INGENIERIA UC
Organo de Divulgación Científica y Tecnológica
de la Facultad de Ingeniería
de la Universidad de Carabobo
FACULTAD DE INGENIERIA U.C.

# METODOS HIDROLOGICOS PARA EL ANALISIS DE SEQUIAS

**Edilberto Guevara Pérez, Facultad de Ingeniería, Universidad de Carabobo**

## RESUMEN

El trabajo presenta en primer lugar los aspectos generales relacionados con el análisis de caudales mínimos. Luego describe más en detalle dos métodos estadísticos para el estudio de las sequías: El primero se refiere al análisis de los eventos extremos, considerados como variable aleatoria independiente; seleccionando para este caso las funciones Log-Normal y Weibull. El segundo método se refiere a los procesos estocásticos de variable aleatoria dependiente, es decir los denominados períodos secos de diferentes duraciones",- se selecciona en este caso el modelo WISER, tomando en cuenta dos alternativas: Serie Geométrica y Serie Logarítmica, para explicar la ocurrencia de períodos secos de una duración dada.
Finalmente se remarca la necesidad de llevar a cabo un estudio sistemático de los caudales de estiaje en todos los ríos importantes del país con la finalidad de desarrollar y recomendar una metodología que pueda considerarse como estándar.

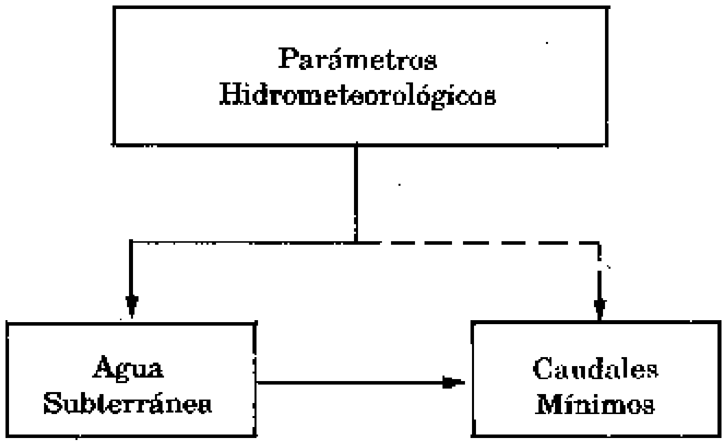
## INTRODUCCIÓN

Hasta ahora, una de las principales tareas de la hidrología ha sido el análisis de ocurrencia de los caudales máximos. La creciente demanda de agua y la pérdida de calidad del recurso, hacen, sin embargo, que se preste especial atención a su uso óptimo, y por lo tanto, que se estudien también cuidadosamente los caudales mínimos. Si bien, las consecuencias ocasionadas por eventos mínimos de larga duración no son palpables inmediatamente, como en el caso de las crecientes, a largo plazo son tan negativas corno las de estas últimas.
Como ejemplo de la ascendente importancia que posee el conocimiento de los caudales mínimos se tiene: Abastecimiento a poblaciones, industria y agricultura, generación de hidroelectricidad, fuente de enfriamiento en industrias, etc. Para establecer la relación entre los usos indicados y los eventos mínimos no bastan las técnicas estadísticas tradicionales (análisis de valores mínimos y curva de duración), más bien se requiere de predicciones sobre la probabilidad de ocurrencia de los eventos extremos mínimos de diferentes duraciones.
Por lo expuesto, se ha creído conveniente elaborar un resumen de algunos métodos y modelos que permitan estimar la probabilidad de ocurrencia de los caudales mínimos, ampliando así los conocimientos existentes sobre esta materia.

