cuadrada cuyo radicando presenta un valor absoluto.

Esta función queda definida así: $f(x) = \sqrt{2|x|+1} = \begin{cases} \sqrt{2x+1}, & si\ x \geq 0 \\ \sqrt{1-2x}, & si\ x < 0 \end{cases}.$

A continuación, se procede de la siguiente manera.

- Cuando $t \geq 0$: $I_0 = \int_4^t \sqrt{2|x|+1}\,dx = \int_4^t \sqrt{2x+1}\,dx = \int_4^t (2x+1)^{\frac{1}{2}}\,dx = (*)$

Cambio de variable:

$u = 2x+1 \Rightarrow du = 2dx \Rightarrow dx = \frac{du}{2}$

Volviendo a (*):

$$(*) = I_0 = \frac{1}{2}\int_4^t u^{\frac{1}{2}}\,du = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\left[u^{\frac{3}{2}}\right]_4^t = \frac{1}{3}\cdot\left[\sqrt{u^3}\right]_4^t = \frac{1}{3}\cdot\left[\sqrt{(2x+1)^3}\right]_4^t = \frac{1}{3}\cdot\sqrt{(2t+1)^3} - 9$$

$$\Rightarrow \boxed{I_0 = \frac{1}{3}\cdot\sqrt{(2t+1)^3} - 9 \quad si\ t \geq 0}$$

- Cuando $t < 0$: $I_0 = \int_4^t \sqrt{2|x|+1}\,dx = -\int_t^4 \sqrt{2|x|+1}\,dx = -\left[\int_t^0 \sqrt{1-2x}\,dx + \int_0^4 \sqrt{2x+1}\,dx\right] = (*)$

Cambios de variables:

$u = 1-2x \Rightarrow du = -2dx \Rightarrow dx = -\frac{du}{2}$

$v = 2x+1 \Rightarrow dv = 2dx \Rightarrow dx = \frac{dv}{2}$

Volviendo a (*):

$$(*) = I_0 = -\left[-\frac{1}{2}\int_t^0 u^{\frac{1}{2}}\,du + \int_0^4 v^{\frac{1}{2}}\,dv\right] = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\left[u^{\frac{3}{2}}\right]_t^0 - \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\left[v^{\frac{3}{2}}\right]_0^4 = \frac{1}{3}\cdot\left[\sqrt{(1-2x)^3}\right]_t^0 - \frac{1}{3}\cdot\left[\sqrt{(1+2x)^3}\right]_0^4 =$$

$$= \frac{1}{3} - \frac{1}{3}\cdot\sqrt{(1-2t)^3} - 9 + \frac{1}{3} = -\frac{1}{3}\cdot\sqrt{(1-2t)^3} - \frac{25}{3} \quad \Rightarrow \boxed{I_0 = -\frac{1}{3}\cdot\sqrt{(1-2t)^3} - \frac{25}{3} \quad si\ t < 0}$$

20.- Resolver: $\int_0^t (|2x| + x)dx.$

<u>Solución</u>:

Resolviendo la integral. Siendo $f(x)$ una función que incluye un valor absoluto, se puede expresar de la siguiente manera:

$$f(x) = |2x| + x = \begin{cases} -x & si\ x < 0 \\ 3x & si\ x \geq 0 \end{cases}$$

Luego, al resolver se debe considerar:

Cuando $t < 0$: $I_0 = \int_0^t (|2x| + x)dx = -\int_t^0 (-x)dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_t^0 = 0 - \frac{t^2}{2} = -\frac{t^2}{2} \Rightarrow \boxed{I_0 = -\frac{t^2}{2} \quad si\ t < 0}$

Cuando $t \geq 0$: $I_0 = \int_0^t (|2x| + x)dx = \int_0^t 3x dx = \left[\frac{3x^2}{2}\right]_0^t = \frac{3t^2}{2} - 0 = \frac{3t^2}{2} \Rightarrow \boxed{I_0 = \frac{3t^2}{2} \quad si\ t \geq 0}$

21.- Resolver: $\int_0^t (|x-1| + |x|)dx.$

<u>Solución</u>:

Resolviendo la integral. La función está expresada mediante una adición de valores absolutos.

Entonces, $f(x)$ se interpreta de la siguiente manera:

$$f(x) = |x-1| + |x| = \begin{cases} -x-1-x = -2x-1 & si\ x < 0 \\ x-1+x = 2x-1 & si\ x \geq 0 \end{cases}$$

Al resolver la integral, se tiene:

Cuando $t<0$:

$$I_0=\int_0^t(|x-1|+|x|)dx=-\int_t^0(-2x-1)dx=\int_t^0(2x+1)dx=\left[x^2+x\right]_t^0=-(t^2+t)\quad\Rightarrow\quad\boxed{I_0=-(t^2+t)}$$

Cuando $t\geq 0$:

$$I_0=\int_0^t(|x-1|+|x|)dx=\int_0^t(2x-1)dx=\left[x^2-x\right]_0^t=t^2-t\quad\Rightarrow\boxed{I_0=t^2-t}$$

TEOREMA DEL VALOR MEDIO EN EL CÁLCULO INTEGRAL.-

El Teorema del Valor Medio para el Cálculo Integral queda enunciado de la siguiente manera:

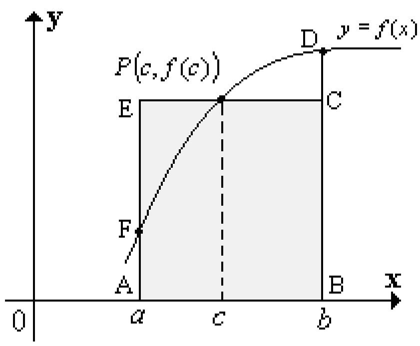
Teorema: Si f es continua en el intervalo [a, b], existe al menos un número *c* entre *a* y *b* tal que:

$$\int_a^b f(x)\,dx=f(c)\cdot(b-a)$$

Es decir que se puede hablar del Teorema del Valor Medio para la Integral Definida.

Interpretación geométrica.-

Si $\forall x\in[a,b],\ f(x)\geq 0$, entonces $\int_a^b f(x)\,dx$ representa el área de la región limitada por la curva *f*(*x*), las rectas *x=a*, *x=b* y el eje *x* de las abscisas. Entonces el Teorema del Valor Medio para el Cálculo Integral establece que existe un número $c\in[a,b]$ tal que el área del rectángulo ABCE (figura adjunta) cuyas dimensiones son la altura *f(c)* y el ancho *(b-a)* es igual al área de la región ABDF. El número *c* no es necesariamente único, aunque el Teorema del Valor Medio garantiza que si se cumplen las condiciones, por lo menos un número satisface la igualdad enunciada por el teorema.



Comprobación del Teorema del Valor Medio para el Cálculo Integral.-

Considérese que M y *m* son respectivamente, el máximo y el mínimo de la función f en $[a,b]$, lo que significa que:

$$m\leq f(x)\leq M\quad cuando\quad a\leq x\leq b$$

Por propiedades de las integrales definidas, se puede asumir que:

$$\int_a^b m\,dx\leq\int_a^b f(x)\,dx\leq\int_a^b M\,dx$$

$$m\,(b-a)\leq\int_a^b f(x)\,dx\leq M\,(b-a)$$

$$m\leq\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx\leq M$$

Como la función f es continua en [*a, b*], y si se considera que el valor $I_0^*=\dfrac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$ es un número que se encuentra entre M y *m*, entonces, existe un número c entre *a* y *b* para el cual $f(c)=I_0^*$. Por lo tanto, se tiene que:

$$f(c)=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\ \text{ y de aquí que }\ \int_a^b f(x)=\cdot f(c)(b-a)$$

Se comprueba así el Teorema del valor medio para el cálculo Integral.

VALOR MEDIO DE UNA FUNCIÓN.-

Definición: Sea f una función continua en [a, b], el valor medio o promedio de f en [a, b], que se identifica con f_{med}, es

$$f_{med} = \frac{1}{b-a} \cdot \int_a^b f(x)\,dx$$

Comprobación:

Sea $a \leq x \leq b$ un intervalo sobre el cual una función dada $f(x)$ es continua. Considérese la división de este intervalo en n subintervalos $h_1, \ h_2, \ \cdots \ h_n$ insertando $n-1$ puntos $\xi_i: \{\xi_1, \ \xi_2, \ \cdots \ \xi_{n-1}\}$, de tal manera que se origine una partición regular $a < \xi_1 < \xi_2 < \cdots < \xi_{n-1} < b,$ donde $a = \xi_0$ y $b = \xi_n$. Estos subintervalos $[a,\xi_1],[\xi_1,\xi_2],\cdots,[\xi_{n-1},b]$, tendrán sus amplitudes $\Delta_i x$ iguales a consecuencia de la partición, calculándose la misma por $\Delta_i x = \frac{b-a}{n}$. Ahora si en cada subintervalo se seleccionan puntos $x_i: \{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$, se puede obtener la siguiente sumatoria:

$$S_n = \frac{f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n)}{n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\cdot$$

Esta expresión representa una estimación del Valor Medio de la función f en [a, b]. Como la amplitud de los subintervalos se determina por $\Delta_i x = \frac{b-a}{n}$, entonces de aquí se origina que $\frac{1}{n} = \frac{\Delta_i x}{b-a}$. Si esta última expresión se sustituye en la sumatoria anterior, se tiene que:

$$S_n = \frac{1}{b-a}\sum_{i=1}^{n}\left[f(x_i)\cdot \Delta_i x\right]\cdot$$

Esta expresión es una Suma de Riemann. Si se considera que el número n de subintervalos tiende a infinito $(n \to \infty)$, y en consecuencia la amplitud de los subintervalos tiende a cero $(\Delta_i x \to 0)$, al tomar límite se obtiene:

$$\underset{n\to\infty}{Lim}\, S_n = \underset{n\to\infty}{Lim}\left\{\frac{1}{b-a}\sum_{i=1}^{n}\left[f(x_i)\cdot\Delta_i x\right]\right\} = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$$

Es decir que al tomar límite para $n \to \infty$, la estimación S_n se aproxima al "valor medio verdadero", correspondiendo con la fórmula dada para esta definición.

RESOLUCIÓN DE EJERCICIOS UTILIZANDO EL TEOREMA DEL VALOR MEDIO DEL CÁLCULO INTEGRAL.-

1.- Dada $f(x) = x^2$, determinar un valor de $c \in [1,3]$ con un error de aproximación por defecto menor a una centésima (e_A<0,01) tal que $\int_1^3 f(x)dx = f(c)\cdot(3-1)$.

Solución:

Calculando la integral:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_1^3 x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_1^3 = \frac{3^3}{3} - \frac{1^3}{3} = \frac{27-1}{3} = \frac{26}{3} = 8{,}667$$

Luego:

$$f(c)\cdot(3-1) = 8{,}667 \quad\Rightarrow\quad f(c)\cdot 2 = 8{,}667 \quad\Rightarrow\quad f(c) = \frac{8{,}667}{2} \quad\Rightarrow\quad f(c) = 4{,}333 \qquad \Rightarrow c^2 = 4{,}333 \quad\Rightarrow\quad c = \pm 2{,}08$$

El valor –2,08 se rechaza porque no está en [1,3]; por lo tanto: $\boxed{c = 2{,}08}$

2.- Dada la siguiente función, $f(x) = x^3$, aplique el Teorema del Valor Medio del Cálculo Integral para determinar un valor de $c \in [1,2]$ con un error de aproximación por defecto menor a una milésima (e_A<0,001).

Solución:

Calculando la integral: $\int_1^2 x^3 dx = \left[\frac{x^4}{4}\right]_1^2 = \frac{2^4}{4} - \frac{1^4}{4} = \frac{16-1}{4} = \frac{15}{4} = 3{,}75$

Luego: $f(c)\cdot(2-1) = 8{,}667 \Rightarrow f(c)\cdot 1 = 3{,}75 \Rightarrow f(c) = 3{,}75 \Rightarrow c^3 = 3{,}75 \Rightarrow c = \sqrt[3]{3{,}75} = 1{,}553 \Rightarrow \quad c = 1{,}553 \in [1, 2]$

3.- Halle un valor c para $f(x) = Sen\ x$ definida en $[0,\pi]$ con e_A<0,0001.

Solución:

Aplicando Teorema del Valor Medio: $\int_0^{\pi} Senx\, dx = f(c)\cdot(\pi-0) = f(c)\cdot\pi$

Luego: $\int_0^{\pi} Senx\, dx = \left[-Cosc\right]_0^{\pi} = -Cos\pi + Cos\,0 = -(-1)+1 = 2$

De aquí que: $f(c)\cdot\pi = 2 \Rightarrow f(c) = \dfrac{2}{\pi} \Rightarrow f(c) = 0{,}6366 \Rightarrow \quad Sen\,c = 0{,}6366 \quad \Rightarrow \quad c = ArcSen\,(0{,}6366)$

Como el Seno es positivo en el Primer y Segundo cuadrantes del Círculo Trigonométrico, se obtienen dos posibles soluciones para c:

$$\begin{cases} c\in I_c: \quad c = ArcSen(0{,}6366) = Sen^{-1}(0{,}6366) = 0{,}6900 \Rightarrow c = 0{,}6901 \quad (en\ radianes) \\ c\in II_c: \quad c = \pi - 0{,}6901 = 2{,}4515 \Rightarrow c = 2{,}4515 \quad (en\ radianes) \end{cases}$$

Ambos resultados se aceptan porque pertenecen al intervalo $[0,\pi]$.

4.- Obtenga un valor c para $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ definida en [-1,1].

Solución:

Aplicando Teorema del Valor Medio: $\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}\,dx = f(c)\cdot[1-(-1)] = f(c)\cdot 2$

Luego: $\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}\,dx = \left[\frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{2}ArcSenx\right]_{-1}^{1} = ArcSen\,1 = Sen^{-1}\,1 = \dfrac{\pi}{2}$

De aquí que: $f(c)\cdot 2 = \dfrac{\pi}{2} \Rightarrow f(c) = \dfrac{\pi}{4} \Rightarrow \sqrt{1-c^2} = \dfrac{\pi}{4} \Rightarrow 1-c^2 = \dfrac{\pi^2}{16} \quad \Rightarrow \quad c^2 = 1-\dfrac{\pi^2}{16} \Rightarrow \quad c = \pm\sqrt{1-\dfrac{\pi^2}{16}} = \pm 0{,}619$

Ambos valores de c se aceptan porque pertenecen al intervalo [-1,1].

5.- Obtenga un valor c para $f(x) = x^2+4x+5$ definida en [1, 4].

Solución:

Calculando la integral:

$$\int_1^4 \left(x^2+4x+5\right)dx = \left[\frac{x^3}{3} + 2x^2 + 5x\right]_1^4 = 21+45 = 66 \quad \Rightarrow \quad \int_1^4\left(x^2+4x+5\right)dx = 66$$

Se aplica el Teorema:

$$\int_1^4\left(x^2+4x+5\right)dx = f(c)\cdot(4-1) \quad \Rightarrow \quad 66 = \left(c^2+4c+5\right)\cdot 3 \quad \Rightarrow \quad 22 = c^2+4c+5$$

$$\Rightarrow \qquad c^2+4c-17 = 0 \qquad \begin{cases} c_1 = 2{,}582 \in [1,4] \\ c_2 = -6{,}582 \notin [1,4] \end{cases} \quad \Rightarrow \quad c = 2{,}582$$

6.- Encuentre un valor c que satisfaga el Teorema del Valor medio para el Cálculo Integral si se tiene $\int_0^2 x^2 dx$. Muestre la interpretación geométrica del resultado.

