

Comparando la efectividad en la detección de pequeños cambios en la media del proceso mediante el cálculo del ARL

Adriana Ferrer, Domingo Gutierrez, Teodoro García León*

Grupo de Investigación en Gestión de la Calidad, Escuela de Ingeniería Industrial, Facultad de Ingeniería, Universidad de Carabobo.
Av. Universidad, Valencia – Venezuela.

Resumen.-

En la selección de un gráfico de control estadístico de procesos debe tomarse en cuenta su capacidad para detectar rápidamente, los cambios que ocurren en los parámetros de la distribución de probabilidades que explica el comportamiento del proceso productivo. En este trabajo se comparan los gráficos de control *CUSUM*, *EWMA* y Análisis del punto de cambio (*APC*), escogidos por su sensibilidad ante pequeños cambios en la media del proceso. Se seleccionaron cambios de magnitudes 0,25, 0,5, 0,75, 1, 1,25, 1,5, 2 y 3 veces sigma estimada de X , se simularon mil corridas de producción hasta detectar el cambio en cada caso y se tomó la longitud de corrida promedio ARL como criterio de comparación. Luego de analizar los resultados obtenidos se puede concluir que el *APC* representa una herramienta estadística muy útil para monitorear los procesos productivos debido a que presenta una mayor efectividad en la detección de cambios en la media al ser comparada con los otros gráficos de control estudiados.

Palabras clave: ARL, análisis del punto de cambio, *EWMA*, *CUSUM*.

Comparing the Detection Effectiveness for Small Changes on the Process Mean through the ARL Calculated

Abstract.-

The early detection ability when occurring changes in the parameters of the probability distribution, which explains the productive process behavior, should be taken into account when selecting a statistical process control chart. This paper compares the *CUSUM*, *EWMA* and Change-Point Analysis (*CPA*) control charts, chosen because of their sensitivity to small changes in the process mean. Magnitudes were changed according to the following variations: 0,25, 0,5, 0,75, 1, 1,25, 1,5, 2 and 3 sigma estimated of X . A thousand production runs for each variation were simulated to detect the change in each case. The average run length (ARL) was taken as a criterion for comparison. After analyzing the results it can be concluded that the *APC* is a very useful statistical tool for monitoring production processes because it has a greater effectiveness in detecting mean changes when compared with other control charts studied.

Keywords: ARL, change-point analysis, *EWMA*, *CUSUM*.

1. Introducción

El control estadístico de procesos (SPC), tiene por objetivo predecir aquellas situaciones en las que un proceso se ha salido de control.

Cuando el interés se centra en la detección de cambios menores a dos veces sigma en la media o en la varianza del proceso, los gráficos de control de sumas acumuladas (*CUSUM*) [1] y el de Medias

Móviles Ponderadas Exponencialmente (*EWMA*) [2] representan una buena opción. Estos gráficos han demostrado su capacidad para detectar pequeños cambios. Sin embargo, otras propuestas de gráficos de control se han desarrollado más recientemente para abordar este tipo de problemas.

El Análisis de Punto de Cambio (*APC*) [3], ha sido utilizado con eficacia como herramienta de análisis en el estudio de series temporales. La aplicación de ésta técnica en el control estadístico de procesos comenzó como una herramienta de análisis de la fase I y como una manera de detectar con mayor exactitud el punto donde ocurrió el cambio [4]. En el año

*Autor Principal

Correos-e: adrinityf@hotmail.com (Adriana Ferrer),
domingo.jgutierrez@hotmail.com (Domingo Gutierrez),
tgarcia@uc.edu.ve (Teodoro García León)

2003 Hawkins *et al.* desarrolla un gráfico de control para la detección de cambios en la media [5], luego Hawkins y Zamba proponen el uso del APC para construir gráficos de control para la varianza [6] y posteriormente estos mismos investigadores proponen el APC para desarrollar un gráfico de control que detecte simultáneamente cambios en la media y en la varianza [7].