## MFTODOLOGIA DE ANÁLISIS

El problema de las sequías se puede enfocar desde diversos puntos de vista:

a. Investigación del origen del fenómeno, es decir de los parámetros hidrometeorológicos que lo ocasionan: Precipitación, evaporación, infiltración, etc. Se usan procedimientos probabilísticos y determinísticos, así como relaciones funcionales entre los eventos de interés y los parámetros que los ocasionan.
b. Análisis de los parámetros hidrometeorológicos de salida, tal como flujo base, recarga, almacenamiento, y relación de éstos con el caudal mínimo dentro del sistema de drenaje de la cuenca. Se usan modelos determinísticos (recesión).
c. Análisis de la cadena de fenómenos del ciclo hidrológico que conducen a la ocurrencia de las sequías:




d. Análisis de los caudales mínimos sin considerar su origen, mediante métodos estadísticos y estocásticos.
Los procedimientos determinísticos planteados en los puntos a, b, c, permiten en general, una predicción directa del caudal mínimo en el futuro inmediato. Dependiendo del número de parámetros que se involucren, estos métodos son muy complicados. La discusión que sigue se limita, por ello, a las técnicas estadísticas y estocásticas del punto d, las que se orientan a la determinación de la probabilidad de ocurrencia de un evento de determinada magnitud. Esto permite una predicción a largo plazo, sin embargo, casi siempre en el sentido de que un evento mínimo ocurra dentro de un período determinado.

## DEFINICIONES DE LOS PRINCIPALES PARAMETROS.

De acuerdo con el objetivo que se plantee en el análisis de los caudales mínimos, se definen diferentes parámetros que caracterizan al evento. En general, los caudales mínimos pueden caracterizarse como se indica a continuación:
a. A través del nivel $h$, caudal $Q$, o volumen $V$.
- Como un valor extremo dentro de un período determinado, tal como el caudal diario mínimo de un año.
- Como el promedio del período considerado.
- En relación con un límite mínimo dado, tal como el déficit de agua por debajo de la frontera $Q_s$ preestablecida.
b. A través de la duración (probabilidad) de ocurrencia de las magnitudes descritas en el punto a.
Para el caso de los métodos que se describen en el presente trabajo, se definen los siguientes parámetros:
1) Caudal: $Q$ ($m^3/s$) : Como expresión general de la variable.
$NQ$ (m3/s): Caudal menor que un valor $Q$ dado $Q_s$.
$MNQ$ ($m^3/s$): Caudal mínimo, medio del período $x$ dado.
$NQ_x$ ($m^3/s$): Caudal más pequeño del intervalo $x$.
2) Día Seco: Cada día del calendario con un caudal menor que el valor de referencia $Q_s$
3) Período Seco: Una secuencia de días secos relacionados entre si.
4) $d$ (días): Longitud de un período seco, es decir, número de días secos comprendidos
en el período seco.

## MODELO PARA EL ANÁLISIS ESTADISTICO DE CAUDALES MINIMOS

**Generalidades**

En la mayoría de los casos sólo se dispone de registros hidrométricos de corta duración. La planificación de las obras hidráulicas y la administración de los recursos hídricos requieren del conocimiento de eventos mínimos de baja probabilidad de ocurrencia, los cuales no se encuentran en los períodos de registro.
Una de las alternativas para estimar dichos eventos viene a ser el uso de los modelos de valores extremos. Esta técnica asume que la serie de caudales mínimos disponibles constituye una muestra de una población desconocida formada por todos los valores extremos pasados y futuros. Por lo tanto, parte del criterio que dicha muestra, siempre que sea de una longitud suficiente, posee la misma función de distribución de frecuencia que la población a la que se supone pertenecer. De ese modo, se adapta una distribución teórica a la empírica de la serie observada, la misma que se usa a posteriori para extrapolaciones a eventos de probabilidades deseadas, de excedencia o no excedencia. Otra condición básica para el uso de este tipo de modelos viene a ser la independencia de los valores observados; lo cual se cumple normalmente en series anuales o bianuales (estacionales). La independencia y homogeneidad de la serie se prueba mediante diferentes procedimientos que no se van a discutir en este trabajo, pero que se pueden extraer de las referencias, por ejemplo Bechteler (1969) y Eggers (1970).
Cuando se usa la serie anual en el modelo de probabilidades existe una relación directa entre la probabilidad de excedencia y el período de retorno.

$$p = 1 - P_e = 1/T$$

p = probabilidad de no excedencia
$P_e$ = probabilidad de excedencia
T = período de retorno en años