Solución:

Al plantear el Teorema del Valor medio para el Cálculo Integral para el caso del ejemplo, se tiene:

$$\int_0^2 x^2 dx = f(c)\cdot(2-0)$$

$$\int_0^2 x^2 dx = 2\cdot f(c) \quad (*)$$

Calculando la integral definida:

$$I_0 = \int_0^2 x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^2 = \frac{8}{3} \Rightarrow I_0 = \frac{8}{3}$$

Volviendo a (*):

$$(*)\ \ \frac{8}{3} = 2 \cdot f(c)$$

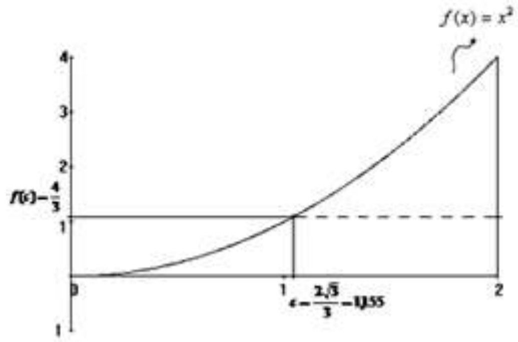
$$f(c) = \frac{4}{3}$$

$$c^2 = \frac{4}{3}$$

$$c = \pm\sqrt{\frac{4}{3}} = \pm\frac{2\sqrt{3}}{3} = \pm 1{,}155 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} c_1 = 1{,}155 \ \in [0,2] \\ c_2 = -1{,}155 \notin [0,2] \end{cases}$$

El valor de *c* que permite que la función $f(x) = x^2$ cumpla con el Teorema del Valor Medio para el Cálculo Integral es $c_1 = 1{,}155$ en $[0,2]$.

Interpretación geométrica:



7.- Sea $f(x) = x^3 + 1$. Determine un valor de *c* en [-2, 2] que permita a la función dada cumplir con el Teorema del Valor medio para el Cálculo Integral. Muestre gráficamente los resultados.

Solución:

Se plantea el Teorema del Valor medio para el Cálculo Integral para el caso del ejemplo:

$$\int_{-2}^{2} (x^3 + 1)dx = f(c) \cdot [2 - (-2)]$$

$$\int_{-2}^{2} (x^3 + 1)dx = 4 \cdot f(c) = (*)$$

Calculando la integral definida:

$$I_0 = \int_{-2}^{2} (x^3 + 1)dx = \left[\frac{x^4}{4} + x\right]_{-2}^{2} = 4 \Rightarrow I_0 = 4$$

Volviendo a (*):

$$(*)\ \ 4 = 4 \cdot f(c)$$

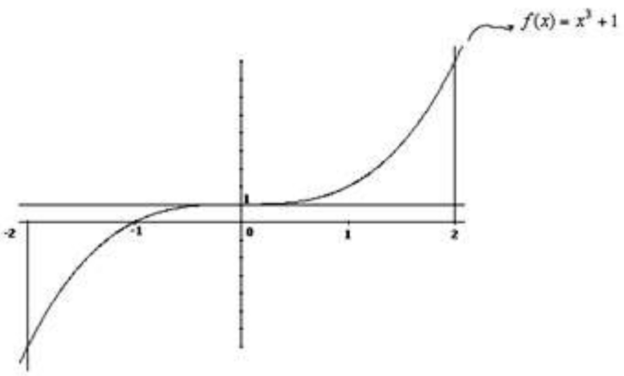
$$f(c) = 1$$

$$c^3 + 1 = 1$$

$$c = 0 \in [-2,2]$$

El valor de *c* que permite que la función $f(x) = x^3 + 1$ cumpla con el Teorema del Valor Medio para el Cálculo Integral es $c = 0$ en $[-2,2]$.

Interpretación geométrica:



8.-Dada la siguiente función, aplique el Teorema del Valor Medio para el Cálculo Integral, y determine un valor de *c* en el intervalo especificado que permita a la función cumplir con dicho teorema:

$$f(w)=\frac{Ln(6w-3)}{6w-3} \quad en \quad \left[\frac{2}{3},1\right].$$

Solución:

Planteando el teorema:

$$\int_{\frac{2}{3}}^{1}\frac{Ln(6w-3)}{6w-3}dw = f(c)\cdot\left(1-\frac{2}{3}\right)$$

Resolviendo la integral por cambio de variable.

Cambio: $u = Ln(6w-3) \;\Rightarrow\; du=\dfrac{6dw}{6w-3} \;\Rightarrow\; \dfrac{du}{6}=\dfrac{dw}{6w-3}$

Cambio de límites de integración:

$$\begin{cases} Si\ w=1 \quad \Rightarrow u = Ln(6\cdot 1-3)=Ln3=1{,}0986 \\ Si\ w=\dfrac{2}{3} \quad \Rightarrow u = Ln\left(6\cdot\dfrac{2}{3}-3\right)=Ln1=0 \end{cases}$$

Luego:

$$\int_{\frac{2}{3}}^{1}\frac{Ln(6w-3)}{6w-3}dw = \int_0^{1{,}0986} u\cdot\frac{du}{6} = \int_0^{1{,}0986}\frac{u}{6}du = \left[\frac{u^2}{12}\right]_0^{1{,}0986} = \frac{1{,}0986^2}{12}=\frac{1{,}2069}{12}=0{,}1006$$

Aplicando el Teorema:

$$\int_{\frac{2}{3}}^{1}\frac{Ln(6w-3)}{6w-3}dw = f(c)\cdot\left(1-\frac{2}{3}\right) \quad\Rightarrow\quad \frac{1}{6}\cdot\int_0^{1{,}0986} u\,du = f(c)\cdot(1{,}0986-0)$$

$$0{,}1006 = c\cdot 1{,}0986 \quad\Rightarrow\quad c=\frac{0{,}1006}{1{,}0986}=0{,}0916 \quad\Rightarrow\quad c=0{,}0916\in[0;1{,}0986]$$

$\therefore\ c=0{,}0916\in[0;1{,}0986]$ permite que la función $f(x)=\dfrac{Ln(6w-3)}{6w-3}$ cumpla con el Teorema del Valor Medio en el Cálculo Integral.

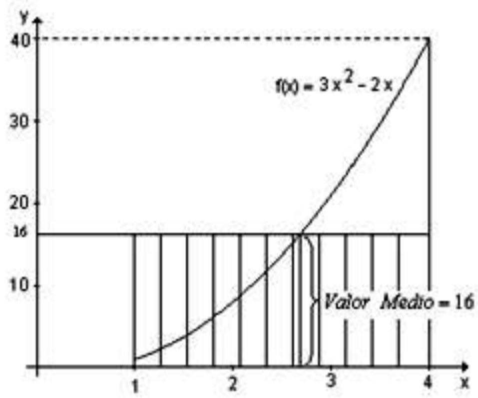
9.- Halle el valor medio de $f(x)=3x^2-2x$ en el intervalo $[1,4]$.

Solución:

Como la función es evidentemente continua en $[1,4]$**, entonces:**

$$f_{med}=\frac{1}{b-a}\cdot\int_a^b f(x)\,dx=\frac{1}{4-1}\cdot\int_1^4\left(3x^2-2x\right)dx=\frac{1}{3}\cdot\left[x^3-x^2\right]_1^4=\frac{1}{3}\cdot(64-16-1+1)=16 \quad\Rightarrow\quad f_{med}=16$$

Interpretación geométrica:



10.- Dada $\int_{-1}^{2} x dx$, encontrar el valor medio de la función $f(x) = x$ (función identidad) en el intervalo $[-1,2]$. También encontrar el valor de x donde se produce este valor medio. Muestre gráficamente la interpretación geométrica de los resultados.

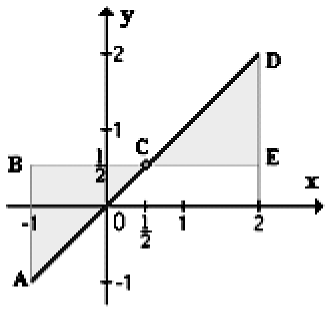
Solución:

Como la función f es continua en $[-1,2]$, también es integrable en este intervalo.

Calculando su valor medio:

$$f_{med} = \frac{1}{b-a} \cdot \int_a^b f(x)\,dx = \frac{1}{2+1} \cdot \int_1^2 x\,dx = \frac{1}{3} \cdot \left[\frac{x^2}{2}\right]_1^2 = \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{2} = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad f_{med} = \frac{1}{2}$$

Geométricamente se tiene que:



Siendo f la función identidad, entonces este valor medio ocurre cuando $x = \frac{1}{2}$, evidenciándose porque los triángulos ΔABC y ΔEDC tienen la misma área.

EJERCICIOS PROPUESTOS.-

I.- Comprobar, aplicando la segunda parte del Teorema Fundamental del Cálculo Integral, sí:

1) $\int_0^2 3z^2 dz = 8$

2) $\int_{-1}^{1} \left(2x^2 - x^3\right) dx = \frac{4}{3}$

3) $\int_{-6}^{-10} \frac{dx}{x+2} = 0{,}6931$

4) $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{4}} Senx dx = 0{,}7071$

5) $\int_1^3 (-x^2 + 4x - 3)\,dx = \frac{4}{3}$

6) $\int_{-2}^{-1} (3x^2 - 1) dx = 6$

7) $\int_0^{2\pi} Cosx dx = 0$

8) $\int_0^2 (3x^2 - 6x) dx = -4$

9) $\int_{-2}^{-1} (3z^2 + 2z) dz = 4$

10) $\int_{-1}^{0} (6w^2 + 4w) dw = 4$

11) $\int_{-\frac{\pi}{8}}^{0} Sec 2\theta\, d\theta = -\frac{1}{2} Ln(\sqrt{2} - 1)$

12) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dq}{\sqrt{4 - q^2}} = ArcSen \frac{\pi}{4} = 0{,}90334$

13) $\int_0^2 (3x-1)\, e^{2x} dx = \frac{7}{4} e^4 + \frac{5}{4}$

14) $\int_{-2}^{2} (4 - y^2)\, dy = \frac{32}{3}$

15) $\int_5^2 (2t - 1)\, dt = -18$

16) $\int_0^3 \frac{dp}{p^2 + 1} = 1{,}249$

17) $\int_0^2 (\sqrt{2} + \sqrt{q})\, dq = \frac{10}{3} \sqrt{2}$

18) $\int_1^8 \frac{dx}{\sqrt[3]{x}} = \frac{9}{2}$

19) $\int_0^{Ln 2} e^{3z} dz = \frac{7}{3}$

20) $\int_{-2}^{-1} \frac{5}{t-2} dt = -1{,}4384$

21) $\int_2^{e-3} \frac{2dy}{y+3} = -1{,}2189$

22) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt[3]{1 + Tgy}\, Sec^2 y\, dy = \frac{3\sqrt[3]{2}}{2} - \frac{3}{4}$

23) $\int_{\frac{2}{3}}^{1} \frac{Ln(6w-3)}{6w-3} dw = \frac{1}{12} Ln^2 3$

II.- Aplicando la técnica de Sustituciones Trigonométricas, evalúe las siguientes integrales definidas (Se sugiere resolver primero cada integral como Integral Indefinida y luego evaluar el resultado según la segunda parte del Teorema Fundamental del Cálculo Integral):

1) $\int_1^4 \frac{dx}{x\sqrt{25-x^2}}$

2) $\int_2^3 \frac{2dt}{t\cdot\sqrt{t^4+25}}$

3) $\int_2^4 \frac{dx}{\sqrt{4+x^2}}$

4) $\int_0^2 \frac{x^3}{\sqrt{16-x^2}}\,dx$

5) $\int_{-2}^0 \frac{dx}{(5-4x-x^2)^{\frac{3}{2}}}$

6) $\int_{\sqrt{3}}^{3\sqrt{3}} \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2+9}}$

7) $\int_4^6 \frac{dx}{x\sqrt{x^2-4}}$

8) $\int_0^5 x^2\cdot\sqrt{25-x^2}\,dx$

9) $\int_0^{Ln2} \frac{e^t\,dt}{\left(\sqrt{e^{2t}+8e^t+7}\right)^3}$

10) $\int_0^1 \frac{\sqrt{16-e^{2v}}}{e^v}\,dv$

III.- Evalúe las siguientes integrales definidas y exprese el resultado con un $e_a < 0{,}0001$**:**

1) $\int_0^{Ln3} Sech^2 t\,dt$

2) $\int_1^4 \frac{Senh\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,dx$

3) $\int_0^2 Senh^3 x\cdot Cosh\,x\,dx$

4) $\int_2^3 Sech^2 x\cdot Tghx^5\,dx$

5) $\int_1^2 x\,Sech^2 x^2 dx$

IV.- Evalúe las siguientes integrales definidas en términos de funciones hiperbólicas inversas:

1) $\int_3^5 \frac{dx}{\sqrt{x^2-4}}$

2) $\int_{-4}^{-3} \frac{dx}{1-x^2}$

3) $\int_{-2}^2 \frac{dx}{\sqrt{16+x^2}}$

4) $\int_2^3 \frac{dx}{\sqrt{9x^2-12x-5}}$

5) $\int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{x^2+2x}}$

V. - Calcular:

1) $\int_1^2 \frac{x-3}{x^3-x^2}\,dx$

2) $\int_0^1 \frac{x^2-3}{(x+2)(x+1)^2}\,dx$

3) $\int_0^1 \frac{5x\,dx}{(x+2)(x^2+1)}$

4) $\int_1^2 \frac{5x^2-3x+18}{9x-x^3}\,dx$

5) $\int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}}\,dx$

6) $\int_0^1 Lnx\,dx$

7) $\int_0^2 x^2(x^3+1)\,dx$

8) $\int_0^{\pi} x^2 Cos2x\,dx$

9) $\int_0^{\pi/4} e^{3x} Sen4x\,dx$

10) $\int_0^1 (e^{4x}+4^{ex})\,dx$

11) $\int_0^{\frac{\pi}{3}} e^{2x} Cos3x\,dx$

12) $\int_{\frac{1}{3}}^2 5\theta^3 Ln(3\theta)\,d\theta$

13) $\int_0^3 ArcSen\left(\frac{t}{3}\right)dt$

14) $\int_1^2 \frac{e^m}{e^m-1}\,dm$

15) $\int_{-1}^0 \frac{dz}{z^2+6z+8}$

16) $\int_{-2}^{-1} Ln(6x^2)\,dx$

17) $\int_0^1 e^{\sqrt{q}}\,dq$

18) $\int_0^{-\frac{\pi}{2}} Sen4y\,dy$

19) $\int_0^{Ln3} 3xe^{3x}\,dx$

20) $\int_{-2}^{-1} \frac{5}{t-2}\,dt$

21) $\int_0^{\sqrt{3}} \frac{3\theta}{\sqrt{1+\theta^2}}\,d\theta$

22) $\int_1^e Ln^2 p\,dp$

23) $\int_2^3 \frac{dx}{\sqrt{e^{2x}-25}}$

24) $\int_1^3 \frac{dt}{t^3+t^4}$

25) $\int_{-1}^1 \frac{x^4+2}{x^2-4}\,dx$

26) $\int_{-2}^{-1} \frac{2t-3}{5+2t}\,dt$

27) $\int_{-1}^0 \frac{w-1}{\sqrt{w+2}}\,dw$

28) $\int_{-3}^3 \left(2e^{2x}-\frac{5}{x^2+9}\right)dx$

29) $\int_0^1 2x\left[x(x-1)^2\right]dx$

30) $\int_0^4 2\pi y\sqrt{y}\,dy$

31) $\int_0^{27} \pi\left[\left(y^{\frac{2}{3}}\right)^2-\left(\frac{y}{3}\right)^2\right]dy$