En este trabajo se compara la efectividad de los gráficos EWMA, CUSUM y APC para detectar cambios en la media del proceso y se utiliza el valor del longitud de corrida promedio ARL como variable crítica para hacer las comparaciones, haciendo énfasis en los pequeños cambios.

2. Marco teórico

2.1. Análisis de punto de cambio

Se entiende por punto de cambio, aquel punto donde dos segmentos adyacentes de una serie de tiempo están conectados. Estos segmentos se originan cuando ocurre un cambio en la media, en la varianza, en algún parámetro, en el modelo estructural, o bien en cualquiera de sus combinaciones [8]. Por lo tanto el APC, se puede establecer como el análisis realizado a una serie de tiempo, en el cual se estudia el punto donde ocurre el cambio. Para este estudio se han considerado dos enfoques: el Bayesiano, que busca comprobar la presencia de un punto de cambio con una prueba de razón de verosimilitud generalizada, y el método de *Bootstrapping*, que utiliza una combinación del gráfico de CUSUM y *Bootstrap* para detectar los cambios [3]. En este trabajo se utiliza el enfoque Bayesiano.

2.1.1. Modelo Bayesiano para análisis de punto de cambio

Bajo el supuesto que las observaciones son consecutivas, estadísticamente independientes y siguen una distribución normal, en caso de existir un cambio en la media, la varianza o ambos parámetros, se tendrán dos series de tiempo, una serie previa al punto de cambio y una serie posterior al punto de cambio [5]. Entonces, para la i -ésima observación x_i se tendrán dos posibles distribuciones, si i es anterior o si es posterior al punto de cambio τ :

$$X_i \sim \begin{cases} \mathcal{N}(\mu_1, \sigma_1^2) & \text{si } i \leq \tau \\ \mathcal{N}(\mu_2, \sigma_2^2) & \text{si } i > \tau, \end{cases}$$

donde $X_1, X_2, \dots, X_i, \dots$ representan las observaciones sucesivas del proceso. La distribución bajo control

es $\mathcal{N}(\mu_1, \sigma_1^2)$, es decir, las observaciones seguirán esta distribución hasta algún instante τ (si lo hay), donde ocurre el punto de cambio. Ocurrido éste, la distribución original cambia de ubicación, si se produce un cambio en la media $\mu_1 \neq \mu_2$, y/o cambia de escala, si se produce un cambio en la varianza $\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$.

Si se han acumulado n observaciones del proceso, y además se tienen las posiciones i y k de forma tal que $0 \leq i < k \leq n$, los estadísticos promedio y variabilidad se pueden expresar mediante las (Ec.1 y 2):

$$\bar{X}_{i,k} = \sum_{j=i+1}^k X_j / (k - i), \quad (1)$$

$$V_{i,k} = \sum_{j=i+1}^k (X_j - \bar{X}_{i,k})^2. \quad (2)$$

El estadístico GLR. Al aplicar un gráfico de control es necesario determinar si hubo un cambio y donde ocurrió aproximadamente, para así estimar los parámetros de antes y después del cambio. Debido a esto, la atención se enfocará en la detección de dicho punto [6] y [7].

Para comenzar, si el punto de cambio ocurre en el instante $\tau = k$, entonces la prueba estadística de razón de verosimilitud generalizada GLR se puede expresar como la (Ec.3)

$$GLR = k \log \frac{S_{0,n}}{S_{0,k}} + (n - k) \log \frac{S_{0,n}}{S_{k,n}}, \quad (3)$$

en donde $S_{i,j} = V_{i,j} / (j - i)$, será el estimador maximoverosímil (MLE) (sin los grados de libertad habituales de ajuste de sesgo del denominador) de la variabilidad de la secuencia de $X_{i+1}, \dots, X_j$.

