

Dinámica en sistemas de tuberías industriales, considerando las deformaciones por cortante

Dynamics in systems of industrial pipes, considering the deformations by shear

Arnulfo Luévanos Rojas

Palabras Clave: deformaciones por cortante, espectro de respuesta múltiple, análisis dinámico de sistemas de tuberías

Key Words: shear deformations, multiple response spectrum, dynamic analysis of piping systems

RESUMEN

En este documento se propone considerar las deformaciones por cortante, al método de espectro de respuesta múltiple, para análisis dinámico de sistemas de tuberías con movimientos diferentes en los apoyos, usando las masas consistentes o distribuidas. Esta metodología toma el espectro de respuesta correspondiente a cada uno de los apoyos, considerando las deformaciones por cortante y se hace una comparación con el método clásico, que es despreciar las deformaciones por cortante como normalmente se hace, en este último no son conservadores, como se puede notar en las tablas de resultados del problema considerado. Por lo tanto, la práctica usual despreciando las deformaciones por cortante no será una solución recomendable y se propone tomarlas en consideración, apegándose más a la realidad.

ABSTRACT

This paper proposes to consider the shear deformations, the method of multiple response spectrum, for dynamic analysis of piping systems with different movements at the supports, using the consistent masses or distributed. This methodology takes the response spectrum corresponding to each of the supports, considering the shear deformation and a comparison is made with the classical method, which is negligible shear deformations, as is usually done, in the latter are not conservative, as noted in the results tables of the problem considered. Therefore, the usual practice neglecting shear deformations will not be a recommended solution and proposes take them into consideration, as it is more attached to reality.

INTRODUCCIÓN

Este tipo de sistemas ha sido estudiado por diversos investigadores en el pasado usando básicamente dos métodos para estudiar la respuesta sísmica: análisis de

historia en el tiempo y análisis del espectro de respuesta de piso. El primer método, consiste en la obtención de la respuesta de la Estructura Principal (EP) sola, en los

puntos de contacto de la Estructura Secundaria (ES). Esta respuesta es usada como excitación en la ES en un análisis posterior e independiente, lo cual significa que la interacción entre la EP y la ES no es considerada, éste es el caso del trabajo pionero de Kassawara y Peck (1975). El segundo método consiste en conocer el espectro de respuesta en los puntos de conexión entre la EP y la ES usando para esto sólo la respuesta de la EP. Los primeros estudios entre los que se puede citar a Amin et al., 1971; Shaw, 1975; Vashi, 1975, entre otros, no consideraban tampoco la interacción entre los sistemas. A partir de un trabajo de Lee y Penzien (1980) quienes usaron un modelo de proceso estocástico estacionario de terremoto para estudiar la influencia de la correlación modal en la respuesta estructural, Der Kiureghian e Igusa (1983), estudian la influencia de la correlación entre los modos en la respuesta de sistemas EP+ES considerando además la interacción entre ambos. En este estudio, los autores muestran que dependiendo de las razones de masa y frecuencia hay muchas situaciones prácticas donde la interacción entre la EP y la ES puede ser altamente significativa en la respuesta estructural y, por lo tanto, debe ser incluido en el análisis. El concepto de incluir la interacción es adoptado también por Crandall y Mark, 1963; Amin et al., 1971; Pickel, 1972; Der Kiureghian et al., 1981. Asfura y Der Kiureghian (1986), usando vibraciones estocásticas estacionarias estudiaron el comportamiento de sistemas

EP-ES con configuraciones generalizadas de conexión entre la EP y la ES, determinando un espectro de piso cruzado para los puntos de apoyo del sistema considerando la interacción entre ambos. Estos espectros se usan para el diseño de la ES.

Otros autores como Suarez y Singh, 1987a; Suarez y Singh, 1987b; Falsone et al., 1991 y 1992, han desarrollado técnicas similares a través de análisis completos, modelando la EP junto con la ES.

Para estimar la respuesta en el tiempo de sistemas complejos de varios grados de libertad que incluyen sistemas EP+ES, Valladares (1992) desarrollo un método numérico de obtención de la matriz de correlación cruzada de estructuras sometidas a terremotos simulados como procesos estocásticos. En este estudio se usó un modelo de terremoto no estacionario en amplitud y frecuencia, desarrollado por Crempien y Aravena (1992).

En el diseño de instalaciones industriales y nucleares, el estudio de su comportamiento sísmico-dinámico constituye una etapa fundamental dentro de su diseño, puesto que existe la probabilidad de que se presenten excitaciones por efectos sísmicos durante la vida útil de estas plantas, y el daño causado por dichos efectos puede llegar a ser predominante entre las diversas sollicitaciones a considerar para su diseño. Ello obviamente será mandatorio en aquellas instalaciones que se localicen en zonas de mediana a alta sismicidad, como sucede en varias partes de nuestro planeta.

Se hace notar que esta técnica puede aplicarse a situaciones en donde las sollicitaciones dinámicas sean de naturaleza diferente a la sísmica, como puede ser el caso de excitaciones inducidas por equipo rotatorio o a sistemas de tuberías con excitación múltiple en sus apoyos.

Por lo que se refiere a las técnicas convencionales de análisis de respuesta

sísmica estructural, es práctica común considerar que el movimiento del suelo actúa simultáneamente en todos sus apoyos, sin considerar las deformaciones por cortante.

En este documento se propone usar masas consistentes o distribuidas y considerando las deformaciones por cortante, haciendo una comparación cuando se desprecia el efecto de la deformación por cortante.

METODOLOGÍA

1. Desarrollo teórico

Considérese el sistema “tubería-equipos-estructura” mostrado en la Figura 1, en el

cual se inducen excitaciones múltiples no uniformes en los soportes de la tubería.

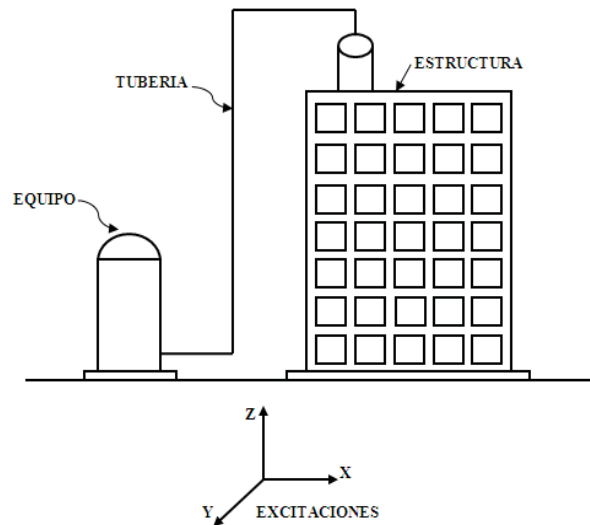


Figura 1. El sistema “tubería-suelo-estructura”

Las ecuaciones generales de movimiento para el sistema de tubería, antes de incluir

condiciones de frontera, pueden escribirse en forma matricial (Przemieniecki, 1985):

$$\begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{U}_1 \\ \ddot{U}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{U}_1 \\ \dot{U}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \end{bmatrix} \quad (1)$$

Donde:

U_1 = Es un vector de $n \times 1$ de desplazamientos generalizados absolutos

(incógnitas), correspondientes a los “n” grados de libertad no restringidos.

$U_2 =$ Es un vector de $m \times 1$ de desplazamientos generalizados absolutos (nulos o prescritos), correspondientes a los “m” grados de libertad de los puntos de soporte.

M_{ij} , C_{ij} , $K_{ij} =$ Submatrices de masas, amortiguamiento y rigidez, asociadas a los grados de libertad “n” y/o “m” respectivamente.