Cuando se trata del análisis de los caudales máximos se usa frecuentemente la probabilidad de no excedencia ***p***. Sabiendo que ***p*** y ***Pe*** son complementarios, ***T*** se calcula como sigue:

$$T = 1/(1- P_e)$$

A continuación se resume el procedimiento general para el análisis de valores extremos:
1) Selección de la variable: ***Q*** mínimo anual, semestral, diario.
2) Formación de la serie de valores.
3) Análisis de la independencia, aleatoriedad, homogeneidad y tendencia de los valores que conforman la serie.
4) Cálculo de los parámetros de la función teórica en función de los estimados para la muestra.
5) Selección de la función de distribución teórica que mejor se adapte a la empírica. Para ello se usa alguna prueba de significancia tal como máxima verosimilitud, Chi-cuadrado o Kolmogorov.
6) Cálculo del valor deseado mediante el uso de la función seleccionada.
7) Estimado de los límites de confianza para el valor calculado.
Una descripción de todos los aspectos mencionados está fuera del alcance de este trabajo. Sólo se describen las funciones que a priori se conoce que se adaptan al análisis de caudales mínimos, y adicionalmente un método de estimación de los parámetros de la distribución de valores extremos Tipo III-Weibull.

**Selección de la variable aleatoria**

Frecuentemente se toma como variable aleatoria a los valores de caudal más pequeños dentro de un intervalo determinado (año, semestre, mes). Otras veces se escoge como eventos extremos al promedio mínimo de períodos mayores que un día (períodos secos de diferentes duración).
El procedimiento más indicado para construir la variable, consiste en tomar durante la estación seca de cada año los promedios móviles para el período deseado, y extraer el más pequeño de ellos, el mismo que será la variable

aleatoria (***x***). El análisis se orienta a determinar, por ejemplo, que el caudal medio mínimo de 10 días de duración en el año posee un valor menor o igual que el límite impuesto (***x***) para un determinado intervalo de recurrencia ***T***.
Para el caso de períodos más largos, como los mensuales, se recomienda seguir el siguiente proceso para la construcción de la serie de promedios: Suponiendo que se dispone de 50 años de caudales medios mensuales y se desea efectuar el análisis de los caudales medios para un período de duración de 8 meses, es decir, ***d = 8***. Se calculan los promedios cabalgantes de 8 meses; de los (***n + 1 - d***) = ***593*** valores obtenidos, se selecciona el menor y se eliminan los (***d - 1***) = ***7*** valores anteriores y posteriores inmediatamente adyacentes al menor indicado. Del resto se selecciona nuevamente el menor y se eliminan los (***d - 1***) valores vecinos hacia ambos lados del nuevo valor escogido. Se continúa el procedimiento hasta agotar todos los valores de la serie observada. Los promedios seleccionados conforman la muestra deseada.

## Funciones de distribución de frecuencia

Las funciones de distribución de probabilidades que se usan en el análisis de frecuencia de los caudales mínimos son en gran parte las mismas que se utilizan para el caso de los caudales máximos. Sin embargo se recomienda elegir aquellas en las que sólo toman valores iguales o mayores que cero, porque caudales negativos no tienen sentido físico. Lo que más interesa es pues la rama izquierda de la función.

### a. Distribución empírica.

En la bibliografía de habla inglesa, la distribución empírica se conoce con el nombre de "plotting position" (posición de graficación). Existen varios métodos
para la posición de graficación que se diferencian sólo en el resultado que arrojan. El más comúnmente usado es el de Weibull, dado por:

$$P_e = m / (n + 1) \qquad (3)$$
$$p = (n - m + 1) / (n + 1) \qquad (4)$$

donde ***m*** es el número de orden correspondiente a cada valor de la serie ordenados en forma creciente, y ***n*** es el tamaño de la muestra (número de datos de la serie), ***p*** y $\boldsymbol{P_e}$ definidas en (1).
La distribución empírica reproduce a la real en forma muy inexacta y tiene la desventaja de asignar diferentes probabilidades a valores iguales o casi semejantes dentro de la serie; además, asigna probabilidades muy grandes a los caudales altos de la serie observada y muy pequeñas a los bajos.

### b. Funciones Teóricas de Distribución de Frecuencias.

Las distribuciones más usadas en el análisis de frecuencia de los caudales mínimos son: Log-Normal Pearson Tipo III, Gamma, y de Valores Extremos Tipo III. A continuación se describen las dos de mayor aplicabilidad: Log-Normal y Extrema III.

