

# Control de un péndulo invertido basado en un modelo reducido

Anna Patete\*, Iñaki Aguirre, Héctor Sánchez

*Escuela de Ingeniería de Sistemas, Facultad de Ingeniería, Universidad de Los Andes, Mérida, Venezuela.*

---

## Resumen.-

El presente trabajo tiene como objetivo general presentar un método para desacoplar modelos de sistemas, permitiendo este realizar una reducción de modelo. La finalidad de este método es poder diseñar leyes de control más simples basadas en dicho modelo reducido. Para mostrar la validación y el desempeño de una ley de control sencilla, diseñada basándose en un modelo reducido, se construyó un péndulo invertido sobre dos ruedas utilizando la plataforma Lego Mindstorms NXT®. En este trabajo el modelado del péndulo construido se realiza usando el método de Lagrange, sin embargo para la obtención del modelo del sistema se puede utilizar cualquier técnica de modelado. El modelo de orden reducido se plantea para el modelo no lineal, no obstante la reducción de modelo aquí propuesta se puede aplicar a modelos lineales, siempre y cuando este modelo se pueda desacoplar. Los resultados demuestran que la ley de control sencilla, calculada para el modelo reducido, presenta buen desempeño al ser implementada sobre el sistema real construido.

**Palabras clave:** Control, modelado, péndulo invertido, plataforma lego mindstorms NXT®

## Control of an Inverted Pendulum based on a Reduced Model

### Abstract.-

The general objective of this paper is to show a method to uncouple system models, allowing this to obtain a reduced model. Based on the reduced model, simple control laws may be designed. To show the simple control law (computed based on the reduced model) validation and performance, an inverted pendulum mounted on two wheels was built using the Lego Mindstorms NXT® platform. In this work, the inverted pendulum is modeled using the Lagrange method; however any modeling technique may be used to obtain the system model. The reduced model is given for the no linear system model; nevertheless the method may be well applied to linear models, if they may be uncoupled. The results show the validation and good performance of the implemented simple control law on the built inverted pendulum.

**Keywords:** Control, modeling, inverted pendulum, Lego mindstorms NXT®

Recibido: octubre 2010

Aceptado: marzo 2011

## 1. INTRODUCCIÓN

Uno de los pasos más importantes dentro de la ingeniería de control es el modelado matemático del sistema que se desea controlar. Existe un balance, entre una buena representación matemática

(modelo) que capture la dinámica del sistema real y la sencillez de dicha representación, que se debe mantener para lograr que el objetivo de control se cumpla a través de un diseño relativamente simple.

Los péndulos invertidos constituyen un banco de pruebas completo e interesante para la ingeniería de control. Uno de los más estudiados de esta familia de artefactos es el denominado péndulo invertido sobre un vehículo. Este consiste en un péndulo o varilla que gira libremente por uno de sus extremos mediante una articulación situada sobre un vehículo o sistema móvil, que se mueve

---

\* Autor para correspondencia

Correo-e: apatete@ula.ve (Anna Patete)

sobre una guía rectilínea horizontal bajo la acción de una fuerza  $F$ . Esta fuerza es la acción de control con la que se pretende actuar sobre la posición de la varilla [1].

El péndulo invertido es un sistema inestable, ya que puede caer en cualquier momento a menos que se aplique una fuerza de control adecuada [2].

Desde antes de los años 70 se han realizado varios proyectos con péndulos invertidos. A continuación, se hace una breve reseña de varios proyectos de péndulos invertidos sobre dos ruedas realizados o construidos hasta los momentos.

Los investigadores [3] del Laboratorio de Electrónica Industrial del Swiss Federal Institute of Technology (EPFL), construyeron un prototipo de un vehículo de dos ruedas basado en un péndulo invertido llamado Joe, al cual le colocaron pesos en la varilla del péndulo para simular el peso de un ser humano en baja escala [3]. Sherman en el 2003, construyó el péndulo invertido sobre dos ruedas llamado Balibot [4]. Anderson en el 2003, construyó un robot de balanceo sobre dos ruedas denominado nBot [5]. En el mismo año Ooi, como proyecto de final de carrera en la escuela de Ingeniería Mecánica de la Universidad de Western Australia, realizó la construcción de un péndulo invertido sobre dos ruedas [6].

También se han construido péndulos invertidos sobre dos ruedas utilizando la plataforma Lego Mindstorms, los cuales fueron tomados como punto de referencia para la realización de este trabajo: Hassenplug, construyó un robot péndulo invertido sobre dos ruedas llamado Legway [7]. Hurbain's, construyó el NXTway [8]. Watanabe, de la Universidad de Waseda en Japón, construyó el NXTway-G [9]. Yamamoto en el 2008, construyó el NXTway-GS, el cual balancea y además desplaza el robot con la utilización de un control remoto [10].

En este trabajo se muestra el efecto de una ley de control comúnmente utilizada, un controlador PID, diseñada basándose en un modelo reducido de péndulo invertido sobre una plataforma móvil [11]. Para ello, en la sección 2 se muestra primeramente la construcción del péndulo invertido sobre dos ruedas utilizando la plataforma Lego Mindstorms NXT, en el cual,

el problema de control consiste en mantener el péndulo en la posición vertical. En la sección 3 se obtiene el modelo matemático del sistema que representa al sistema real (sistema de cuarto orden), y se explica el procedimiento para obtener el modelo matemático de orden reducido (modelo de segundo orden). Luego en la sección 4 se presenta la implementación de la ley de control diseñada basada en el modelo reducido, mostrándose los resultados tanto simulados como los implementados. Las conclusiones alcanzadas son mencionadas al final del trabajo.

Parte de este trabajo fue presentado en las 5tas Jornadas de Ingeniería Eléctrica [12].