Bajo la hipótesis nula de que no ocurra ningún cambio, este estadístico tiene una distribución asintótica *chi-cuadrado* con 2 grados de libertad. La calidad de esta aproximación se puede mejorar sustancialmente haciendo la corrección de Bartlett (Ec.5), en la cual se divide por un factor que hace que la esperanza del GLR sea igual a los grados de libertad. La esperanza del GLR (Ec.4) se conoce pero implica la función digamma, una de las funciones trascendentes menos familiares. Una expansión estándar de la confianza muestra a los términos de $o(n^{-2})$

$$E[GLR] = 2 + \frac{11}{6} \left[\frac{1}{k} + \frac{1}{n-k} - \frac{1}{n} \right] + 2 \left[\frac{1}{k^2} + \frac{1}{(n-k)^2} - \frac{1}{n^2} \right]. \quad (4)$$

Esto lleva a la prueba estadística de Bartlett corregida (Ec. 5)

$$G_{k,n} = \frac{\left(k \log \frac{S_{0,n}}{S_{0,k}} + (n-k) \log \frac{S_{0,n}}{S_{k,n}}\right)}{C}, \quad (5)$$

donde C es

$$C = 1 + \frac{11}{12} \left[\frac{1}{k} + \frac{1}{n-k} - \frac{1}{n} \right] + \left[\frac{1}{k^2} + \frac{1}{(n-k)^2} - \frac{1}{n^2} \right],$$

C es el factor de corrección de Bartlett. Si el punto de cambio no se conoce a priori, debe ser estimado a partir de todos los posibles puntos de separación k que se encuentren maximizando $G_{k,n}$ y se puede determinar a partir de la (Ec. 6)

$$G_{\max,n} = \max G_{k,n}. \quad (6)$$

Límite de control del modelo. Por último, se propone una adaptación a esta formulación para utilizarla en el SPC, donde el tamaño de la muestra no es fijo, sino que crece indefinidamente, es decir, crearon el procedimiento en curso de SPC como sigue[7]:

Calcular $G_{\max,n}$ después de que la observación n se ha añadido al registro total del proceso.

Si $G_{\max,n} \leq h_n$, donde h_n es un límite de control adecuado, entonces la conclusión es que no hay evidencia de un cambio en la media o varianza, y por lo tanto se debe dejar el proceso en ejecución ininterrumpida.

Si $G_{\max,n} > h_n$, se concluye que hay evidencia de un cambio en la media, la varianza, o ambos.

El hecho de usar el análisis de punto de cambio adaptado al procedimiento en curso de SPC, hace necesario la elección de los límites de control. Una opción atractiva para el enfoque del punto de cambio es tener una función de riesgo constante, mientras que el proceso se encuentra bajo control, es decir, que se cumple con la Ec. 7

$$P[G_{\max,n} > h_{n,\alpha} \mid G_{\max,j} \leq h_{j,\alpha}, j < n] = \alpha, \quad (7)$$

donde α es la probabilidad especificada de una señal errónea, y el límite de control se denota como $h_{n,\alpha}$ para destacar esta dependencia.

Debido a que esta probabilidad es constante, esta corresponde a una ARL bajo control de $1/\alpha$. Por otra parte, no parece posible resolver estos valores $h_{n,\alpha}$ teóricamente, por lo que los estimaron utilizando la simulación. Debido a que debe haber un mínimo de dos observaciones en cada segmento, es lógicamente

posible empezar las pruebas desde la cuarta observación, pero esto es poco probable en la mayoría de las aplicaciones.

Para facilitar el procedimiento, se sugiere el siguiente enfoque para la obtención de límites de control [7]:

- Comparar las cinco primeras pruebas estadísticas de $G_{\max,n}$ (es decir, para $n = 10, \dots, 14$) con las cinco entradas de la Tabla 1 (versión parcial de original [7]).