#### 1) Distribución Log-Normal

Es una función asimétrica y limitada en su rama izquierda, como se muestra en la Figura 1.

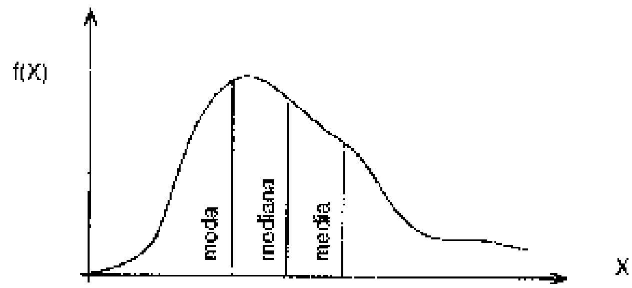



**Figura 1. Representación esquemática de la distribución Log-Normal.**

En este trabajo se hace abstracción del desarrollo de la base teórica, sólo se presenta el modelo de uso práctico:
- Se transforman los valores originales (***x***) de la serie mediante logaritmación.
- Se asume que la transformada logarítmica $y = \ln x$ es normal
- Se aplica la distribución normal a la variable ***y***.

$$f(y) = (1/(\sigma_y \sqrt{2\Pi})).\exp(-(y-\mu_y)^2/2\sigma_y^2) \qquad (5)$$

$$F(y) = (1/(\sigma_y \sqrt{2\Pi}))\int_y^{\alpha} \exp(-(y-\mu_y)^2/2\sigma_y^2)\, dy \qquad (6)$$

Haciendo $z = (y - \mu_y) / \sigma_y$ ; $dy = \sigma_y \, . \, dz$, se obtiene la distribución normal estandarizada.

$$F(z) = (1/\sqrt{2\Pi}) \, . \int_z^{\alpha} e^{-z^2/2}.dz \qquad (7)$$

Los parámetros $\mu_y$ y $\sigma_y$ se estiman en función de los datos observados, como se indica continuación.

$$\mu_y = \overline{y} = (1/n) \, . \sum_{i=1}^{n} \ln(x_i) \qquad (8)$$

$$\sigma_y = S_y = ((\sum_{i=1}^{n} (y_i - \overline{y})^2)/(n-1))^{0.5} \qquad (9)$$

Los parámetros $y$ y $S_y$ no deben calcularse por antilogaritmación, sino aplicando las siguientes relaciones:

$$\overline{x} = \mathrm{Exp}\,(\overline{y} + \sigma_y^2) / 2 \qquad (10)$$

$$S_x = \overline{x}\,(\mathrm{Exp}\,(S_y^2 - 1))^{0.5} \qquad (11)$$

**2) Distribución de valores extremos Tipo III**

Se conoce también como Gumbel Tipo III o de Weibull. Posee una distribución o densidad asimétrica limitada hacia la izquierda, como se muestra en la Figura 2.

$$f(x) = -K.((x-\varepsilon)/(u-\varepsilon)^{k-1}.(1/u-\varepsilon)\exp\left(\frac{x-\varepsilon}{u-\varepsilon}\right)^k$$

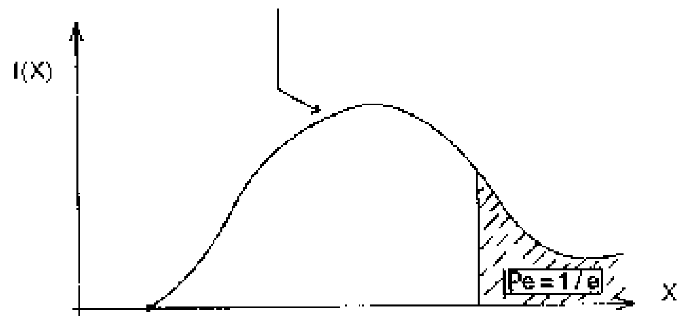



**Figura 2. Representación esquemática de la función Gumbel Tipo III.**

La función de distribución de la probabilidad de excedencia es mucha más fácil de calcular:

$$\mathbf{P(X \geq x) = F(x) = \exp\left(\frac{x-\varepsilon}{u-\epsilon}\right)^k} \qquad (12)$$

Esta última expresión tiene validez en el rango $\boldsymbol{\epsilon \leq x \leq a}$ ***, para u > ϵ y k > 0***. La representación gráfica es como se indica en la Figura 3.