32) $\int_{-a}^a \pi\frac{b^2}{a^2}(a^2-x^2)\,dx$

33) $\int_{-1}^1 \pi\frac{b^2}{a^2}(a^2-x^2)\,dx$

34) $\int_2^3 \pi\frac{b^2}{a^2}(a^2-x^2)\,dx$

35) $\int_0^1 2\pi x\left(\frac{\pi}{2}-ArcSen\,x\right)dx$

VI.- Una colonia de bacterias tiene una tasa de crecimiento dada por $f(t)=3000e^{2t}$**. Hallar la ecuación de la población de bacterias obteniendo la antiderivada de la función de crecimiento. ¿En cuántos individuos crece la población transcurrida dos horas?**

VII.- Para cada uno de los siguientes casos, obtenga la integral definida:

1) $f(x)=\begin{cases} x^{2/3}, & si\ -8\le x<0 \\ -4, & si\ 0\le x\le 3 \end{cases}$

2) $f(x)=\begin{cases} \sqrt{-x}, & si\ -4\le x<0 \\ x^2-4, & si\ 0\le x\le 3 \end{cases}$

3) $g(t)=\begin{cases} t, & si\ 0\le t<1 \\ Sen\,\pi t, & si\ 1\le x\le 2 \end{cases}$

4) $h(z)=\begin{cases} 1-z, & si\ 0\le x<1 \\ (7z-6)^{-2/3}, & si\ 1\le x\le 2 \end{cases}$

5) $f(x)=\begin{cases} 1, & si\ -2\le x<-1 \\ 1-x^2, & si\ -1\le x<1 \\ 2, & si\ 1\le x\le 2 \end{cases}$

6) $h(r)=\begin{cases} r, & si\ -1\le r<0 \\ 1-r^2, & si\ 0\le r<1 \\ 1, & si\ 1\le r\le 2 \end{cases}$

VIII.- Dadas las siguientes funciones, aplique el Teorema del Valor Medio del Cálculo Integral, para determinar un valor de *c* con $e_a<0{,}001$ **en los intervalos especificados:**

1) $\int_0^2 x^2\,dx$

2) $\int_2^4 x^2\,dx$

3) $\int_1^2 x^3\,dx$

4) $\int_0^5 (x^3-1)\,dx$

5) $\int_1^4 (x^2+4x+5)\,dx$

6) $\int_0^4 (x^2+x-6)\,dx$

7) $\int_{-2}^2 (x^3+1)\,dx$

8) $\int_{-2}^1 x^4\,dx$

9) $\int_2^4 \frac{1}{x^2-3}\,dx$

10) $\int_{-1}^3 \frac{1}{x^2+5}\,dx$

11) $\int_{\pi/6}^{\pi/4} Tgx\,dx$

12) $\int_{2\pi/3}^{5\pi/6} Cotgx\,dx$

IX.- Determine cuál valor de $x\in\left[\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{6}\right]$ **permite que la función** $f(x)=Tg\,x$ **cumpla con el Teorema del Valor Medio para el Cálculo Integral. Dé el o los resultados con un** $E_a<0{,}001$**.**

X.- Dadas las siguientes funciones, compruebe que el valor de c a obtener al aplicar el Teorema del Valor Medio para el Cálculo Integral, es el que se indica con un $e_a < 0{,}001$ para los intervalos especificados:

$a)\quad c = 3{,}149 \quad para \quad \int_0^5 (t^3 - 1)\,dt.$

$b)\quad c = 2{,}253 \quad para \quad \int_0^4 (z^2 - z - 6)\,dz.$

XI.- Determine si la $\int_a^b w^2 dw$ cumple con el Teorema del Valor Medio para el Cálculo Integral en los siguientes intervalos: $[0,2]$ y $[0,4]$.

XII.- Comprobar las siguientes derivadas aplicando la primera parte del Teorema Fundamental del Cálculo Integral:

1) $\dfrac{d}{dx}\int_0^x e^{t^2}\,dt = e^{x^2}$

2) $\dfrac{d}{dz}\int_z^5 \dfrac{Sen\,u}{u}\,du = -\dfrac{Sen\,z}{z}$

3) $\dfrac{d}{dt}\int_1^t (x^3+4)^5\,dx = (t^3+4)^5$

4) $\dfrac{d}{dt}\int_1^w (t^3+4)^5\,dt = 0\;(w\;independiente\;de\;t)$

5) $\dfrac{d}{dz}\int_z^1 e^{t^2}\,dt = -e^{z^2}$

6) $\dfrac{d}{dw}\int_2^{5w} \sqrt[4]{y^2+9}\,dy = 5\sqrt[4]{25w^2+9}$

7) $\dfrac{d}{dw}\int_{2w^2}^{2} \sqrt[4]{y^2+9}\,dy = -4w\sqrt[4]{4w^2+9}$

8) $\dfrac{d}{dw}\int_{2w^2}^{5w} \sqrt[4]{y^2+9}\,dy = 5\sqrt[4]{25w^2+9} - 4w\sqrt[4]{4w^2+9}$

9) $\dfrac{d}{dt}\int_1^{ArcTg\,t} (x^3+4)^{1/2}\,dx = \dfrac{1}{1+t^2}\,ArcTg^3\,t + 4$

10) $\dfrac{d}{dt}\int_1^3 (x^3+4)^5\,dx = 0$

11) $\dfrac{d\left[\int_x^{x^2}\left(e^{-x^2}\right)\right]}{dx} = 2x\cdot\left(e^{-x^4}\right) - \left(e^{-x^2}\right)$

12) $\dfrac{d\left[\int_3^{\int_1^x Sen^3(t)\,dt}\left(\dfrac{1}{1+Sen^6 t + t^2}\right)dt\right]}{dx} = \dfrac{Sen^3 x}{1+Sen^6\left(\int_1^x Sen^3(t)dt\right)+\left(\int_1^x Sen^3(t)\,dt\right)^2}$

13) $\dfrac{d\left[\int_{15}^{x}\left(\int_8^y\left(\dfrac{1}{1+t^2+Sen^2 t}\right)dt\right)dy\right]}{dx} = \int_8^x\left(\dfrac{1}{1+t^2+Sen^2 t}\right)dt$

XIII.- Sea la siguiente función: $F(x)=\int_{1+Cos^2 x}^{1-Cos^2 x} t\,dt$ **. Compruebe que al derivar esta función con respecto a la variable** x **aplicando la primera Parte del Teorema Fundamental del Cálculo Integral, el resultado es el siguiente:** $\frac{dF}{dx}=2\,Sen(2x)$ **.**

XIV.- Sea la función expresada por: $F(x)=\int_{1+Sen^2 x}^{1+Cos^2 x} t\,dt$**. Compruebe que al derivar la expresión de esta función aplicando tanto la Primera Parte del Teorema Fundamental del Cálculo Integral como la Regla de Leibniz (Fórmula Newton-Leibniz), el resultado es el siguiente:** $\frac{dF}{dx}=-3Sen(2x)$ **.**

XV.- Verifique que al aplicar tanto la Primera Parte del Teorema Fundamental del Cálculo Integral así como la Regla de Leibniz (Fórmula Newton-Leibniz), la derivada de la función $F(y)=\int_5^{Cosy^{Sen\,y}} x\,dx$ **es** $\frac{dF}{dy}=Cos\,y^{(2Sen\,y-1)}\cdot\left(Cos^2 y\cdot Ln\left|Cos\,y\right|-Sen^2 y\right)$.

XVI.- Sea la función: $y=F(x)=(x-a)\cdot\int_a^x\left[f(t)\cdot p(t)\right]dt+(x-b)\cdot\int_b^x\left[f(t)\cdot q(t)\right]dt$**. Compruebe que su segunda derivada,** $\frac{d^2F(x)}{dx^2}=y''$, **es igual a:**

$$y''=2f(x)\cdot p(x)+2f(x)\cdot q(x)+(x-a)\cdot\left[f'(x)\cdot p(x)+f(x)\cdot p'(x)\right]+(x-b)\cdot\left[f'(x)\cdot q(x)+f(x)\cdot q'(x)\right]$$

XVII.- Obtenga las siguientes derivadas:

1) $\frac{d}{dx}\int_0^x\sqrt{4+t^6}\,dt$

2) $\frac{d}{dx}\int_x^3\sqrt{1+t^4}\,dt$

3) $\frac{d}{dx}\int_x^3\sqrt{Sent}\,dt$

4) $\frac{d}{dx}\int_2^x\frac{1}{t^4+4}dt$

5) $\frac{d}{dx}\int_{-x}^x\frac{1}{3+t^2}dt$

6) $\frac{d}{dx}\int_{-x}^x Cos(t^2+1)\,dt$

7) $\frac{d}{dx}\int_1^{x^3}\sqrt[3]{t^2+1}\,dt$

8) $\frac{d}{dx}\int_x^{x^2}\frac{1}{\sqrt{t^2+1}}dt$

9) $\frac{d}{dx}\int_2^{Tgx}\frac{1}{1+t^2}dt$

10) $\frac{d}{dx}\int_3^{Senx}\frac{1}{1-t^2}dt$

XVIII.- Obtenga las derivadas de las siguientes funciones aplicando la Regla de Leibniz:

1) $F(x)=\int_{1-x}^{2-x} xe^{t^3}\,dt$

2) $F(x)=\int_{x^2}^{\sqrt{x}} Cos^2u\,du$

3) $F(x)=\int_{x^2-1}^{1-x^2}\sqrt{2+t^2}\,dt$

4) $F(x)=\int_{xe^x}^{x^2e^{2x}} xCos^4t\,dt$

5) $F(x)=\int_{2x}^{3x}\sqrt{u^3+2}\,dut$

6) $F(x)=\int_{x^2}^{x^3}\frac{1}{1+t^3}dt$

7) $F(x)=\int_{\sqrt{x}}^{\sqrt[3]{x}}\frac{1}{(1+u^3)^2}\,du$

8) $F(x)=\int_{x^3}^{x^5} Lnt\,dt$

9) $F(x)=\int_{Lnx^2}^{Lnx^5} t^3dt$

10) $F(x)=\int_{2x-3}^{x^2+2} x^2\cdot\sqrt{1+t^3}\,dt$

XIX.- Sea la siguiente función: $F(x)=\int_{Ln^3(x^2)}^{Ln^2(x^3)} t^3dt$**, donde** $0<x<1$**. Compruebe que al derivar esta función con respecto a la variable** x **aplicando tanto la primera parte del Teorema Fundamental del Cálculo Integral como la Regla de Leibniz, el resultado es el siguiente:** $\frac{dF}{dx}=\frac{6\cdot\left[Ln^7(x^3)-2Ln^{11}(x^2)\right]}{x}$ **.**

XXX.- Compruebe que las siguientes igualdades son ciertas aplicando tanto la primera parte del Teorema Fundamental del Cálculo Integral como la fórmula Newton-Leibniz:

1) $$\frac{d\left(\int_{Cosy^{Seny}}^{5} x\,dx\right)}{dy} = Cos\ y^{(2Sen\,y-1)}\cdot\left(Sen^2 y - Cos^2 y\cdot Ln\left|Cos\ y\right|\right)$$

2) $$\frac{d\left(\int_{5}^{Cosy^{Seny}} x\,dx\right)}{dy} = Cos\,y^{(2Sen\,y-1)}\cdot\left(Cos^2 y\cdot Ln\left|Cos\,y\right| - Sen^2 y\right)\cdot$$

3) $$\frac{d\left(\int_{1+Sen^2x}^{1+Cos^2x} t\,dt\right)}{dx} = -3Sen(2x)$$

4) $$\frac{d\left(\int_{1+Cos^2x}^{1-Cos^2x} t\,dt\right)}{dx} = 2\,Sen(2x)$$

5) $$\frac{d\left(\int_{1-Sen^2x}^{1-Cos^2x} t\,dt\right)}{dx} = Sen(2x)$$

6) $$\frac{d\left(\int_{1+Sen^2x}^{1-Sen^2x} t\,dt\right)}{dx} = -2Sen(2x)$$

7) $$\frac{d\left(\int_{Cos^2x-1}^{Cos^2x+1} t\,dt\right)}{dx} = -4Cos^2x\cdot Sen\ (2x)$$

8) $$\frac{d\left(\int_{ArcTg(\frac{1}{x})}^{ArcTg(x)} \left[Tg(t)\right]dt\right)}{dx} = \frac{1}{x}$$

9) $$\frac{d\left(\int_{Seny^{Cosy}}^{Cosy^{Seny}} x\,dx\right)}{dy} = Seny^{(2Cos\,y-1)}\left(Sen^2 yLn\left|Sen\ y\right| - Cos^2 y\right) + Cos\ y^{(2Sen\,y-1)}\left(Cos^2 yLn\left|Cos\ y\right| - Sen^2 y\right)$$

¿Qué es la inteligencia emocional?

Por: HERNANI ZAMBRANO GIMENEZ

El carabobeño.com - 6 de enero de 2019

Durante una larga evolución natural, las emociones cambiaron el cerebro de los mamíferos más avanzados, un privilegio que es más evidente en nosotros, los humanos. Estos cambios evolutivos han estado presentes por más de 200 millones de años, y se han perpetuado en una poderosa influencia que sigue viva en nuestra actual especie. Gradualmente, luego de muchas decenas de millones de años, durante los dos últimos siglos, (el XIX y el XX) comenzó a desarrollarse y destacarse la tendencia a hablar de una forma de conducta que se le ha conocido, sencillamente, como “inteligencia” (humana). Pero más recientemente, a partir del último tercio del siglo XX, ha aparecido y se ha fortalecido el uso de un nuevo término que destaca cualidades destacada de la inteligencia humana: es el caso de la llamada Inteligencia Emocional…

¿Y qué es eso, así tan pomposamente denominado? La expresión “inteligencia emocional” se escucha con facilidad en el léxico actual de la gente corriente, igual que en intelectuales, y en profesionales de la conducta, en gente de ambientes y situaciones diferentes. Pero no todos se refieren a lo mismo cuando sacan a relucir el término “inteligencia emocional”. Para algunos la inteligencia emocional aparece como si fuese una inteligencia más avanzada, y más eficiente que la por años ha sido conocida como “inteligencia analítica”, esa corriente que ha sido medida con cifras numéricas a través de los “test de inteligencia”.