Tabla 1: Límites de control para muestras de tamaño n y riesgo α

n	$h_{n,\alpha}$					
	.05	.02	.01	.005	.002	.001
10	10.128	12.237	13.795	15.330	17.352	18.840
11	9.213	11.389	12.996	14.556	16.609	18.173
12	8.854	11.083	12.719	14.313	16.397	17.965
13	8.690	10.961	12.631	14.265	16.353	17.950
14	8.616	10.917	12.610	14.249	16.361	17.978

- Luego, para $n > 14$ se utiliza la siguiente aproximación, que reproduce la tabla de los valores estimados por Hawkins y Zamba para $h_{n,\alpha}$, con una desviación máxima absoluta de 0,09

$$h \approx \begin{cases} 1,58 - 2,52 \log(\alpha) + \frac{0,094 + 0,33 \log(\alpha)}{\sqrt{n-9}} & \text{si } 0,001 \leq \alpha < 0,05, \\ 8,43 + 0,074 \log(n-9) & \text{si } \alpha = 0,05. \end{cases}$$

Estimando el punto de cambio. Ahora, si el gráfico emite una señal, es necesario hacer una investigación a fondo para conocer qué fue lo que exactamente ha cambiado entre los dos segmentos. En primer lugar, se podría comenzar con el fraccionamiento de la historia del proceso en el punto de cambio estimado, utilizando pruebas paramétricas o no paramétricas para llevar a cabo una comparación de dos muestras entre los dos segmentos resultantes. Se puede comenzar tomando el modelo de distribución normal del punto de cambio en su valor nominal y la prueba de un cambio en la media y un cambio en la varianza utilizando los métodos convencionales de distribución normal.

Si el punto de cambio k ha sido detectado, se sugiere la aplicación de las siguientes pruebas paramétricas convencionales [7].

Las prueba F de dos colas para probar un cambio de varianza utilizando los grados de libertad $k-1$ y $n-k-1$

y el estadístico de prueba está dada por la (Ec. 8)

$$F = V_{0,k}(n - k - 1) / (V_{k,n}(k - 1)). \quad (8)$$

La prueba t aproximada para probar un cambio en la media usando el estadístico t aproximado es dada por la (Ec. 9)

$$t = \frac{\bar{X}_{0,k} - \bar{X}_{k,n}}{\sqrt{s_{0,k}/(k-1) + s_{k,n}/(n-k-1)}}. \quad (9)$$

La cual sigue aproximadamente una distribución t con r grados de libertad, donde (Ec. 10)

$$r = \frac{\left(\frac{s_{0,k}}{k-1} + \frac{s_{k,n}}{n-k-1}\right)^2}{\left[\frac{1}{k-1} \left(\frac{s_{0,k}}{k-1}\right)^2 + \frac{1}{n-k-1} \left(\frac{s_{k,n}}{n-k-1}\right)^2\right]}. \quad (10)$$

Se pueden calcular las estimaciones convencionales de los parámetros. Suponiendo que se conoce que el punto de cambio ocurre en el instante $\tau = k$, existen varios escenarios que se pueden presentar. Para ver los detalles de las tablas de los estadísticos F y t de las (Ec. 8) y (Ec. 8) se puede consultar el trabajo de Hawkins y Zamba [7].

En los casos donde el cambio detectado ocurre en la media del proceso, en la varianza o ambos, podemos usar las Ecs. 11 a 14, según sea el caso:

$$\hat{\mu}_1 = \bar{X}_{0,k}, \quad (11)$$

$$\hat{\mu}_2 = \bar{X}_{k,n}, \quad (12)$$

$$\hat{\sigma}_1 = (V_{0,k}) / (k - 1), \quad (13)$$

$$\hat{\sigma}_2 = (V_{k,n}) / (n - k - 1). \quad (14)$$

En el caso de detectar el cambio únicamente en la varianza, la estimación de la media (constante) sería (Ec. 15)

$$\hat{\mu} = \bar{X}_{0,n}. \quad (15)$$

En el caso de detectar el cambio únicamente en la media, la estimación de la varianza (constante) sería (Ec. 16)