## 2. PÉNDULO INVERTIDO SOBRE DOS RUEDAS

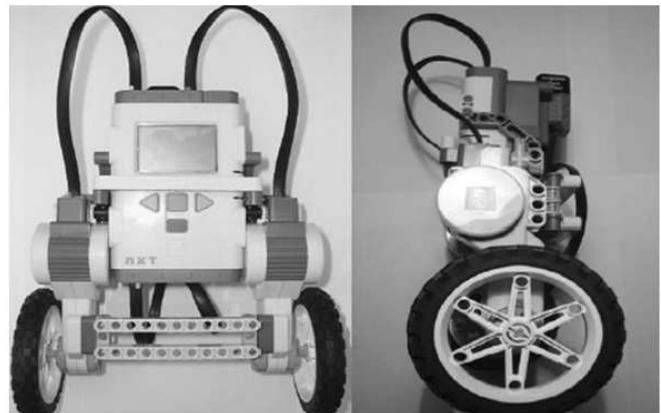


Figura 1: Péndulo invertido sobre dos ruedas

En esta sección se mencionan las principales características del péndulo invertido sobre dos ruedas construido utilizando las piezas Lego Technic®, mostrado en la Figura 1. Se tomó como plano inicial de construcción el propuesto por [10].

El bloque programable NXT, el cual contiene un microcontrolador ARM7 de 32 bits con memoria *flash*, es el controlador, es decir, es el elemento que contiene y ejecuta los programas realizados en un computador, y éstos permiten que un robot Mindstorms® se mueva y pueda realizar diferentes operaciones [13].

El sensor giroscópico NXT Gyro de Hitechnic® detecta velocidad angular y retorna un valor

que representa el número de grados de rotación por segundo, de la misma forma que indica la dirección de rotación. El sensor Gyro puede medir rotación en una escala de  $360^\circ$ . Con él, se pueden construir y controlar robots que se pueden balancear, donde la medición de la rotación es esencial [14].

Los servomotores de corriente DC son los actuadores, estos están contruidos en base a una gran cantidad de engranajes internos. Éstos pueden rotar hasta alcanzar  $170rpm$  (revoluciones por minuto), trabajan en un rango de  $-9V$  a  $+9V$  y tienen un peso de  $80g$  [8].

### 3. MODELADO Y REDUCCIÓN DE MODELO

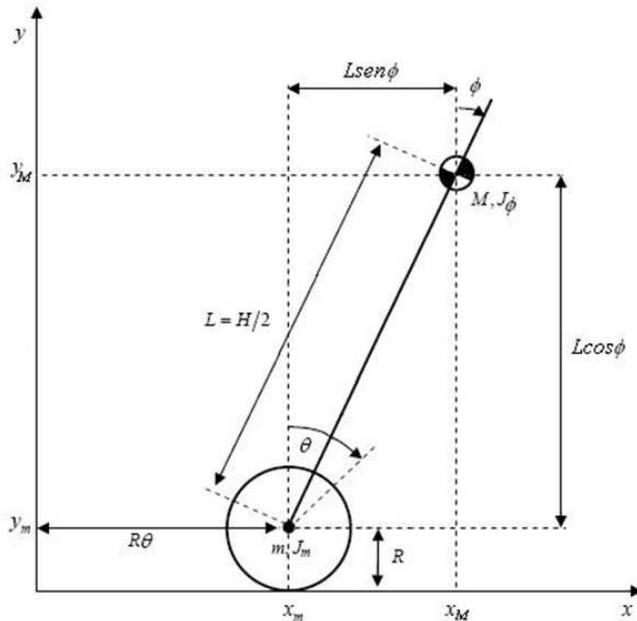


Figura 2: Vista lateral del péndulo invertido sobre dos ruedas

En esta sección se presenta el modelado matemático del sistema físico construido en la Sección 2 y se toma como referencia el modelo utilizado por [10]. En la Figura 2, se muestra la vista lateral y el sistema de coordenadas sobre el cual se elabora el modelo matemático para el péndulo invertido sobre dos ruedas. En la Tabla 1 se muestran los parámetros físicos del sistema (Par.), con sus respectivas unidades y descripción.

Tabla 1: Parámetros del Sistema

Par.	Descripción	Unidad
$g$	aceleración de la gravedad	$9,81m/s^2$
$m$	masa de la rueda	$0,03kg$
$R$	radio de las ruedas	$0,04m$
$J_m$	momento de inercia de las ruedas	$\frac{MR^2}{2}kg.m^2$
$M$	masa del cuerpo del péndulo	$0,6kg$
$H$	altura del cuerpo del péndulo	$0,144m$
$L$	distancia del centro de masa al eje de las ruedas	$\frac{H}{2}m$
$J_\phi$	momento de inercia del péndulo	$\frac{ML^2}{3}kg.m^2$
$j_m$	momento de inercia del motor DC	$10^{-5}kg.m^2$

Para obtener las ecuaciones de movimiento de Lagrange es necesario definir las coordenadas generalizadas del sistema, así como el lagrangiano.

Las coordenadas generalizadas del sistema son:

$\theta$ : Ángulo de rotación de las ruedas,

$\phi$ : Ángulo de inclinación del cuerpo del péndulo,

$(x_i, y_i)$ : Posición de la rueda izquierda,

$(x_d, y_d)$ : Posición de la rueda derecha,

$(x_M, y_M)$ : Posición del péndulo invertido.

El sistema de coordenadas bidimensional sobre el cual se elabora el modelo está describe a continuación.