$P_1 =$ Vector de $n \times 1$ que representa las sollicitaciones dinámicas asociadas a los grados de libertad “n”.

$P_2 =$ Vector de $m \times 1$ que representa las reacciones (incógnitas) asociadas a los grados de libertad “m” de los soportes.

Considerando sistemas lineales, en donde existen condiciones de ortogonalidad para matrices de rigideces (K), Masas (M) y amortiguamiento (C); resulta conveniente diagonalizar el sistema de ecuaciones de movimiento transformado a un sistema de coordenadas normales modales. Para ello, al considerar el sistema bajo la condición de vibración libre sin amortiguamiento, la cual puede existir en la ausencia de cualquier excitación de los soportes (Goicolea, 2003):

$$M_{11}\ddot{U}_1^r + K_{11}U_1^r = 0 \quad (2)$$

Su solución está definida por:

$$U_1^r = \vec{\varnothing} e^{i\omega t} \quad (3)$$

Donde:

$\omega =$ frecuencia natural de vibración

$\vec{\varnothing} =$ vector modal asociado a (ω)

Los valores de (ω) y ($\vec{\varnothing}$) quedan determinados por la solución del siguiente problema de valores característicos:

$$(K_{11} - \omega^2 M_{11})\varnothing = 0 \quad (4)$$

La masa correspondiente al modo “n” M_n , se obtiene como sigue:

$$M_n = \vec{\varnothing}_n^t M_{11} \vec{\varnothing}_n \quad (5)$$

Los factores de participación $\Gamma_n^{(j)}$ se calculan de la siguiente manera:

$$\Gamma_n^{(j)} = [\vec{\varnothing}_n^t M_{11} K_{11}^{-1} K_{12} - \vec{\varnothing}_n^t M_{12}] \{V^{(j)}\} \quad (6)$$

Las máximas respuestas modales debidas a cada excitación de los soportes $(Y_n^{(j)})_{\max}$ se localizan como sigue:

$$(Y_n^{(j)})_{\max} = \left[\frac{\Gamma_n^{(j)}}{M_n} \right] \left[\frac{S_{an}^{(j)}}{\omega_n^2} \right] \quad (7)$$

Las coordenadas normales máximas del sistema para cada modo $(Y_n)_{\max}$ son:

$$(Y_n)_{\max} = \left\{ \sum_{j=1}^n (Y_n^{(j)})_{\max}^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \quad (8)$$

Los vectores correspondientes a las componentes del vector de desplazamientos relativos máximos para cada modo $\{U_{1n}^r\}_{\max}$ se dan de la siguiente forma:

$$\{U_{1n}^r\}_{\max} = \{\vec{\varnothing}_n\} (Y_n)_{\max} \quad (9)$$

El valor máximo del vector de desplazamientos relativos del sistema de tubería $\{U_1^r\}_{\max}$ se obtiene como sigue:

$$\{U_1^r\}_{\max} = \left\{ \sum_{j=1}^n (U_{1j}^r)_{\max}^2 \right\}^{1/2} \quad (10)$$

2. Aplicación

Como una ilustración de la aplicación de los métodos de análisis anteriormente considerados para estudiar el comportamiento de sistemas estructurales sujetos a excitación múltiple en sus apoyos o soportes durante efectos sísmicos; a continuación se presenta el análisis para un sistema de tubería típico, que interconecta a dos equipos a distintas elevaciones que inducen excitaciones distintas en los extremos de la tubería, según se observa en la Figura 2 y en la Figura 3 se muestra las excitaciones en cada uno de los apoyos, así como la envolvente de dichos movimientos en los

El valor de los elementos mecánicos equivalentes que actúan en los nodos libres P es:

$$P = K_{11} \{U_1^r\}_{\max} \quad (11)$$

Finalmente los elementos mecánicos que actúan sobre las barras F son:

$$F = K'_i U_i \quad (12)$$

soportes, en tanto que en la Tabla 1 se da la nomenclatura usada para dichas excitaciones del problema considerado.

Datos de la tubería:

$$d = 76.2 \text{ cm}$$

$$t = 0.635 \text{ cm}$$

$$I = 107637.4467 \text{ cm}^4$$

$$A = 150.9674 \text{ cm}^2$$

$$A_c = 0.53A = 0.53(150.9674) = 80.0127 \text{ cm}^2$$

$$E = 1759253.519 \text{ kg/cm}^2$$

$$W = 1.7874 \text{ kg/cm} = 178.74 \text{ kg/m}$$

$$m = 18.2264 \text{ kg-s}^2/\text{m}^2$$

$$\nu = 0.25$$

$$g = 9.80665 \text{ m/s}^2$$

Tabla 1. Dirección y nodo donde el espectro de excitación es aplicado

Espectro	Dirección	Nodo	Tipo
1	X	A
2	X	E	---
3	X	Envolvente	——

2% amortiguamiento

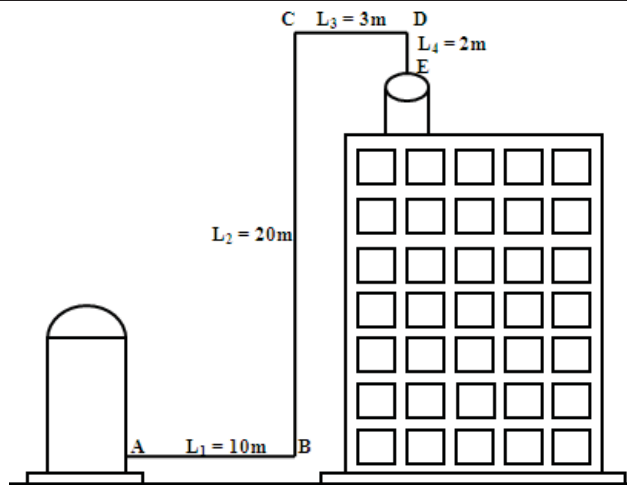


Figura 2. Sistema de tubería típico

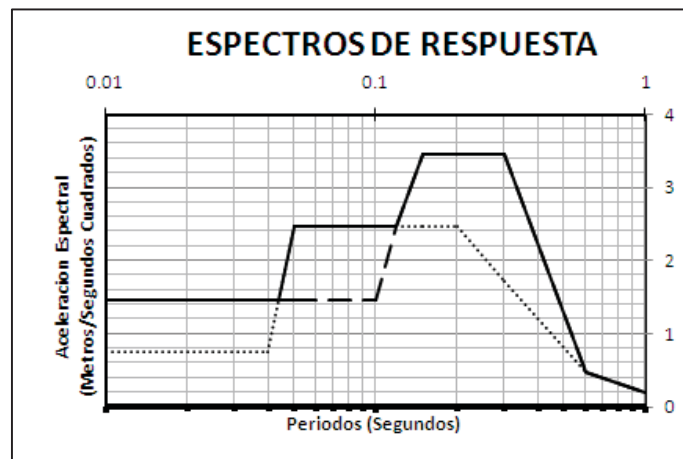


Figura 3. El espectro de respuesta

En la Figura 4 se muestra el sistema de | considerado para la obtención de las
 coordenadas globales del problema | matrices de masa y rigidez.