$$\hat{\sigma}_1 = (V_{0,k} + V_{k,n}) / (n - 2). \quad (16)$$

2.2. Gráficos de control EWMA

Los gráficos de control EWMA fueron propuestos por Roberts, en el cual, para la detección de cambios menores a dos veces sigma, a través de simulaciones

concluyó que estos gráficos son más eficientes que los de Shewhart, definiéndose como [2] (Ec. 17)

$$Z_t = \lambda X_t + (1 - \lambda) Z_{t-1}, \quad (17)$$

donde X_t es el valor observado individualmente en el tiempo t del proceso o también puede ser el promedio de las muestras tomadas en el tiempo t cuando el tamaño del subgrupo racional es mayor a uno. λ es una constante de suavizamiento que determina la memoria del estadístico EWMA y su valor está entre $0 < \lambda \leq 1$. El valor inicial Z_0 requerido en la primera muestra ($i = 1$) es el objetivo del proceso, de modo que $Z_0 = \mu_0$.

Límites del control para los gráficos EWMA. Los límites de control y la línea central para el gráfico de control EWMA son las siguientes (Ecs. 18– 20)

$$LCS = \mu_0 + L \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \sqrt{\frac{\lambda}{2 - \lambda}} \quad (18)$$

$$LCI = \mu_0 - L \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \sqrt{\frac{\lambda}{2 - \lambda}} \quad (19)$$

$$LC = \mu_0. \quad (20)$$

El diseño óptimo del gráfico de control EWMA. El procedimiento de diseño óptimo en un punto, se basa en seleccionar (λ, L) de forma tal, que dado el ARL bajo control deseado y la magnitud del cambio D en la media del proceso que se quiere detectar, se producirá en el gráfico EWMA el mínimo ARL fuera de control. La combinación de los parámetros (λ, L) es óptima en el sentido de que para la elección de un ARL bajo control, se obtendrá un ARL fuera de control mínimo. Para el diseño óptimo del gráfico de control EWMA bajo las condiciones antes expuestas, Crowder (1989), recomienda las siguientes etapas [9 y 10]:

Etapla I: Elegir el menor ARL aceptable cuando el cambio en la media es $D = 0$. La selección del ARL está basada informalmente sobre condiciones, tales como el costo asociado de una falsa alarma y el tiempo del proceso.

Etapla II: Decidir que magnitud del cambio en la media debe ser detectada lo más rápido posible.

Etapla III: Una vez que se tenga el ARL de la Etapa I y la magnitud del cambio de la Etapa II, en la tabla correspondiente al ARL de la etapa I, se escogen los valores de λ y L que hacen mínima el ARL para el cambio especificado en la Etapa II.

Procedimiento para obtener el ARL del gráfico de control EWMA: Crowder (1987), muestra que el ARL del gráfico EWMA se puede expresar como la solución de la Ec. 21

$$L(D) = 1 + \frac{1}{\lambda} \int_{-h}^h L(y) f[y - (1 - \lambda)D] / \lambda dy, \quad (21)$$

donde D representa la magnitud del cambio, F es la función de densidad de probabilidad $N(0, 1)$ y h viene expresada por Ec. 22

$$h = k \left(\frac{\lambda}{2 - \lambda} \right). \quad (22)$$

Empleando la cuadratura de Gauss de m puntos, la Ec. 21 se puede expresar como (Ec. 23)

$$L(d) = 1 + \frac{1}{\lambda} \sum_{i=1}^m W_i L(P_i) f \{ [P_i - (1 - \lambda)d] / \lambda \}, \quad (23)$$

donde al evaluar $L(D)$ en el cambio $D = d$ y los puntos P_i , $i = 1, 2, \dots, m$, se obtiene el sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{aligned} L(d) &= 1 + \frac{1}{\lambda} \sum_{i=1}^m W_i L(P_i) f \{ [P_i - (1 - \lambda)d] / \lambda \} \\ L(P_1) &= 1 + \frac{1}{\lambda} \sum_{i=1}^m W_i L(P_i) f \{ [P_i - (1 - \lambda)P_1] / \lambda \} \\ &\vdots \\ L(P_m) &= 1 + \frac{1}{\lambda} \sum_{i=1}^m W_i L(P_i) f \{ [P_i - (1 - \lambda)P_m] / \lambda \}. \end{aligned} \quad (24)$$