Para la rueda izquierda:

$$(x_i, y_i) = (x_i, y_i) = (R\theta, R) \quad (1)$$

Para la rueda derecha:

$$(x_d, y_d) = (x_i, y_i) = (R\theta, R) \quad (2)$$

La posición del péndulo invertido dada por está vinculada con la posición de sus ruedas, por lo tanto  $x_i = x_d = x_M$  e  $y_i = y_d = y_M$ , así:

$$\begin{aligned} (x_M, y_M) &= (x_m + L \sin \phi, y_m + L \cos \phi) \\ &= (R\theta + L \sin \phi, R + L \cos \phi) \end{aligned} \quad (3)$$

La energía cinética traslacional es:

$$T_1 = \frac{1}{2}m\dot{x}_i^2 + \frac{1}{2}m\dot{x}_d^2 + \frac{1}{2}M\dot{x}_M^2 + \frac{1}{2}M\dot{y}_M^2, \quad (4)$$

$$T_1 = \frac{1}{2}m(R\dot{\theta}_i)^2 + \frac{1}{2}m(R\dot{\theta}_d)^2 + \frac{1}{2}M(R\dot{\theta} + L\dot{\phi} \cos \phi)^2 + \frac{1}{2}M(-L\dot{\phi} \sin \phi)^2. \quad (5)$$

La energía cinética rotacional es:

$$T_2 = \frac{1}{2}J_m\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}J_m\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}J_\phi\dot{\phi}^2 \quad (6)$$

La energía potencial es:

$$U = mgy_m + mgy_m + Mgy_M, \quad (7)$$

$$= 2mgR + Mg(R + L \cos \phi). \quad (8)$$

El lagrangiano es definido como:

$$lag = T_1 + T_2 - U \quad (9)$$

$$lag = R\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}M(R\dot{\theta} + L\dot{\phi} \cos \phi)^2 + \frac{1}{2}M(-L\dot{\phi} \sin \phi)^2 + J_m\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}J_\phi\dot{\phi}^2 - 2mgR - Mg(R + L \cos \theta). \quad (10)$$

Las ecuaciones de Lagrange son:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial Lag}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial Lag}{\partial \theta} = F_\theta \quad (11)$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial Lag}{\partial \dot{\phi}} \right) - \frac{\partial Lag}{\partial \phi} = F_\phi. \quad (12)$$

Aplicando la Ecuaciones (11) y (12) a (10) se obtienen las ecuaciones de movimiento de Lagrange para el péndulo invertido sobre dos ruedas.

$$\begin{aligned} & [(2m + M)R^2 + 2J_m]\ddot{\theta} \\ & + (MLR \cos \phi)\ddot{\phi} \\ & - MLR\dot{\phi}^2 \sin \phi = F_\theta \end{aligned} \quad (13)$$

$$\begin{aligned} & (MLR \cos \phi)\ddot{\theta} + (ML^2 + J_\phi)\ddot{\phi} \\ & - MgL \sin \phi = F_\phi. \end{aligned} \quad (14)$$

Tomando como referencia el modelado del péndulo invertido sobre un carro, realizado por [15], se toma como fuerza externa el voltaje aplicado a las ruedas, el cual es la señal de control  $u$ .

Con estas modificaciones las ecuaciones de movimiento de Lagrange, para el péndulo invertido sobre dos ruedas, son:

$$\begin{aligned} & [(2m + M)R^2 + 2J_m]\ddot{\theta} \\ & + (MLR \cos \phi)\ddot{\phi} \\ & - MLR\dot{\phi}^2 \sin \phi = u \end{aligned} \quad (15)$$

$$\begin{aligned} & (MLR \cos \phi)\ddot{\theta} + (ML^2 + J_\phi)\ddot{\phi} \\ & - MgL \sin \phi = 0. \end{aligned} \quad (16)$$

Despejando  $\ddot{\theta}$  y  $\ddot{\phi}$  de (15) y (16) se obtiene:

$$\begin{aligned} \ddot{\theta} &= \frac{(ML^2 + J_\phi)(u + MLR\dot{\phi}^2 \sin \phi)}{\Delta} \\ & - \frac{(ML)^2 \sin \phi \cos \phi}{\Delta} \\ \ddot{\phi} &= \frac{-(MLR \cos \phi)(u + MLR\dot{\phi}^2 \sin \phi)}{\Delta} \\ & + \frac{MgL \sin \phi [(2m + M)R^2 + 2J_m]}{\Delta}, \end{aligned} \quad (17)$$

con  $\Delta = [(2m + M)R^2 + 2J_m](ML^2 + J_\phi) - (MLR \cos \phi)^2$ .

Sean las variables de estado:

$$x_1 = \phi, \quad x_2 = \dot{\phi}, \quad x_3 = \theta, \quad x_4 = \dot{\theta} \quad (18)$$

y escribiendo las ecuaciones del sistema no lineal en variables de estado, se tiene la siguiente representación de primer orden:

$$x_1 = x_2 \quad (19)$$

$$\begin{aligned} x_2 &= -\frac{(MLR \cos x_1)(u + MLRx_2^2 \sin x_1)}{\Delta} \\ & + \frac{MgL \sin x_1 [(2m + M)R^2 + 2J_m]}{\Delta} \end{aligned} \quad (20)$$

$$x_3 = x_4 \quad (21)$$

$$\begin{aligned} x_4 &= \frac{(ML^2 + J_\phi)(u + MLRx_2^2 \sin x_1)}{\Delta} \\ & - \frac{(ML)^2 \sin x_1 \cos x_1}{\Delta} \end{aligned} \quad (22)$$

con

$$\begin{aligned} A &= \Delta = [(2m + M)R^2 + 2J_m](ML^2 + J_\phi) \\ & - (MLR \cos x_1)^2 \end{aligned}$$

Se observa que el modelo obtenido es un modelo de cuarto orden, como era de esperarse. Esto debido a las dinámicas de posición y velocidad asociadas al péndulo y la posición y velocidad asociadas a la plataforma móvil (formada por las ruedas).