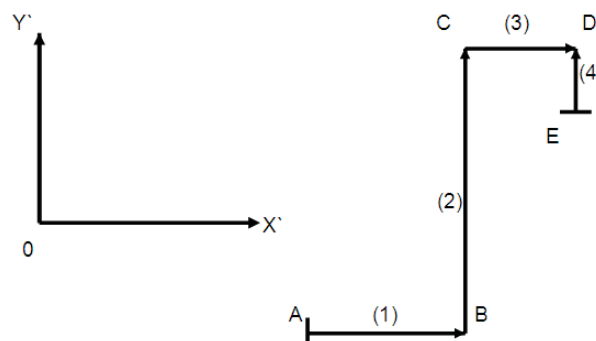


Figura 4. Modelo vectorial del sistema de tubería

Matriz de masas consistentes de un elemento (ver Appendix):

$$M_i = \frac{m}{420} L \begin{bmatrix} 140 & 0 & 0 & 70 & 0 & 0 \\ 0 & 156 & 22L & 0 & 54 & -13L \\ 0 & 22L & 4L^2 & 0 & 13L & -3L^2 \\ 70 & 0 & 0 & 140 & 0 & 0 \\ 0 & 54 & 13L & 0 & 156 & -22L \\ 0 & -13L & -3L^2 & 0 & -22L & 4L^2 \end{bmatrix}$$

Si: $L = 2m$; $L_1 = 5L$; $L_2 = 10L$; $L_3 = 1.5L$; $L_4 = L$. Para los distintos elementos de cada una de las barras en el sistema global se tiene:

$$M'_1 = \frac{mL}{420} \begin{bmatrix} 700 & 0 & 0 & 350 & 0 & 0 \\ 0 & 780 & 550L & 0 & 270 & -325L \\ 0 & 550L & 500L^2 & 0 & 325L & -375L^2 \\ 350 & 0 & 0 & 700 & 0 & 0 \\ 0 & 270 & 325L & 0 & 780 & -550L \\ 0 & -325L & -375L^2 & 0 & -550L & 500L^2 \end{bmatrix}$$

$$M'_2 = \frac{mL}{420} \begin{bmatrix} 1560 & 0 & -2200L & 540 & 0 & 1300L \\ 0 & 1400 & 0 & 0 & 700 & 0 \\ -2200L & 0 & 4000L^2 & -1300L & 0 & -3000L^2 \\ 540 & 0 & -1300L & 1560 & 0 & 2200L \\ 0 & 700 & 0 & 0 & 1400 & 0 \\ 1300L & 0 & -3000L^2 & 2200L & 0 & 4000L^2 \end{bmatrix}$$

$$M'_3 = \frac{mL}{420} \begin{bmatrix} 210 & 0 & 0 & 105 & 0 & 0 \\ 0 & 234 & 49.5L & 0 & 81 & -29.25L \\ 0 & 49.5L & 13.5L^2 & 0 & 29.25L & -10.125L^2 \\ 105 & 0 & 0 & 210 & 0 & 0 \\ 0 & 81 & 29.25L & 0 & 234 & -49.5L \\ 0 & -29.25L & -10.125L^2 & 0 & -49.5L & 13.5L^2 \end{bmatrix}$$

$$M'_4 = \frac{mL}{420} \begin{bmatrix} 156 & 0 & -22L & 54 & 0 & 13L \\ 0 & 140 & 0 & 0 & 70 & 0 \\ -22L & 0 & 4L^2 & -13L & 0 & -3L^2 \\ 54 & 0 & -13L & 156 & 0 & 22L \\ 0 & 70 & 0 & 0 & 140 & 0 \\ 13L & 0 & -3L^2 & 22L & 0 & 4L^2 \end{bmatrix}$$

La matriz de masa del sistema global resultante se muestra a continuación:

$$\bar{M} = \begin{bmatrix} M_{11}^{(1)} & M_{12}^{(1)} & 0 & 0 & 0 \\ M_{21}^{(1)} & M_{22}^{(1)} + M_{11}^{(2)} & M_{12}^{(2)} & 0 & 0 \\ 0 & M_{21}^{(2)} & M_{22}^{(2)} + M_{11}^{(3)} & M_{12}^{(3)} & 0 \\ 0 & 0 & M_{21}^{(3)} & M_{22}^{(3)} + M_{22}^{(4)} & M_{21}^{(4)} \\ 0 & 0 & 0 & M_{12}^{(4)} & M_{11}^{(4)} \end{bmatrix}$$

Matriz de rigidez para un elemento en el plano despreciando las deformaciones por cortante:

$$K_i = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & 0 & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \\ -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix}$$

Si: $L = 2 \text{ m}$; $L_1 = 5L$; $L_2 = 10L$; $L_3 = 1.5L$; $L_4 =$ una de las barras en el sistema global se tiene: L . Para los distintos elementos de cada

$$K'_1 = \frac{2EI}{10L} \begin{bmatrix} \frac{A}{I} & 0 & 0 & -\frac{A}{I} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12}{25L^2} & \frac{6}{5L} & 0 & -\frac{12}{25L^2} & \frac{6}{5L} \\ 0 & \frac{6}{5L} & 4 & 0 & -\frac{6}{5L} & 2 \\ -\frac{A}{I} & 0 & 0 & \frac{A}{I} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12}{25L^2} & -\frac{6}{5L} & 0 & \frac{12}{25L^2} & -\frac{6}{5L} \\ 0 & \frac{6}{5L} & 2 & 0 & -\frac{6}{5L} & 4 \end{bmatrix}$$

$$K'_2 = \frac{2EI}{10L} \begin{bmatrix} \frac{6}{100L^2} & 0 & -\frac{3}{10L} & -\frac{6}{100L^2} & 0 & -\frac{3}{10L} \\ 0 & \frac{A}{2I} & 0 & 0 & -\frac{A}{2I} & 0 \\ -\frac{3}{10L} & 0 & 2 & \frac{3}{10L} & 0 & 1 \\ \frac{6}{100L^2} & 0 & \frac{3}{10L} & \frac{6}{100L^2} & 0 & \frac{3}{10L} \\ 0 & -\frac{A}{2I} & 0 & 0 & \frac{A}{2I} & 0 \\ -\frac{3}{10L} & 0 & 1 & \frac{3}{10L} & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$K'_3 = \frac{2EI}{10L} \begin{bmatrix} \frac{10A}{3I} & 0 & 0 & -\frac{10A}{3I} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{40}{2.25L^2} & \frac{20}{1.5L} & 0 & -\frac{40}{2.25L^2} & \frac{20}{1.5L} \\ 0 & \frac{20}{1.5L} & \frac{40}{3} & 0 & -\frac{20}{1.5L} & \frac{20}{3} \\ -\frac{10A}{3I} & 0 & 0 & \frac{10A}{3I} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{40}{2.25L^2} & -\frac{20}{1.5L} & 0 & \frac{40}{2.25L^2} & -\frac{20}{1.5L} \\ 0 & \frac{20}{1.5L} & \frac{20}{3} & 0 & -\frac{20}{1.5L} & \frac{40}{3} \end{bmatrix}$$

$$K'_4 = \frac{2EI}{10L} \begin{bmatrix} \frac{60}{L^2} & 0 & -\frac{30}{L} & -\frac{60}{L^2} & 0 & -\frac{30}{L} \\ 0 & \frac{5A}{I} & 0 & 0 & -\frac{5A}{I} & 0 \\ -\frac{30}{L} & 0 & 20 & \frac{30}{L} & 0 & 10 \\ -\frac{60}{L^2} & 0 & \frac{30}{L} & \frac{60}{L^2} & 0 & \frac{30}{L} \\ 0 & -\frac{5A}{I} & 0 & 0 & \frac{5A}{I} & 0 \\ -\frac{30}{L} & 0 & 10 & \frac{30}{L} & 0 & 20 \end{bmatrix}$$

Matriz de rigidez para un elemento en el plano considerando las deformaciones por cortante:

$$K_i = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{L^3(1+\emptyset)} & \frac{6EI}{L^2(1+\emptyset)} & 0 & -\frac{12EI}{L^3(1+\emptyset)} & \frac{6EI}{L^2(1+\emptyset)} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2(1+\emptyset)} & \frac{(4+\emptyset)EI}{(1+\emptyset)L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2(1+\emptyset)} & \frac{(2-\emptyset)EI}{(1+\emptyset)L} \\ -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{L^3(1+\emptyset)} & -\frac{6EI}{L^2(1+\emptyset)} & 0 & \frac{12EI}{L^3(1+\emptyset)} & -\frac{6EI}{L^2(1+\emptyset)} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2(1+\emptyset)} & \frac{(2-\emptyset)EI}{(1+\emptyset)L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2(1+\emptyset)} & \frac{(4+\emptyset)EI}{(1+\emptyset)L} \end{bmatrix}$$

$$\emptyset = \frac{12EI}{GA_c L^2}$$

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

Donde: \emptyset = factor de forma.
 G = modelo al cortante.