Asignándoles valores a λ y L , el sistema de ecuaciones lineales, se puede resolver y obtener la ARL del cambio $D=d(L(d))$. Bracho (2000) elabora tablas para el ARL bajo control de 100, 250, 370, 500, siguiendo este procedimiento [11]. Para este trabajo se usó la tabla de ARL de 370.

2.3. Gráficos de control CUSUM

Los gráficos de control CUSUM fueron propuestos por Page para la detección de cambios menores a dos veces sigma. A través de simulaciones Page concluyó que estos gráficos son más eficientes que los de Shewhart para detectar pequeños cambios en la media del proceso. [1]

Otra forma de plantear el gráfico CUSUM para el control de la media del proceso es la siguiente [12]:

Suponiendo que la varianza del proceso σ^2 es constante y que se quiere monitorear la media μ de una característica de calidad X , la cual sigue una distribución $N(\mu, \sigma^2)$. Se tiene un valor objetivo μ_0 para μ , del cual se quieren detectar desviaciones significativas. Si el valor estandarizado de X es $Z_i = (X_i - \mu_0) / \sigma$, donde σ es la desviación estándar de X_i o de $\bar{X}_i$, un gráfico de sumas acumuladas de estos valores se pueden contrastar con el número total de muestras recolectadas. Para este procedimiento se calculan las sumas CUM^+ y CUM^- de acuerdo con las Ec. 25 y 26

$$CUM^+ = C_{i-1}^+ + (Y_i - \mu) - k, \quad (25)$$

$$CUM^- = C_{i-1}^- + (Y_i - \mu) + k, \quad (26)$$

donde k es un valor de referencia o de tolerancia constante.

La elección del valor k deberá hacerse respecto de la magnitud del corrimiento (δ) que quiera detectarse. Se asegura que con frecuencia se escoge aproximadamente a la mitad entre el objetivo μ_0 y el valor considerado fuera de control de la media μ_1 , el cual está interesado en detectar con rapidez el analista. Por tanto, si el cambio se expresa en unidades de desviación estándar como $\mu_1 = \mu_0 + \delta\sigma$, entonces k es la mitad de la magnitud del corrimiento y queda expresado en Ec. 27 [13]

$$k = \frac{\delta}{2} \sigma = \frac{|\mu_1 - \mu_0|}{2}. \quad (27)$$

Los gráficos CUSUM se basan en las siguientes Ecs. 28 y 29

$$C_i^+ = \max \left(\frac{h\sigma}{2}, CUM^+ \right), \quad (28)$$

$$C_i^- = \max \left(\frac{h\sigma}{2}, CUM^- \right), \quad (29)$$

donde h es el intervalo de decisión.

Entonces se puede expresar que el proceso está fuera de control cuando

$$\begin{cases} C_i^- \geq \frac{h\sigma}{2}, \\ C_i^+ \geq \frac{h\sigma}{2}. \end{cases}$$

La selección correcta de los parámetros k y h es muy importante, ya que tienen un impacto sustancial sobre el desempeño del gráfico CUSUM. Se ofrecen recomendaciones para seleccionarlos y en general se propone usar un valor de h igual a 4σ o 5σ , donde en el caso de que $k = 1/2$ por lo general se obtendrá una CUSUM que tiene propiedades convenientes de la ARL

contra un corrimiento de aproximadamente 1σ en la media del proceso [13].

