

Propuesta para el cálculo de las tensiones normales, en el caso de pretensado con armadura postesa con adherencia posterior, empleando la regla del desplazamiento del esfuerzo de compresión de pretensado por efecto de un momento flector

Giovanni Bianco Accardi

Departamento de Estructuras. Escuela de Ingeniería Civil de la Universidad de Carabobo

Resumen.-

En el concreto pretensado, el comportamiento de la sección bajo la condición de no aceptar tracción en el concreto, o la de aceptar tracción pero no la fisuración, pospuso la búsqueda de soluciones rigurosas o confiables para la determinación del estado de tensión normal sobre los tres materiales (concreto, armadura pasiva y activa) cuando la sección, en condición de servicio, se encuentra fisurada. La reglamentación moderna acepta, desde hace tiempo, la fisuración bajo ciertas condiciones ambientales y de carga, pero el fenómeno conduce a incrementos notables de tracciones en las armaduras y de compresión en el concreto que condicionan el uso de la pieza y que por ende ha acelerado la búsqueda de soluciones razonables tendientes a la obtención del estado de tensión normal. Desde hace tiempo el problema ha sido resuelto en el caso de armadura pretesa, pero en el caso de la armadura postesa las soluciones han sido relativamente más recientes y aproximadas. Esta propuesta, aunque es válida en pre y postfisuración, tiene sentido práctica en postfisuración; pretende ser exacta y trata en problema como uno común de flexión-compresión, haciendo uso de relaciones del tipo monomio (para el concreto y la armadura pasiva), muy poco usadas y mencionadas en la referencia [1].

Palabras clave: Secciones pretensadas fisuradas, tensiones normales en secciones fisuradas con armadura postesa, Cálculo de tensiones normales en postfisuración

Proposal for the calculation of the normal tensions, in the case of prestressed with armor in traction after the hardening of the concrete with later adherence, using the rule of the displacement of the compression effort of prestressed for effect of a flexion moment

Abstract.-

In the prestressed concrete, the behavior of the section under the condition of not accepting traction in the concrete, or the one of accepting tractions but not the cracked, postponed the search of rigorous or reliable solutions for the determination of the state of normal tension on the three specified materials (concrete, passive and active armor) in condition of service, it is cracked. The modern regulation accepts the cracking, under certain environmental conditions and of load, but the phenomenon leads to remarkable increments of tractions in the armors and of compression in the concrete that you/they condition the use of the piece and in consequence it has accelerated the search of solutions rigorous or satisfactory guided to the obtaining of the state of normal tension. For some time the problem has been solved in the case of in armor previously in traction, but in the case of the armor with later traction the solutions have been relatively more recent and more approximate. This proposal, although is valid before or after the cracking, he/she makes practical sense in cracking condition, it seeks to be exact and it is in problem like an about flexion-compression, making use of relationships of the type monomial, very little used and already mentioned in the reference [1]

Keywords: Cut cracked prestressed, Tense normal in cracked sections with armor put later on in traction, Calculation of normal tensions in cracked sections

1. Generalidades y premisas

En el caso del pretensado con armadura postesa, después de la obtención del estado de tensión normal sobre el concreto y las armaduras en la fase de carga

Correo-e: gbianco-a@cantv.net (Giovanni Bianco Accardi)

$pre + M_1at = 0$ (fase de obligatoria verificación), y su respectiva inyección del conducto con lechada de cemento, se puede hacer depender el estudio del estado de tensión normal, para todas las otras condiciones de carga, del área homogeneizada, A_e , y de sus características geométricas consecuentes. Para ello se requerirá del empleo de un oportuno artificio, que además permitirá tratar en todos los casos y de la manera habitual, la regla del desplazamiento del esfuerzo P_j por efecto de un momento flector, a pesar de la limitación implícita para la obtención del correcto valor de la tensión normal sobre la armadura activa (limitación obviada por intermedio del análisis real del problema).

De esa manera se podrá obtener para el estado de tensión en pre o postfisuración, resultados teóricamente exactos, también en este tipo de pretensado, cuando se hace uso de la regla del desplazamiento del esfuerzo de compresión por pretensado. Además, el procedimiento empleado permite tratar el pretensado con armadura postesa con adherencia posterior, de la misma forma que el pretensado con armadura pretesa, cuando se pretende conocer el estado de tensión normal sobre el concreto y la armadura pasiva, mientras para la armadura activa, habrá que recurrir a un oportuno y evidente artificio.

En el caso de la armadura pretesa, la regla del desplazamiento del esfuerzo P_j por efecto de un momento flector genérico M está subordinada a dos condiciones: constancia en el tiempo del esfuerzo P_j y constancia en el tiempo de la geometría y área de la sección. El artificio usualmente empleado por el autor para obviar la primera condición es, para cada tiempo, el de suponer el esfuerzo P_j aplicado en la armadura de pretensado (en isostaticidad) y a partir de allí suponer la intervención de momento flector genérico ($M_1, M_1 + M_2, M_1 + M_2 + M_q$); con respecto a la segunda condición (constancia en el tiempo de la geometría y área de la sección), no hay que aplicar ningún artificio ya que la sección pretensada con armadura pretesa sí cumple con esa condición (en secciones simples, como las actualmente tratadas).

En el caso actual de sección con armadura postesa con adherencia posterior, la segunda condición no se cumple, por la inyección posterior del conducto. El criterio desarrollado en el caso de la armadura pretesa podrá ser empleado solo para el cálculo de las tensiones normales sobre el concreto y sobre la armadura pasiva, por cuanto la flexión-compresión por pretensado no afecta a la armadura activa: ésta será afectada solo por la flexión producida por M_2 y M_q .

a) Justificación y resumen de objetivo

Para el cálculo de las tensiones normales sobre el concreto y las armaduras (activa y pasiva), en los casos en que se requiera una mayor precisión de los resultados, sobretodo cuando el área de los conductos supera la limitación del 2 % de A_g (lo que en la práctica constructiva no es inusual), conviene hacer uso del siguiente procedimiento de cálculo, teóricamente exacto, si se desprecia el efecto insignificante del aumento de tracción en las armaduras por el peso propio de la lechada, que se basa:

- En la regla del desplazamiento del esfuerzo P_j por efecto de un momento flector;
- En el mismo tratamiento dado al pretensado con armadura pretesa, haciendo una oportuna salvedad cuando se refiere a la tensión normal sobre la armadura activa, ya que para ella, la primera fase real de carga ($pre + M_1at = 0$), es diferente a la primera fase real de carga ($pre + M_1at = 0$) en el caso de la armadura postesa.
- Se precisará cuál es el artificio a emplear para obtener también la tensión normal sobre la armadura activa.

b) Obtención del esfuerzo de pretensado ficticio y de la excentricidad ficticia de dicho esfuerzo

La primera fase real de carga ($pre + M_1at = 0$), sobre la sección de solo concreto, con características geométricas $A_c, I_c, i_c^2, e_p, y_1, y_2, A_p, A_s, y_p, y_s$, etc.), esquematizada en la Figura 1, se representa por las relaciones:

$$\begin{aligned}\sigma_c &= \frac{P_i}{A_c} + \frac{P_i \cdot e_p}{I_c} \cdot y + \frac{M_1}{I_c} \cdot y \\ \sigma_p &= \sigma_{est,i} = \frac{S_{est,i}}{A_p} \\ \sigma_s &= \alpha_e \left(\frac{P_i}{A_c} + \frac{P_i \cdot e_p}{I_c} \cdot y_p + \frac{M_1}{I_c} \cdot y_p \right)\end{aligned}$$

en donde M_1 se deriva del área de solo concreto, A_c , y el peso por unidad de volumen del concreto, γ_c (incluyendo las armaduras pasivas), supuesto igual a 25.000 N/m^3 .