Para el problema considerado es:

$$\emptyset_1 = 0.04035761393$$

$$\emptyset_2 = 0.01008940348$$

$$\emptyset_3 = 0.4484179326$$

$$\emptyset_4 = 1.008940348$$

Si: $L = 2m$; $L_1 = 5L$; $L_2 = 10L$; $L_3 = 1.5L$; $L_4 = L$. Para los distintos elementos de cada una de las barras en el sistema global se tiene:

$$K'_1 = \frac{2EI}{10L} \begin{bmatrix} \frac{A}{I} & 0 & 0 & -\frac{A}{I} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12}{25L^2(1+\emptyset_1)} & \frac{6}{5L(1+\emptyset_1)} & 0 & -\frac{12}{25L^2(1+\emptyset_1)} & \frac{6}{5L(1+\emptyset_1)} \\ 0 & \frac{6}{5L(1+\emptyset_1)} & \frac{(4+\emptyset_1)}{(1+\emptyset_1)} & 0 & -\frac{6}{5L(1+\emptyset_1)} & \frac{(2-\emptyset_1)}{(1+\emptyset_1)} \\ -\frac{A}{I} & 0 & 0 & \frac{A}{I} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12}{25L^2(1+\emptyset_1)} & -\frac{6}{5L(1+\emptyset_1)} & 0 & \frac{12}{25L^2(1+\emptyset_1)} & -\frac{6}{5L(1+\emptyset_1)} \\ 0 & \frac{6}{5L(1+\emptyset_1)} & \frac{(2-\emptyset_1)}{(1+\emptyset_1)} & 0 & -\frac{6}{5L(1+\emptyset_1)} & \frac{(4+\emptyset_1)}{(1+\emptyset_1)} \end{bmatrix}$$

$$K'_2 = \frac{2EI}{10L} \begin{bmatrix} \frac{6}{100L^2(1+\varnothing_2)} & 0 & -\frac{3}{10L(1+\varnothing_2)} & -\frac{6}{100L^2(1+\varnothing_2)} & 0 & -\frac{3}{10L(1+\varnothing_2)} \\ 0 & \frac{A}{2I} & 0 & 0 & -\frac{A}{2I} & 0 \\ -\frac{3}{10L(1+\varnothing_2)} & 0 & \frac{1}{2} \left(\frac{4+\varnothing_2}{1+\varnothing_2} \right) & \frac{3}{10L(1+\varnothing_2)} & 0 & \frac{1}{2} \left(\frac{2-\varnothing_2}{1+\varnothing_2} \right) \\ \frac{6}{100L^2(1+\varnothing_2)} & 0 & \frac{3}{10L(1+\varnothing_2)} & \frac{6}{100L^2(1+\varnothing_2)} & 0 & \frac{3}{10L(1+\varnothing_2)} \\ 0 & -\frac{A}{2I} & 0 & 0 & \frac{A}{2I} & 0 \\ -\frac{3}{10L(1+\varnothing_2)} & 0 & \frac{1}{2} \left(\frac{2-\varnothing_2}{1+\varnothing_2} \right) & \frac{3}{10L(1+\varnothing_2)} & 0 & \frac{1}{2} \left(\frac{4+\varnothing_2}{1+\varnothing_2} \right) \end{bmatrix}$$

$$K'_3 = \frac{2EI}{10L} \begin{bmatrix} \frac{10A}{3I} & 0 & 0 & -\frac{10A}{3I} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{40}{2.25L^2(1+\varnothing_3)} & \frac{20}{1.5L(1+\varnothing_3)} & 0 & -\frac{40}{2.25L^2(1+\varnothing_3)} & \frac{20}{1.5L(1+\varnothing_3)} \\ 0 & \frac{20}{1.5L(1+\varnothing_3)} & \frac{10}{3} \left(\frac{4+\varnothing_3}{1+\varnothing_3} \right) & 0 & -\frac{20}{1.5L(1+\varnothing_3)} & \frac{10}{3} \left(\frac{2-\varnothing_3}{1+\varnothing_3} \right) \\ -\frac{10A}{3I} & 0 & 0 & \frac{10A}{3I} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{40}{2.25L^2(1+\varnothing_3)} & -\frac{20}{1.5L(1+\varnothing_3)} & 0 & \frac{40}{2.25L^2(1+\varnothing_3)} & -\frac{20}{1.5L(1+\varnothing_3)} \\ 0 & \frac{20}{1.5L(1+\varnothing_3)} & \frac{10}{3} \left(\frac{2-\varnothing_3}{1+\varnothing_3} \right) & 0 & -\frac{20}{1.5L(1+\varnothing_3)} & \frac{10}{3} \left(\frac{4+\varnothing_3}{1+\varnothing_3} \right) \end{bmatrix}$$

$$K'_4 = \frac{2EI}{10L} \begin{bmatrix} \frac{60}{L^2(1+\varnothing_4)} & 0 & -\frac{30}{L(1+\varnothing_4)} & -\frac{60}{L^2(1+\varnothing_4)} & 0 & -\frac{30}{L(1+\varnothing_4)} \\ 0 & \frac{5A}{I} & 0 & 0 & -\frac{5A}{I} & 0 \\ -\frac{30}{L(1+\varnothing_4)} & 0 & 5 \left(\frac{4+\varnothing_4}{1+\varnothing_4} \right) & \frac{30}{L(1+\varnothing_4)} & 0 & 5 \left(\frac{2-\varnothing_4}{1+\varnothing_4} \right) \\ \frac{60}{L^2(1+\varnothing_4)} & 0 & \frac{30}{L(1+\varnothing_4)} & \frac{60}{L^2(1+\varnothing_4)} & 0 & \frac{30}{L(1+\varnothing_4)} \\ 0 & -\frac{5A}{I} & 0 & 0 & \frac{5A}{I} & 0 \\ -\frac{30}{L(1+\varnothing_4)} & 0 & 5 \left(\frac{2-\varnothing_4}{1+\varnothing_4} \right) & \frac{30}{L(1+\varnothing_4)} & 0 & 5 \left(\frac{4+\varnothing_4}{1+\varnothing_4} \right) \end{bmatrix}$$

La matriz de rigidez del sistema global resultante para ambos modelos se muestra a continuación:

$$K = \begin{bmatrix} K_{11}^{(1)} & K_{12}^{(1)} & 0 & 0 & 0 \\ K_{21}^{(1)} & K_{22}^{(1)} + K_{11}^{(2)} & K_{12}^{(2)} & 0 & 0 \\ 0 & K_{21}^{(2)} & K_{22}^{(2)} + K_{11}^{(3)} & K_{12}^{(3)} & 0 \\ 0 & 0 & K_{21}^{(3)} & K_{22}^{(3)} + K_{22}^{(4)} & K_{21}^{(4)} \\ 0 & 0 & 0 & K_{12}^{(4)} & K_{11}^{(4)} \end{bmatrix}$$

2.1. Método de espectro de respuesta múltiple despreciando las deformaciones por cortante

Calculando las matrices de masa y rigidez de cada una de las barras. Posteriormente haciendo el cambio del sistema local al sistema general y enseguida se realiza el acoplamiento de las matrices de masa y rigidez. Luego esta matriz tendremos que arreglarse para separar grados de libertad de la estructura (M_{11} y K_{11}) y grados de libertad de los apoyos o soportes (M_{22} y K_{22}). Para ello se aplica una "transformación similar" a través de matrices de permutación.