Una vez construido el gráfico de control *CUSUM*, se puede indicar el momento probable en el cual ocurrió el corrimiento de la media, a través del uso de dos contadores N^+ y N^- , que a la posición donde el gráfico detecta el cambio se le resta el valor del contador según sea el caso, es decir, si se detecta el cambio por el lado superior C_i^- se usa N^+ y de ser detectado el cambio por el lado inferior C_i^- se usa N^- . El contador N^+ registra el número de períodos consecutivos desde que la *CUSUM* del lado superior subió por encima del valor cero, mientras que el contador N^- registra el número de periodos consecutivos desde que la *CUSUM* del lado inferior es menor que cero [13].

3. Metodología

Para determinar el *ARL* de los procedimientos planteados se realizarán simulaciones de estos, para los mismos datos para que muestren su capacidad en la mismas situaciones.

Para realizar la simulación se realizaron los siguientes pasos:

1. Se generan 50 datos aleatorios siguiendo una distribución normal $N_1(\mu_1, \sigma)$, esta será usada como la data histórica.
2. Se deja fijo la distribución de la data histórica para las simulación.
3. Se genera un nuevo dato aleatorio siguiendo una distribución normal $N_2(\mu_2, \sigma)$, donde la media de la segunda distribución varía en k veces sigma $\mu_2 = \mu_1 + k\sigma$.
4. Se introduce el nuevo dato en la serie y se aplican los métodos *EWMA*, *CUSUM* y *APC* y se observa si detecta el cambio en el parámetro de la media, si es detectado se anota el número C de datos necesarios para su detección, si no es detectado, se repite desde el paso 3 hasta ser detectado.
5. Se repiten los pasos 3 y 4, hasta completar las n_{sim} simulaciones deseadas.
6. Se calcula el promedio de la longitud de corrida necesaria hasta detectar por primera vez el cambio (*ARL*), (Ec. 30)

$$ARL = \frac{\sum_{i=1}^{n_{sim}} C_i}{n_{sim}}. \quad (30)$$

4. Análisis y Discusión de Resultados

4.1. Resultados de las simulaciones del *ARL*

Los resultados para las simulaciones se presentan en la Tabla 2.

Tabla 2: *ARL*, para 1000 simulaciones de gráficos del *APC*, *CUSUM* y *EWMA*

δ	<i>EWMA</i>	<i>APC</i>	<i>CUSUM</i>
3σ	2.8661	1.1019	4.5624
2σ	4.3636	1.4306	5.7343
1.75σ	5.0829	1.5285	6.2128
1.5σ	6.1069	1.7682	6.8531
1.25σ	7.5624	2.1079	7.7223
1σ	9.8142	2.5405	8.8032
0.75σ	13.8771	3.2977	10.2278
0.5σ	21.4436	4.8192	12.0749
0.25σ	44.4486	7.5455	14.6983

Se muestra en la Tabla 2 la mejora progresiva del *ARL* para todos los métodos en función al incremento a la variación a detectar.

En la Figura 1, se muestra el comportamiento del *ARL* para cada tipo de gráfico en función de los cambios de la media propuesto. El *ARL* del *APC* ante cualquier magnitud de cambio en la media que fue puesta bajo estudio, fue menor que el obtenido en los gráficos *EWMA* y *CUSUM*. Al comparar el rendimiento del *EWMA* con el *CUSUM* observamos que para el escenario de cambios pequeños menores a 1.5σ , el *CUSUM* presenta un *ARL* menor y por tanto supera al *EWMA* al detectar los cambios más rápido; mientras que para cambios grandes (mayores a 1.5σ) el *EWMA* produce mejores resultados al compararlo con el *CUSUM*.

5. Conclusiones

Para todos los valores de cambio en la media puestos a prueba, el rendimiento del *APC* fue mejor que el obtenido en los gráficos *EWMA* y *CUSUM*.

