

Aplicación para la evaluación de un sistema de suspensión neumático semi-activo basada en métodos numéricos de Euler, Heun y Runge-Kutta de cuarto orden (RK4)

César Martínez^{*a}, Antonio Millán^a, Jesús Pérez^b, Carlos Jiménez^c, Juan Arcila^c, Wilmer Sanz^d

^aDpto. de Electrónica y Comunicaciones, Facultad de Ingeniería, Universidad de Carabobo.

^bPostgrado en Instrumentación, Facultad de Ciencias, Universidad Central de Venezuela.

^cDpto. de Instrumentación y Control, Instituto Universitario Tecnológico de La Victoria.

^cDpto. de Circuitos y Mediciones, Facultad de Ingeniería, Universidad de Carabobo.

^dDpto. de Sistemas y Automática, Facultad de Ingeniería, Universidad de Carabobo.

Resumen.-

En el presente trabajo se desarrolla un programa para evaluar un sistema de suspensión neumático semi-activo. A través del programa se pueden configurar tanto los parámetros como las condiciones iniciales asociadas al sistema, se permite escoger la perturbación de entrada de la vía, entre tres tipos de perturbaciones típicas a las cuales están sujetos estos sistemas de suspensión como lo son: entrada escalón, entrada senoidal o una entrada polinómica hasta de tercer orden. El programa también permite seleccionar la fuerza activa de entrada, entre dos tipos: entrada escalón y entrada polinómica hasta de primer orden. El usuario puede seleccionar, a través de la interfaz del programa, resolver el sistema mediante tres tipos de métodos numéricos, como son el Método de Euler, el Método de Heun y el Método de Runge-Kutta de cuarto orden (RK4), para observar no sólo el comportamiento de las variables de salida del sistema sino también para comparar la exactitud y precisión de las diferentes soluciones dadas por cada método numérico empleado.

Palabras clave: Simulación, métodos numéricos, sistema de suspensión neumático semi-activo

Application for the Evaluation of a Semi-Active Pneumatic Suspension System based on Numeric Methods of Euler, Heun and Fourth Order Runge-Kutta (RK4)

Abstract.-

This paper presents the development of a software that evaluates a semi-active pneumatic suspension system. Through this software the user can setup both parameters and initial conditions associated to the system. This software allows to select the input road perturbation, among three kinds of typic perturbations to which the suspension systems are subjected such as: step input, sine input or polynomial input up to third order; it also allows to select the input active force, between two types: step input and polynomial input up to first order. The user can select through the software interface, the system simulation from three types of numeric methods, such as Euler's Method, Heun's Method and Fourth Order Runge-Kutta Method (RK4), to observe not only the response of the output variables of the system but also to compare the accuracy and precision of the several solutions given by each numeric method used.

Keywords: Simulation, Numerical methods, Semi-active pneumatic suspension system

1. Introducción

Las nuevas tecnologías están estrechamente ligadas al automovilismo, es más, podría decirse que una de las áreas de la industria a nivel mundial que se mantiene como pionera en el desarrollo de nuevos avances tecnológicos para sus partes componentes es el automovilismo, en el caso particular, los sistemas de suspensión de los autos no son una excepción. Lo que hasta hace algunos años se había observado en el medio automovilístico en relación a los sistemas de suspensión eran las tradicionales suspensiones pasivas, que aún siguen vigentes en gran medida por su menor costo, pero presentan el problema del compromiso comodidad-estabilidad; mientras más cómodo se diseñe el vehículo

menor rendimiento en el comportamiento dinámico tendrá y viceversa. Es aquí en donde entran en juego los sistemas de regulación de suspensiones semi-activos y activos, que no son más que evoluciones tecnológicas de los sistemas de suspensión pasivos, enmarcados dentro de la tendencia de *suspensiones inteligentes*, las cuales brindan una mayor eficiencia en la estabilidad del vehículo sin disminuir el confort del pasajero. Sus únicos inconvenientes son sus elevados costos y el gran consumo energético del vehículo que presentan.[1]

Los sistemas de suspensión se clasifican en pasivos, semi-activos y activos. Los sistemas de suspensión pasivos se encuentran conformados por elementos pasivos como masas, bobinas o muelles y amortiguadores, los cuales no introducen energía al sistema. Los sistemas de suspensión semi-activos actúan introduciendo fuerzas que son capaces de modificar la rigidez del muelle o del amortiguador mediante subsistemas realimentados que generan una orden para que funcione un actuador. En los sistemas de suspen-

* Autor para correspondencia

Correos-e: cemartin@uc.edu.ve (César Martínez),

ajmillan@uc.edu.ve (Antonio Millán), jesusperez@gmail.com

(Jesús Pérez)

sión activa, los elementos pasivos (muelle y amortiguador) son reemplazados por un elemento activo (actuador hidráulico) que es capaz de generar fuerzas mediante un algoritmo de control, para compensar la falta de los elementos pasivos.[2]

2. Metodología

La metodología se basó en obtener el modelo equivalente del sistema de suspensión neumático semi-activo, después de plantear los diagramas de cuerpo libre del sistema para desarrollar las ecuaciones diferenciales que lo describen, para luego obtener la solución de las variables de salida del sistema por tres métodos numéricos diferentes, el método de Euler, el método de Heun y el método de Runge-Kutta de cuarto orden (RK4). Una vez obtenidas estas soluciones, se desarrolló la interfaz gráfica, se codificó el algoritmo de simulación de una escala en el dominio temporal para representar gráficamente las variables de salida del sistema. Se elaboraron los algoritmos de resolución de las ecuaciones diferenciales que describen al sistema mediante los tres métodos numéricos mencionados anteriormente a través del lenguaje de programación Visual Basic 6.0. Se elaboró el diagrama de bloques del sistema bajo ambiente Matlab Simulink 6.0, se configuró utilizando un método numérico de paso variable (Dormand-Prince) *ode45*. Por último, se introdujeron las mismas entradas tanto a éste como al software elaborado y se compararon las respuestas de las variables de salida del sistema.