Despreciando el efecto del amortiguamiento bajo la condición de vibración libre se tiene la ecuación (2). Siendo U_{r1} un vector de (9x1) de desplazamientos relativos correspondientes a los nueve grados de libertad del sistema de tubería. Posteriormente, resolviendo el determinante que resulta de la ecuación (4), da los valores y vectores característicos.

Usando el Software MATLAB para resolver el determinante, se obtiene el polinomio característico y, luego, encontrando las raíces del polinomio característico, se obtienen los resultados que se muestran en la Tabla 2.

Tabla 2. Valores característicos

Modo	Frecuencia circular (rad/s)	Frecuencia (hz)	Período (s)	ω_n^2 (rad/s) ²
1	38.5867	6.1413	0.1628	1489
2	83.8672	13.3479	0.0749	7034
3	184.4477	29.3558	0.0341	34021
4	453.1971	72.1286	0.0139	205388
5	538.3848	85.6866	0.0117	289858
6	587.1852	93.4534	0.0107	344786
7	2023.3322	322.0233	0.0031	4093873
8	2661.7476	423.6303	0.0024	7084900
9	4411.0047	702.0332	0.0014	19456962

En la Tabla 3 se muestran los valores obtenidos del espectro de respuesta de la Figura 3, para cada apoyo en el n-ésimo modo.
Siendo:

S_{an}^A = Aceleración espectral para el apoyo A en el n-ésimo modo.

S_{an}^E = Aceleración espectral para el apoyo E en el n-ésimo modo.

S_{an}^T = Aceleración espectral de la envolvente en el n-ésimo modo.

Tabla 3. Aceleraciones espectrales

Modo	Periodo (s)	S_{an}^A (m/s ²)	S_{an}^E (m/s ²)	S_{an}^T (m/s ²)
1	0.1628	2.46	3.45	3.45
2	0.0749	2.46	1.47	2.46
3	0.0341	0.76	1.47	1.47
4	0.0139	0.76	1.47	1.47
5	0.0117	0.76	1.47	1.47
6	0.0107	0.76	1.47	1.47
7	0.0031	0.76	1.47	1.47
8	0.0024	0.76	1.47	1.47
9	0.0014	0.76	1.47	1.47

Los vectores $V^{(i)}$ para las excitaciones en las boquillas (A) y (E) son:

$$V^A = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$V^E = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Empleando la ecuación (5) se encuentra la masa correspondiente al modo "n" M_n , de la ecuación (6) se obtiene los factores de participación $\Gamma_n^{(i)}$ tanto para el apoyo A como para el apoyo E, las máximas respuestas modales debidas a cada

excitación de los soportes $(Y_n^{(i)})_{\max}$ se localiza por medio de la ecuación (7), las coordenadas normales máximas del sistema para cada modo $(Y_n)_{\max}$ es obtenida de acuerdo con la ecuación (8) y se presentan en la Tabla 4.

Tabla 4. Factores de participación $\Gamma_n^{(i)}$ tanto para el apoyo A como para el apoyo E, masa correspondiente al modo "n" M_n , las máximas respuestas modales debidas a cada excitación de los soportes $(Y_n^{(i)})_{\max}$ y las coordenadas normales máximas del sistema para cada modo $(Y_n)_{\max}$

Modo	Γ_n^A (kg-s ² /cm ²)	Γ_n^E (kg-s ² /cm ²)	M_n (kg-s ² /cm ²)	Y_n^A (cm)	Y_n^E (cm)	$(Y_n)_{\max}$ (cm)
1	-0.5435	-0.3874	1.5909	-0.056523	-0.056490	0.079911
2	-0.5574	-0.5859	1.9737	-0.009893	-0.006218	0.011684
3	+0.3143	-0.7413	1.7251	+0.000409	-0.001862	0.001905
4	-0.2433	-0.1628	0.2791	-0.000323	-0.000419	0.000528
5	-0.2710	+0.1615	0.2753	-0.000513	+0.000297	0.000592
6	+0.2318	+0.0795	0.3270	+0.000157	+0.000104	0.000188
7	-0.0011	+0.0121	0.1635	-0.000000	+0.000003	0.000003
8	+0.0024	+0.0261	0.1046	+0.000000	+0.000005	0.000005
9	+0.0007	-0.0373	0.1232	+0.000000	-0.000003	0.000003

Los vectores correspondientes a las componentes del vector de desplazamientos relativos máximos para cada modo $\{U_{r1n}\}_{\max}$ se encuentran por medio de la ecuación (9) y, finalmente, el

valor máximo del vector de desplazamientos relativos del sistema de tubería $\{U_{r1}\}_{\max}$ se obtiene por la ecuación (10). Estos valores se muestran en la Tabla 5.

Tabla 5. Vector de deformaciones

Deformaciones relativas	Nodo	Concepto	Unidad	Cantidad
U_{11}^r	B	Desplazamiento "X"	cm	0.00086
U_{12}^r		Desplazamiento "Y"	cm	0.05677
U_{13}^r		Rotación	Rad	0.00014
U_{14}^r	C	Desplazamiento "X"	cm	0.01158
U_{15}^r		Desplazamiento "Y"	cm	0.05507
U_{16}^r		Rotación	Rad	0.00022
U_{17}^r	D	Desplazamiento "X"	cm	0.01166
U_{18}^r		Desplazamiento "Y"	cm	0.00036
U_{19}^r		Rotación	Rad	0.00012

Una vez obtenidas las deformaciones, se emplea la ecuación (11) y se encuentran los valores de las fuerzas en "X" e "Y" y momentos flexionantes, que se aplican en los nodos libres, estos efectos son equivalentes a que si actuara un movimiento en los extremos del sistema

de tubería, los resultados se presentan en la Tabla 6. Ya que se determinaron los elementos mecánicos en los nodos, se procede a encontrar las fuerzas en las barras por medio de la ecuación (12), tal como observan en la Tabla 7.

Tabla 6. Elementos mecánicos que actúan en los nodos equivalentes.

Nodo	Unidad	Concepto	Método de espectro de respuesta múltiple despreciando las deformaciones por cortante
B	kg	Fuerza "X"	+124.0637
	kg	Fuerza "Y"	+195.9252
	kg-m	Momento	+1392.6865
C	kg	Fuerza "X"	+37.8400
	kg	Fuerza "Y"	+8670.7708
	kg-m	Momento	+15105.0902
D	kg	Fuerza "X"	+6787.5038
	kg	Fuerza "Y"	-8424.5424
	kg-m	Momento	+20570.1502

2.2. Método de espectro de respuesta múltiple considerando las deformaciones por cortante

Calculando las matrices de masa y rigidez de cada una de las barras. Posteriormente haciendo el cambio del sistema local al sistema general y enseguida se realiza el acoplamiento de las matrices de masa y rigidez. Luego esta matriz tendremos que arreglarse para separar grados de libertad

de la estructura (M_{11} y K_{11}) y grados de libertad de los apoyos o soportes (M_{22} y K_{22}). Para ello se aplica una "transformación similar" a través de matrices de permutación.