Pero, también hay quienes se refieren a la inteligencia emocional en un sentido negativo, improductivo e ineficiente, de inoperancia, como la incapacidad para controlar las emociones: “Como si en los momentos de retos y exigencias, disminuye o no existiera la llamada inteligencia emocional”. En medio de tan variada confusión, muchos creen que la llamada “inteligencia emocional” es sólo otro tipo de inteligencia inventada. Toda esta confusión proviene, tal vez, de que el concepto de inteligencia no se refiere a algo absoluto, que pueda precisarse como la talla o el peso de las personas, y siempre dependerá del criterio de medición de quien haga la observación. Por estas extendidas dudas, vale la pena comenzar por aclarar el concepto.

No existen emociones que puedan ser declaradas, en sí mismas, como positivas o negativas: La emoción resulta siempre del efecto que experimente la persona (vivencia) ante una situación. Unas emociones son útiles y benefician al individuo, y otras ¡no ayudan para nada! Una respuesta emocional como la alegría, la ira, o la vergüenza, serán útiles o no, en función del contexto y del momento y la cultura en que nos encontremos. Cuando alguien dice: “es que yo soy yo y mi circunstancias”, se refiere a una famosa frase del filósofo español Ortega y Gasset, quien quiso decirnos que no todo lo que le sucede a alguien depende de él mismo (o ella misma), y que él (o ella) no son del todo responsables de cómo actúen, porque también han influido las circunstancias en que se encuentren.

Si una respuesta nos ayuda a relacionarnos con el mundo, con los demás y con nosotros mismos, es adaptativa, y será estimada como una emoción eficiente, que es lo que algunos señalarán como “inteligencia emocional”, siempre que sus consecuencias lo sean. Fue quizás el emperador romano Marco Aurelio (121-180 DC), apodado “el sabio”, el padre de la idea de ‘inteligencia emocional’. En su obra ‘Meditaciones’, excelente tratado de lo que hoy es inteligencia emocional, incluyó una frase que podría hoy usarse en las escuelas de psicología y psiquiatría: “La vida de un hombre es lo que sus pensamientos hacen de ella”. Bien utilizada esta afirmación, es casi igual a decir que: la razón siempre será más poderosa que las emociones. ¿Quedó claro lo que es la “inteligencia emocional”? ¡El caso es que una misma cosa la haremos diferente, según cómo manejemos nuestras emociones del momento!

HERNANI ZAMBRANO GIMENEZ. Egresado de Universidad Central de Venezuela. Estudios de PostGrado en la Universidad de Stanford (USA). Profesor y Ex Director de Escuela de Educación (Universidad Carabobo, Valencia, Venezuela. Ex Director Escuela de Psicología (Universidad Arturo Michelena, Valencia, Venezuela). Asesor de Empresas y Productor Radial en Universitaria 104,5 FM (Universidad Carabobo, Venezuela). Correo Electronico: hernaniz@yahoo.com.

FÍSICOS NOTABLES

Max Born

Nació el 11 de diciembre de 1882 en Breslavia, Polonia; y murió el 5 de enero de 1970 en Gotinga, Alemania.

MAX BORN
(1882-1970)

Ganador del Premio Nobel en Física en 1954.

Por sus trabajos en mecánica cuántica.

Compartió el premio con Walther Bothe

Fuente: Biografiasyvidas - Wikipedia

Físico alemán de origen judío, uno de los más eminentes del siglo XX, que recibió el premio Nobel de Física en 1954. Enseñó Física Teórica en la Universidad de Berlín. En 1919 se trasladó a la Universidad de Frankfurt y, en 1929, a la de Göttingen. Gracias a él, esta última institución se convertiría en la escuela de Física Teórica más importante del mundo.

Llevó a cabo importantes investigaciones sobre dinámica de las estructuras reticulares cristalinas (*Dynamik der Kristallgitter*, 1915) y acerca de la Teoría de la Relatividad (*Die Relativitätstheorie*, 1923), y estableció una esencial clarificación crítica de la Mecánica cuántica (*Atommechanik*, 1925; *Atomdynamik*, 1926 y *Física atomica*, 1935). En 1933, desposeído de la cátedra por su condición de judío, emigró al Reino Unido, adoptó la nacionalidad británica y ejerció la docencia en Cambridge y, desde 1936 hasta 1953, en Edimburgo.

A continuación regresó a Gotinga, y en 1954 le fue otorgado el premio Nobel de Física, que compartió con Walther Bothe. En 1943 había formulado, en colaboración con V. Peng, una teoría cuántica del campo electromagnético en la que se introducía una nueva elaboración estadística de los cuantos de luz. Entre sus obras cabe señalar *The Restless Universe* (1936), *Dynamical Theory of Cristal Lattices* (1953, en colaboración con Kun Huang), *Physik im Wandel meiner Zeit* (1957) y *Physik und Politik* (1960). Sus memorias se publicaron póstumamente: *My Life. Recollection of a Nobel Laureate* (1978).

MAX BORN

Imágenes obtenidas de:

Google

FÍSICOS NOTABLES

Walther Bothe

Nació el 8 de enero de 1891 en Oranienburg, y murió el 8 de febrero 1957 en Heidelberg; ambas localidades en Alemania.

WALTHER BOTHE (1891-1957)

Ganador del Premio Nobel en Física en 1954.

Por la invención del método de las coincidencias en el empleo del contador Geiger, para el estudio de las radiaciones corpusculares, lo que le permitió seguir trayectorias más largas de rayos duros.

Compartió el premio con Max Born.

Fuente: Biografiasyvidas - Wikipedia

Walther Wilhelm Georg Bothe. En 1954 obtuvo el Premio Nobel de Física (compartido con el británico Max Born) por sus investigaciones en el desarrollo de la espectroscopia de coincidencia y su aplicación en el estudio de los rayos cósmicos y otras radiaciones penetrantes.

Desde 1908 hasta 1912 estudió física, matemáticas, química y música en la Universidad de Berlín. De 1912 a 1914 realizó su tesis doctoral sobre un modelo teórico de la difracción y reflexión de la luz por átomos individuales tutelado por Max Planck, quien lo consideraba entre sus mejores alumnos y con quien conservó una duradera amistad. En 1913 comenzó a trabajar en el Physikalisch-Technische Reichsanstalt de Berlín como asistente de Hans Geiger, que acababa de regresar de Inglaterra y quien tuvo una notable influencia sobre Bothe. Allí conoció a Einstein, Otto Hahn, Lise Meitner, y Erwin Schrödinger.

El trabajo con Geiger se interrumpió bruscamente al estallar la Primera Guerra Mundial. Destinado en las campañas del frente ruso, fue capturado y enviado a un campo de prisioneros en Siberia durante cinco años. Para hacer más llevadero su aislamiento siberiano, Bothe aprendió ruso, calculó su propia tabla de logaritmos y trabajó sobre el desarrollo matemático de su tesis doctoral.

En 1920 fue liberado y regresó a Alemania casado con la moscovita Barbara Below. Se incorporó a su trabajo en el Physikalisch-Technische Reichsanstalt, donde desarrolló el método de coincidencia de análisis de radicación gamma que fue publicado conjuntamente con Geiger en 1924. Este método se basa en una disposición de múltiples contadores geiger próximos entre sí. Cualquier partícula de alta energía que atraviese el conjunto dejará un rastro de pulsos en los diferentes contadores que coincidirán en el tiempo y que determinan la trayectoria de la partícula o fotón. Gracias al método de coincidencia se pudieron analizar y diferenciar los productos múltiples de desintegración de átomos.

Desde 1923 hasta 1926 se concentró en el estudio teórico y experimental acerca de la naturaleza corpuscular de la luz. Iluminando con rayos X una cámara de Wilson llena de hidrógeno, observó las trayectorias de los electrones de retroceso (*recoil*) producidos por los fotones de rayos X, lo que más tarde se conocería como Efecto Compton. Bothe aplicó su método de coincidencia, pero desafortunadamente no fue él quien interpretó correctamente el fenómeno sino Compton, a quien este acierto le valió ser premiado con el Nobel.

En 1927, en colaboración con H. Becker, comenzó el estudio de las transformaciones por bombardeo de elementos ligeros con partículas alfa provenientes del polonio. En 1930, cuando ya ocupaba el cargo de Profesor de Física y Director del Instituto de Física de la Universidad de Giessen, bombardeó berilio con partículas alfa y obtuvo una radiación mucho más penetrante que las conocidas hasta entonces, capaz de atravesar fácilmente el plomo. Bothe pensó que se trataba de un nuevo tipo de radiación gamma, pero, no satisfecho, pidió ayuda a Irene Joliot-Curie. Tampoco entonces acertó con la naturaleza exacta de esta radiación (neutrones), que sí logró James Chadwick en 1932.

A partir de 1929, y en colaboración con W. Kolhörster y el italiano Bernardo Rosi, Bothe comenzó a estudiar la radiación cósmica y ultravioleta empleando el método de coincidencia. Para ello realizó mediciones en diferentes lugares del mundo, llegando a la conclusión de que esta radiación procedía siempre del espacio profundo y que no era radiación gamma como se pensaba con anterioridad, sino partículas de gran energía que hoy conocemos como mesones.

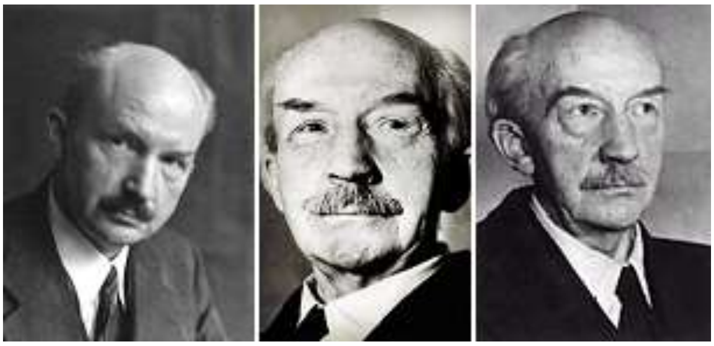
En 1932 fue nombrado Director del Instituto de Física de la Universidad de Heidelberg como sucesor de Philipp Lenard, que se había jubilado. Duró poco en este puesto, ya que no congeniaba ni con las teorías clásicas que defendía la universidad ni con el antisemitismo que reinaba en la misma y que se agravó con la llegada de Hitler al poder en 1933. Renunció al puesto en 1934 y aceptó el de Director de Física del que hoy se llama Instituto Max Planck (MPI) para la Investigación Médica de la misma ciudad. El laboratorio contaba con pocos recursos y materiales, pero a cambio estaba libre de la influencia política de la universidad y gozaba de absoluta libertad de investigación. Allí, en 1936 y en colaboración con Wolfgang Gentner, construyó un generador Van der Graaff (el primero en Europa) para la experimentación con núcleos de átomos de peso medio.

En junio de 1939 fue llamado a Berlín para participar en el Uranverein (Club del Uranio), grupo de científicos creado con el propósito de investigar las aplicaciones militares de la fisión atómica. Durante el periodo 1939-1945, consiguió con grandes dificultades el dinero para construir un ciclotrón, trabajó sobre la difusión y detección de neutrones, y publicó su Atlas de Imágenes con Cámara de Niebla.

Al terminar la Segunda Guerra Mundial, los aliados suspendieron todas las investigaciones en física nuclear y el mismo Bothe fue investigado sobre su posible colaboración con los nazis. A pesar de que los americanos emplearon todos los medios para despojar a Alemania de científicos y llevárselos a América, Bothe persistió en reconstruir el MPI. En esa época fue nombrado de nuevo director del Departamento de Física de la Universidad de Heidelberg, cargo que compaginó con su trabajo en el MPI hasta su muerte.

Fue miembro de las academias de ciencias de Heidelberg, Gotinga y Sajonia; obtuvo la Medalla Max Planck y la Gran Cruz de la Orden de Servicios Federales; en 1952 fue nombrado Caballero de la Orden del Mérito de las Ciencias y de las Artes; y en 1954 recibió el Premio Nobel de Física (compartido con Max Born). Estaba considerado como un profesor íntegro, duro y exigente, sin ningún dogmatismo y con capacidad para valorar con justeza tanto cualquier idea nueva como los méritos de sus colaboradores. Sin embargo, en el trato personal era célebre por su gran hospitalidad, al igual que su esposa Barbara Below, con quien tuvo dos hijos.

Las virtudes de Bothe no estuvieron únicamente aplicadas a la Física. Poseía una gran capacidad de concentración y el hábito de hacer de su tiempo el mejor uso posible, lo cual le confirió una gran capacidad y velocidad de trabajo. Siempre se consideró un patriota alemán y colaboró con la industria armamentística alemana con todo su entusiasmo, algo por lo que nunca se excusó. No obstante, debido a su integridad tuvo frecuentes problemas con el Partido Nazi y con la Gestapo. Era aficionado a la música clásica y asistía muy a menudo a conciertos de Bach y Beethoven. También tocaba el piano y pintaba (generalmente paisajes de corte impresionista) con la misma pasión y esfuerzo que realizaba su trabajo en el laboratorio.



WALTHER BOTHE

Imágenes obtenidas de:

Google

La carta atómica que atormentó a Einstein

FUENTE: VAN La Vanguardia

TOMADO DE: *MSN*

La historia de la bomba atómica puede contarse enlazando calurosos días de agosto. Del 6 y 9 de agosto de 1945 –Hiroshima y Nagasaki– al 2 de agosto de 1939, el día en que Albert Einstein firmó la carta que lo comenzó todo. La carta que le atormentaría hasta el fin de sus días. Esta es la historia, también, de cómo una nevera lleva a la bomba. O la historia de cómo un pacifista, uno de los pocos académicos alemanes que ya en 1914 condenó el militarismo de su país, acabaría entrando en el imaginario colectivo como “padre de la bomba nuclear”. Así lo bautizó la revista Time en 1945, cuando lo colocó en la portada junto a un hongo nuclear con el *“$e=mc^2$”*. “Fue la gran tragedia de su vida –dice Jürgen Neffe, uno de sus más recientes biógrafos–. Una enorme injusticia.

RECREACIÓN DEL MOMENTO EN EL QUE ALBERT EINSTEIN Y EL FÍSICO HÚNGARO LEÓ SZILÁRD ESCRIBEN LA CARTA AL PRESIDENTE ROOSEVELT EN PECONIC. © IMAGE LAVANGUARDIA.COM.

Culpar a Einstein de Hiroshima es como culpar a Jesucristo de la Inquisición o los cruzados ”. Einstein formuló en 1905 la ecuación que 40 años más tarde serviría de base teórica para fabricar la bomba. Su contribución podría haberse quedado ahí si en julio de 1939 su viejo amigo Leó Szilárd no se hubiese presentado en Long Island, donde veraneaba el científico, con noticias inquietantes. Szilárd era un físico húngaro judío que, como Einstein, se había exiliado a EE.UU. huyendo de los nazis.

ALBERT EINSTEIN FIRMÓ LA CARTA QUE COMENZÓ EL DESASTRE ATÓMICO.