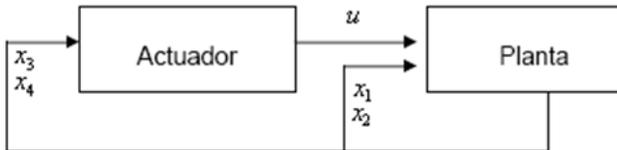


Figura 3: Diagrama de bloques del sistema desacoplado

Patete [11] propone que el sistema de cuarto orden obtenido puede desacoplarse tomando la aceleración de las ruedas como la nueva señal de control. Es decir, se observa que la dinámica de este sistema puede ser pensada como constituida por dos bloques en cascada, como se muestra en la Figura 3. Las variables  $\dot{x}_1$  y  $\dot{x}_2$  son la velocidad y la aceleración, respectivamente, del cuerpo del péndulo invertido sobre dos ruedas representan la dinámica de la planta, y las variables  $\dot{x}_3$  y  $\dot{x}_4$  son la velocidad y la aceleración de las ruedas, respectivamente, representan la dinámica de control.

Por lo tanto de (21) se tiene que:

$$\dot{x}_4 = \ddot{x}_3. \quad (23)$$

De (22) se despeja la señal  $u$

$$u = \left[ (2m + M)R^2 + 2J_m - \frac{(MLR \cos x_1)^2}{ML^2 + J_\phi} \right] \dot{x}_4 - MLR \sin x_1 (\dot{x}_2)^2 + \frac{(ML)^2 Rg \sin x_1 \cos x_1}{ML^2 + J_\phi} \quad (24)$$

Sustituyendo de (24) en (20) y simplificando obtenemos:

$$\dot{x}_2 = -\frac{MLR \cos x_1}{ML^2 + J_\phi} \dot{x}_4 + \frac{MgL \sin x_1}{ML^2 + J_\phi} \quad (25)$$

Tomando la variable  $\dot{x}_4$ , que representa la aceleración de las ruedas, como la dinámica de

control del péndulo invertido y denotando a esta variable como la nueva señal de control  $v$  se tiene que:

$$\dot{x}_2 = \frac{MgL \sin x_1}{ML^2 + J_\phi} - \frac{MLR \cos x_1}{ML^2 + J_\phi} v \quad (26)$$

Por lo tanto el nuevo modelo reducido es:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= \frac{MgL \sin x_1}{ML^2 + J_\phi} - \frac{MLR \cos x_1}{ML^2 + J_\phi} v \end{aligned} \quad (27)$$

El modelo de orden reducido (27), modelo de segundo orden, tiene la ventaja de ser un modelo menos complejo. Por ser este un modelo de segundo orden, el diseño de una ley de control, comúnmente utilizada como lo es un controlador PID, es sencilla de diseñar e implementar.

### 3.1. Linealización del Modelo Reducido

Se va a realizar el control del péndulo invertido alrededor de la posición vertical (punto de equilibrio inestable del péndulo invertido), por lo que el punto de operación del sistema es:

$$(x_1^* = 0, x_2^* = 0, U = 0) \quad (28)$$

Linealizando el sistema alrededor del punto de operación (28) y escribiendo el sistema en espacio de estados obtenemos:

$$\begin{cases} \dot{x}_\delta = A_\delta x_\delta + B_\delta u, \\ y_\delta = C x_\delta, \end{cases} \quad (29)$$

$$(29) \text{ con: } x_\delta = [\phi, \dot{\phi}]^T = [x_{1\delta}, x_{2\delta}]^T.$$

El sensor gyro de Hitechnic®, mide la velocidad angular del cuerpo del péndulo,  $x_{2\delta}$ . El ángulo del cuerpo,  $x_{1\delta}$ , se obtiene integrando numéricamente el valor de  $x_{2\delta}$ . Por lo tanto, se puede escoger la variable  $x_{1\delta}$  como salida del sistema. Así,

$$\begin{aligned} A_\delta &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ A_\delta(2,1) & 0 \end{bmatrix}, \\ B_\delta &= \begin{bmatrix} 0 \\ B_\delta(2) \end{bmatrix}, \\ C &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (30)$$

donde

$$A_\delta(2,1) = \frac{MgL}{ML^2 + J_\phi}, B_\delta(2) = \frac{-MLR}{ML^2 + J_\phi}.$$

### 3.2. Implementación basada en el Modelo Reducido

Una vez obtenido el modelo de orden reducido del sistema continuo se realiza la discretización del mismo, con el cual se diseña una ley de control discreta que pueda ser programada en el Lego Mindstorms NXT®.

Se realiza la discretización del sistema utilizando el método de discretización exacta. La estructura del sistema discretizado en espacio de estados, que resulta al aplicar este método de discretización, se muestra a continuación:

$$\begin{aligned} x((k+1)T_0) &= \Phi x(kT_0) + \Gamma u(kT_0), \\ y(kT_0) &= Cx(kT_0), \end{aligned} \quad (31)$$

donde

$$\Phi = e^{AT_0}, \quad (32)$$

$$\Gamma = \int_0^{T_0} e^{A\rho} B d\rho. \quad (33)$$

El sistema discretizado en espacio de estados es:

$$\Phi = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\alpha & \frac{1}{2\sqrt{\frac{MgL}{ML^2+J_\phi}}}\beta \\ \frac{\sqrt{\frac{MgL}{ML^2+J_\phi}}}{2}\beta & \frac{1}{2}\alpha \end{bmatrix} \quad (34)$$

Así, la matriz  $\Gamma$  es:

$$\Gamma = \begin{bmatrix} -\frac{R}{2g}(\alpha - 2) \\ \left(-\sqrt{\frac{ML}{g(ML^2+J_\phi)}}\frac{R}{2}\right)\beta \end{bmatrix}, \quad (35)$$

donde:

$$\alpha = \left( e^{\sqrt{\frac{MgL}{ML^2+J_\phi}}T_0} + e^{-\sqrt{\frac{MgL}{ML^2+J_\phi}}T_0} \right),$$

$$\beta = \left( e^{\sqrt{\frac{MgL}{ML^2+J_\phi}}T_0} - e^{-\sqrt{\frac{MgL}{ML^2+J_\phi}}T_0} \right)$$

y la matriz  $C$  es:

$$C = [1 \ 0]. \quad (36)$$

Sustituyendo los valores numéricos de los parámetros de la Tabla 1 y tomando el período de muestreo  $T_0 = 0,1s$  se discretiza el sistema.