3. Descripción y configuración del sistema de suspensión neumático semi-activo

El sistema de suspensión neumático semi-activo a estudiar es un modelo correspondiente a la cuarta parte del vehículo, ya que el mismo tiene muchas de las características fundamentales de los sistemas de suspensión, procurando la simplicidad del modelo [2]. Éste se encuentra compuesto por cuatro elementos pasivos y un elemento activo. El primer grupo está constituido por las masas del conjunto conductor-asiento y del conjunto caucho-rin, un amortiguador hidráulico y una bobina de forma helicoidal (espiral). El agente activo proviene de un subsistema de lazo cerrado con realimentación que genera fuerzas para compensar el balanceo y cabeceo del vehículo. Es importante destacar que para conformar el modelo del sistema de suspensión neumático semi-activo se incluirá solamente la salida del subsistema activo. El sistema de suspensión neumático semi-activo se puede modelar de la forma que se observa en la Figura 1 [3-4].

3.1. Parámetros del sistema

M_{ca} : Masa del conjunto conductor-asiento [Kg]; M_{cr} : Masa del conjunto caucho-rin [Kg]; K_e : Constante de elasticidad de la bobina del espiral [Kg/s]; B_a : Coeficiente de amortiguación del amortiguador hidráulico [Kg/s]; K_c : Constante de elasticidad del caucho [Kg/s].

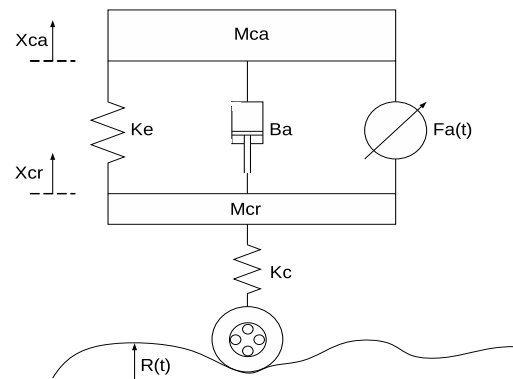


Figura 1: Sistema de suspensión neumático activo[3]

3.2. Variables de entrada del sistema

F_a : Fuerza de control activa [N]; R : Perturbación de entrada de la vía [m].

3.3. Variables de salida del sistema

X_{ca} : Desplazamiento vertical del conjunto conductor-asiento[m]; X_{cr} : Desplazamiento vertical del conjunto caucho-rin [m]. Y_{ca} : Componente vertical de la velocidad del conjunto conductor-asiento[m/s]; Y_{cr} : Componente vertical de la velocidad del conjunto caucho-rin [m/s].

3.4. Diagramas de cuerpo libre del sistema

Con estos diagramas se busca definir las fuerzas externas que intervienen en los dos elementos de interés: la masa del conjunto conductor-asiento (M_{ac}) y la masa del conjunto caucho-rin (M_{cr}), para analizar luego el comportamiento dinámico de las respuestas de estos dos elementos ante posibles perturbaciones en la vía. El diagrama de cuerpo libre de la masa del conjunto conductor-asiento se muestra en la Figura 2.

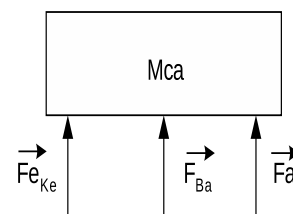


Figura 2: Diagrama de cuerpo libre del conjunto conductor-asiento

Donde;

F_{eK_e} : Fuerza elástica de la bobina del espiral[N];
 F_{B_a} : Fuerza viscosa del amortiguador hidráulico[N];
 F_a : Fuerza de entrada de control activa[N].

Para el caso de la masa del conjunto caucho-rin, el diagrama de cuerpo libre se muestra en la Figura 3, donde:

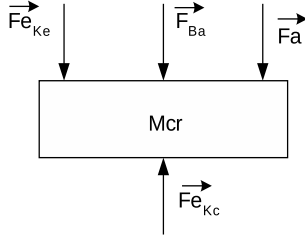


Figura 3: Diagrama de cuerpo libre del conjunto cacho-rin

Fe_{Kc} : Fuerza elástica debida a la característica elástica del cacho[N]. Los pesos (W) de las masas de los conjuntos conductor-asiento y cacho-rin no se han colocado como una fuerza interactuante en los diagramas de cuerpo libre debido a que no producen oscilaciones verticales en ambas masas.