Se conocían de los años 20 en Berlín, cuando juntos patentaron un modelo de nevera que trataron de comercializar sin éxito. El húngaro había ido a Long Island a pedir ayuda. Los alemanes habían logrado la fisión del uranio y Szilárd, que investigaba la reacción nuclear en cadena, entendió que era el primer paso para fabricar armas atómicas. Quería alertar antes de que los nazis, que ya tenían Checoslovaquia, se hicieran con más minas de uranio. Pero necesitaba a alguien con el prestigio de Einstein –Nobel desde 1921, ya era el científico más famoso del mundo– para que los que mandaban le escuchasen. Einstein se asombró –“¡Nunca se me había ocurrido!”, exclamó sobre la reacción en cadena– pero entendió rápidamente lo que estaba en juego y aceptó enviar una carta a Franklin D. Roosevelt. Dictó una primera versión en alemán y Szilárd redactó el texto definitivo en inglés. Lo más difícil, y en eso también ayudó, fue encontrar a quien entregase la carta. Primero pensaron en Charles Lindhberg, piloto del primer vuelo transatlántico en 1927, sin saber que había sido condecorado por Göring y era partidario de que EE.UU. dejase a los nazis tranquilos.

FOTO DEL 23 DE AGOSTO DE 1944 MUESTRA AL DR. ALBERT EINSTEN TOCANDO EL VIOLÍN EN SU ESTUDIO. © FOTO ARCHIVO AP.

Finalmente el emisario fue Alex Sachs, economista de Lehman Brothers y amigo de Roosevelt. En la misiva, fechada el 2 de agosto en Peconic, Long Island, Einstein explicaba al presidente de EE.UU. la posibilidad “en el futuro inmediato” de que se use uranio para hacer “bombas extremadamente poderosas”. El apocalipsis: “Una sola de estas bombas, llevada por un barco y explotada en un puerto, podría destruir el puerto por completo, así como el territorio circundante”. EE.UU. debía asegurarse el suministro de uranio y “acelerar” la investigación nuclear. La firma de Einstein funcionó.

DIEZ DÍAS DESPUÉS DE RECIBIR LA CARTA, NACÍA EL LLAMADO COMITÉ BRIGGS, CONSIDERADO EL GERMEN DEL PROYECTO MANHATTAN QUE DESARROLLÓ LA BOMBA ATÓMICA.

Diez días después de recibir la carta, nacía el llamado Comité Briggs, considerado el germen del proyecto Manhattan que desarrolló la bomba atómica. “La carta no es una anécdota. Convenció a Roosevelt de que había que actuar”, señala Cindy Kelly, presidenta de la Fundación por el Patrimonio Atómico, que vela por la memoria del proyecto Manhattan.

Sin embargo, ve "una exageración" llamar a Einstein padre de la bomba: "Su participación en realidad fue muy marginal". De hecho, quedó fuera del proyecto Manhattan. Su colaboración fue puntual: en 1941 le pidieron ayuda para un problema teórico, que resolvió en dos días. Einstein nunca mostró interés en entrar pero tampoco hubiese podido. El FBI lo había vetado. Hoover le creía un "riesgo para la seguridad" por su pacifismo y supuesto filocomunismo. La carta de 1939 acabaría siendo un clavo para Einstein. En 1945, con Alemania a las puertas de la derrota, el científico volvió a escribir a Roosevelt. Le pedía que hablase con Szilárd, que (él sí) trabajaba en el programa Manhattan y estaba igual de alarmado con la posibilidad de que Estados Unidos acabase utilizando el arma nuclear.

Esta última carta fue escrita en marzo. En abril murió Roosevelt. "Einstein nunca quiso que la bomba se lanzara –asegura Neffe–. Trató de impedirlo pero, como en una tragedia clásica griega, la carta nunca fue leída. Truman la encontró cerrada en el escritorio de Roosevelt". Las bombas se arrojaron. Un día después de Nagasaki, se publicó el informe Smyth, relatando cómo se habían fabricado en secreto. Para amargura de Einstein, se daba mucha importancia a la carta de 1939. "Su papel fue resaltado, seguramente porque su nombre daba legitimidad –apunta Kelly–. Y la prensa se agarró al tema".

La portada de Time le sentó fatal, como otra de Newsweek. "Recibía cartas llamándole asesino. Fue una mancha que nunca logró limpiar", dice Neffe. Escribió a una revista japonesa que le preguntó cómo fue capaz e insistió en que siempre había sido un pacifista y que sólo la posibilidad de que los alemanes lograran la bomba le hizo firmar la carta: "No veía ninguna otra salida". Con el paso del tiempo y más perspectiva, muchos historiadores creen hoy que la bomba se hubiese inventado igualmente sin la carta, pero quizá EE.UU. no habría llegado a tiempo para usarla en Hiroshima y Nagasaki. El científico se lo llevó a la tumba. En 1954, cinco meses antes de morir, le dijo a un amigo: "He cometido un gran error en mi vida: firmar esa carta".

QUÍMICOS DESTACADOS

Cyril Norman Hinshelwood

Nació el 19 de junio de 1897 y murió el 9 de octubre de 1967; ambos momentos en el Reino Unido.

Ganador del Premio Nobel en Química en 1956.

Por sus investigaciones sobre el mecanismo de las reacciones químicas.

FUENTES: Biografiasyvidas – Wikipedia

CYRIL NORMAN HINSHELWOOD (1897-1967)

Químico. En 1956, fue laureado con el Premio Nobel de Química junto a N.N. Semiónov. Algunos de los mayores avances en la cinética química desde los tiempos de Van't Hoff se deben a estos científicos y a sus colaboradores, cuyos resultados son muy importantes tanto desde un punto de vista tecnológico como en lo referente a los aspectos más teóricos de la química. Hinshelwood, concretamente, estudió la velocidad y el mecanismo de reacción de la combinación entre oxígeno e hidrógeno para formar agua, mostrando que los productos ayudan a extender esa reacción en lo que es esencialmente una reacción en cadena. Posteriormente, también exploró la cinética molecular en las células de bacterias.

Hinshelwood se educó en la escuela de Westminster y a continuación en la Universidad de Oxford, donde realizó su máster y obtuvo el título de doctor en ciencias. Tras varias estancias postdoctorales breves, trabajó en el Trinity College desde 1921 hasta 1937. En 1937 fue nombrado catedrático de química de la Universidad de Oxford, donde transcurrió el resto de su carrera profesional, excepto un breve periodo durante la Segunda Guerra Mundial en el que realizó algunos trabajos sobre explosivos en una fábrica de material bélico. También fue consejero científico del gobierno británico.

Sus primeros estudios sobre cinética molecular fueron recogidos en los trabajos *Thermodynamics for Students of Chemistry* (Termodinámica para Estudiantes de Química) y *The Kinetics of Chemical Change in Gaseous Systems* (La Cinética del Cambio Químico en Sistemas Gaseosos), ambos publicados en 1926. Posteriormente se dedicó a investigar sobre los cambios químicos en las células de bacterias, aportando explicaciones fisicoquímicas a las respuestas biológicas de las bacterias a los cambios en el medio. Estos estudios fueron muy importantes en el trabajo ulterior sobre antibióticos y agentes terapéuticos.

Su libro *The Chemical Kinetics of the Bacterial Cell* (La Cinética Química de las Células de Bacteria) fue publicado en 1946. En 1950 sugirió que en la síntesis de las proteínas en el interior de las células vivas, es el ácido nucleico el que controla el orden en el cual se produce la unión de los aminoácidos para formar una proteína. En 1951 escribió *The Structure of Physical Chemistry* (La Estructura de la Química Física).

CYRIL NORMAN HINSHELWOOD

Imágenes obtenidas de:

Google

QUÍMICOS DESTACADOS

Nikolái Nikoláyevich Semiónov

Nació el 15 de abril de 1896 en Sarátov, y murió el 25 de septiembre de 1986 en Moscú; ambas localidades en Rusia.

Ganador del Premio Nobel en Química en 1956.

Por sus investigaciones sobre las reacciones en cadena ramificadas.

FUENTES: Biografiasyvidas – Wikipedia

NIKOLÁI NIKOLÁYEVICH SEMIÓNOV (1896-1986)

Estudió física, química y matemáticas en la Universidad de San Petersburgo y fue nombrado profesor de física del Instituto Politécnico de Leningrado después de haber participado en la Guerra Civil Rusa, siendo Semiónov el introductor de la química física en su país.

Dirigió el Instituto de Química Física de la Academia de Ciencias de Rusia desde 1931, y el Instituto de Química Física de la Universidad de Moscú desde 1944.

Interesado inicialmente en el estudio de la física molecular y de los fenómenos electrónicos, junto a Piotr Kapitsa descubrió en 1922 un método para medir el campo magnético de un núcleo atómico, que posteriormente sería modificado y mejorado por Otto Stern y Walther Gerlach, y conocido como experimento de Stern-Gerlach.

En 1925 junto a Yákov Frenkel estudió la cinética de la condensación y adsorción de los vapores. En 1927 estudió la ionización de los gases así como la química del electrón, y en 1928 junto a Vladímir Fok creó la teoría de la descarga rota de dieléctricos.

Posteriormente se dedicó completamente a la cinética química, al desarrollo de la cual contribuyó notablemente. Su tarea fue especialmente intensa durante la Segunda Guerra Mundial, cuando los problemas de combustión y explosión adquirieron extraordinaria importancia. El gobierno soviético lo galardonó en 1941 con el Premio Stalin y en 1945 con la Orden de Lenin.

Posteriormente trabajó en el campo de las reacciones químicas en cadena, el conocimiento de la cual contribuyó de manera muy considerable, al igual que el químico inglés Cyril Norman Hinshelwood con quien mantuvo estrechas relaciones científicas y compartió el Premio Nobel de Química del año 1956.

Entre sus principales obras se encuentran *"Reacciones en Cadena"* (1934) y *"Suma de Problemas de Química Cinética y Radioactividad"* (1954)

NIKOLÁI NIKOLÁYEVICH SEMIÓNOV

Imágenes obtenidas de:

Google

Esta revolución será exponencial (por ley).

Por: DORY GASCUEÑA - @dorygascu - para OpenMind

TOMADO DE: Materia

Para celebrar su 35 aniversario la revista *Electronics* preguntó a un grupo de expertos sobre su visión del futuro. Entre ellos había un experto en circuitos integrados (chips). Corría el año 1965 y el autor de una de las observaciones que entonces se publicaron y que hoy mantiene su vigencia era **Gordon Moore.** El que fuera co-fundador de la empresa Intel® (1968) adelantaba **la relevancia de los circuitos integrados para la economía mundial.** Explicaba en su texto cómo cada año se duplicaba el número de transistores en un procesador, lo que a su vez se traducía en una progresiva reducción de los costes. Años después aumentó el periodo temporal a dos años.

GORDON MOORE.
CRÉDITO IMAGEN: GORDON AND BETTY MOORE FOUNDATION (CORTESÍA DE INTEL CORP.)

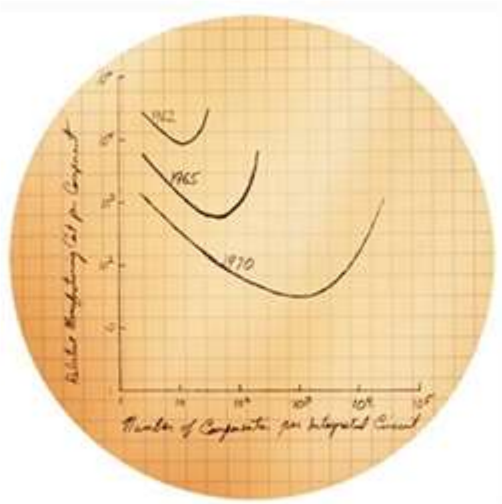
"Los circuitos integrados conducirán a creaciones maravillosas como los ordenadores personales, control automático para vehículos o equipos de comunicación personales portátiles", afirmaba entonces un Gordon Moore de 34 años. Quizás Moore había descubierto por aquel entonces los viajes en el tiempo, porque claramente estaba describiendo el escenario que vivimos en la actualidad: la proliferación de ordenadores portátiles, vehículos automáticos y *smartphones* y *wearables* cada vez más accesibles (más baratos) y cada vez más rápidamente obsoletos.

Quizás Moore no viajó al futuro, pero sí aventuró a qué ritmo nos acercaríamos a él, al menos en términos de tecnología informática.

La predicción que hizo entonces pasó a conocerse como **"La Ley de Moore"** (no es una ley matemática, sino más bien una predicción con un valor numérico de referencia) y ha servido de referencia en el sector de la tecnología a la hora de analizar y pronosticar el crecimiento y evolución de determinados sectores.

POR QUÉ MI FUTURO ES EXPONENCIAL.

A partir de la publicación de aquel artículo, **la palabra exponencial ha quedado ligada inevitablemente al mundo de la tecnología**. Los avances científicos y tecnológicos han mantenido un ritmo que permite aplicar el objetivo *exponencial* al desarrollo de todas las industrias que tienen que ver más o menos directamente con la informática. Cada vez se avanza más rápido y a menor coste en términos de innovación tecnológica, lo que implica a su vez **que el impacto y las repercusiones sociales de esos avances también son exponenciales.** Desde el nacimiento del primer ordenador, en apenas unas décadas de historia, el ser humano ha pasado de soñar con las computadoras que Moore describía en los 60 a pensar en la computación cuántica y las redes neuronales, los robots blandos, el internet de las cosas o la modificación genética como algo factible a corto-medio plazo.



BORRADOR DEL CUADERNO DE MOORE EN 1964 "COSTES VS TIEMPO".
CRÉDITO IMAGEN: FAIRCHILD CAMERA & INSTRUMENT CORPORATION

Las oportunidades, los retos, los riesgos y las amenazas se vuelven también exponenciales y al futuro al que nos enfrentaremos hay que empezar a mirarlo como algo muy diferente a nuestra realidad actual. **La capacidad transformadora de la tecnología actual** (y no digamos de la que está por venir) **es ya impredecible**. Solo podemos aventurarnos a imaginar. Estamos viviendo el inicio de una revolución que hará que el siglo XXI sea el más distinto de todos los siglos de la historia de nuestra existencia. Pero, antes de dar el pistoletazo de salida conviene analizar, si no la dirección, al menos el rumbo del viaje en el que nos embarcamos. ¿A qué riesgos nos enfrentaremos en las próximas décadas? ¿Qué podemos esperar de **la "nueva especie humana" que convivirá en una simbiosis prácticamente imperceptible con la tecnología**?

UNA GUÍA PARA ENTENDER QUÉ PODEMOS ESPERAR DEL FUTURO.

En el libro **"El próximo paso: la vida exponencial"**, 20 autores analizan las implicaciones que las tecnologías exponenciales tendrán en determinadas áreas de conocimiento (biología, finanzas, inteligencia artificial, artes, genética…) y que a su vez se convertirán **en los motores de cambio de la especie humana** y tendrán consecuencias sociales, medioambientales, políticas y ontológicas.