Supóngase que la inyección de los conductos se realiza inmediatamente o poco tiempo después de la presolicitación (por razones que caracterizan a este tipo de pretensado). Por simplicidad de exposición, y sin perder la generalización de la idea, se hará coincidir con el tiempo inicial, $t = 0$, la culminación de la inyección del conducto. Inmediatamente después de la inyección,

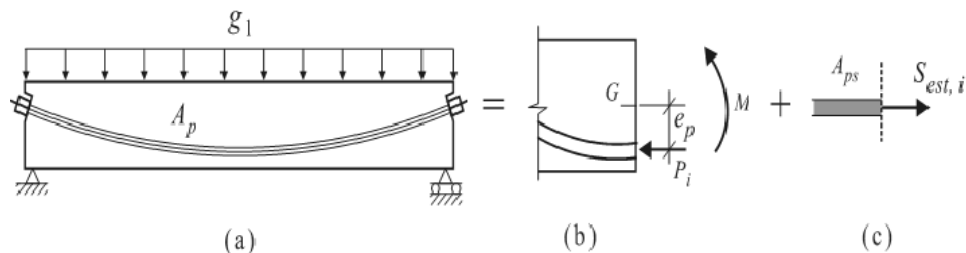


Figura 1: Esquema equivalente cuando $pre + M_1$ es la primera fase real de carga en la sección. (a) El esfuerzo P_i , aplicado en el baricentro del conducto, supuesto sin armadura activa, conjuntamente con el momento flector M_1 por peso propio; (b) Armadura aislada A_{ps} (armadura activa supuesta sin previa tracción) sometida al esfuerzo $S_{est,i}$.

el producto de inyección, por no estar endurecido, no contribuye al incremento del área activa de la sección ni en sus otras características geométricas, razón por la que el estado de tensión sobre la sección genérica se expresa:

$$\sigma_c = \frac{P_i}{A_c} + \frac{P_i \cdot e_p}{I_c} \cdot y + \frac{M_1}{I_c} \cdot y \begin{cases} \text{para } y = y_1 \Rightarrow \sigma_{c1} \\ \text{para } y = y_2 \Rightarrow \sigma_{c2} \end{cases} \quad (1)$$

$$\sigma_p = \sigma_{est,i} = \frac{S_{est,i}}{A_p} \quad (2)$$

$$\sigma_s = \alpha_e \left(\frac{P_i}{A_c} + \frac{P_i \cdot e_p}{I_c} \cdot y_p + \frac{M_1 + \Delta M_1}{I_c} \cdot y_s \right) \quad (3)$$

siendo ΔM_1 el incremento del momento flector por peso adicional de la lechada de cemento inyectada. Ese estado de tensión se representa en la Figura 2 y se precisa que en la hipótesis, por absurdo, de no existir pérdidas de pretensado (es decir, sin retracción, ni fluencia y ni relajamiento), ni incremento de carga, ese estado de tensión no cambia en el tiempo, a pesar del inevitable endurecimiento del producto de inyección y su consecuente solidaridad con la sección.

El momento $M_1 + \Delta M_1$ es causado por el peso propio del elemento, en la sección considerada, y se deriva del esquema estático de la viga cargada por g_1 ; esta carga se obtiene como producto del área de la sección bruta, A_g , y el peso por unidad de volumen del concreto, γ_c (incluyendo la armadura pasiva y activa), supuesto igual a 25.000 N/m^3 .

El modelo representativo del estado de tensión, por el hecho de que ΔM_1 actúa antes del endurecimiento de la lechada, es conceptualmente idéntico al de la fase $pre + M_1$ at = 0, entendida ahora como fase $pre + (M_1 + \Delta M_1)$ at = 0.

Considérese ahora una análoga sección pretensada con armadura pretesa, con las mismas dimensiones de

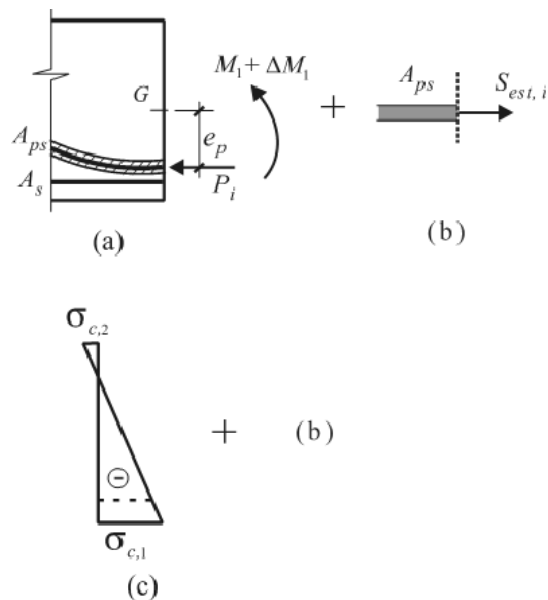


Figura 2: Modelo para la representación del estado de tensión normal sobre el concreto y las armaduras (pasiva y activa) en las condición correspondiente al pretensado y posterior inyección del conducto con lechada de cemento. (a) Sección sometida a P_i excéntrico más el momento flector M_1 (correspondiente a la peso propio del elemento con conducto no inyectado) + ΔM_1 (correspondiente a la inyección del conducto); (b) Aislamiento del esfuerzo de tracción previo, $S_{est,i}$, presente en la armadura activa; (c) Tensión normal sobre el concreto.