El período de muestreo  $T_0$  fue calculado según el Teorema de Shannon, aplicado a la frecuencia máxima (calculada aproximadamente) presente en el modelo reducido. Tomando en cuenta además, las limitaciones de hardware y software del péndulo invertido construido.

Se tiene entonces que el sistema discretizado en espacio de estados, al cual se le realizará el diseño del controlador es:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1,440 & 0,114 \\ 9,395 & 1,440 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0,0038 \\ -0,0483 \end{bmatrix} u(k) \\ y(k) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x(k). \end{aligned} \quad (37)$$

### 3.3. Diseño del Controlador PID basada en el Modelo Reducido

Primeramente se realiza un análisis sobre la controlabilidad del sistema de segundo orden lineal continuo (29), para analizar la influencia de algunos parámetros físicos sobre la controlabilidad del sistema. A continuación se muestra la matriz de controlabilidad del sistema continuo de segundo orden (29),

$$\Psi = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{MLR}{ML^2+J_\phi} \\ -\frac{MLR}{ML^2+J_\phi} & 0 \end{bmatrix} \quad (38)$$

donde el determinante de la matriz de controlabilidad es:

$$Det\Psi = -\left(\frac{MLR}{ML^2+J_\phi}\right)^2. \quad (39)$$

Si se desprecia el parámetro (momento de inercia del cuerpo del péndulo), el cual por lo general es muy pequeño en comparación con la masa  $M$  y la longitud del centro de masa del cuerpo del péndulo  $L$ , se obtiene que:

$$Det\Psi = -\left(\frac{R}{L}\right)^2. \quad (40)$$

Al examinar esta expresión del determinante de la matriz de controlabilidad del sistema continuo, se observa que al aumentar la longitud del cuerpo del péndulo  $L$ , el valor del determinante tenderá al

valor cero, lo que indica que el sistema se volvería menos controlable.

Por el contrario, si se aumenta el radio de las ruedas  $R$  el determinante tenderá a valores más alejados de cero, lográndose una mayor controlabilidad sobre el péndulo invertido sobre dos ruedas.

Para comparar el comportamiento del sistema simulado, se diseña el controlador PID tanto a tiempo continuo como a tiempo discreto.

### 3.3.1. Diseño del Controlador PID a tiempo Continuo

Partiendo del sistema en espacio de estados mostrado en (29), se calcula la función de transferencia del sistema continuo:

$$G(s) = C_{\delta}(SI - A_{\delta})^{-1} B_{\delta}, \quad (41)$$

$$G(s) = -\frac{0,335562}{s^2 - 82,2128}. \quad (42)$$

La función de transferencia generalizada de un controlador PID es:

$$G_c(s) = kp + \frac{ki}{s} + kd s, \quad (43)$$

donde  $kp$  es la ganancia proporcional,  $ki$  es la ganancia integral y  $kd$  es la ganancia derivativa.

Para calcular los parámetros del controlador  $C_c(s)$  mediante asignación de polos, se tienen en cuenta los siguientes criterios para la escogencia de los polos deseados del sistema en lazo cerrado, con el fin de lograr el mejor desempeño del sistema controlado.

- Rapidez en estabilizar los estados: dada la naturaleza del péndulo invertido sobre dos ruedas, se necesita que el péndulo se estabilice en la posición vertical en el menor tiempo posible.
- Menor número de oscilaciones posible: si ocurren muchas oscilaciones al tratar de estabilizar el péndulo es posible que no se logre alcanzar el objetivo de control y el sistema caiga en la inestabilidad.
- Limitaciones en la señal de control: en vista de que se va a utilizar la señal de control diseñada para los motores del Lego

Mindstorms NXT®, la simulación tiene que mostrar que esta señal se encuentra dentro del rango de operación de los motores. Los motores del NXT tienen un rango de operación desde  $-9V$  a  $+9V$ .

Se lograron obtener los siguientes polos que cumplen de manera adecuada con las especificaciones señaladas anteriormente:

$$s_{1,2} = -3,54 \pm 3,536j. \quad (44)$$

De la escogencia de estos polos continuos resultan los siguientes parámetros:

$$\zeta = 0,707, \quad (45)$$

$$\omega_n = 5 \text{ rad/s}. \quad (46)$$

Con estos polos continuos deseados se obtienen las siguientes especificaciones para el tiempo de asentamiento ( $T_s$ ) y el sobredisparo máximo ( $SD$ ):

$$T_s = 1,41 \text{ s}, \quad (47)$$

$$SD \leq 0,05. \quad (48)$$

La función de transferencia del sistema en lazo cerrado, con realimentación negativa unitaria, utilizando el controlador  $G_c(s)$  se muestra a continuación:

$$Glc(s) = \frac{G_c(s)G(s)}{1 + G_c(s)G(s)}. \quad (49)$$

El polinomio característico de (49), el cual incluye las ganancias del controlador  $kp$ ,  $ki$  y  $kd$ , es:

$$Pc(s) = s^3 - 0,336kd s^2 - (0,336kp + 81,213)s - 0,336ki. \quad (50)$$

A partir de los polos deseados (44), se construye el siguiente polinomio deseado:

$$Pd(s) = [s + 3,535 - 3,536j][s + 3,535 + 3,536j] \cdot [s + 20]. \quad (51)$$

Nótese que se añadieron un polo deseado con el fin de igualar el grado de  $P_c(s)$ . Igualando los polinomios (50) y (51) se obtienen las siguientes ganancias para el controlador PID:

$$kp = -740,884 \quad (52)$$

$$ki = -80,6705 \quad (53)$$

$$kd = -1490,04. \quad (54)$$

La ley de control PID en tiempo continuo queda descrita como:

$$\frac{d\xi}{dt} = ki e(t), \quad (55)$$

$$u(t) = kp e(t) + \xi(t) + kd \frac{de(t)}{dt}. \quad (56)$$

### 3.3.2. Diseño del Controlador PID a tiempo Discreto

Para obtener la ley de control PID del sistema discretizado, realizando el diseño en tiempo discreto, es necesario calcular la función de transferencia discretizada del sistema. Entonces a partir de la representación en espacio de estados del sistema discretizado mostrado en (37), se obtiene la siguiente función de transferencia:

$$G_d(z) = C(zI - \Phi)^{-1}\Gamma, \quad (57)$$

donde  $\Phi$ ,  $\Gamma$  y  $C$  son las mostradas en (34), (35) y (36) respectivamente.