Mejorar la memoria de los seres humanos, ampliar los procesos cognitivos, la longitud de sus vidas, sus capacidades físicas… ¿Dónde quedan el arte o los medios de comunicación en ese escenario? ¿Tendremos que renovar el contrato social para incluir a los robots y a las futuras inteligencias artificiales? Aunque sea imposible contestar a estas preguntas a ciencia cierta, este libro aporta ideas para responder a una cuestión de fondo mucho más relevante a corto plazo: **¿qué podemos hacer para que efectivamente ese desarrollo tecnológico esté orientado a las mejoras reales de las condiciones de vida de las personas?**

Los neandertales respiraban de forma distinta a nosotros

FUENTE: La Vanguardia
TOMADO DE: *MSN*

UNA NIÑA MIRA UNA RECREACIÓN DE UN NEANDERTAL EN EL MUSEO DEL NEANDERTAL, EN ALEMANIA

Cómo se movían y respiraban los **Neandertales** impactó en su capacidad para sobrevivir en plena Edad del Hielo en Eurasia. Aunque es seguramente la especie humana extinta mejor caracterizada y de la que más información disponemos, hasta el momento se desconocía cómo era su **caja torácica** que, sin embargo, resulta clave para poder entender precisamente su respiración y equilibrio al caminar.

Un equipo internacional de científicos, liderado por **Asier Gómez-Olivencia**, investigador Ikerbasque de la **Universidad de País Vasco** (UPV/EHU), y **Ella Been**, del **Ono Academic College de Tel Aviv** (Israel), que también trabaja en el **Museo Nacional de Ciencias Naturales** (MNCN-CSIC) en Madrid, han creado el primer modelo virtual en 3D del tórax neandertal a partir de restos fósiles hallados en el yacimiento de Kebara, en el Monte Carmelo de Israel, en los años 80.

Gracias a esta detallada reconstrucción, han podido descubrir que respiraban de forma distinta a los *Homo sapiens*, que tenían más capacidad pulmonar, y que, además, su columna vertebral era más estable que la de los humanos modernos. Han publicado sus conclusiones, fruto de una investigación durante más de una década, en *Nature Communications*.

En concreto, los investigadores se han basado en los restos de un hombre joven, el individuo Kebara 2, apodado 'Moisés', que murió hace 60.000 años y que de manera bastante inusual conserva la mayoría de la columna vertebral y caja torácica. Los neandertales eran de menor estatura que los humanos modernos pero mucho más fornidos, más 'chaparros'.

Los neandertales respiraban de forma diferente, tenían más capacidad pulmonar y su columna vertebral era más estable que la de los humanos modernos

Un cuerpo más pesado implica que necesitarían una mayor ingesta calórica y también un mayor consumo de oxígeno. Y eso llevó durante bastante tiempo a los investigadores a pensar que los neandertales seguramente tuvieron una caja torácica mucho mayor que la nuestra que albergaría unos pulmones mucho más grandes. El hecho de que en el registro fósil apenas se conserven costillas y vértebras, muy frágiles, dificultaba testar esta hipótesis.

Sin embargo, tras analizar escrupulosamente el tórax de Kebara 2, los investigadores concluyeron que era del mismo tamaño que el de los humanos modernos, aunque sí presentaba algunas diferencias anatómicas. Para empezar, tenía las costillas inferiores orientadas de forma más horizontal y el tórax era más ancho en la parte inferior que el de los humanos modernos. Es ahí donde reside el diafragma, un músculo que se contrae cuando respiramos.

Para los autores de este trabajo, los neandertales tenían un diafragma más ancho y grande, lo que les ayudaría a hacer inhalaciones más profundas; eso implica que los pulmones de nuestros primos evolutivos se habrían expandido más con cada respiración, captando más oxígeno.

Además, el hecho de que la caja torácica sea más ancha en la parte inferior tiene que ver con una pelvis más ancha. Y los investigadores vieron que la columna vertebral estaba muy inserida en el tórax, lo que sugiere que era mucho más estable. Seguramente, caminarían más erguidos que nosotros.

Los neandertales tenían un diafragma más ancho y grande, lo que les ayudaría a hacer inhalaciones más profundas.

Los Neandertales son un tipo de humanos que aparecieron en Eurasia hace unos 400.000 años, probablemente en Atapuerca, y se extinguieron hace unos 30000. Vivieron en Europa Occidental y Asia Central. Fueron cazadores recolectores y fueron capaces de sobrevivir a periodos de condiciones climáticas extremas, como las glaciaciones. Estudios recientes han descubierto que los neandertales se cruzaron con los humanos modernos, y dejaron su impronta en nuestro ADN. Y que comparten con nosotros muchas de las capacidades que durante mucho tiempo consideramos exclusivamente humanas, como el lenguaje, el arte, el cuidado de los enfermos.

Grandes imágenes de la ciencia

Por: JAVIER YANES - @yanes68 - para Ventana al Conocimiento

1. LA PRIMERA FOTOGRAFÍA, NICÉPHORE NIÉPCE (1826).

Aunque suele atribuirse al francés Louis Daguerre la invención de la fotografía en 1839, lo cierto es que otros antes que él ya habían intentado conjugar el principio de la cámara oscura con el uso de sustancias sensibles a la luz. Un decenio antes del nacimiento oficial de la fotografía, Daguerre se había asociado con Nicéphore Niépce, un inventor que llevaba años experimentando. En 1824, Niépce logró obtener la primera fotografía con una cámara, utilizando una placa de piedra recubierta de betún de Judea, que se endurece con la exposición a la luz. Esta obra se perdió, pero Niépce repitió la misma toma en 1826 o 1827 empleando como soporte una placa metálica de peltre. La imagen, titulada *Vista desde la ventana en Le Gras*, fue tomada desde su propiedad en Saint-Loup-de-Varennes. No era precisamente una instantánea: requirió varios días de exposición. Hoy se conserva en la Universidad de Texas.

CRÉDITO IMAGEN: JOSEPH NICÉPHORE NIÉPCE

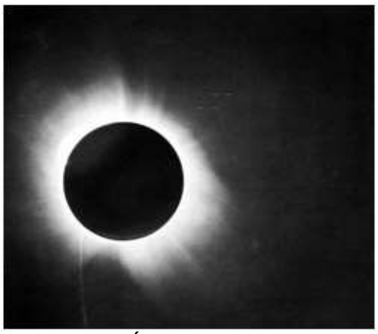
2. EARTHRISE, WILLIAM ANDERS (APOLO 8) (1968).

La misión Apolo 8, la segunda tripulada de este programa de la NASA, fue la primera en volar más allá de la órbita terrestre, sobrevolar la Luna y regresar. Sus tres astronautas, Frank Borman, James Lovell y William Anders, fueron los primeros seres humanos que observaron la Tierra completa desde el espacio. Cuando el módulo entró en la órbita lunar, el día de Nochebuena de 1968, sus tripulantes se vieron de pronto sorprendidos por la aparición de la Tierra elevándose sobre el horizonte. Borman tomó una primera fotografía en blanco y negro, pero fue esta imagen en color de Anders, capturada con una cámara Hasselblad en película de 70 mm Ektachrome de Kodak, la que se convirtió en uno de los iconos de la exploración espacial. En 2013, con ocasión del 45º aniversario del Apolo 8, la NASA produjo un vídeo que simula el panorama contemplado por los tres astronautas.

NASA / WILLIAM ANDERS

3. EL ECLIPSE QUE DIO LA RAZÓN A EINSTEIN, F. W. DYSON, A. S. EDDINGTON Y C. DAVIDSON (1919).

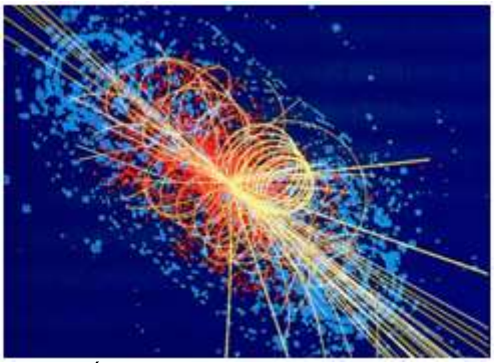
La teoría general de la relatividad, de la que en 2015 se cumplieron 100 años, apenas trascendió fuera del ámbito científico en el momento de su publicación. Einstein, aunque ya entonces muy reconocido por la comunidad física, permaneció en el anonimato hasta el 7 de noviembre de 1919. Aquel día el periódico *The Times* publicaba que el 29 de mayo anterior: tres astrónomos británicos habían fotografiado un eclipse de Sol que demostraba cómo la luz de las estrellas se curvaba por efecto de la gravedad solar, probando así la teoría de Einstein. En la víspera, 6 de noviembre, los resultados se habían presentado oficialmente en una importante reunión científica. El diario londinense proclamaba que se trataba de una "revolución en la ciencia". Según la biografía de Einstein escrita por Jürgen Neffer en 2005, aquel fue el día en que el físico alemán saltó a una fama que ya jamás le abandonaría.



CRÉDITO IMAGEN:
F. W. DYSON / A. S. EDDINGTON / C. DAVIDSON

4. EL BOSÓN DE HIGGS, LHC (2012).

Tal vez desde Einstein, la física no había captado tanta atención en los medios como con el descubrimiento del bosón de Higgs en el Gran Colisionador de Hadrones (LHC) de la Organización Europea para la Investigación Nuclear (CERN), en Ginebra (Suiza). Cuando el 4 de julio de 2012 el CERN anunció que dos experimentos del LHC, ATLAS y CMS, habían detectado partículas consistentes con las propiedades predichas para el bosón, la noticia fue primera página en la prensa de toda Europa. La máquina más grande y costosa de la historia había cumplido su función primaria, encontrar la partícula teorizada por Peter Higgs en 1964 y cuyo campo confiere masa a las demás, según el Modelo Estándar de la física. La imagen muestra una simulación de la desintegración del bosón en una colisión entre dos protones. Las líneas muestran las posibles trayectorias de las partículas generadas, mientras que las áreas azules representan la energía liberada en la colisión.



CRÉDITO IMAGEN: CERN / LUCAS TAYLOR

5. LA PRIMERA FOTOGRAFÍA DE MARTE, MISIÓN *MARINER 4* (1965).

Después de varios fracasos de Estados Unidos y la Unión Soviética, la *Mariner 4* de la NASA fue la primera sonda espacial que logró sobrevolar Marte. La *Mariner 4* se lanzó el 28 de noviembre de 1964, y el acercamiento a Marte se produjo el 14 y 15 de julio del año siguiente. Su equipo incluía una cámara de televisión que convertía la señal analógica en digital. Los datos se recogían en una grabadora de cinta magnética y se enviaban por radio a la Tierra, donde los ingenieros recibían una cinta de papel con números impresos que representaban el color de cada píxel. Cuando la sonda transmitió su primera imagen, los responsables de la misión no estaban seguros de la fiabilidad de la grabadora. En lugar de esperar a que la computadora procesara los datos, cortaron y pegaron las tiras de la cinta para luego colorearlas a mano con pinturas al pastel siguiendo una clave de color, como en los dibujos de los niños. El resultado demostró que la cámara funcionaba correctamente.

NASA / JPL-Caltech / Dan Goods

6. QUINTA CONFERENCIA SOLVAY, BENJAMIN COUPRIE (1927).

En 1911, el químico y empresario belga Ernest Solvay convocó una conferencia en Bruselas a la que invitó a los físicos más preeminentes de la época. El éxito de la reunión le inspiró para fundar al año siguiente los Institutos Internacionales Solvay de Física y Química, donde desde entonces se siguen celebrando cada tres años las Conferencias Solvay. Sin duda la más famosa de todas fue la de octubre de 1927, que congregó a 29 científicos, 17 de los cuales fueron galardonados con un premio Nobel; o dos, en el caso de Marie Curie, la única mujer. Allí se reunieron figuras como Einstein, Schrödinger, Pauli, Heisenberg, Dirac, De Broglie, Born, Bohr, Planck y Lorentz, entre otros. Además del alto nivel de los asistentes, la conferencia de 1927 fue especialmente célebre porque se discutió la por entonces nueva teoría cuántica del átomo. El retrato de grupo se atribuye al fotógrafo Benjamin Couprie.

CRÉDITO IMAGEN: BENJAMIN COUPRIE

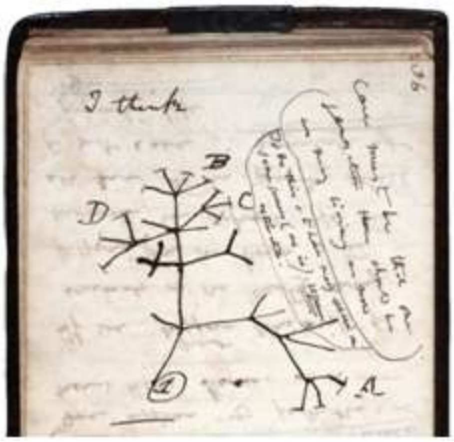
7. EL PRIMER FÓSIL DE DINOSAURIO EN LA LITERATURA CIENTÍFICA, ROBERT PLOT (1677).

Durante siglos, los fósiles de dinosaurios alimentaron fantásticas leyendas. En China se los tomaba por dragones, mientras que en Europa se creía que eran restos de ogros o gigantes. El primer registro de estas criaturas en la literatura científica apareció en 1677 en *Historia Natural de Oxfordshire*, escrita por el primer profesor de química de la Universidad de Oxford, Robert Plot. En su obra, Plot incluyó la ilustración de un fragmento de hueso petrificado hallado en una cantera de roca caliza. El químico reconoció que se trataba de la cabeza inferior de un fémur, pero dado que en Inglaterra no existía ningún animal de semejante tamaño, lo atribuyó a un elefante de guerra empleado por los romanos, o bien a un humano gigante. En 1824 el hueso fue asignado al género *Megalosaurus*, descrito por el teólogo y paleontólogo William Buckland. El *Megalosaurus* fue el primer dinosaurio publicado en una revista científica, aunque el término “dinosaurio” no se acuñaría hasta 1842.

APORTE IMAGEN POR ROBERT PLOT

8. EL ÁRBOL DE LA VIDA, CHARLES DARWIN (1837).

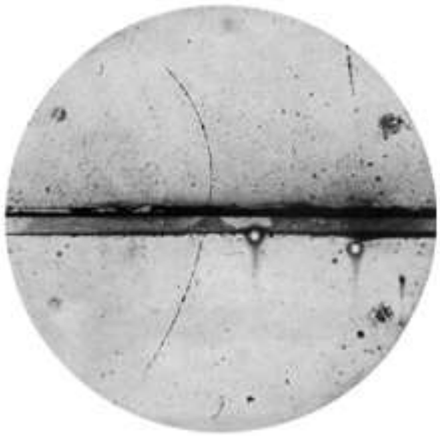
A su regreso a Inglaterra en 1836, después de casi cinco años de viaje a bordo del navío *H. M. S. Beagle*, Charles Darwin ya era un científico reconocido. Sus trabajos elaborados a partir de las observaciones recogidas durante la travesía habían suscitado el interés de los naturalistas de la época, inmersos en la compleja tarea de encajar la diversidad de la vida en un esquema espacial y temporal que tuviera sentido. Darwin comenzó a tomar notas para tratar de explicar la transmutación, como entonces se denominaba a la conversión de unas especies en otras. En julio de 1837 anotó en su libreta “yo pienso”, y a continuación trazó su primer esbozo del “árbol de la vida”. Esta visión de la genealogía de las especies como un árbol ramificado se oponía a la del francés Jean-Baptiste Lamarck, que imaginaba linajes independientes paralelos. Darwin desarrollaría su idea en su obra principal publicada en 1859, *El origen de las especies*. La libreta original se conserva en la biblioteca de la Universidad de Cambridge.