la sección anterior, la misma armadura (activa y pasiva) adherida al concreto, con área A_e obtenida como consecuencia de la homogeneización de la sección y su consecuente nuevas características geométricas ($I_e, I_e^2, y_p, y_1, y_2$, etc.); supóngase además que la sección esté sometida a un momento flector por carga exterior $M_1 + \Delta M_1$ definido anteriormente. Para que el concreto tenga el mismo estado de tensión normal, caracterizado en sus bordes por las tensiones normales δc_1 y δc_2 derivadas de las relaciones (1), se deberá obtener

los valores y que satisfagan el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} \sigma_{c1} = \frac{P_i}{A_e} + \frac{\bar{M}_{pre,i}}{I_e} \cdot y_1 + \frac{M_1 + \Delta M_1}{I_e} \cdot y_1 \\ \sigma_{c2} = \frac{P_i}{A_e} + \frac{\bar{M}_{pre,i}}{I_e} \cdot y_2 + \frac{M_1 + \Delta M_1}{I_e} \cdot y_2. \end{cases} \quad (4)$$

Para facilitar la búsqueda de la solución, se hace $\bar{M}_{pre,i} = \bar{P}_i \cdot \bar{e}_{p,i}$, por lo que el sistema anterior de ecuaciones se expresa:

$$\begin{cases} \sigma_{c1} = \frac{P_i}{A_e} + \frac{\bar{M}_{pre,i}}{I_e} \cdot y_1 + \frac{M_1 + \Delta M_1}{I_e} \cdot y_1 \\ \sigma_{c2} = \frac{P_i}{A_e} + \frac{\bar{M}_{pre,i}}{I_e} \cdot y_2 + \frac{M_1 + \Delta M_1}{I_e} \cdot y_2. \end{cases} \quad (5)$$

La solución de este sistema es:

$$\bar{M}_{pre,i} = \frac{(\sigma_{c1} - \sigma_{c2})I_e - (M_1 + \Delta M_1)(y_1 - y_2)}{(y_1 - y_2)} \quad (6)$$

$$\bar{P}_i = \frac{A_e}{I_e} \left[\sigma_{c1} I_e - (M_1 + \Delta M_1) y_1 - \bar{M}_{pre,i} \cdot y_1 \right] \quad (7)$$

de donde:

$$\bar{e}_{p,i} = \frac{\bar{M}_{pre,i}}{\bar{P}_i} = e_p \text{ (sección homogeneizada)}. \quad (8)$$

Los términos \bar{P}_i y $\bar{e}_{p,i}$ así obtenidos se han de entender, respectivamente, como el *esfuerzo ficticio de compresión por pretensado* y la *excentricidad ficticia del esfuerzo* \bar{P}_i que actuando sobre la sección homogeneizada A_e , con sus características geométricas consecuentes, reproducen sobre los bordes extremos de la sección, y sobre la armadura pasiva, las mismas tensiones normales existentes en la fase $pre + M_1 + \Delta M_1$ at = 0 sobre la sección con conducto inyectado y material de inyección endurecido. Sin embargo, dichos valores \bar{P}_i y $\bar{e}_{p,i}$ no pueden producir el mismo estado de tensión sobre la armadura activa (por la génesis de ambos tipo de pretensado); para obviar este inconveniente, se recurre al artificio mostrado en el modelo convencional de la Figura 3, que consiste en *restarle* al esquema representativo ya conocido para el estudio de las tensiones normales en las secciones pretensadas con armadura pretesa, un término que sí existe en el pretensado con armadura pretesa (y que no existe en el pretensado con armadura postesa), expresado por la Ec. (9)

$$\begin{aligned} & \alpha_e \left(\frac{P_i}{A_e} + \frac{P_i \cdot e_{p,i}}{I_e} \cdot y_p + \frac{M_1 + \Delta M_1}{I_e} \cdot y_p \right) \\ &= \alpha_e \cdot \frac{P_i}{A_e} \cdot \left(1 + \frac{\bar{e}_{1,i}}{i_e} \cdot y_p \right) \\ &= \alpha_e \cdot \sigma_{cp} \text{ (calculado en la fase } pre + M_1 + \Delta M_1 \text{ at} = 0) \end{aligned} \quad (9)$$

en donde:

$$\bar{a}_1 = \frac{M_1 + \Delta M_1}{\bar{P}_i} \quad ; \quad \bar{e}_{1,i} = \bar{a}_1 + \bar{e}_{p,i}. \quad (10)$$

Entonces, se puede afirmar que el término de la Ec. (9) es la diferencia físico-matemática que separa el estudio de las tensiones normales de las secciones pretensadas con armadura postesa con adherencia posterior (a partir del endurecimiento del producto de inyección), del estudio de las tensiones normales sobre secciones pretensadas con armadura pretesa. Es decir: todo estudio riguroso y global (para el concreto, armadura pasiva y armadura activa) del estado de tensión normal sobre la sección pretensada con armadura postesa con adherencia posterior que se quiera asimilar al estudio de una equivalente sección de concreto pretensado con armadura pretesa, y que se realice empleando el criterio del desplazamiento del esfuerzo de compresión por pretensado, P_j , no podrá ser realizado si no se toma en cuenta el término de Ec. (9) que afecta solamente a la armadura activa.

Observaciones

1. En cada tiempo de análisis ($t = 0, \dots, t = j, \dots, t = \infty$), se deberán obtener los valores del esfuerzo de compresión por pretensado ($P_i, \dots, P_j, \dots, P$) para luego obtener los respectivos valores ficticios ($\bar{P}_i, \dots, \bar{P}_j, \dots, \bar{P}$) y ($\bar{e}_{p,i}, \dots, \bar{e}_{p,j}, \dots, \bar{e}_p$).
2. El término Ec. (9) también debe ser tomado en cuenta en cada tiempo t escogido para el análisis.
3. Resulta, $e_p = \bar{e}_{p,i} = \bar{e}_{p,j} = \bar{e}_p$, para los diferentes tiempos; entonces el valor genérico \bar{P}_j se puede obtener despejándolo directamente en una de las dos relaciones Ec. (4), previa sustitución del valor de la tensión normal obtenida en la relación Ec. (1).
4. Si no interesa el estudio de la tensión normal sobre la armadura activa, en todo el análisis se puede prescindir de la existencia y del efecto del término Ec. (1), ya que el mismo no interviene en el cálculo de las tensiones normales sobre el concreto y sobre la armadura pasiva.
5. En prefisuración, la aplicación de la propuesta hace falta solamente cuando por alguna razón se ha de emplear la relación del tipo binomio o del tipo monomio; de lo contrario se alarga injustificadamente la solución del problema, ya que por otra vía, como por ejemplo por intermedio del

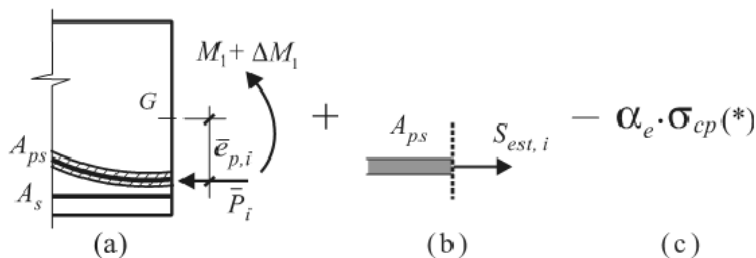


Figura 3: Modelo para la obtención del estado de tensión normal en el caso de pretensado con armadura postesa en la fase $M_1 + \Delta M_1$ at $t = 0$. La tensión normal $-\alpha_{cp} (*)$, entendida como tensión sobre la fibra ideal de concreto que ocupa la posición de la armadura activa, es calculada en la fase $pre + (M_1 + \Delta M_1)$, at $t = 0$ y es, además, igual y opuesta a la tensión normal sobre la armadura activa obtenida en el esquema (a)

procedimiento de superposición de efectos, dicha solución sería más expedita.