$$G_d(z) = \frac{8,674 \times 10^{-19} - 0,0038z}{1 - 2,88z + z^2}. \quad (58)$$

Para el diseño del controlador PID en tiempo discreto por asignación de polos, se utiliza la siguiente estructura del PID discreto con un retardo incluido, debido a que se busca que el sistema de ecuaciones resultante de la igualación de polinomios tenga solución única.

El controlador PID discreto con retardo se muestra a continuación:

$$G_d(z) = \frac{u(z)}{e(z)} = \frac{q_0 + q_1 z^{-1} + q_2 z^{-2}}{(1 - z^{-1})(1 + \gamma z^{-1})}. \quad (59)$$

Los polos discretos deseados, se obtienen a partir de los correspondientes polos continuos

deseados dados en (44), y se calculan en discreto a través de la siguiente ecuación:

$$\begin{aligned} z_{1,2} &= e^{s_{1,2}T_0} = \cos(s_{1,2}T_0) + j \sin(s_{1,2}T_0) \\ &= 0,659 \pm 0,243j. \end{aligned} \quad (60)$$

La función de transferencia del sistema discreto en lazo cerrado, con realimentación negativa unitaria, utilizando el controlador  $G_c(z)$  se muestra a continuación:

$$G_{lcd}(z) = \frac{G_{cd}(z)G_d(z)}{1 + G_{cd}(z)G_d(z)}. \quad (61)$$

El polinomio característico de (61) es el mostrado a continuación:

$$\begin{aligned} p_c(z) &= z^4 + (\gamma - 0,00384q_0 - 3,88)z^3 \\ &\quad + (8,67 \times 10^{-19}q_0 - 0,00385q_1 \\ &\quad \quad - 3,88\gamma + 3,88)z^2 \\ &\quad + (8,674 \times 10^{-19}q_1 - 0,00385q_2 \\ &\quad \quad + 3,88\gamma - 1)z \\ &\quad + 8,674 \times 10^{-19}q_2 - \gamma. \end{aligned} \quad (62)$$

A partir de los polos discretos deseados (60), se construye el siguiente polinomio deseado:

$$\begin{aligned} p_d(z) &= (z - 0,6588 - 0,2432j) \\ &\quad \cdot (z - 0,6588 + 0,2432j) \\ &\quad \cdot (z - 0,13534)(z - 0,6). \end{aligned} \quad (63)$$

Nótese que se añadieron un par de polos deseados con el fin de igualar el grado de  $P_c(z)$ . Igualando los polinomios (62) y (63) se obtienen las siguientes ganancias para el controlador PID discreto con retardo:

$$q_0 = -486,915, \quad (64)$$

$$q_1 = 649,912, \quad (65)$$

$$q_2 = -178,832, \quad (66)$$

$$\gamma = -0,040042. \quad (67)$$

Despejando de  $u(z)$  (59), y aplicando la transformada inversa  $Z$ , se obtiene la siguiente ley de control discreta:

$$\begin{aligned} u(k) &= -(\gamma - 1)u(k - 1) + \gamma u(k - 2) \\ &\quad + q_0 e(k) + q_1 e(k - 1) \\ &\quad + q_2 e(k - 2). \end{aligned} \quad (68)$$

La ley de control (68) se programa utilizando el lenguaje RobotC, desarrollado por la Academia de Robótica de la Universidad de Carnegie Mellon [14]. Este lenguaje cuenta con aritmética de punto flotante, lo que resulta en una implementación precisa de la ley de control diseñada. Esta ley se implementa en el bloque programable NXT.

#### 4. ANÁLISIS y Resultados

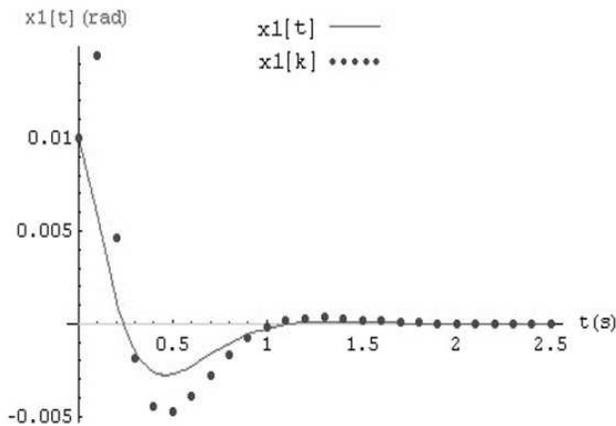


Figura 4: Dinámica de posición continua y discreta

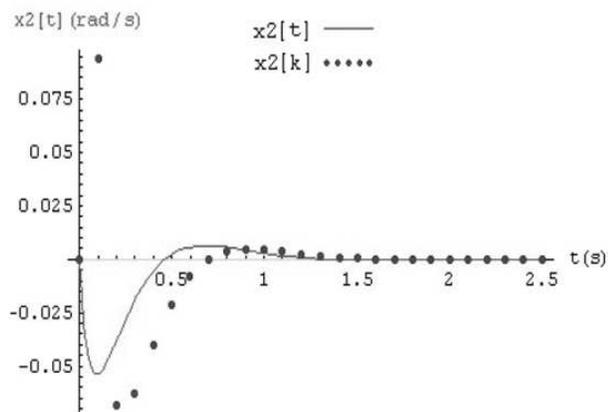


Figura 5: Dinámica de velocidad continua y discreta

En las Figura 4 a 6 se muestran las simulaciones del sistema continuo (29) y del sistema discretizado (37) controlados por el PID continuo (56) y discreto (68), respectivamente.