3.5. Ecuaciones diferenciales del sistema

A partir de los diagramas de cuerpo libre elaborados se puede aplicar la segunda Ley de Newton para realizar la sumatoria de fuerzas sobre el eje vertical, para ambas masas y obtener las ecuaciones diferenciales que describen al sistema, éstas son:

$$F_a + B_a(\dot{X}_{cr} - \dot{X}_{ca}) + K_e(X_{cr} - X_{ca}) = M_{ca} \cdot \ddot{X}_{ca} \quad (1)$$

$$K_c(R - X_{cr}) - K_e(X_{cr} - X_{ca}) - B_a(\dot{X}_{cr} - \dot{X}_{ca}) - F_a = M_{cr} \cdot \ddot{X}_{cr} \quad (2)$$

Las ecuaciones (1) y (2) son ecuaciones diferenciales de segundo orden, por lo que para desarrollar el algoritmo de resolución de las variables de salida mediante cualquiera de los métodos numéricos a emplear, se debe inicialmente realizar un cambio de variable para convertir éstas en ecuaciones de primer orden y facilitar la implementación de dichos métodos. Estos cambios son las ecciaciones (3) y (4):

$$\dot{X}_{ca} = Y_{ca} \quad (3)$$

$$\dot{X}_{cr} = Y_{cr} \quad (4)$$

Las ecuaciones (1 – 4) son las cuatro ecuaciones a emplear para aplicar los algoritmos de resolución de los métodos numéricos y así hallar las soluciones aproximadas de las deformaciones y velocidades de las masas del conjunto conductor-asiento (Mca) y del conjunto cacho-rin (Mcr).

4. Algoritmo de resolución del método numérico de Euler

Para la deformación de la masa del conjunto conductor-asiento (Ec. 3):

$$X_{xak+1} = X_{cak} + h \cdot Y_{cak} \quad (5)$$

Para la velocidad del conjunto conductor-asiento (Ec. 1):

$$Y_{cak+1} = Y_{cak} + h \left(-\frac{B_a}{M_{ca}} Y_{cak} + \frac{B_a}{M_{ca}} Y_{crk} - \frac{K_e}{M_{ca}} X_{cak} + \frac{K_e}{M_{ca}} X_{crk} + \frac{1}{M_{ca}} F_{ak} \right) \quad (6)$$

Para la deformación de la masa del conjunto cacho-rin (Ec. 4):

$$X_{crk+1} = X_{crk} + h y_{crk} \quad (7)$$

Para velocidad del conjunto cacho-rin (Ec. 2):[5]

$$Y_{crk+1} = Y_{crk} + h \left[\frac{B_a}{M_{cr}} Y_{cak} - \frac{B_a}{M_{cr}} Y_{crk} - \left(\frac{K_e}{M_{cr}} + \frac{K_c}{M_{cr}} \right) X_{crk} + \frac{K_c}{M_{cr}} R_k - \frac{1}{M_{cr}} F_{ak} \right] \quad (8)$$

5. Algoritmo de resolución del método numérico de Heun

Para la deformación de la masa del conjunto conductor-asiento (Ec. 9)[5]:

$$X_{cak+1} = X_{cak} + \frac{h}{2} [Y_{cak} + (X_{cak(euler)} + h \cdot Y_{cak(euler)})] \quad (9)$$

Para la velocidad del conjunto conductor-asiento (Ec. 10):

$$Y_{cak+1} = Y_{cak} + \frac{h}{2} \left\{ -\frac{B_a}{M_{ca}} Y_{cak} + \frac{B_a}{M_{ca}} Y_{crk} - \frac{K_e}{M_{ca}} X_{cak} + \frac{K_e}{M_{ca}} X_{crk} + \frac{1}{M_{ca}} F_{cak} + \left[Y_{cak(euler)} + h \left(-\frac{B_a}{M_{ca}} Y_{cak(euler)} + \frac{B_a}{M_{ca}} Y_{crk(euler)} + \frac{K_e}{M_{ca}} X_{crk(euler)} + \frac{1}{M_{ca}} F_{cak} \right) \right] \right\} \quad (10)$$

Para la deformación de la masa del conjunto cacho-rin (Ec. 11):

$$X_{crk+1} = X_{crk} + \frac{h}{2} [Y_{crk} + (X_{crk(euler)} + h \cdot Y_{crk(euler)})] \quad (11)$$

Para velocidad del conjunto cacho-rin (Ec. 12) [5-7]

$$Y_{crk+1} = Y_{crk} + \frac{h}{2} \left\{ \frac{B_a}{M_{cr}} Y_{cak} - \frac{B_a}{M_{cr}} Y_{crk} + \frac{K_e}{M_{cr}} X_{cak} - \left(\frac{K_e}{M_{cr}} + \frac{K_c}{M_{cr}} \right) X_{crk} + \frac{K_c}{M_{cr}} R_k - \frac{1}{M_{cr}} F_{ak} + \left[Y_{crk(euler)} + h \left(\frac{B_a}{M_{cr}} Y_{cak(euler)} - \frac{B_a}{M_{cr}} Y_{crk(euler)} + \frac{K_e}{M_{cr}} X_{cak(euler)} - \left(\frac{K_e}{M_{cr}} + \frac{K_c}{M_{cr}} \right) X_{crk(euler)} + \frac{K_c}{M_{cr}} R_k - \frac{1}{M_{cr}} F_{ak} \right) \right] \right\} \quad (12)$$