- En postfisuración (con comportamiento elástico lineal de los materiales resistentes), el control de aceptación de la sección depende también de la tensión de tracción sobre las armaduras, por ende la propuesta (u otra equivalente), es de necesaria aplicación. Ella será empleada para aquella condición de carga determinante bajo condición de servicio (ELS) que está relacionada con la fisuración, y que generalmente correspondiente al tiempo $t \rightarrow \infty$, con valor de esfuerzo ficticio de compresión por pretensado y bajo la combinación de acciones infrecuentes (generalmente asimilable a la fase de carga $pre + g + q$ a $t = \infty$).

2. Aplicación de la propuesta en el cálculo de las tensiones normales en prefisuración

a) Aplicación de las relaciones del tipo binomio. Fase $pre + (M_1 + \Delta M_1)$ at $t = 0$, (Figura 4)

Se requieren, además de las características geométricas de la sección homogeneizada A_e , los siguientes valores: \bar{P}_i y $\bar{e}_{p,i}$, obtenidos mediante las Ec. (7) y (8).

Tensión normal sobre el concreto

$$\bar{a}_{1,i} = \frac{M_1 + \Delta M_1}{\bar{P}_i} \quad ; \quad \bar{e}_{1,i} = \bar{a}_1 + \bar{e}_{p,i} \quad (11)$$

$$\sigma_c = \frac{P_i}{A_p} + \left(1 + \frac{\bar{e}_{1,i}}{i_e^2} \cdot y \right) \begin{cases} \text{para } y = y_1 \Rightarrow \sigma_{c1} \\ \text{para } y = y_2 \Rightarrow \sigma_{c2} \end{cases} \quad (12)$$

Tensión normal sobre la armadura pasiva

$$\sigma_c = \alpha_e \frac{P_i}{A_p} + \left(1 + \frac{\bar{e}_{1,i}}{i_e^2} \cdot y_s \right) \quad (13)$$

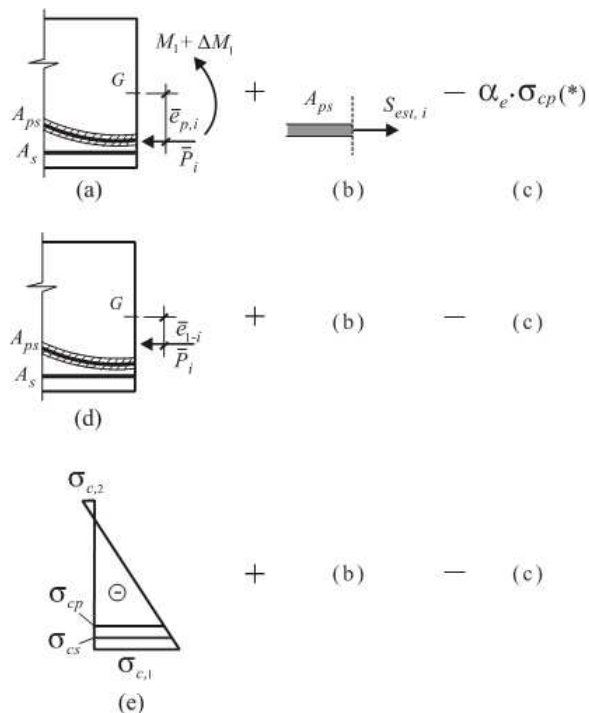


Figura 4: Modelo representativo para el estudio de las tensiones normales en la fase $pre + (M_1 + \Delta M_1)$ a $t = 0$.

Tensión normal sobre la armadura activa

$$\sigma_p = \alpha_e \frac{P_i}{A_p} + \left(1 + \frac{\bar{e}_{1,i}}{i_e^2} \cdot y_p \right) + \frac{S_{est,i}}{A_p} - (9) \Big|_{t=0}$$

es decir:

$$\sigma_p = \alpha_e \frac{\bar{P}_i}{A_p} + \left(1 + \frac{\bar{e}_{1,i}}{i_e^2} \cdot y_p \right) + \frac{S_{est,i}}{A_p} - \alpha_e \frac{\bar{P}_i}{A_p} + \left(1 + \frac{\bar{e}_{1,i}}{i_e^2} \cdot y_p \right) = \frac{S_{est,i}}{A_p} \quad (14)$$

Como era de esperarse, para esta fase de carga, no es necesario recurrir al artificio, ya que las relaciones Ec. (1-3) resuelven el problema.

Fase $pre + (M_1 + \Delta M_1) + M_2 at = j$

Es análoga a la Figura 4, en \bar{P}_j donde está más desplazado hacia arriba. Se requieren, además de las características geométricas de la sección homogeneizada A_e , los siguientes valores: \bar{P}_j y $\bar{e}_{p,j}$ obtenidos mediante las relaciones Ec. (7) y (8).

Tensión normal sobre el concreto

$$\bar{a}_{1,2} = \frac{M_1 + \Delta M_1 + M_2}{\bar{P}_j} \quad ; \quad \bar{e}_{2,j} = \bar{a}_{1,2} + \bar{e}_{p,j} \quad (15)$$

$$\sigma_c = \frac{\bar{P}_j}{A_p} + \left(1 + \frac{\bar{e}_{2,j}}{i_e^2} \cdot y \right) \begin{cases} \text{para } y = y_1 \Rightarrow \sigma_{c1} \\ \text{para } y = y_2 \Rightarrow \sigma_{c2} \end{cases} \quad (16)$$

Tensión normal sobre la armadura pasiva

$$\sigma_c = \alpha_e \frac{P_j}{A_p} + \left(1 + \frac{\bar{e}_{2,j}}{i_e^2} \cdot y_s \right) \quad (17)$$

Tensión normal sobre la armadura activa

$$\sigma_p = \alpha_e \frac{\bar{P}_j}{A_p} + \left(1 + \frac{\bar{e}_{2,j}}{i_e^2} \cdot y_p \right) + \frac{S_{est,i}}{A_p} - (4, 7 - 9) \Big|_{t=j}$$

es decir:

$$\begin{aligned} \sigma_p &= \alpha_e \frac{\bar{P}_j}{A_p} + \left(1 + \frac{\bar{e}_{2,j}}{i_e^2} \cdot y_p \right) + \frac{S_{est,j}}{A_p} \\ &- \alpha_e \frac{\bar{P}_j}{A_p} + \left(1 + \frac{\bar{e}_{1,j}}{i_e^2} \cdot y_p \right) \end{aligned} \quad (18)$$

siendo ahora:

$$\bar{e}_{1,i} = \bar{a}_{1,j} + \bar{e}_{p,j} \quad ; \quad \bar{a}_{1,j} = \frac{M_1 + \Delta M_1}{\bar{P}_j} \quad (19)$$

Fase $pre + (M_1 + \Delta M_1) + M_2 + M_q at = \infty$, (Figura 5)

Se requieren, además de las características geométricas de la sección homogeneizada A_e , los siguientes valores: \bar{P} y \bar{e}_p , obtenidos mediante las Ec. (7) y (8).