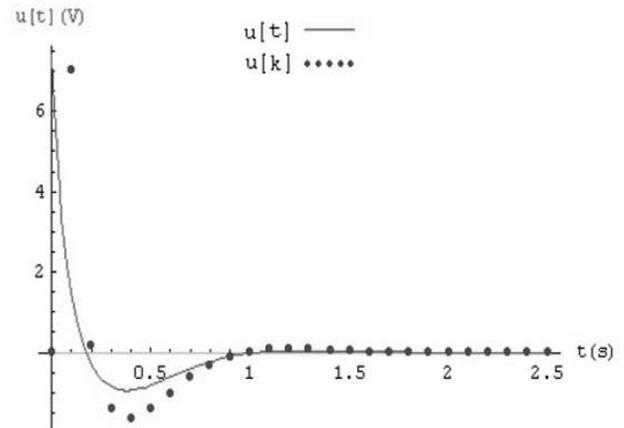


Figura 6: Señal de control PID continua y discreta

La Figura 4, muestra la posición del péndulo controlado (controlador PID), tanto a tiempo continuo como a tiempo discreto, se observa que se logra que la posición del péndulo alcance el valor deseado de 0 grados que equivale a 0 radianes, en el tiempo de asentamiento especificado, a partir de una posición inicial de 0,6 grados, lo que equivale aproximadamente a 0,01 radianes. Adicionalmente la respuesta presenta una oscilación suave antes de estabilizarse, logrando los objetivos de diseño que se buscaban alcanzar. En la Figura 5 se presenta la dinámica de la velocidad continua y discreta,  $x_2 = \dot{\phi}$ . En la Figura 6, se observa que la señal de control se encuentra dentro del rango de operación de los motores del NXT,  $u \in [-9, 9]V$ .

Además de observar el comportamiento del sistema a través de las dinámicas de posición y velocidad,  $x_1 = \phi$ ,  $x_2 = \dot{\phi}$ , se implementó computacionalmente la ley de control PID lineal sobre un mímico de péndulo invertido, que obedece este al modelo matemático de orden reducido planteado en este trabajo. En la Figura 7 se muestra una secuencia del estado de la posición del mímico en algunos instantes de tiempo.

En la Figura 8 se muestra una pequeña secuencia del péndulo invertido construido (sistema no lineal real), bajo los efectos de la ley de control (68) diseñada en base al modelo reducido e implementada en el NXT. En la implementación práctica del controlador PID discreto fue necesario el ajuste de uno de los parámetros del controlador,

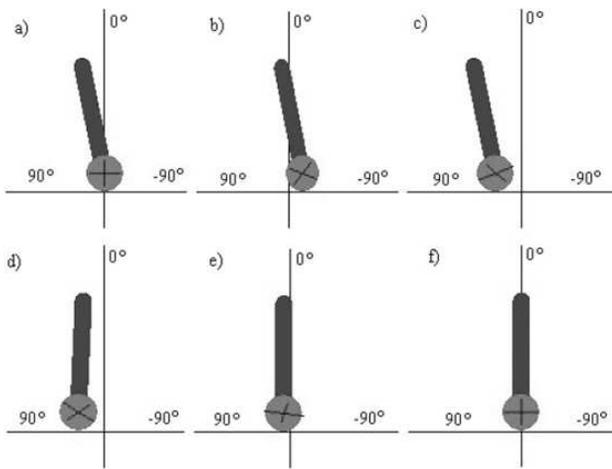


Figura 7: Secuencia de imágenes del mímico de péndulo invertido funcionando con el controlador diseñado en (68)



Figura 8: Secuencia de imágenes del péndulo invertido funcionando con el controlador diseñado en (68)

específicamente la ganancia  $q_0$  en un porcentaje del 3% para lograr una mejor respuesta del sistema.



Figura 9: Secuencia de imágenes del péndulo invertido con ruedas de menor radio

Además de validar el desempeño de la ley de control discreta implementada, calculada basándose en el modelo reducido, se realizaron pruebas

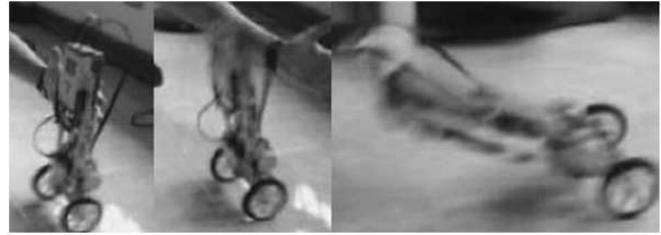


Figura 10: Secuencia de imágenes del péndulo invertido aumentado en tres veces la longitud de su cuerpo

del desempeño de la misma al cambiar algunos parámetros físicos en el péndulo invertido sobre dos ruedas construido, para corroborar el análisis de controlabilidad presentado en la sub-sección 3.3. Se cambiaron las ruedas del péndulo mostrado en la Figura 1 por un par de ruedas de menor radio, como se muestra en la secuencia de imágenes en la Figura 9, obteniéndose como resultado menor robustez, es decir, la ley de control trataba de mantener el objetivo de estabilizar el péndulo en la posición vertical, sin embargo este objetivo no era cumplido. A los pocos segundos el péndulo caía, siendo inestable. Por otro lado, se alargó el cuerpo del péndulo mostrado en la Figura 1 (dejando las ruedas originales) hasta tres veces su longitud como se muestra en la secuencia de imágenes en la Figura 10, observándose en las experiencias que el péndulo se hacía inestable rápidamente, es decir, la ley de control no cumplía con su objetivo principal de estabilizar el péndulo en su posición vertical.