6. Algoritmo de resolución del método numérico de Runge-Kutta de cuarto orden (RK4)

Para la deformación de la masa del conjunto conductor-asiento, las cuatro ecuaciones predictoras asociadas a esta función son (Ec. 13-16):

$$q_1 = Yca_k \quad (13)$$

$$q_2 = Yca_k + \frac{h}{2}q_1 \quad (14)$$

$$q_3 = Yca_k + \frac{h}{2}q_2 \quad (15)$$

$$q_4 = Yca_k + hq_3 \quad (16)$$

La solución aproximada para la masa del conjunto conductor-asiento es (Ec. 17):

$$Xca_{k+1} = Xca_k + \frac{h}{6}(q_1 + 2q_2 + 2q_3 + q_4) \quad (17)$$

Para la velocidad del conjunto conductor-asiento, las cuatro ecuaciones predictoras asociadas a esta función son las ecuaciones (18 – 21):

$$f_1 = -\frac{Ba}{Mca}Yca_k + \frac{Ba}{Mca}Ycr_k - \frac{Ke}{Mca}Xca_k + \frac{Ke}{Mca}Xcr_k + \frac{1}{Mca}Fa_k \quad (18)$$

$$f_2 = -\frac{Ba}{Mca}\left(Yca_k + \frac{h}{2}f_1\right) + \frac{Ba}{Mca}\left(Ycr_k + \frac{h}{2}g_1\right) - \frac{Ke}{Mca}\left(Xca_k + \frac{h}{2}q_1\right) + \frac{Ke}{Mca}\left(Xcr_k + \frac{h}{2}s_1\right) + \frac{1}{Mca}Fa_{(t_k+h/2)} \quad (19)$$

$$f_3 = -\frac{Ba}{Mca}\left(Yca_k + \frac{h}{2}f_2\right) + \frac{Ba}{Mca}\left(Ycr_k + \frac{h}{2}g_2\right) - \frac{Ke}{Mca}\left(Xca_k + \frac{h}{2}q_2\right) + \frac{Ke}{Mca}\left(Xcr_k + \frac{h}{2}s_2\right) + \frac{1}{Mca}Fa_{(t_k+h/2)} \quad (20)$$

$$f_4 = -\frac{Ba}{Mca}\left(Yca_k + \frac{h}{2}f_3\right) + \frac{Ba}{Mca}\left(Ycr_k + \frac{h}{2}g_3\right) - \frac{Ke}{Mca}\left(Xca_k + \frac{h}{2}q_3\right) + \frac{Ke}{Mca}\left(Xcr_k + \frac{h}{2}s_3\right) + \frac{1}{Mca}Fa_{(t_k+h)} \quad (21)$$

La solución aproximada para la velocidad del conjunto conductor-asiento es la ecuación (22):

$$Yca_{k+1} = Yca_k + \frac{h}{6}(f_1 + 2f_2 + 2f_3 + f_4) \quad (22)$$

Para la deformación de la masa del conjunto caucho-rin, las cuatro ecuaciones predictoras asociadas a esta función son las ecuaciones (23 – 26):

$$s_1 = Ycr_k \quad (23)$$

$$s_2 = Ycr_k + \frac{h}{2}s_1 \quad (24)$$

$$s_3 = Ycr_k + \frac{h}{2}s_2 \quad (25)$$

$$s_4 = Ycr_k + hs_3 \quad (26)$$

La solución aproximada para la deformación del conjunto caucho-rin es la ecuación (27):

$$Xcr_{k+1} = Xcr_k + \frac{h}{6}(s_1 + 2s_2 + 2s_3 + s_4) \quad (27)$$

Para velocidad del conjunto caucho-rin, las cuatro ecuaciones predictoras asociadas a esta función son las ecuaciones (28 – 31):

$$g_1 = \frac{Ba}{Mca}Yca_k - \frac{Ba}{Mca}Ycr_k + \frac{Ke}{Mca}Xca_k - \left(\frac{Ke}{Mcr} + \frac{Kc}{Mcr}\right)Xcr_k + \frac{Kc}{Mcr}R_k - \frac{1}{Mcr}Fa_k \quad (28)$$

$$g_2 = \frac{Ba}{Mcr}\left(Yca_k + \frac{h}{2}f_1\right) - \frac{Ba}{Mcr}\left(Ycr_k + \frac{h}{2}g_1\right) + \frac{Ke}{Mcr}\left(Xca_k + \frac{h}{2}q_1\right) - \left(\frac{Ke}{Mcr} + \frac{Kc}{Mcr}\right)\left(Xcr_k + \frac{h}{2}s_1\right) + \frac{Kc}{Mcr}R_{(t_k+h/2)} - \frac{1}{Mcr}Fa_{(t_k+h/2)} \quad (29)$$

$$g_3 = \frac{Ba}{Mcr}\left(Yca_k + \frac{h}{2}f_2\right) - \frac{Ba}{Mcr}\left(Ycr_k + \frac{h}{2}g_2\right) + \frac{Ke}{Mcr}\left(Xca_k + \frac{h}{2}q_2\right) - \left(\frac{Ke}{Mcr} + \frac{Kc}{Mcr}\right)\left(Xcr_k + \frac{h}{2}s_2\right) + \frac{Kc}{Mcr}R_{(t_k+h/2)} - \frac{1}{Mcr}Fa_{(t_k+h/2)} \quad (30)$$

$$g_4 = \frac{Ba}{Mcr}\left(Yca_k + hf_3\right) - \frac{Ba}{Mcr}\left(Ycr_k + hg_3\right) - \frac{Ke}{Mcr}\left(Xca_k + hq_3\right) - \left(\frac{Ke}{Mcr} + \frac{Kc}{Mcr}\right)\left(Xcr_k + hs_3\right) + \frac{Kc}{Mcr}R_{(t_k+h)} - \frac{1}{Mcr}Fa_{(t_k+h)} \quad (31)$$