APORTE IMAGEN POR CHARLES DARWIN

9. IMAGEN DE UN POSITRÓN, CARL DAVID ANDERSON (1932).

La idea de un antielectrón, un electrón con carga positiva, fue propuesta por el inglés Paul Dirac en 1928, abriendo la física al nuevo concepto de la antimateria. Su demostración experimental llegaría cuatro años después de manos de un joven físico llamado Carl Anderson, que buscaba partículas nuevas en una cámara de niebla. Este instrumento permitía detectar el paso de la radiación gracias a que las partículas ionizadas a su paso condensaban el vapor de agua, dejando un rastro visible. Cuando la cámara se sometía a un campo magnético, el recorrido de las partículas se curvaba a un lado o al otro según el signo de su carga. Anderson trataba de cazar partículas en los rayos cósmicos cuando observó una huella inusual: su masa era la de un electrón, pero su curvatura era la contraria de la esperada, lo que indicaba una carga positiva. Cuando Anderson publicó sus resultados, el editor de la revista *Physical Review* sugirió el nombre de "positrón". Anderson recibió el premio Nobel en 1936.



CRÉDITO IMAGEN: CARL D. ANDERSON

10. PRUEBA NUCLEAR TRINITY, BERLYN BRIXNER (1945).

La era del armamento nuclear dio comienzo el 16 de julio de 1945 en una zona remota del estado de Nuevo México. A las 5 y 29 de aquella mañana estallaba la primera bomba atómica de la historia, la prueba inaugural del Proyecto Manhattan. Su máximo responsable científico, el físico Julius Robert Oppenheimer, dio al ensayo el nombre clave de Trinity inspirándose en un poema del inglés John Donne. La bomba de Trinity, que produjo una explosión de unos 20 kilotones, era un artefacto de implosión de núcleo de plutonio, prácticamente idéntico al que se lanzaría sobre Nagasaki el 9 de agosto de aquel año. La documentación visual de la explosión estaba a cargo del fotógrafo Berlyn Brixner, que situó unas 50 cámaras para capturar hasta 10.000 fotogramas por segundo. La imagen mostrada se tomó 16 milisegundos después de la detonación. En ese momento la burbuja explosiva alcanzaba una altura de 200 metros, pero la nube del hongo posterior ascendió hasta superar los 12 kilómetros.

CRÉDITO IMAGEN: BERLYN BRIXNER

Revelan posible truco egipcio para alinear sus pirámides

Por: **ELISA ROJAS**
FUENTE: ***Actualidad RT***
TOMADO DE: Noticias24 Carabobo.com - 20/02/2018

El arqueólogo e ingeniero Glen Dash cree haber descubierto cómo **los egipcios alinearon con tanta precisión las pirámides** de Keops, Kefrén y Micerinos, ubicadas en la meseta de Guiza, cerca de El Cairo (Egipto).

Es un misterio que las tres pirámides estén alineadas con una precisión casi perfecta con los cuatro puntos cardinales. A pesar de la tecnología de la época y de que la Gran Pirámide tiene 138,8 metros de lado, sus cuatro caras dan al norte, sur, este y oeste con una mínima desviación de 0,66 grados.

De acuerdo a un artículo publicado en 'The Journal of Ancient Egyptian Architectue', los egipcios orientaron con tanta exactitud la estructura aprovechando el equinoccio de otoño. Esta teoría no es nueva, pero el egiptólogo no solo ha aportado datos para demostrarla, sino que la ha llevado a la práctica con un resultado satisfactorio.

Los equinoccios son dos momentos al año en los que el Sol está situado en el plano del ecuador celeste. En el momento en el que alcanza su cénit en el cielo, la intersección con el plano del ecuador es perfecta, con lo cual es el momento ideal para tomar medidas si se pretende alinear un edificio.

Dash cree que los egipcios de la época utilizaron un instrumento llamado gnomon para tomar dichas medidas. El gnomon es un palo alargado que se clava en el suelo para medir el recorrido de la sombra. La técnica consiste en marcar los diferentes puntos a medida que la sombra se mueve durante el equinoccio de otoño, dando como resultado un arco perfecto. Una vez completado, solo es necesario unir estos puntos y así se obtiene una línea este-oeste, explicó el arqueólogo.

Dash comprobó que la técnica funciona. Asimismo, de este modo se explica la desviación de 0,66 grados. Para dar con el día exacto del equinoccio de otoño, asegura que solo es necesario contar 91 días desde el solsticio de verano.

Los arqueólogos llevan décadas tratando de descifrar este misterio mediante distintas teorías. Aunque esta explicación parece válida, la comunidad científica se resiste a aceptarla como cierta y la casi perfecta alineación de las pirámides egipcias seguirá siendo un misterio.

Venezuela, personajes, anécdotas e historia.

Vicente Campo Elías

1759-1814

Juan Vicente Campo Elías, coronel prócer de la Independencia de Venezuela. Se sabe que nació en Soto en Cameros, La Rioja, Castilla la Vieja, España y aunque no está determinado en cuál día y cuál mes, el mismo ocurrió en el año 1759.

Sus padres fueron Don José del Campo Elías y Doña María Elías González, ambos también de Soto en Cameros y parientes entre sí. Aunque nació en España, a los 9 años viajó hacia América con uno de sus tíos, Don Hipólito Elías, quien fue nombrado canónigo de la Catedral de Mérida, Venezuela, en 1792. Sin embargo, Vicente Campo Elías se radicó en Trujillo, donde se dedicó al comercio despertando gran simpatía entre sus pobladores, y siendo elegido Síndico Procurador del Ayuntamiento de la misma.

Exigencias del negocio que llevaba, lo obligó a establecerse en Mérida, y en el año 1800 se casó con la hija de una de las personas más distinguidas de esta localidad. Campo Elías llegó a desempeñar la alcaldía de Mérida en 1805, y al año siguiente fue Diputado de la Junta de Consolidación.

Para el año 1810, aun su origen español pero en concordancia con sus convicciones republicanas, se une al movimiento independentista venezolano, integrando la Junta Patriótica de Mérida el 16 de septiembre de ese año. Como oficial del Ejército de Venezuela durante la Guerra de Independencia, alcanza el grado de coronel, ofrendando su vida el 17 de marzo de 1814 después de ser gravemente herido cuando participaba en la Batalla de San Mateo.

Con la caída de la Primera República en 1812, la Provincia de Mérida fue tomada por los realistas, razón por la cual Vicente Campo Elías tuvo que refugiarse en las montañas de esa región. Sin embargo, una vez que la Provincia fue abandonada, regresa y se une al ejército del Libertador Simón Bolívar.

A partir de su encuentro con Bolívar, Vicente Campo Elías va a tener una destacada actuación militar, y junto con los patriotas José Félix Rivas, Atanasio Girardot, Luciano D' Elhuyar y Luis María Dávila, entre otros, propina contundentes derrotas a las tropas realistas. Participó y ganó en las batallas de Niquitao (2 de julio de 1813), Los Horcones (22 de julio de 1813), Bárbula (30 de septiembre de 1813), Mosquitero (14 de octubre de 1813), La Victoria (12 de febrero de 1814), Araure (5 de diciembre de 1813) y San Mateo (28 de febrero de 1814).

A pesar de su origen foráneo fue contrario al sistema de dominación, opresión y desigualdad instaurado por la Corona Española en América; por eso, al referirse a los hombres de su tierra decía: "Yo los mataría a todos [los españoles] y me degollaría luego, para que no sobreviviera nadie de esta maldita raza".

GALERÍA

STEVE RALLIS

Nació el 17 de Mayo de 1942 en Bennington, Vermont, y murió el 17 de Abril de 2012 en Columbus, Ohio; ambas localidades en EE. UU.

Imágenes obtenidas de:

Google

Steve Rallis era hijo de James "Jimmy" Rallis (1912-2005) y su esposa Evangelia "Vickie" Felopulos (1915-2009). Jimmy Rallis, quien nació el 5 de mayo de 1912 en Lowell, Massachusetts, manejó el Restaurante Raleigh en Bennington hasta 1953. Después de esto manejó el restaurante Four Chimneys, que tenía una excelente reputación. Murió el 1º de abril de 2005. Vickie era graduada de la High School de Bennington, pasando al Wellesley College, donde ella se especializó en historia del arte. Steve tenía dos hermanas, Nancy y Diana. Nancy también se convirtió en matemático, estudiando en el Vassar College y luego obtuvo un Ph.D. en la Universidad de Indiana en 1978 presentando la tesis *Periodic points and a fixed-point index theory for symmetric product mappings* (Puntos periódicos y una teoría del índice de punto fijo para mapeos de producto simétrico). Ella fue tutorada por Jan W. Jaworowski quien había sido estudiante de Karol Borsuk en Polonia.

Steve Rallis estudió también en la High School de Bennington, como sus dos hermanas. El Señor Jarecki, quien enseñaba estudios sociales, tuvo una gran influencia sobre todos los niños. Nancy dijo [3]:

> [El Sr. Jarecki] era un profesor muy respetado al que Steve y yo disfrutamos mucho.

Rallis, quien clasificó como el primero de su clase cuando se graduó de la High School de Bennington, supo desde joven que quería ser matemático. Después de la secundaria, ingresó en la Universidad de Harvard donde estudió matemáticas. En Harvard él fue residente de casa de Winthrop, una de los colegios universitarios de Harvard y obtuvo un AB, magna cum laude en matemáticas, en 1964. Luego pasó al Instituto Tecnológico de Massachusetts donde fue tutorado en su tesis doctoral por Bert Kostant. Rallis obtuvo el doctorado en 1968 con su tesis *Lie group representations associated with symmetric spaces* (Representaciones de grupos de Lie asociados con espacios simétricos). De hecho conoció a su futura esposa Michele Kaufman mientras él le sacaba copias a la transcripción su tesis en Harvard Square. Michele había sido estudiante de la Universidad de Radcliffe y entonces había emprendido su investigación para el doctorado en Harvard con David Layzer, un cosmólogo, como tutor. Apenas había terminado de transcribir su tesis para el Ph.D. en astronomía, al igual que Rallis, fue a Harvard Square para sacarle copias.

Después de recibir su Ph.D. del Massachusetts Institute of Technology, Rallis pasó el periodo 1968-1970 en el Instituto para Estudios Avanzados en Princeton, llegando allí el 9 de septiembre de 1968 y dejándolo el 1º de julio de 1970. Publicó un número de trabajos escritos conjuntamente con su tutor de tesis Bert Kostant; estos son: *On orbits associated with symmetric spaces* (Sobre órbitas asociadas con espacios simétricos) (1969), *On representations associated with symmetric spaces* (Sobre representaciones asociadas con espacios simétricos) (1969) y *Orbits and representations associated with symmetric spaces* (Órbitas y representaciones asociadas con espacios simétricos) (1971).

En Princeton comenzó realizando investigación sobre la representación del oscilador con Gerard Schiffmann. Rallis se casó con Michele Kaufman en 1970. Después de salir de Princeton, Rallis pasó dos años en el SUNY Stony Brook. En ese entonces se había desempeñado como profesor visitante cierto número de veces en Estrasburgo, Texas, Notre Dame y Princeton. Estuvo dos años en Estrasburgo y allí fue visitado por Gerard Schiffmann quien escribe [2]:

> *Quizás fue en ese momento que él adoptó su sorprendente horario de trabajo: ¡seis o siete días a la semana desde temprano en la mañana hasta tarde en la noche! ... en Princeton [he] conocido a Michele por primera vez, pocos meses antes de su boda. Más tarde, durante su estancia en Estrasburgo mi esposa y yo tuvimos muchas ocasiones para visitarlos. Al inicio de su relación, Michele había reconocido el don de Steve para las matemáticas y su dedicación a la investigación. Notablemente, a lo largo de la carrera de Steve se las arregló para mantener su carrera en astronomía facilitándole la vida para que siguiera su investigación en matemática.*

Mientras en Estrasburgo, en 1975, publicó con Gerard Schiffmann, *Distributions invariantes par le groupe orthogonal* (Distribuciones invariantes para el grupo ortogonal) en el Nancy-Strasbourg Seminar “Analyse harmonique sur les groupes de Lie”:

> *Esta es una exposición profunda y serena de la teoría analítica de las formas cuadráticas con el sabor de J. Tate y el sabor de A. Weil.*

Fue a Notre Dame cuando presentó, en conjunto con Gerard Schiffmann, el trabajo *Discrete spectrum of the Weil representation* (El espectro discreto de la representación de Weil) con la finalidad de que fuera publicado a finales de 1976, pero fue publicado en 1977 en el momento que se encontraba en Princeton. Rallis fue nombrado en la Universidad Estatal de Ohio, Profesor Asistente de Matemáticas en 1977. Fue promovido a Profesor Asociado en 1979 y a Profesor Titular en 1984. Regresó al Instituto para Estudios Avanzados de Princeton en enero de 1984, permaneciendo allí algo más de tres meses allí, y luego volvió otra vez en enero de 2001 permaneciendo cuatro meses. El resto de su carrera permaneció en la Universidad Estatal de Ohio, retirándose en 2007 cuando fue nombrado Profesor Emérito. Su tiempo en el estado de Ohio se describe en [2]:

> *Steve fue una presencia definida en el Departamento de Matemáticas de la Universidad Estatal de Ohio. Él venía en las mañanas y empezaba a hacer sus rondas. Se presentaba al personal, visitaba a sus colegas, hablaba con los becarios visitantes y sus estudiantes post-doctorales, se reunía con sus estudiantes (generalmente en el salón con los demás presentes) y aún era capaz de realizar sus clases. Parecía estar en todas partes, excepto en su oficina; no tenía sentido intentar llamarlo durante el día. Pero regresaba al departamento después de la cena para trabajar y mantenía el mismo horario los fines de semana; entonces se tenía más posibilidades de encontrarlo en su oficina de trabajo, pero aún dispuesto a hablar de matemáticas. Su ética de trabajo fue una inspiración para todos.*

El New York Times lo describe como sigue [4]:

> *Steve Rallis era una persona cálida, amable, buena, que vestía camisas de polo y pantalones de diario, y tuvo estudiantes, personal y los empleados del equipo de limpieza le llamaban "Steve" en lugar de "Prof. Rallis". En lugar de decir "Estás equivocado" cuando un estudiante o compañero cometía un error, él decía "¿qué falta aquí?" Steve estaba preparado para dar el trato justo a la gente y no tenía miedo a decir las cosas cuando era necesario. Las secretarias lo consideraban un osito de peluche.*

Su esposa Michele dijo [3]:

> *Steve tenía un particular interés por sus estudiantes, le encantaba enseñar a estudiantes universitarios pero cuando la Universidad comenzó a expandirse y a realizar clases de pregrado en conferencias con cientos de estudiantes, eligió enseñar a estudiantes de posgrado. Steve nunca publicó trabajos conjuntamente con estudiantes graduados, siempre les dio el crédito completo de la investigación en sus publicaciones, no quería que nadie asumiera que era él quien había hecho el trabajo si el estudiante era quien lo había hecho.*

Señalando algunos aportes importantes de Rallis a la matemática [1]:

> *El trabajo inicial de Rallis fue sobre las conexiones entre la teoría de la representación y la teoría del invariante. Desde el principio, el objetivo principal de la investigación de Rallis cambió a la teoría de las formas automórficas y a la teoría de la representación y luego a las funciones-L, pero manteniendo siempre la teoría del invariante como una de sus poderosas técnicas. Su trabajo fue muy original y ha dejado un impacto duradero en teoría de números y en la teoría de la representación. A lo largo de su carrera Rallis fue un matemático colaborador; de las 94 fuentes de citas que aparecen en "MathSciNet", colaboró en todas, pero en 7 como co-autor. Uno puede seguir su trayectoria mediante el seguimiento de sus colaboraciones. Eran casi todas colaboraciones a largo plazo, dando por resultado documentos de trabajo en serie.*

Publicó tres libros, todos monografías de investigaciones y el primero (inusualmente para Rallis como se hace ver en la cita anterior) lo escribió solo. Fue el de *L-functions and the oscillator representation* (Funciones-L y la representación de oscilador) (1989), revisado por L. A. Takhtajan, quien escribió:

> *El propósito del libro en revisión es poner los resultados de Shimura y Waldspurger sobre la conexión entre las formas modulares pesos enteros y medio-enteros en el marco general de la teoría de las representaciones automórficas. ... En respuesta a [preguntas propuestas] se utiliza toda la maquinaria de la moderna teoría de las representaciones automórficas. El libro es una continuación de trabajos anteriores del autor...*

La siguiente monografía, *Explicit constructions of automorphic L-functions* (Construcciones explícitas de funciones-L automórficas) (1987), es en dos partes, la primera de las cuales fue escrita por Rallis e Ilya Piatetski-Shapiro. Joe Repka escribe en un informe:

> *Parte A: "Funciones-L de los grupos clásicos, Piatetski-Shapiro y Rallis, utilizan una generalización de la clásica construcción de Rankin-Selberg para definir una función-L asociada a cualquier representación automórfica irreducible cuspidal. La función-L se expresa como una integral que implica la serie de Eisenstein sobre un grupo más grande. La idea es presentada axiomáticamente y después discutida por simpléctica, grupos ortogonales y unitarios. El enfoque aquí tiene la ventaja de que no es necesario restringir a representaciones automórficas que son "genéricas".*

La tercera monografía, publicada después que Rallis se retiró, fue un trabajo en conjunto con David Ginzburg y David Soudry, titulado *The descent map from automorphic representations of GL(n) to classical groups* (Mapa descendente de representaciones automórficas de GL(n) a grupos clásicos) (2011). Erez M. Lapid pone este trabajo dentro de contexto:

> *Las conjeturas de functorialidad de Langlands son una piedra angular en la teoría moderna de formas automórficas. Ellas predicen profundas relaciones entre representaciones automórficas en diferentes grupos. Lamentablemente, se conocen sólo casos muy especiales de functorialidad. Tales casos dan información valiosa y tienen aplicaciones importantes. Es una técnica importante para el establecimiento de la functorialidad para construcciones explícitas (en contraste con la fórmula del rastro y la técnica del teorema converso, que son indirectas).*

> *No en vano, esta técnica da más información que functorialidad misma. Es obvio que los tres métodos son extremadamente limitados y puede que ya estén casi agotados por ahora. El libro examinado habla sobre construcciones explícitas de formas automórficas de los grupos clásicos del grupo lineal general. El método, conocido como el mapa descendente, utiliza ciertos coeficientes de Fourier (de tipo Gelfand-Graev o Fourier-Jacobi, dependiendo del contexto) de la serie de Eisenstein sobre un grupo clásico más grande inducida por las representaciones automórficas sobre GLn.*

Dos co-autores con Rallis describieron sus experiencias de trabajo con él en [2]:

> *Trabajar con Steve fue una gran experiencia para nosotros, todavía está muy vivo en nuestras mentes: la gran pasión de Steve por las matemáticas, su entusiasmo y devoción; tiempos de avance, momentos de frustración; reunirse a la mañana siguiente y compartir los pensamientos de cada uno en la noche anterior; tomando un descanso y buscar café o helado, jugando al billar o a los bolos. Junto con Steve, hicimos nuestro mejor trabajo matemático. Nos sentimos muy privilegiados de haber conocido a Steve, haber aprendido de él y trabajado con él. Trabajar con Steve fue llevar muchas conversaciones sobre la vida, los recuerdos personales y las experiencias, sueños, esperanzas y temores; de historia, de política, de literatura, arte, películas y mucho más. Fue un verdadero amigo. Steve siempre vivirá en nuestras mentes: Steve el gran matemático y Steve nuestro gran amigo amado.*

En 1990 Rallis fue invitado a disertar en el Congreso Internacional de Matemáticos celebrado en agosto en Kyoto, Japón. Dio la Conferencia *Poles of standard L functions* (Polos de funciones-L estándar) en la que informó sobre algunos de sus trabajos recientes. Stephen Gelbert comienza un informe de la versión publicada de la charla de Rallis como sigue:

> *El método Rankin-Selberg en la teoría de funciones-L da representaciones integrales explícitas de ciertas funciones-L a representaciones automórficas de grupos algebraicos reductivos. Esto permite determinar la continuación analítica y la ecuación funcional de estas funciones-L, así como sus polos explícitos. En los últimos años, se han encontrado representaciones integrales de Rankin-Selberg para varias clases nuevas de funciones-L, principalmente las funciones-L estándar de los grupos clásicos. El trabajo bajo revisión estudia importantes trabajos recientes en esta dirección por parte el autor, en colaboración con I. Piatetski-Shapiro y S. Kudla.*

Se termina esta reseña biográfica con una cita de Michael Harris [2]:

> *La teoría de números todavía tiene que absorber todas las lecciones del trabajo más reciente de Rallis, pero el proceso está comenzando.*

También una cita de los autores de la referencia [1]:

> *Todos nos hemos beneficiado de la perspectiva única de Rallis en matemáticas y su generoso deseo de compartir sus ideas y experiencia, incluso aquellos de nosotros que nunca tuvimos el placer de colaborar con él.*

Referencias.-

Artículos:

1. J Cogdell, H Jacquet, D Jiang and S S Kudla, Steve Rallis (1942-2012), *J. Number Theory* **146** (2015), 1-3.
2. J Cogdell and D Jiang (eds.), Remembering Steve Rallis, *Notices Amer. Math. Soc.* **60** (4) (2013), 466-469.
3. B T O'Neill, Steve Rallis, distinguished mathematician, started out in Bennington schools, *Bennington Banner* (Friday, 17 May 2013).
4. Steve Rallis, The Donizetti of Mathematics, Dies at Age 69, *New York Times* (20 July 2012).
5. Steve Rallis, The Ohio State University Board of Trustees Meeting (Friday, 22 June 2012). http://trustees.osu.edu/assets/files/meeting-materials/06-2012/Consent%20Agenda.pdf
6. Stephen James Rallis, Harvard-Radcliffe Class of 1964. Obituaries. http://hr1964.org/obits.htm

Versión en español por R. Ascanio H. del artículo en inglés de J. J. O'Connor y E. F. Robertson sobre "Steve Rallis" (Abril 2015).
Fuente: MacTutor History of Mathematics [http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Rallis.html].

Normas de Publicación de la Revista HOMOTECIA

La Revista HOMOTECIA tiene como objetivo principal ser una herramienta para la enseñanza y aprendizaje, y en casos especiales, para la evaluación de estudiantes cursantes de las asignaturas de pregrado y postgrado, administradas por la Cátedra de Cálculo del Departamento de Matemática y Física de la Facultad de Ciencias de la Educación de la Universidad de Carabobo (UC), Valencia, República Bolivariana de Venezuela. Por ello ha adquirido un carácter de revista multidisciplinaria que la ha llevado a aceptar la colaboración académica en cuanto a producción intelectual, de los docentes y de los mismos estudiantes de pregrado y postgrado a los que están dirigidos el material en la misma publicado.

No obstante, también está abierta para recibir colaboración similar de los académicos de otros departamentos de la facultad, de otras facultades de la UC, de otras universidades nacionales y extranjeras, y de organizaciones y grupos cuyos aportes informativos, ya sean por intencionalidad directa o por divulgación en páginas Web en la red de Internet, ayudan a la formación del perfil profesional tanto en lo académico como en lo cultural, de los estudiantes bajo nuestra tutela. Como aclaratoria, esto nos lleva a recibir artículos inéditos (que debemos someter a arbitraje), otros ya divulgados en otras publicaciones pero que consideramos interesantes e importantes hacerlos conocer por nuestros estudiantes; de análisis del trabajo de otros autores (ensayos y reseñas de libros); sobre filosofía, epistemología, historia y otros aspectos de las ciencias; y sobre elementos específicos de lo humano (personajes y sus semblanzas). Los artículos enviados a la revista HOMOTECIA deben ajustarse a las siguientes condiciones:

1. Los autores que soliciten la publicación de un escrito, deben enviarlo a la dirección electrónica homotecia2002@gmail.com. No existe límite en cuanto al número de trabajos a enviar pero el que así sea, no es garantía de una total e inmediata publicación. Se aconseja limitar el número de los artículos y jerarquizarlos según el criterio particular sobre su importancia en lo que al autor le concierne.
2. Se publican trabajos realizados por investigadores y articulistas tanto nacionales como extranjeros. Deben ser artículos surgidos de investigaciones, culminadas o en proceso; de opinión sobre temas educativos, generalidad social y científicos, que es lo preferible pero no excluyente; estos relacionados con la enseñanza de la matemática, la física, la química, la biología, la informática u otra disciplina pero que consideren coadyuven a la formación del perfil docente. En la categoría generalidad social, se aceptan trabajos cuyo propósito sea promover la formación de valores y virtudes.
3. Se reciben trabajos inéditos o ya publicados. Si son inéditos, esta característica debe indicarse para que pueda ser sometido a un riguroso proceso de arbitraje siguiendo la técnica Doble Ciego, realizados por expertos en las áreas de interés. Si ha sido publicado previamente, indicar esa característica y hacer referencia a los detalles de la anterior publicación.
4. Si el trabajo está elaborado en el contexto social, debe ajustarse sus características de redacción, presentación de gráficos, citas, referencias bibliográficas y otros aspectos afines, a las Normas de la Asociación Americana de Psicología vigentes (American Psychological Association), las muy conocidas Normas APA. A los autores nacionales se recomienda en este caso, revisar las condiciones, reglas y normas contempladas por la revista de la Facultad de Ciencias de la Educación de la Universidad de Carabobo (FACE-UC) para la publicación de trabajos científicos. Otra opción es el Manual de Trabajos de Grado, de Especialización, Maestría y Tesis Doctorales de la Universidad Pedagógica Experimental Libertador - UPEL (última edición).
5. Si el trabajo está elaborado en un contexto característico de las revistas biomédicas, debe ajustarse a las Normas Vancouver vigentes.
6. Los artículos deben estar escritos en español, utilizando el procesador de palabras Word. Las imágenes en formato jpg. Los gráficos presentados como imágenes en formato jpg. Archivo no encriptado.
7. Los trabajos pueden variar en extensión entre diez (10) y doce (12) páginas, tamaño de papel carta, tipografía Time New Roman tamaño 12, espaciado entre líneas 1,5 (espacio y medio), márgenes derecho, superior e inferior 3 cm e izquierdo 4 cm. Las condiciones finales de publicación del escrito, las deciden los coordinares de publicación de la revista.
8. Todo artículo debe incluir en el encabezado:
   - Título, no mayor de veinte (20) palabras. Conciso pero informativo, que no contenga abreviaturas a menos que sea necesario. Debe ser pertinente con la temática y los objetivos propuestos.
   - En línea posterior, nombres y apellidos del autor o los autores.
   - Posteriormente y utilizando por autor súper índices (en números arábigos), indicar en las siguientes líneas que sean necesarias, el grado académico alcanzado, el nombre de la institución a la que representa, número del celular o móvil de contacto y dirección electrónica. Si lo considera pertinente o no contraproducente, puede incluir una imagen fotográfica del autor o autores.

9. Se sugiere presentar los artículos de acuerdo al siguiente esquema, y aunque no obligatorio, orientarse con las siguientes sugerencias:

- **Resumen:** Estructurado con una extensión máxima de 250 palabras, tanto en español como en inglés (Abstract), precedidos por el título en el idioma correspondiente. Debe organizarse siguiendo estas pautas: problema-introducción, objetivo general, metodología (diseño y tipo de investigación, sujetos, métodos, análisis de los datos), resultados, conclusiones, palabras clave / key words (se aconseja incluir al pie de cada forma de resumen español/inglés de 3 a 5 palabras clave en el idioma respectivo). Debe evitarse el uso de referencias bibliográficas.
- **Introducción:** Hacer referencia a la naturaleza del problema y su importancia. Describir la finalidad o el objetivo de investigación del estudio. Incluir referencias estrictamente pertinentes, no debe contener datos ni conclusiones del trabajo que está dando a conocer.
- **Marco teórico o revisión bibliográfica:** Contexto o los antecedentes del estudio.
- **Metodología o procedimientos:** Se debe hacer mención del diseño y tipo de investigación, describir claramente los métodos, técnicas, instrumentos empleados, así como de manera detallada los procedimientos realizados. Indicar claramente la manera cómo se hizo la selección de los sujetos que participaron en la investigación.
- **Resultados, análisis e interpretación**: Estos deben ser pertinentes, relevantes y cónsonos con la temática y objetivos del estudio. Deben redactarse en pretérito (la acción enunciada se considera terminada). El texto, las Tablas y Figuras deben presentarse en secuencia lógica. No repita el contenido de las Tablas o de las Figuras en el texto, se recomienda un máximo de 6 (entre ambas). No haga juicios ni incluya referencias. Evite la redundancia.
- **Discusión y conclusiones pedagógicas:** Resaltar los aspectos nuevos e importantes del estudio y las conclusiones que se derivan de ellos, no repita pormenores de los datos u otra información ya presentada en cualquier otra parte del manuscrito, destaque o resuma solamente las observaciones importantes. Explique el significado de los resultados y sus limitaciones, incluidas sus implicaciones para investigaciones futuras. Relacione y contraste las observaciones de su estudio con publicaciones pertinentes. Establezca nexos entre las conclusiones y el objetivo del estudio. No mencione trabajos no concluidos. Esta sección debe ser clara y precisa, de extensión adecuada y concordante con los resultados del trabajo. Puede incluir recomendaciones.
- **Referencias bibliográficas.** Este será el título si se incluyen solo libros. Si se tiene que hacer uso de textos digitales, titular esta sección como **"Referencias"**.

10. Todo trabajo debe estar acompañado de la reseña curricular del autor o autores; este escrito por autor, debe elaborarse entre sesenta y cien palabras.

11. Para los trabajos inéditos, aceptados con observaciones según el criterio de los árbitros, serán devueltos a su autor o autores para que realicen las correcciones pertinentes. Una vez corregidos por el autor o autores, se reenviarán a la Comisión Revisora de Material a Publicar, quienes les asignarán un lugar en la *cola de publicaciones*.

12. Trabajo no aceptado será devuelto al autor o autores con las observaciones correspondientes, previa solicitud. El mismo no podrá se arbitrado nuevamente.

Cualquier aspecto no completado en este documento, será estudiado, decidido y dictaminado por la Coordinación de Publicación de la Revista.

Dr. Rafael Ascanio Hernández – Dr. Próspero González Méndez

Coordinadores de Publicación