Tensión normal sobre el concreto

$$\bar{a}_{1,2,3} = \frac{M_1 + \Delta M_1 + M_2 + M_q}{\bar{P}} \quad ; \quad \bar{e}_3 = \bar{a}_{1,2,3} + \bar{e}_p \quad (20)$$

$$\sigma_c = \frac{\bar{P}}{A_p} + \left(1 + \frac{\bar{e}_3}{i_e^2} \cdot y \right) \begin{cases} \text{para } y = y_1 \Rightarrow \sigma_{c1} \\ \text{para } y = y_2 \Rightarrow \sigma_{c2} \end{cases} \quad (21)$$

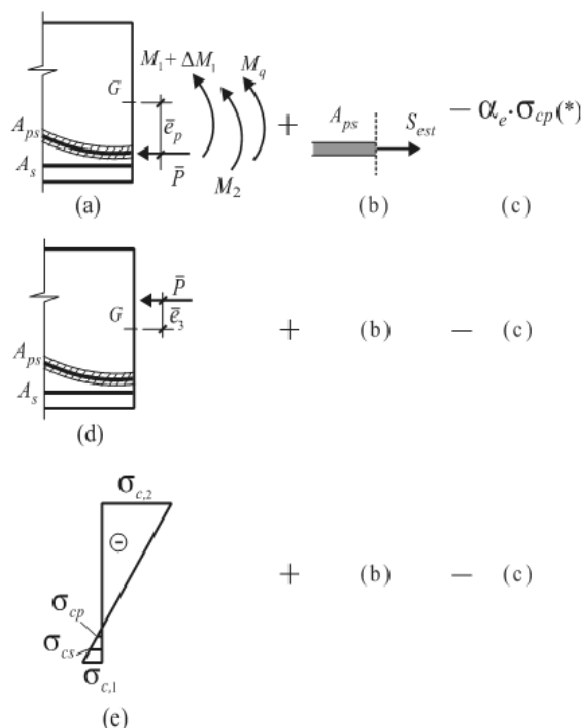


Figura 5: Modelo para la obtención del estado de tensión normal en el caso de pretensado con armadura postesa en la fase $pre + M_1 + \Delta M_1 + M_2 + M_q at = \infty$. La tensión normal $\sigma_{cp}(*),$ entendida como tensión sobre la fibra ideal de concreto que ocupa la posición de la armadura activa, es calculada sobre en la fase $pre + M_1 + \Delta M_1,$ a $t = \infty$

Tensión normal sobre la armadura pasiva

$$\sigma_c = \alpha_e \frac{\bar{P}}{A_p} + \left(1 + \frac{\bar{e}_3}{i_e^2} \cdot y_s \right) \quad (22)$$

Tensión normal sobre la armadura activa

$$\sigma_p = \alpha_e \frac{\bar{P}}{A_p} + \left(1 + \frac{\bar{e}_3}{i_e^2} \cdot y_p \right) + \frac{S_{est}}{A_p} - (9) \Big|_{t=\infty}$$

es decir:

$$\begin{aligned} \sigma_p &= \alpha_e \frac{\bar{P}}{A_p} + \left(1 + \frac{\bar{e}_3}{i_e^2} \cdot y_p \right) + \frac{S_{est}}{A_p} \\ &- \alpha_e \frac{\bar{P}}{A_p} + \left(1 + \frac{\bar{e}_1}{i_e^2} \cdot y_p \right) \end{aligned} \quad (23)$$

siendo ahora:

$$\bar{e}_1 = \bar{a}_1 + \bar{e}_p \quad ; \quad \bar{a}_{1,j} = \frac{M_1 + \Delta M_1}{\bar{P}} \quad (24)$$

b) Aplicación de las relaciones del tipo monomio

Para cada fase de carga considerada, se procede a:

- Ubicar la posición del esfuerzo \bar{P}_i (\bar{P}_j o \bar{P} , según el caso), después de su desplazamiento a causa del momento flector;
- Determinar S_n por intermedio de la relación Ec. (8);
- Aplicar la relación de tipo Ec. (4) a (6). En la última de éstas, se deberá restar la tensión normal expresada por la relación Ec. (9).

Fase pre + $M_1 + \Delta M_1$ a $t = 0$, (Figura 4)

$$\sigma_c = \frac{\bar{P}_i \langle M_1 + \Delta M_1 \rangle}{S_n} y_{n,c} \quad (25)$$

$$\sigma_s = \alpha_e \sigma_{cs} = \alpha_e \frac{\bar{P}_i \langle M_1 + \Delta M_1 \rangle}{S_n} y_{n,s} \quad (26)$$

$$\alpha_p = \alpha_e \frac{\bar{P}_i \langle M_1 + \Delta M_1 \rangle}{S_n} y_{n,p} + \sigma_{est,i} - \alpha_e \frac{\bar{P}_i \langle M_1 + \Delta M_1 \rangle}{S_n} y_{n,p} = \sigma_{est,i} \quad (27)$$

Fase pre + $M_1 + \Delta M_1 + M_2$ a $t = j$

$$\sigma_c = \frac{\bar{P}_j \langle M_1 + \Delta M_1 + M_2 \rangle}{S_n} y_{n,c} \quad (28)$$

$$\sigma_s = \alpha_e \sigma_{cs} = \alpha_e \frac{\bar{P}_j \langle M_1 + \Delta M_1 + M_2 \rangle}{S_n} y_{n,s} \quad (29)$$

$$\alpha_p = \alpha_e \frac{\bar{P}_j \langle M_1 + \Delta M_1 + M_2 \rangle}{S_n} y_{n,p} + \sigma_{est,j} - \alpha_e \frac{\bar{P}_j \langle M_1 + \Delta M_1 \rangle}{S_n} y_{n,p} \quad (30)$$

siendo el último de estos términos más fácilmente calculado por el último término de la relación Ec. (18); es decir:

$$\alpha_e \frac{\bar{P}_j \langle M_1 + \Delta M_1 \rangle}{S_n} y_{n,p} = \alpha_e \frac{\bar{P}_j}{A_e} + \left(1 + \frac{\bar{e}_{1,j}}{i_e^2} \cdot y_p \right) \quad (31a)$$

o también:

$$\alpha_e \frac{\bar{P}_j \langle M_1 + \Delta M_1 \rangle}{S_n} y_{n,p} = \alpha_e \frac{\bar{P}_j}{A_e} + \left(1 + \frac{\bar{e}_{1,j}}{i_e^2} \cdot y_p + \frac{M_1 + \Delta M_1}{I_e} y_p \right) \quad (31b)$$