La solución aproximada para la velocidad del conjunto caucho-rin es la ecuación (32) [5-6]:

$$Ycr_{k+1} = Ycr_k + \frac{h}{6}(g_1 + 2g_2 + 2g_3 + g_4) \quad (32)$$

6.1. El programa simulador

El desarrollo del programa simulador se basó en la elaboración de un algoritmo codificado en el lenguaje de programación Visual Basic 6.0 y una interfaz gráfica que muestra el esquema del sistema de suspensión neumático semi-activo. El usuario, ubicando el cursor sobre cada uno de los parámetros del sistema (Mca, Mcr, Kc, Ke, Ba), despliega una ventana que permite indicar el valor que desee de cada uno de dichos parámetros. Una vez definidos los valores de los parámetros, el usuario define sobre la misma ventana principal las condiciones iniciales, tanto de la deformación y velocidad de la masa del conjunto conductor-asiento como de la masa del conjunto caucho-rin. En esta misma ventana principal, se define el intervalo de tiempo que se desea observar en la simulación y el número de pasos (M) que se desean utilizar para la resolución de los algoritmos de los diferentes métodos numéricos empleados. El usuario, ubicando el cursor sobre la perturbación de la vía (R) o de la fuerza de control activa (Fa), define las mismas dentro de una gama de

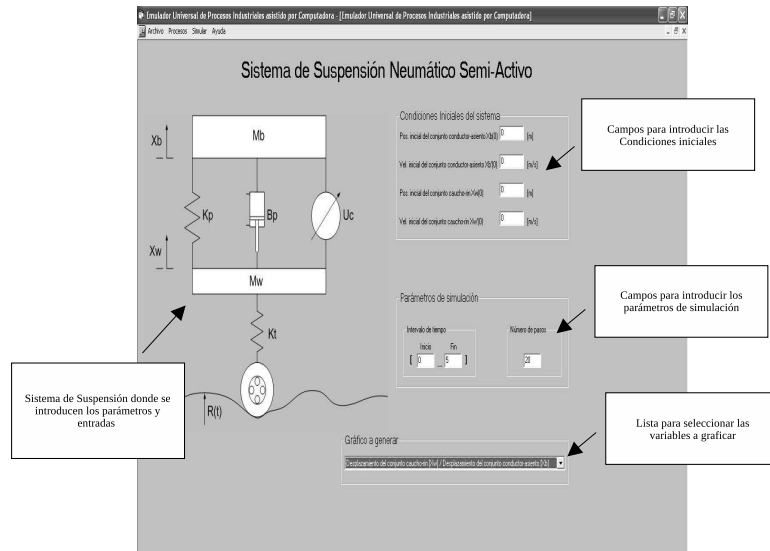


Figura 4: Interfaz gráfica del programa simulador

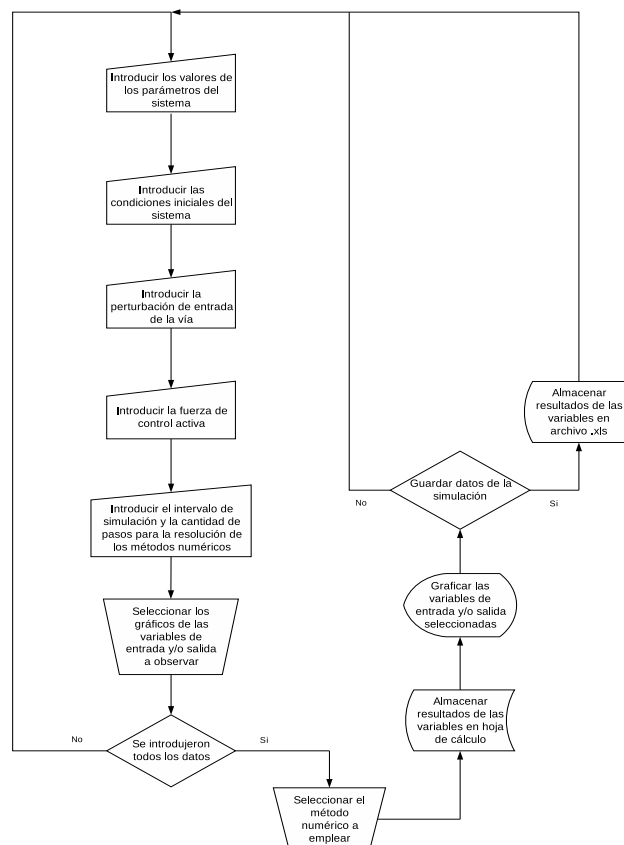


Figura 5: Diagrama de flujo del programa

posibilidades, ofrecidas a través de una ventana desplegable que se activa una vez que se ha seleccionado una de estas opciones. Una vez configurados los parámetros, condiciones iniciales y entradas, el usuario selecciona, a través de una lista desplegable los gráficos de las entradas (R , F_a) y/o salidas (X_{ca} , X_{cr} , Y_{ca} , Y_{cr}) que desea observar y a través del