Despreciando el efecto del amortiguamiento bajo la condición de vibración libre se tiene la ecuación (2). Siendo U_{r1} un vector de (9x1) de desplazamientos relativos

correspondientes a los nueve grados de libertad del sistema de tubería. Posteriormente resolviendo el determinante que resulta de la ecuación (4), da los valores y vectores característicos.

Usando el Software: MATLAB para resolver el determinante, se obtiene el polinomio característico y, luego, encontrando las raíces del polinomio característico, se obtienen los siguientes resultados que se muestran en la Tabla 8.

Tabla 7. Elementos mecánicos que actúan sobre las barras

Barra	Nodo	Unidad	Concepto	Método de espectro de respuesta múltiple despreciando las deformaciones por cortante
1	A	kg	Fuerza "X"	-229.3635
		kg	Fuerza "Y"	+30.0653
		kg-m	Momento	-114.7796
	B	kg	Fuerza "X"	+229.3635
		kg	Fuerza "Y"	-30.0653
		kg-m	Momento	+415.4327
2	B	kg	Fuerza "X"	-105.2998
		kg	Fuerza "Y"	+225.9905
		kg-m	Momento	+977.2537
	C	kg	Fuerza "X"	+105.2998
		kg	Fuerza "Y"	-225.9905
		kg-m	Momento	+1128.7430
3	C	kg	Fuerza "X"	-67.4599
		kg	Fuerza "Y"	+8896.7614
		kg-m	Momento	+13976.3473
	D	kg	Fuerza "X"	+67.4599
		kg	Fuerza "Y"	-8896.7614
		kg-m	Momento	+12713.9369
4	D	kg	Fuerza "X"	+6720.0440
		kg	Fuerza "Y"	+472.2190
		kg-m	Momento	+7856.2133
	E	kg	Fuerza "X"	-6720.0440
		kg	Fuerza "Y"	-472.2190
		kg-m	Momento	+5583.8747

Tabla 8. Valores característicos

Modo	Frecuencia Circular (rad/s)	Frecuencia (hz)	Período (s)	ω_n^2 (rad/s) ²
1	38.1678	6.0746	0.1646	1457
2	80.9134	12.8778	0.0777	6547
3	174.4133	27.7587	0.0360	30420
4	391.2515	62.2696	0.0161	153078
5	498.3707	79.3182	0.0126	248373
6	580.7751	92.4332	0.0108	337300
7	1930.3692	307.2278	0.0033	3726325
8	2580.0766	410.6319	0.0024	6656795
9	3884.1340	618.1791	0.0016	15086497

En la Tabla 9 se muestran los valores obtenidos del espectro de respuesta de la Figura 3, para cada apoyo en el n-ésimo modo.

Los vectores $V^{(i)}$ para las excitaciones en las boquillas (A) y (E) son:

$$V^A = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{Empleando} \quad V^E = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

ecuación (5) la se encuentra la masa correspondiente al modo "n" M_n , de la ecuación (6) se obtiene los factores de participación $\Gamma_n^{(i)}$ tanto para el apoyo A como para el apoyo E, las máximas respuestas modales debidas a

cada excitación de los soportes $(Y_n^{(i)})_{\max}$ se localiza por medio de la ecuación (7), las coordenadas normales máximas del sistema para cada modo $(Y_n)_{\max}$ es obtenida de acuerdo con la ecuación (8) y se presentan en la Tabla 10. Los vectores correspondientes a las componentes del vector de desplazamientos relativos máximos para cada modo $\{U_{r1n}\}_{\max}$ se encuentra por medio de la ecuación (9) y finalmente el valor máximo del vector de desplazamientos relativos del sistema de tubería $\{U_{r1}\}_{\max}$ se obtiene por la ecuación (10). Estos valores se muestran en la Tabla 11.

Tabla 9. Aceleraciones espectrales

Modo	Periodo (s)	S_{an}^A (m/s ²)	S_{an}^E (m/s ²)	S_{an}^T (m/s ²)
1	0.1646	2.46	3.45	3.45
2	0.0777	2.46	1.47	2.46
3	0.0360	0.76	1.47	1.47
4	0.0161	0.76	1.47	1.47
5	0.0126	0.76	1.47	1.47
6	0.0108	0.76	1.47	1.47
7	0.0033	0.76	1.47	1.47
8	0.0024	0.76	1.47	1.47
9	0.0016	0.76	1.47	1.47

Tabla 10. Factores de participación $\Gamma_n^{(i)}$ tanto para el apoyo A como para el apoyo E, masa correspondiente al modo "n" M_n , las máximas respuestas modales debidas a cada excitación de los soportes $(Y_n^{(i)})_{\max}$ y las coordenadas normales máximas del sistema para cada modo $(Y_n)_{\max}$

Modo	Γ_n^A (kg-s ² /cm ²)	Γ_n^E (kg-s ² /cm ²)	M_n (kg-s ² /cm ²)	Y_n^A (cm)	Y_n^E (cm)	$(Y_n)_{\max}$ (cm)
1	-0.5283	-0.8320	1.5536	-0.056523	-0.126967	0.139380
2	+0.5573	+0.3876	1.9722	+0.009893	+0.004422	0.011519
3	-0.2767	+0.5566	1.3196	-0.000526	+0.002042	0.002108
4	+0.1072	+0.1676	0.2168	+0.000246	+0.000884	0.000917
5	+0.3827	-0.0708	0.4257	+0.000277	-0.000099	0.000295
6	-0.2838	-0.0176	0.3225	-0.000198	-0.000023	0.000201
7	+0.0011	-0.0186	0.2016	+0.000000	-0.000003	0.000003
8	-0.0025	-0.0252	0.1135	-0.000000	-0.000005	0.000005
9	+0.0009	-0.0257	0.0997	+0.000000	-0.000003	0.000003

Tabla 11. Vector de deformaciones

Deformaciones relativas	Nodo	Concepto	Unidad	Cantidad
$U^r_{1,1}$	B	Desplazamiento "X"	cm	0.00114
$U^r_{1,2}$		Desplazamiento "Y"	cm	0.09855
$U^r_{1,3}$		Rotación	Rad	0.00024
$U^r_{1,4}$	C	Desplazamiento "X"	cm	0.01829
$U^r_{1,5}$		Desplazamiento "Y"	cm	0.09576
$U^r_{1,6}$		Rotación	Rad	0.00036
$U^r_{1,7}$	D	Desplazamiento "X"	cm	0.01847
$U^r_{1,8}$		Desplazamiento "Y"	cm	0.00051
$U^r_{1,9}$		Rotación	Rad	0.00019

Una vez obtenidas las deformaciones, se emplea la ecuación (10) y se encuentran los valores de las fuerzas en "X" e "Y" y momentos flexionantes, que se aplican en los nodos libres, estos efectos son equivalentes a que si actuara un movimiento en los extremos del sistema

de tubería, los resultados se presentan en la Tabla 12.

Ya que se determinaron los elementos mecánicos en los nodos, se procede a encontrar las fuerzas en las barras por medio de la ecuación (11), tal como observan en la Tabla 13.

Tabla 12. Elementos mecánicos que actúan en los nodos equivalentes

Nodo	Unidad	Concepto	Método de espectro de respuesta múltiple considerando las deformaciones por cortante
B	kg	Fuerza "X"	+130.0250
	kg	Fuerza "Y"	+324.1827
	kg-m	Momento	+2310.5268
C	kg	Fuerza "X"	+16.1380
	kg	Fuerza "Y"	+9957.1797
	kg-m	Momento	+18414.4226
D	kg	Fuerza "X"	+5454.6634
	kg	Fuerza "Y"	-9653.6103
	kg-m	Momento	+21515.4562

RESULTADOS Y DISCUSIÓN

En las tablas 14, 15 y 16 se muestran las diferencias de los dos modelos.