Fase pre + $M_1 + \Delta M_1 + M_2 + M_q$ a $t = \infty$, (Figura 5)

$$\sigma_c = \frac{\bar{P} \langle M_1 + \Delta M_1 + M_2 + M_q \rangle}{S_n} y_{n,c} \quad (32)$$

$$\sigma_s = \alpha_e \sigma_{cs} = \alpha_e \frac{\bar{P} \langle M_1 + \Delta M_1 + M_2 + M_q \rangle}{S_n} y_{n,c} \quad (33)$$

$$\alpha_p = \alpha_e \frac{\bar{P} \langle M_1 + \Delta M_1 + M_2 + M_q \rangle}{S_n} y_{n,p} + \sigma_{est,j} - \alpha_e \frac{\bar{P} \langle M_1 + \Delta M_1 \rangle}{S_n} y_{n,p} \quad (34)$$

en donde:

$$\alpha_e \frac{\bar{P} \langle M_1 + \Delta M_1 \rangle}{S_n} y_{n,p} = \alpha_e \frac{\bar{P}}{A_e} + \left(1 + \frac{\bar{e}_1}{i_e^2} \cdot y_p \right) \quad (35a)$$

o también:

$$\alpha_e \frac{\bar{P} \langle M_1 + \Delta M_1 \rangle}{S_n} y_{n,p} = \alpha_e \left(\frac{\bar{P}}{A_e} + \frac{\bar{P} \cdot \bar{e}_p}{i_e} \cdot y_p + \frac{M_1 + \Delta M_1}{I_e} y_p \right) \quad (35b)$$

Observaciones

1. La expresión dentro paréntesis del tipo $\langle \rangle$ que acompaña el valor del esfuerzo ficticio de compresión por pretensado, *convencionalmente* quiere indicar y recordar que la posición de ese esfuerzo es función de las variables indicadas dentro de ese paréntesis.
2. El procedimiento que hace uso de las relaciones del tipo binomio es más rápido que el otro en donde se emplea la relación del tipo monomio, por la razón que, en este último, para cada condición de carga hay que determinar el momento S_n de manera generalmente iterativa.
3. No se ha de olvidar que la precisión de los resultados requeridos obliga a la escogencia del procedimiento a emplear. En prefisuración, y sobre todo en las primeras fases de carga, no es frecuente que se requiera el conocimiento de las tensiones normales sobre las armaduras.

3. Aplicación de la propuesta en el cálculo de las tensiones normales en postfisuración

En postfisuración y comportamiento elástico lineal, el empleo de las relaciones del tipo monomio y del tipo binomio (sección fisurada homogeneizada) es de manera relativamente rápida, fundamentalmente por el hecho anteriormente señalado sobre el interés que existe en evaluar las tensiones en una sola de las condiciones de carga, que generalmente corresponde a la combinación de las acciones infrecuentes.

3.1. a) Aplicación de la relación tipo monomio

Una vez definida la posición del esfuerzo \bar{P} para la condición de sección fisurada, Figura 6, con los mismos símbolos y significados de la relación de tipo monomio empleado en el caso de la armadura pretesa y suponiendo, por ejemplo, que la fisuración es bajo la combinación de acciones infrecuentes:

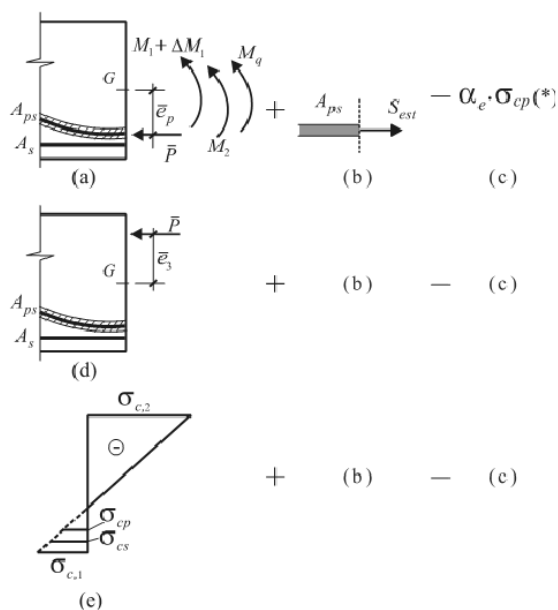


Figura 6: Modelo para la obtención del estado de tensión normal en el caso de pretensado con armadura postesa en la fase *pre* + $M_1 + \Delta M_1 + M_2 + M_q$ a $t = \infty$, sección fisurada. La tensión normal σ_{cp}^* , entendida como tensión sobre la fibra ideal de concreto que ocupa la posición de la armadura activa, es calculada sobre en la fase *pre* + $M_1 + \Delta M_1$, a $t = \infty$. El punto de aplicación de \bar{P} puede estar dentro o fuera de la sección.

Para el concreto (suponiendo que el borde superior es el comprimido):

$$\sigma_{c,2} = \frac{\bar{P} \langle M_1 + \Delta M_1 + M_2 + M_q \rangle}{S_n^*} y_{n,p}^* \quad (36)$$

en donde \bar{P} se obtiene de la relación Ec. (7) calculada para $t = \infty$. La posición de \bar{P} con respecto a \bar{e}_p calculada de la relación Ec. (8), para $t = \infty$, es:

$$\bar{e}_3 = \bar{a}_{1,2,3} + \bar{e}_p \quad ; \quad \bar{a}_{1,2,3} = \frac{M_1 + \Delta M_1 + M_2 + M_q}{\bar{P}} \quad (37)$$

Después se procede a determinar la posición del eje neutro de flexión-compresión, y los valores de S_n^* y el de $y_{n,2}^*$, para luego aplicar la relación Ec. (36). Así procediendo resulta:

Para la armadura pasiva:

$$\sigma_s = \alpha_e \frac{\bar{P} \langle M_1 + \Delta M_1 + M_2 + M_q \rangle}{S_n^*} y_{n,s}^* \quad (38)$$

Para la armadura activa:

$$\begin{aligned} \alpha_p &= \alpha_e \sigma_{cps} + \frac{S_{est}}{A_p} - \alpha_e \frac{\bar{P}}{A_e} \left(1 + \frac{\bar{e}_1}{i_e^2} y_p \right) \\ &= \alpha_e \frac{\bar{P} \langle M_1 + \Delta M_1 + M_2 + M_q \rangle}{S_n^*} y_{n,p}^* \\ &\quad + \frac{S_{est}}{A_p} - \alpha_e \frac{\bar{P}}{A_e} \left(1 + \frac{\bar{e}_1}{i_e^2} y_p \right) \end{aligned} \quad (39a)$$

en donde:

$$\begin{aligned} &\alpha_e \frac{\bar{P}}{A_e} \left(1 + \frac{\bar{e}_1}{i_e^2} y_p \right) \\ &= \alpha_e \left(\frac{\bar{P}}{A_e} + \frac{\bar{P} \cdot \bar{e}_p}{I_e} y_p + \frac{M_1 + \Delta M_1}{I_e} y_p \right) \end{aligned} \quad (39b)$$

3.2. b) Procedimiento simplificado en la aplicación de la relación del tipo monomio

En el caso en que el área de los conductos en la sección no supere el valor precisado del 2% de A_g , o en aquellos otros casos en donde se quiere simplificar el procedimiento y aceptar resultados aproximados, se puede proceder de la manera siguiente.