Al comparar el rendimiento del *EWMA* con el *CUSUM* se pudo observar, que para el escenario de cambios pequeños (menores a 1.5σ), el *CUSUM* es más sensible que el *EWMA*; mientras que para cambios grandes (mayores a 1.5σ) el *EWMA* presenta mejores valores de *ARL*.

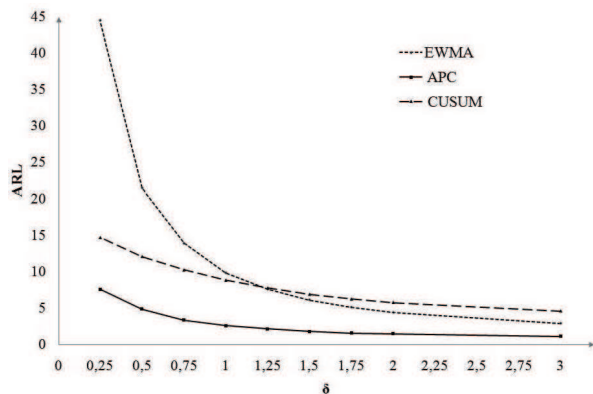


Figura 1: Comportamiento del ARL versus el desplazamiento del centrado

El APC representa una herramienta estadística muy útil y eficaz para llevar el control estadístico de procesos cuando el criterio de selección es el ARL.

6. Agradecimientos

Los autores quieren agradecer al Consejo de Desarrollo Científico y Humanístico de la Universidad de Carabobo, por haber subvencionado la presente investigación mediante el Proyecto Individual CDCH-UC-010416-07 de fecha 03 de Mayo de 2007.

Referencias

- [1] Page, E. S. (1961). «Cumulative Sum Charts». *Technometrics*, 3, pp. 1–9.
- [2] Roberts, S. W. (1959). «Control Charts Based on Geometric Moving Averages». *Technometrics*, 1, pp. 239–250.
- [3] Taylor, W. (2000). «Change-point Analysis: A Powerful New Tool for Detecting Changes». <http://www.variation.com/cpa/tech/changepoint.html>. Fecha de consulta: marzo, 2009.
- [4] Pignatiello, J. J. JR. y Samuel, T. R. (2001). «Estimation of the Change Point of a Normal Process Mean in SPC Applications». *Journal of Quality Technology*, 33, pp. 82–95.
- [5] Hawkins, D. M., Qiu, P., y Kang, C. W. (2003). «The Changepoint Model for Statistical Process Control». *Journal of Quality Technology*, 35, pp. 355–365.
- [6] Hawkins, D. M., y Zamba, K. D. (2005a). «Change Point Model for Statistical Process Control with Shift in Variance». *Journal of Quality Technology*, 37, pp. 21–31.
- [7] Hawkins, D. M., y Zamba, K. D. (2005b). «Statistical Process Control for Shift in Mean or Variance Using the Change Point Formulation». *Technometrics*, 47, pp. 164–173.
- [8] Gel, Y. (2009). «Introduction to Change Point Analysis». Proceedings del VI Encuentro Colombia – Venezuela de Estadística y VIII Jornada de Aplicaciones Matemáticas, Universidad de Carabobo Valencia, Venezuela.
- [9] Crowder, S. V. (1987). «A simple method for studying run length distributions of exponentially weighted moving average chart». *Technometrics*, 29, pp 401–407
- [10] Crowder, S. V. (1989). «Design of Exponentially Weighted Moving Average Schemes». *Journal of Quality Technology*, 21, pp. 155–162.
- [11] Bracho, N. (2000). «Diseño óptimo de diagramas EWMA». *Saber*, vol 12, N° 2, pp. 44–49.
- [12] Hawkins, D. M., y Olwell, D. H. (1997). «Cumulative Sum Chart and Charting for Quality Improvement». Editorial Springer, Verlag New York.
- [13] Montgomery, D. C. (2005). «Introduction to Statistical Quality Control». 5th Ed. John Wiley and Sons, New York, NY.