En la tabla 14 se observa, en general todas las deformaciones son menores cuando se desprecian las deformaciones por cortante y son bastante considerables, ya que va desde un 58.33% hasta el 75.44%.

En la Tabla 15 se muestra, que en todos los elementos mecánicos en los nodos libres son menores cuando se desprecian las deformaciones por cortante, con excepción en las fuerzas en "X", en los nodos C y D que ocurre lo contrario.

Finalmente, se analiza la Tabla 16 que proporciona los resultados de las fuerzas y

momentos que actúan en las barras, en todas las barras son menores en el Modelo 1 (Despreciando las deformaciones por cortante), excepto en la barra DE, en cuanto a F_x , (Fuerza cortante) y M (Momento flexionante), que es menor en el Modelo 2 (Considerando las deformaciones por cortante).

Tabla 13. Elementos mecánicos que actúan sobre las barras

Barra	Nodo	Unidad	Concepto	Método de espectro de respuesta múltiple Considerando las deformaciones por cortante
1	A	kg	Fuerza "X"	-303.5694
		kg	Fuerza "Y"	+46.8465
		kg-m	Momento	-220.2352
	B	kg	Fuerza "X"	+303.5694
		kg	Fuerza "Y"	-46.8465
		kg-m	Momento	+688.7003
2	B	kg	Fuerza "X"	-173.5443
		kg	Fuerza "Y"	+371.0292
		kg-m	Momento	+1621.8265
	C	kg	Fuerza "X"	+173.5443
		kg	Fuerza "Y"	-371.0292
		kg-m	Momento	+1849.0604
3	C	kg	Fuerza "X"	-157.4063
		kg	Fuerza "Y"	+10328.2089
		kg-m	Momento	+16565.3622
	D	kg	Fuerza "X"	+157.4063
		kg	Fuerza "Y"	-10328.2089
		kg-m	Momento	+14419.2645
4	D	kg	Fuerza "X"	+5297.2570
		kg	Fuerza "Y"	+674.5986
		kg-m	Momento	+7096.1918
	E	kg	Fuerza "X"	-5297.2570
		kg	Fuerza "Y"	-674.5986
		kg-m	Momento	+3498.3222

Tabla 14. Comparación de resultados en cuanto a deformaciones

Deformación	Nodo	Unidad	Concepto	Método de espectro de respuesta múltiple		$\frac{MermDdc}{MermCdc}$
				Despreciando las deformaciones por cortante	Considerando las deformaciones por cortante	
U_{i1}^f	B	cm	Desplazamiento "X"	0.00086	0.00114	0.7544
U_{i2}^f		cm	Desplazamiento "Y"	0.05677	0.09855	0.5761
U_{i3}^f		rad	Rotación	0.00014	0.00024	0.5833
U_{i4}^f	C	cm	Desplazamiento "X"	0.01158	0.01829	0.6331
U_{i5}^f		cm	Desplazamiento "Y"	0.05507	0.09576	0.5751
U_{i6}^f		rad	Rotación	0.00022	0.00036	0.6111
U_{i7}^f	D	cm	Desplazamiento "X"	0.01166	0.01847	0.6313
U_{i8}^f		cm	Desplazamiento "Y"	0.00036	0.00051	0.7059
U_{i9}^f		rad	Rotación	0.00012	0.00019	0.6316

Tabla. 15. Comparación de resultados en cuanto a los elementos mecánicos que actúan en los nodos equivalentes, debido a una excitación en los extremos

Nodo	Unidad	Concepto	Método de espectro de respuesta múltiple		$\frac{\text{MermDdc}}{\text{MermCdc}}$
			Despreciando las deformaciones por cortante	Considerando las deformaciones por cortante	
B	kg	Fuerza "X"	+124.0637	+130.0250	0.9542
	kg	Fuerza "Y"	+195.9252	+324.1827	0.6044
	kg-m	Momento	+1392.6865	+2310.5268	0.6028
C	kg	Fuerza "X"	+37.8400	+16.1380	2.3448
	kg	Fuerza "Y"	+8670.7708	+9957.1797	0.8708
	kg-m	Momento	+15105.0902	+18414.4226	0.8203
D	kg	Fuerza "X"	+6787.5038	+5454.6634	1.2443
	kg	Fuerza "Y"	-8424.5424	-9653.6103	0.8727
	kg-m	Momento	+20570.1502	+21515.4562	0.9561

Tabla. 16. Comparación de resultados en cuanto a los elementos mecánicos que actúan sobre las barras

Barra	Nodo	Unidad	Concepto	Método de espectro de respuesta múltiple		$\frac{\text{MermDdc}}{\text{MermCdc}}$
				Despreciando las deformaciones por cortante	Considerando las deformaciones por cortante	
1	A	kg	Fuerza "X"	-229.3635	-303.5694	0.7556
		kg	Fuerza "Y"	+30.0653	+46.8465	0.6418
		kg-m	Momento	-114.7796	-220.2352	0.5212
	B	kg	Fuerza "X"	+229.3635	+303.5694	0.7556
		kg	Fuerza "Y"	-30.0653	-46.8465	0.6418
		kg-m	Momento	+415.4327	+688.7003	0.6032
2	B	kg	Fuerza "X"	-105.2998	-173.5443	0.6068
		kg	Fuerza "Y"	+225.9905	+371.0292	0.6091
		kg-m	Momento	+977.2537	+1621.8265	0.6026
	C	kg	Fuerza "X"	+105.2998	+173.5443	0.6068
		kg	Fuerza "Y"	-225.9905	-371.0292	0.6091
		kg-m	Momento	+1128.7430	+1849.0604	0.6104
3	C	kg	Fuerza "X"	-67.4599	-157.4063	0.4286
		kg	Fuerza "Y"	+8896.7614	+10328.2089	0.8614
		kg-m	Momento	+13976.3473	+16565.3622	0.8437
	D	kg	Fuerza "X"	+67.4599	+157.4063	0.4286
		kg	Fuerza "Y"	-8896.7614	-10328.2089	0.8614
		kg-m	Momento	+12713.9369	+14419.2645	0.8817
4	D	kg	Fuerza "X"	+6720.0440	+5297.2570	1.2686
		kg	Fuerza "Y"	+472.2190	+674.5986	0.7000
		kg-m	Momento	+7856.2133	+7096.1918	1.1071
	E	kg	Fuerza "X"	-6720.0440	-5297.2570	1.2686
		kg	Fuerza "Y"	-472.2190	-674.5986	0.7000
		kg-m	Momento	+5583.8747	+3498.3222	1.5962

CONCLUSIONES

De acuerdo con lo analizado anteriormente se observa que la diferencia, entre el método de espectro de respuesta múltiple del Modelo 1 (Despreciando las deformaciones por cortante) y el método de espectro de respuesta múltiple del Modelo 2 (Considerando las deformaciones por cortante) es bastante considerable en cuanto a las deformaciones en todos los nodos, siendo el Modelo 1 de menor magnitud, según se observa en la Tabla 14, esta situación es lógica ya que cuando se consideran las deformaciones por cortante las secciones transversales son menores y, por lo tanto, las rigideces también disminuyen. Sin embargo, en cuanto a los elementos mecánicos que actúan en los nodos equivalentes, debido a una excitación en los extremos se observa que el Modelo 1 que es el clásico, al compararlo con el Modelo 2, en este último no son conservadores en los nodos C y D en que respecta a las fuerzas en "X", como se puede notar en la Tabla 15 de resultados del problema considerado. Finalmente al observar los resultados de la Tabla 16, que normalmente rigen el diseño del sistema de tuberías, en la mayoría de los puntos no están del lado de la seguridad en el Modelo 1.