menú *Simular*, el tipo de método numérico (Euler, Heun o Runge–Kutta de cuarto orden) que desea para resolver el sistema. Es importante resaltar que los gráficos que se pueden observar, se realizan por medio de una aplicación que es ejecutada en Microsoft Excel, programada bajo el lenguaje de programación Visual Basic 6.0. [8] Por último, el usuario, a

través del menú *Archivo*, tiene la posibilidad de guardar los datos en archivos de Microsoft Excel (.xls) de las variables de entrada, salida y de los parámetros de una simulación en específico que desee, para su posterior uso. En la Figura 4 se observa la interfaz gráfica del simulador. El diagrama de flujo del programa que se elaboró, en donde se detalla el proceso de introducción de parámetros y entradas al sistema, la visualización de las salidas y su almacenamiento se muestra en la Figura 5.

7. Resultados

Para evaluar el correcto funcionamiento del programa simulador, se introdujeron varios tipos de entrada, de perturbación de la vía (R) y de fuerzas de control activas (Fa), tanto al programa simulador como al diagrama de bloques del sistema elaborado en Matlab Simulink, con la finalidad de realizar las comparaciones de las salidas correspondientes por ambos métodos y concluir sobre la exactitud de la aplicación desarrollada.

Los valores nominales de los parámetros del sistema que se introdujeron para estas simulaciones son: $B_a = 1000 \text{ Kg/s}$, $K_e = 68121 \text{ Kg/s}$, $K_c = 190000 \text{ Kg/s}$, $M_{ca} = 290 \text{ Kg}$ y $M_{cr} = 59 \text{ Kg}$. Las condiciones iniciales de los desplazamientos de los conjuntos conductor-asiento y caucho-rin fueron respectivamente: $X_{ca}(0) = 0$, $X_{cr}(0) = 0$. Para el caso de las condiciones iniciales de las velocidades de los conjuntos conductor-asiento y caucho-rin se tomó respectivamente: $Y_{ca}(0) = 0$, $Y_{cr}(0) = 0$. Se simuló un tiempo de 4 segundos, se tomó un número de pasos de igual 1000, es decir, un tamaño de paso de $h = 0,004$.

En la primera simulación se introdujo una perturbación de entrada de la vía (R) tipo escalón, con una amplitud de $-0,1 \text{ m}$ a partir de $t = 0,5 \text{ s}$; ésta entrada reproduce una caída típica abrupta de 10 cm del sistema de suspensión en la vía. Se introdujo también una fuerza de control activa (Fa) tipo rampa, con una pendiente de $0,01 \text{ N/s}$ a partir de $t = 0 \text{ s}$, dicha entrada reproduce en este caso una fuerza de separación lineal en función del tiempo entre la masa del conjunto conductor-asiento y la masa del conjunto caucho-rin. Los desplazamientos de los conjuntos caucho-rin (Xcr) y conductor-asiento (Xca) simulados a través del programa simulador bajo el método numérico de Heun se muestran en la Figura 6.

Los desplazamientos de los conjuntos conductor-asiento (Xca) y caucho-rin (Xcr), simulados a través del programa Matlab Simulink bajo estas condiciones se muestran en las Figuras 7 y 8 respectivamente.

En la segunda simulación del sistema se introdujo una perturbación de entrada de la vía (R) tipo escalón, con una amplitud de $0,15 \text{ m}$ a partir de $t = 0,2 \text{ s}$; ésta entrada reproduce una subida abrupta de 15 cm del sistema de suspensión sobre la vía. Se introdujo también una fuerza de control activa (Fa) constante, de valor $0,05 \text{ N}$ a partir de $t = 0 \text{ s}$, dicha entrada reproduce en este caso una fuerza de separación constante entre la masa del conjunto conductor-asiento y la

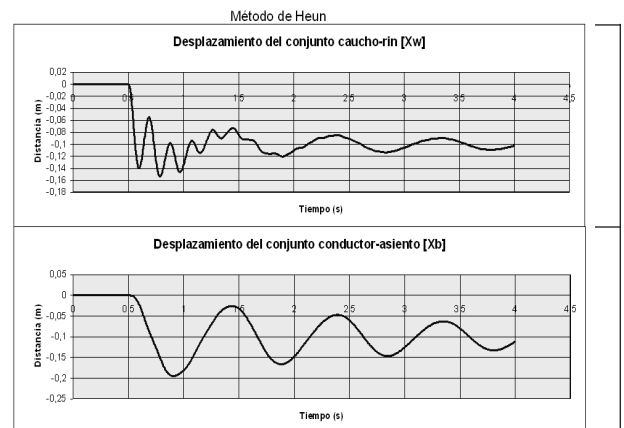


Figura 6: Desplazamientos de Xcr y Xca bajo el programa simulador

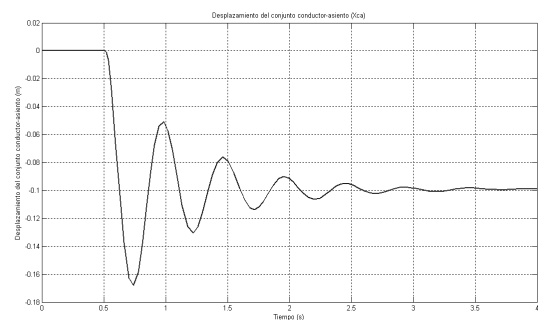


Figura 7: Desplazamiento de Xca bajo el programa Matlab Simulink

masa del conjunto caucho-rin. Las velocidades de los conjuntos caucho-rin (Y_{cr}) y conductor-asiento (Y_{ca}) simulados a través del programa simulador bajo el método numérico de Runge-Kutta de cuarto orden (RK4) se muestran en la Figura 9.