- Se supone que el área de la sección transversal es siempre constante e igual a A_g . De ella se derivan las características geométricas de la sección y el peso propio M_1 , suponiendo $\gamma_c = 25,000 N/m^3$;
- El esfuerzo de compresión por pretensado, después de las pérdidas, es P .
- El estado de tensión normal en la fase *pre* + $M_1 + \Delta M_1 + M_2 + M_q$ a $t = \infty$, (o bajo la combinación de acciones infrecuentes), sobre la sección supuesta fisurada, se determina de la siguiente manera:

– Sobre el concreto

Se emplea la relación Ec. (36) escrita de la siguiente forma:

$$\alpha_{c,2} = \frac{P}{S_n^*} y_{n,2}^* \quad (40)$$

– Sobre la armadura pasiva

La relación Ec. (38) asume la forma:

$$\alpha_s = \alpha_e \frac{P}{S_n^*} y_{n,s}^* \quad (41)$$

$$\begin{aligned} \alpha_p &= \alpha_e \sigma_{cps} + \frac{S_{est}}{A_p} - \alpha_e \frac{P}{A_g} \left(1 + \frac{e_1}{i_g^2} y_p \right) \\ &= \alpha_e \frac{P}{S_n^*} y_{n,p}^* \\ &\quad + \frac{S_{est}}{A_p} - \alpha_e \frac{P}{A_g} \left(1 + \frac{e_1}{i_g^2} y_p \right) \end{aligned} \quad (42a)$$

siendo además:

$$\begin{aligned} \alpha_e \frac{P}{A_g} \left(1 + \frac{e_1}{i_g^2} y_p \right) \\ = \alpha_e \left(\frac{P}{A_e} + \frac{P \cdot e_p}{I_e} y_p + \frac{M_1 + \Delta M_1}{I_e} y_p \right) \end{aligned} \quad (42b)$$

Los significados de S_n^* , $y_{n,s}^*$, $y_{n,p}^*$ han sido definidos con anterioridad; se recuerda que ahora es $e_1 = a_1 + e_p$ en donde $a_1 = M_1/P$ y e_p representa la excentricidad de la armadura activa contenida en el área A_g . La posición de P en la sección se obtiene como:

$$e_3 = \frac{M_1 + M_2 + M_q}{P} \quad (43)$$

a partir de la armadura activa, en isostaticidad.

3.3. c) Aplicación de la relación tipo binomio

Las relaciones son:

$$\sigma_c = \frac{\bar{P}}{A^*} + \frac{\bar{P} \cdot \bar{e}_p^*}{I^*} y_c^* = \frac{\bar{P}}{A^*} \left(1 + \frac{\bar{e}_p^*}{i^{*2}} y_c^* \right) \quad (44)$$

– Sobre la armadura pasiva: Ec. (45)

$$\begin{aligned} \sigma_s = \alpha_e \sigma_{cs}, j = \alpha_e \left(\frac{\bar{P}}{A^*} + \frac{\bar{P} \cdot \bar{e}_p^*}{I^*} y_s^* \right) \\ = \alpha_e \bar{P} \left(1 + \frac{\bar{e}_p^*}{i^{*2}} y_s^* \right) \end{aligned} \quad (45)$$

– Sobre la armadura activa: Ec. (46)

$$\begin{aligned} \sigma_p &= \alpha_e \sigma_{cps} + \sigma_{est} - \alpha_e \left(\frac{\bar{P}}{A_e} + \frac{\bar{P} \cdot \bar{e}_1}{I_e} y_p \right) \\ &= \alpha_e \left(\frac{\bar{P}}{A^*} + \frac{\bar{P} \cdot \bar{e}_p^*}{I^*} y_p \right) + \sigma_{est} \\ &= \alpha_e \left(\frac{\bar{P}}{A_e} + \frac{\bar{P} \cdot \bar{e}_1}{I_e} y_p \right) \end{aligned} \quad (46)$$

siendo \bar{e}_1 definido como en la relación Ec. (9).

El procedimiento es más engorroso que el anterior (aplicación de la relación del tipo monomio), por cuanto, además de determinar S_n^* e I_n^* se deberán obtener el baricentro de la sección fisurada homogeneizada y el momento de inercia I_e^* de la misma.

4. Estudio de un caso particular: viga con armadura postesa con adherencia posterior, cálculo en prefisuración y en postfisuración (comportamiento elástico)

Para la sección de la Figura 7, se desea determinar el estado de tensión normal en las tres fases siguientes de carga: *pre* + M_1 , a $t = 0$, *pre* + $M_1 + M_2$, a $t = j$ y *pre* + $M_1 + M_2 + M_q$, a $t = \infty$, empleando la regla del desplazamiento de P_j por efecto de un momento exterior genérico M . a) Estado de tensión normal en

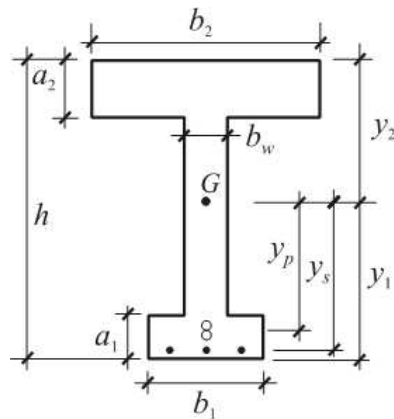


Figura 7: Sección para el caso de estudio

prefisuración

Datos, sección bruta:

$$A_g = 222600 \text{ mm}^2; I_g = 3776607 \cdot 10^4 \text{ mm}^4;$$

$$i_g^2 = 169,658 \text{ mm}^2;$$

$$h = 1170 \text{ mm}; b_w = 120 \text{ mm}; a_1 = 170 \text{ mm};$$

$$a_2 = 120 \text{ mm}; b_1 = 360,7 \text{ mm}; b_2 = 464,0 \text{ mm};$$

$$c_p = 130 \text{ mm}; y_1 = 590,5 \text{ mm}; y_2 = -579,5 \text{ mm};$$

$$e_p = y_p = 460,5 \text{ mm}; A_s = 1,013,6 \text{ mm}^2 (8 \Phi 1/2'')$$

$$c_s = 35 \text{ mm} (\text{recubrimiento teórico de la armadura pasiva})$$

$$d_s = 1135 \text{ mm} (\text{altura útil con respecto a la armadura pasiva});$$

$$y_s = 555,5 \text{ mm}$$

$$A_p = 1283,1 \text{ mm}^2$$

(a $n = 13$ cordones con F_u individual de 183554 N);

$$d_p = h - y_p = 1040 \text{ mm}$$

(altura útil con respecto a la armadura activa);

$$\alpha = 0 (\text{inclinación del tendón en la sección})$$

Para la sección considerada se tiene que:

$$M_1 = 268352,5 \text{ N} \cdot \text{m}; M_1 + \Delta M_1 = 278252,9 \text{ N} \cdot \text{m};$$

$$M_w = 1200000 \text{ N} \cdot \text{m}$$

$$(M_2 = 400000 \text{ N} \cdot \text{m}; M_q = 800000 \text{ N} \cdot \text{m})$$

$$S_{est,i} = 1808,929 \text{ N}$$

$$(\sigma_{est,i} = F_{est,i}/A_p = 1409,80 \text{ MPa}$$

incluye el efecto de roce)

$$S_{est} = 1483314,4 \text{ N}$$

$$(\sigma_{est,i} = F_{est,i}/A_p = 1099,65 \text{ MPa}$$

incluye la totalidad de las pérdidas diferidas)

Coefficiente de pérdidas diferidas: $\eta = 0,82$

$$P_i = 1808920 \text{ N}; P_j = 1700000 \text{ N}$$

$$P = -1483314,4 \text{ N};$$

Determinación de las características geométricas de la sección real en el momento de la presolicitación (sección neta o de concreto), para la condición de carga $pre + M1$ a $t = 0$.

Para alojar los 13 cordones se pueden emplear dos conductos con diámetro exterior de 71 mm c.u. Las características geométricas de la sección neta de

concreto son:

$$A_c = 214682 \text{ mm}^2; I_c = 3601979 \cdot 10^4 \text{ mm}^4;$$

$$y_1 = 607,4 \text{ mm}; y_2 = -562,6 \text{ mm};$$

$$e_p = 477,4 \text{ mm}; y_s = 572,4 \text{ mm};$$

Las características geométricas de la sección homogeneizada son:

$$A_e = 222,381 \text{ mm}^2; I_e = 37714621000 \text{ mm}^4;$$

$$y_1 = 590,9 \text{ mm}; y_2 = -579,1 \text{ mm};$$

$$e_p = 460,9 \text{ mm}; y_s = 555,9 \text{ mm};$$

Estado de tensión normal en $pre + M1$

Lista de símbolos

A : Área de la sección.
 A_c : Área de la sección neta de concreto.
 A_e : Área homogeneizada de la sección.
 A_c : Área de la sección neta de concreto.
 A_p : Área de la sección transversal de la armadura activa.
 A_{ps} : Armadura activa supuesta sin previa tracción.
 A_s : Área de la sección transversal de la armadura pasiva.
 G : Baricentro de la sección.
 I : Momento de inercia de la sección con respecto a su eje baricéntrico.
 I_e : Momento de inercia de la sección homogeneizada en concreto.
 I_n : Momento de inercia de la sección homogeneizada en concreto con respecto al eje neutro de flexión-compresión.
 M : Momento flector.
 M_1 : Momento flector por peso propio del elemento que actúa con el pretensado.
 ΔM_1 : Incremento de $M1$ por la lechada de cemento inyectada.
 M_2 : Momento flector por carga permanente diferente al peso propio del elemento.
 M_q : Momento flector por sobrecarga q .
 M_w : Momento flector por carga $w = g_2 + q$.
 P : Esfuerzo de compresión por pretensado final.
 P_i : Esfuerzo de compresión pretensado inicial.
 P_j : Esfuerzo de compresión por pretensado al tiempo $t = j$.
 S : Esfuerzo de tracción por pretensado (igual y opuesto al esfuerzo de compresión

por pretensado, ($S_{est,i}$, es el esfuerzo inicial; $S_{est,j}$, es el esfuerzo al tiempo genérico $t = j$; S_{est} es el esfuerzo final o a $t = \infty$).

S_n : Momento estático de la sección reactiva con respecto al eje neutro de flexión-compresión, para secciones no fisuradas.

S_n : Momento estático de la sección reactiva con respecto al eje neutro de flexión-compresión, para secciones fisuradas.

a_1 : Espesor del ala inferior de una sección.

a_2 : Espesor del ala superior de una sección.

b_1 : Anchura del ala inferior de una sección.

b_2 : Anchura del ala superior de una sección.

b_w : Anchura del alma de una sección.

c_p : Recubrimiento teórico del tendón resultante con respecto al borde exterior más cercano de la sección, medido en dirección del brazo mecánico.

c_s : recubrimiento teórico de la armadura pasiva.

g_1 : Carga permanente que produce el momento M_1 (o el momento $M_1 + \Delta M_1$).

g_2 : Carga permanente que produce el momento M_2 .

h : Altura de la sección.

i : Radio de giro.

k : Distancia, en valor absoluto, entre el eje neutro de flexión-compresión y el borde comprimido de la sección fisurada homogeneizada.

l : Luz de la viga.

q : Sobrecarga.

w : Carga constituida por aquella permanente diferente del peso propio del elemento y la sobrecarga.

η : Coeficiente de pérdida total de pretensado.

α_e : Coeficiente de homogeneización de acero a concreto, igual a 6.

σ_c : Tensión normal sobre el concreto ($\sigma_{c,1}$ sobre el borde inferior de la sección, ($\sigma_{c,2}$ sobre el borde superior e la sección).

σ_{cs} : Tensión normal sobre la fibra ideal de concreto que ocupa la posición de la armadura pasiva.

σ_{cp} : Tensión normal sobre la fibra ideal de concreto que ocupa la posición de la armadura activa.

* : Magnitudes con ese sobre índice que no estén dentro paréntesis, se refieren a la sec-

ción fisurada homogeneizada.

Referencias

- [1] G. Bianco A. «Relaciones útiles (conocidas, poco usadas y nuevas) para determinar las tensiones normales en flexión-compresión en régimen de pre o postfisuración con comportamiento elástico lineal del concreto pretensado» Revista Ingeniería UC. Año 6 N° 1, pp. 47-58, Valencia. Venezuela. Junio 1999.
- [2] C. Cestelli Guidi. «Cemento Armato Precompresso». Hoepli, Milano, Italia. Settima edizione, 1.987.