Por lo tanto, la práctica usual de considerar el método de espectro de respuesta múltiple del Modelo 1 (Despreciando las deformaciones por cortante), no será una solución

recomendable. Por lo que tomando en cuenta la aproximación numérica, el método de espectro de respuesta múltiple del Modelo 2 (Considerando las deformaciones por cortante), resulta ser el método más adecuado para el análisis sísmico-dinámico de sistemas de tuberías sujetos a excitación distinta entre sus apoyos.

Ahora, respecto a la formulación considerando masa consistente o masa discreta, se observa que en el segundo caso estamos despreciando el efecto de la masa en las fuerzas de excitación, lo cual definitivamente se reflejará en la respuesta del sistema y no del lado conservador. Por otra parte, al realizar el análisis de frecuencias, se demuestra que considerar masas discretas implica de antemano despreciar ciertas formas modales (modos simétricos y/o antisimétricos) del sistema, que en el caso de excitaciones distintas en los apoyos estarán presentes y deben considerarse, puesto que en algunos casos corresponden a frecuencias relativamente bajas.

En lo que respecta al estado del arte en el análisis de respuesta sísmica-dinámica de sistemas estructurales con apoyos o soportes múltiples sujetos a excitaciones no uniformes en sus apoyos, es tratado como el método clásico que es el Modelo 1 ya mencionado. Al estudiar el comportamiento sísmico-dinámico de instalaciones de plantas nucleares, en donde debido al riesgo que presenta su operación, se exige un mayor refinamiento en las técnicas de análisis para ser más realistas y tomar en cuenta efectos que en

otros casos pueden considerarse de carácter secundario.

Finalmente, dado que es típico encontrar, tanto en la industria petrolera como en la nuclear, sistemas de tuberías sujetas a excitaciones múltiples distintas entre sus apoyos o soportes por los efectos sísmicos,

la técnica de análisis a través del método de espectro de respuesta múltiple Modelo 2 (Masas Consistentes), viene a ser una práctica simple que debemos considerar como una de las etapas dentro del análisis y diseño de los sistemas de tuberías.

REFERENCIAS

Amin M., Hall W. J., Newmark N. M. y Kassawara R. P. (1971). Earthquake Response of Multiple Connected Light Secondary Systems by Spectrum Methods, ASME (American Society of Mechanical Engineers) 1st National Congress Pressure Vessel Piping Technical, San Francisco, CA.

Appendix. Formulario de Teoría de Estructuras. Matrices de Rigidez Elementales, de Masa Congruentes, y de Rigidez Geométrica. En: http://www.esiold.us.es/php/infgen/aulav/teorestructurasind/Matrices_de_rigidez_elementales.pdf.

Asfura A. y Der Kiureghian A. (1986). Floor Response Spectrum Method for Seismic Analysis of Multiply Supported Secondary Systems. *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, 14, 245-265.

Crandall S. H. y Mark W.D. (1963). *Random Vibration of Mechanical Systems*. Academic Press, New York.

Crempien J. y Aravena E. (1992). Análisis Dinámico de Estructuras con Equipos Livianos. *Revista Internacional de Métodos Numéricos para Cálculo y Diseño en Ingeniería*, 8, 407-416.

Der Kiureghian A., Sackman J. y Nour-Omid B. (1981). *Dynamic Response of Light Equipment in Structures*. Report No. UBC/EERC-81/05, Earthquake Engineering Research Center, University of California.

Der Kiureghian A. e Igusa T. (1983). *Dynamic Analysis of Multiply Tuned and Arbitrarily Supported Secondary Systems*. Report No. UBC/EERC-83/07, Earthquake Engineering Research Center, University of California.

Falsone G., Muscolino G. y Ricciardi G. (1991). Combined Dynamic Response of Primary and Multiply Connected Cascaded Secondary Subsystems. *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, 20, 749-767.

Falsone G., Muscolino G. y Ricciardi G. (1992). Stochastic Response of Combined Primary-Secondary Structures under Seismic Input, *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, 21, 927-943.

Goicolea, J. (2003). *Análisis Sísmico de Estructuras: Dinámica Estructural*. Dpto. Mecánica de Medios Continuos y Teoría de Estructuras Universidad Politécnica Madrid. En:

http://docs.google.com/viewer?a=v&q=cache:XeD3j8P3AVUJ:w3.mecanica.upm.es/~juan/doc_sismo/dinam.pdf+dinamica+estructural&hl=es&gl=mx&pid=bl&srcid=ADGEEsjRELMrg0sndjfq47GLefbNtApfGXWhao-CIu071B8US7j3Qn-Z4H3jr94_etzonQ8t6M6U2RU6bxLI5zg-1nZ6rpOaQKN3uL9p7S60KeY-C6q92aabUTWDpmVPBa6Tmlym41W&sig=AHIEtbQWMptHdDvm2k7FQVUiDGGcao9Nw.

Kassawara R. P. y Peck D. A. (1975). Dynamic Analysis of Structural Systems Excited at Multiple Support Locations. *ASCE (American*

- Society of Civil Engineers) 2nd Specialty Conference Structural Design of Nuclear Plant Facilities*, New Orleans, LA 1-a, 169-187.
- Lee M. C. y Penzien T. (1980). *Stochastic Seismic Analysis of Nuclear Power Plant Structure and Piping Systems Subjected to Multiple Support Excitations*. Report No. UBC/EERC-80/19, Earthquake Engineering Research Center, University of California.
- Pickel, T. W. (1972). Evaluation of Nuclear System Requirements for Accommodating Seismic Effects, *Nuclear Engineering Design*, 20, 323-337.
- Przemieniecki, J. S. (1985). *Theory of Matrix Structural Analysis*. México: Mc Graw-Hill.
- Shaw, D. E. (1975). *Seismic Structural Response Analysis for Multiple Support Excitations*, SMIRT-3 Conf. London.
- Singh M. P. y Suarez L. E. (1987). Seismic Response Analysis of Structure-Equipment Systems with Non-Classical Damping Effects, *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, 15, 871-888.
- Suarez L. E. y Singh M. P. (1987a). Floor Response Spectra with Structure-Equipment Interaction Effects by a Mode Synthesis Approach, *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, 15, 141-158.
- Suarez, L. y Singh, M. (1987b). Eigen properties of Non-Classically Damped Primary Structure and Equipment Systems by a Perturbation Approach, *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, 15, 565-583.
- Valladares, F. (1992). *Análisis Dinámico de Estructuras con Equipos Livianos*. Para optar al Título de Ingeniero Civil. Universidad de Concepción, Chile. Memoria, 156.
- Vashi, K. M. (1975). Seismic Spectral Analysis of Structural Systems Subject to Nonuniform Excitation at Support. *ASCE (American Society of Civil Engineers) 2nd Specialty Conference on Structural Design of Nuclear Plant Facilities*, New Orleans, LA 1-a, 188-216.

Autor

Arnulfo Luévanos Rojas. Ingeniero Civil, FICA de la UJED, México; Maestro en Ciencias con Especialidad en Estructuras, SG de la ESIA del IPN, México; Maestro en Administración, FCA de la UAC, México; Maestro en Ciencias con Especialidad en Planeación y Construcción de Obras, FICA de la UJED, México; Doctor en Ingeniería con Especialidad en Sistemas de Planeación y Construcción, FICA de la UJED, México. Profesor-Investigador de tiempo completo de la FICA (Facultad de Ingeniería, Ciencias y Arquitectura) de la UJED (Universidad Juárez del Estado de Durango), Gómez Palacio, Durango, México.

E-mail: arnulfol_2007@hotmail.com

Recibido: 05/01/2011 **Aceptado:** 05/03/2011