Las velocidades de los conjuntos conductor-asiento (Y_{ca}) y caucho-rin (Y_{cr}), simuladas a través del programa Matlab Simulink bajo estas condiciones se muestran en las Figuras 10 y 11 respectivamente.

En la tercera simulación del sistema se introdujo una perturbación de entrada de la vía (R) tipo rampa, con una pendiente de $0,5 \text{ m/s}$ a partir de $t = 0 \text{ s}$; ésta entrada reproduce una vía de subida con una pendiente constante. Se introdujo también una fuerza de control activa (Fa) tipo rampa, con una pendiente de $0,05 \text{ N/s}$ a partir de $t = 0 \text{ s}$, dicha entrada reproduce nuevamente una fuerza de separación lineal en función del tiempo entre la masa del conjunto conductor-asiento y la masa del conjunto caucho-rin. Los desplazamientos de los conjuntos caucho-rin (Xcr) y conductor-asiento (Xca) simulados a través del programa simulador bajo el método numérico de Euler se muestran en la Figura 12.

Los desplazamientos de los conjuntos conductor-asiento (Xca) y caucho-rin (Xcr), simuladas a través del programa Matlab Simulink bajo estas condiciones se muestran en las Figuras 13 y 14 respectivamente.

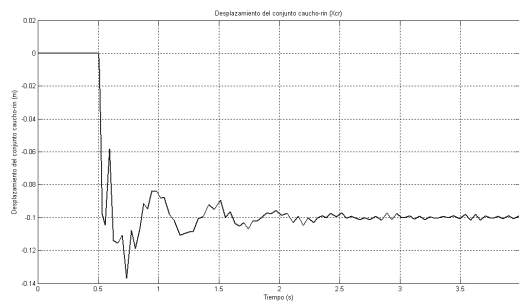


Figura 8: Desplazamiento de Xcr bajo el programa Matlab Simulink

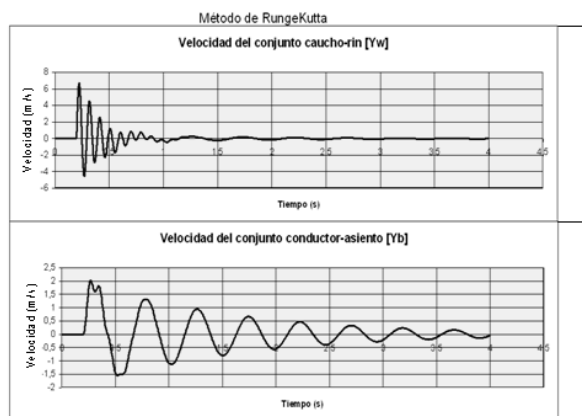


Figura 9: Velocidades de Ycr y Yca bajo el programa simulador

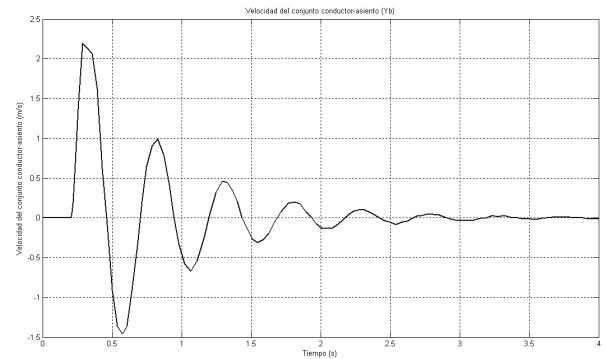


Figura 10: Velocidad de Yca bajo el programa Matlab Simulink

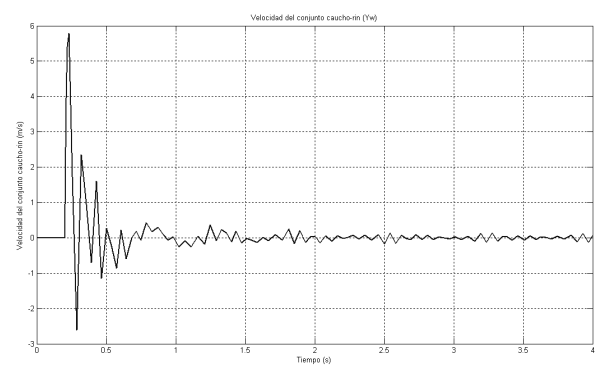


Figura 11: Velocidad de Ycr bajo el programa Matlab Simulink

8. Análisis de resultados

El lenguaje de programación Visual Basic 6.0 utilizado para codificar algoritmos de métodos numéricos para la resolución de ecuaciones diferenciales no es apropiado, debido a que no es un lenguaje de programación dedicado para tales fines, por lo que carece de la precisión requerida en el cálculo matemático multivariable y la codificación se hace muy extensa para realizar funciones que otros lenguajes de programación dedicados para tales fines pueden hacer con menor número de instrucciones y mayor facilidad.