En cuanto a la dinámica de  $x_3 = \theta$ ,  $x_4 = \dot{\theta}$ , el comportamiento de las mismas en estado estacionario, una vez que el modelo de orden reducido es controlado, es alejarse de manera constante de su posición inicial en el eje horizontal. Es decir, en estado estacionario, mantienen una dinámica rectilínea uniforme. Lo cual es de esperarse, ya que en este modelo no se hace control sobre el carro sino sobre el péndulo. Una vez controlado el péndulo en su posición vertical, el carro debe mantener una velocidad constante para evitar que el péndulo caiga.

Debido a que el controlador, es un controlador lineal, diseñado para el modelo linealizado, el rango de buen desempeño del controlador es limitado. Experimentalmente se observó que este rango es

de  $\pm 1,2$  grados, lo que equivale aproximadamente a  $\pm 0,1$  radianes

## 5. CONCLUSIONES

La ley de control diseñada logra mantener al péndulo invertido sobre dos ruedas construido en la posición vertical deseada, a pesar de que esta fue diseñada en base al modelo reducido (modelo de segundo orden), en el cual las únicas variables que se toman en cuenta son la velocidad angular del cuerpo y el ángulo de inclinación de éste.

El péndulo invertido sobre dos ruedas no permanece en una posición fija sobre el eje horizontal, este tiende a alejarse de manera constante de su posición inicial en el eje horizontal. Este comportamiento se debe, precisamente, a que no se controla la posición en el eje horizontal del péndulo invertido sobre dos ruedas, ya que no se tomaron en cuenta las variables  $\theta$  y  $\dot{\theta}$  (en el modelo reducido), que son el ángulo de rotación de las ruedas y la velocidad angular de las mismas, las cuales representan una medida del desplazamiento longitudinal del sistema.

Una de las grandes ventajas de usar un modelo reducido, es la facilidad de diseñar un controlador sencillo que cumpla con el objetivo de control propuesto.

En este caso, el modelo de orden reducido se diseñó sobre un modelo no lineal, sin embargo el método mostrado en este trabajo puede ser aplicable a modelos lineales. Basta con encontrar una relación tanto física como matemática que permita desacoplar el sistema en dos bloques.

La ley de control PID discreta logra estabilizar el péndulo invertido sobre dos ruedas en la posición vertical, y adicionalmente soporta ligeras perturbaciones alrededor de la posición vertical.

La plataforma Lego Mindstorms NXT® ofrece la posibilidad de estudiar sistemas de control a pequeña escala, ya que cuenta con todos los elementos que forman parte de éstos como lo son: sensores, actuadores y un microcontrolador en el cual se pueden programar estrategias de control.

## Referencias

- [1] Aracil, J. and Gordillo, F., 2005, "El Péndulo Invertido. Un Desafío Para el Control no Lineal", Revista Interamericana de Automática e Informática Industrial, Vol. 2, pp. 8-19.
- [2] Ogata, K., 1996, "Sistemas de Control en Tiempo Discreto", Ed. Prentice Hall Hispanoamericana S.A., pp. 625-626.
- [3] Grasser, F., D'Arrigo, A., Colombi, S., and Rufer, A., 2002, "Joe: A Mobile, Inverted Pendulum", Swiss Federal Institute of Technology, disponible en [http://leiwwww.epfl.ch/publications/grasser\\_darrigo\\_colombi\\_rufer\\_mic\\_01.pdf](http://leiwwww.epfl.ch/publications/grasser_darrigo_colombi_rufer_mic_01.pdf) (Septiembre 2008).
- [4] Sherman, B., 2003, "Balibot, An Inverted Pendulum Robot", disponible en <http://home.comcast.net/~botronics/balibot.html> (Septiembre 2008).
- [5] Anderson, D., 2003, "nBot Balancing Robot", disponible en <http://geology.heroy.smu.edu/~dpa-www/robo/nbot> (Septiembre 2008).
- [6] Ooi, R., 2003, "Balancing a Two-Wheeled Autonomous Robot". University of Western Australia, disponible en <http://robotics.ee.uwa.edu.au/theses/2003-Balance-Ooi.pdf> (Septiembre 2008).
- [7] Hassenplug, S., 2002, "Legway", disponible en <http://www.teamhassenplug.org/robots/legway> (Septiembre 2008).
- [8] Hurbain's P, 2007., "Nxtway", disponible en <http://www.philohome.com/nxtway/> (Octubre 2008).
- [9] Watanabe, R., 2007, "Motion Control of NXTway Lego Segway", Universidad de Waseda, Japón, disponible en [http://web.mac.com/ryo\\_watanabe/](http://web.mac.com/ryo_watanabe/) (Septiembre 2008).
- [10] Yamamoto, Y., 2008, "NXTway-gs (self-balancing two-wheeled robot) Controller Design", disponible en <http://www.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/19147> (Septiembre 2008).
- [11] Patete, A., 2002, "Desarrollo de un Mímico de un Sistema de Control en Mathematica". Proyecto de grado, Facultad de Ingeniería, ULA, Mérida, Venezuela.
- [12] Sánchez, H., 2010, "Construcción y Control de un Péndulo Invertido utilizando la Plataforma Lego MINDSTORMS NXT". 4to Congreso iberoamericano de estudiantes de ingeniería eléctrica (IV CIBELEC 2010) 5tas Jornadas de ingeniería eléctrica (V JIELECTRIC 2010).
- [13] Lego Mindstorms NXT, 2009, <http://www.mindstorms.lego.com> (Octubre 2008).
- [14] Hitechnic®, 2009, <http://www.hitechnic.com> (Septiembre 2008).
- [15] Ogata K, 1987, "Dinámica de Sistemas". Ed. Prentice Hall Hispanoamericana, pp. 551-555.