Para un número máximo de 1000 pasos, el método numérico de Heun presenta la mayor precisión en la resolución de las variables de salida del sistema (desplazamientos y velocidades de los conjuntos conductor-asiento y caucho-rin), seguidamente del Método Numérico de Euler y por último el Método Numérico de Runge-Kutta de cuarto orden (RK4). Para simulaciones típicas el método numérico de Euler resuelve las ecuaciones del sistema en un tiempo promedio de un minuto ocho segundos (1:08s), el método numérico de Heun en un tiempo promedio de un minuto cuarenta y ocho segundos (1:48s) y el método numérico de Runge-Kutta de cuarto orden (RK4) en un tiempo promedio de tres minutos y diez segundos (3:10s).

El método de Euler resuelve las variables del sistema en promedio, un 64,21 % más rápido que el método de Runge-Kutta de cuarto orden (RK4) y un 37,03 % más rápido que el

método de Heun.

A medida que se aumenta la cantidad de pasos (y por ende se reduce el tamaño de paso) en los algoritmos de resolución implementados, se observa una mayor precisión en los cálculos de las variables de salida del sistema. Introducir en los algoritmos de resolución de los métodos de Euler, Heun y Runge-Kutta de cuarto orden (RK4) una cantidad aproximada de 2000 pasos, resolvería las variables del sistema con una exactitud cercana al 100 % del valor verdadero de dichas variables.

9. Conclusiones

La aplicación desarrollada permite evaluar adecuadamente el comportamiento dinámico de un sistema de suspensión neumático semi-activo en respuesta a perturbaciones que representan condiciones de trabajo típicas.

La disponibilidad de resolver las simulaciones mediante diferentes métodos numéricos permite al usuario decidir sobre el compromiso entre velocidad y tiempo de simulación.

Referencias

- [1] Alberdi J. (2003). «Manuales de Automoción. Amortiguadores y Suspensión». Campus Tecnológico de la Universidad de Navarra. TECNUN. Escuela Superior de Ingenieros.

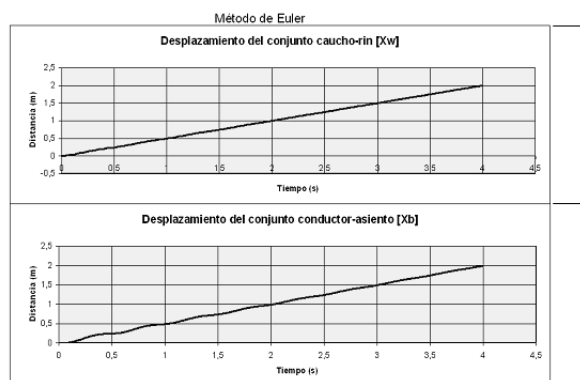


Figura 12: Desplazamientos de Xcr y Xca bajo el programa simulador

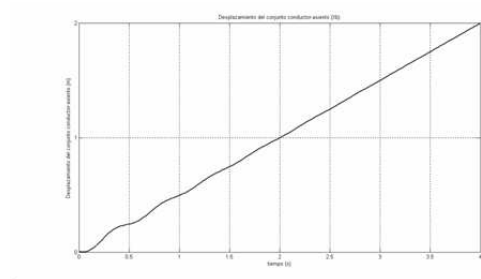


Figura 13: Desplazamiento de Xca bajo el programa Matlab Simulink

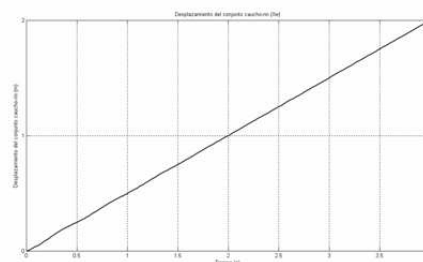


Figura 14: Desplazamiento de Xcr bajo el programa Matlab Simulink

- [2] López M. J., López B., Díaz V. (2005). «Algoritmo de aprendizaje por refuerzo continuo para el control de un sistema de suspensión semi-activa». *Revista Iberoamericana de Ingeniería Mecánica*. Vol. 9. N° 2, pp. 77-91.
- [3] Anakwa W., Thomas D., Jones S., Bush J., Green D., Anglin G., Rio R., Sheng J., Garrett S., Chen L. (2002). «Development and Control of a Prototype Pneumatic Active Suspension System». *IEEE Transactions on Education*. Vol. 45. N° 1, pp. 43-49.
- [4] Font J., Dols J. F. (1997). «Tratado sobre automóviles. Tomo IV: La Dinámica del automóvil». Universidad Politécnica de Valencia. España.
- [5] Fink K., Mathews J. (2000). «Métodos Numéricos con Matlab». Pearson Prentice-Hall Inc.
- [6] Patrick O., Wheatley C. (2000). «Análisis Numérico con aplicaciones». Pearson Prentice-Hall Inc.
- [7] Nakamura S. (1992). «Métodos Numéricos aplicados con software». Prentice-Hall Hispanoamericana.
- [8] Gironás J., Fernández B. (2003). «SWMM-UC, una interfaz computacional para la modelación de sistemas de drenaje urbano». XVI Congreso Chileno de Ingeniería Hidráulica. Santiago. Chile.