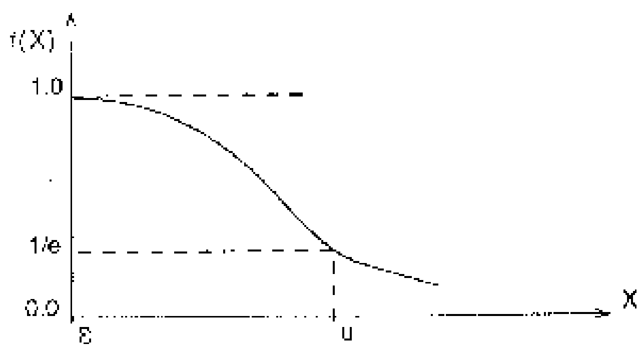



**Figura 3. Representación de la distribución F(x).**

Los parámetros se estiman en función de los datos observados y se definen como sigue:

**ϵ** ($m^3/s$) : Caudal más pequeño posible (***e*** ≤ ***0***).
u ($m^3/s$) : Denominado "Sequía característica", es el caudal cuya probabilidad de excedencia es exactamente igual a ***1/e*** (***P (x= u) = 1/e***)
K : Parámetro adimensional mayor que la unidad
Para estimar los parámetros se usan métodos numéricos y gráficos. A continuación se describe un procedimiento gráfico.
Introduciendo la variable auxiliar de Gumbel se obtiene:

$$\mathbf{F(x) = \exp(-\exp(-y))}$$

Tanto ***y*** como ***f(x)*** se relacionan con ***x*** como se indica a continuación.

$$e^y = ((x - \epsilon) / (u - \epsilon))^k$$

tomando logaritmos a esta última expresión se encuentra una relación lineal entre ***y*** y ***ln*** (**x - €**). Los parámetros, **€**, ***u*** y ***k*** se mantienen constantes para cada serie de valores observados.

$$y = k (\ln(x - \epsilon) - \ln (u - \epsilon)) \qquad (15)$$

$$\ln (x - \epsilon)= \ln (u - \epsilon) + y / k \qquad (16)$$

La última expresión, graficada en papel doble exponencial, representa una recta de pendiente ***1/k***. El papel doble exponencial se puede construir (o adquirir) directamente. Se divide la abscisa de acuerdo con la expresión ***f(x) = exp (-(exp (-y)))***, es decir, ***y = ln (ln(F(x)))***. La ordenada tiene una escala logarítmica. Se recomienda colocar una escala lineal paralela a las abscisas con los valores de y.

El método gráfico se realiza siguiendo los siguientes pasos:

1. Se ordenan los datos observados en forma ascendente.
2. Se calcula la probabilidad empírica.

$$P_m= 1- (m/(n - 1)) \quad m = 1, 2, n \qquad (17)$$

3. Se grafica la función empírica en papel doble exponencial.
4. Se asume un valor de ***y***, se plotea en el mismo gráfico los valores de (x - **€**) para las probabilidades correspondientes a ***x***.
5. Se repite el paso 4 con varios valores de **€** hasta que la gráfica arroje una línea recta.
6. Los parámetros se calculan como se indica a continuación:
   - El valor de "***u***" es la ordenada de la distribución empírica para ***y = 0***, es decir, ***p = 1/e = 0.368***
   - El valor de **€** es la diferencia en ordenada entre la distribución empírica y la recta ***ln*** (***x*** - **€**).
   - El valor de "***k***" es igual a la cotangente del ángulo a de inclinación de la recta (***Tang a = 1/k***)

Hay que tener presente que el ángulo a no puede ser leído directamente en el gráfico debido a la diferencia de escalas.

$$K = \text{Cotang } a = (\Delta Y / (\ln (x1 - \epsilon) - (\ln (x2 - \epsilon)) \qquad (18)$$

Hasta el presente no se dispone de criterios fijos sobre la selección del tipo de función para el análisis de caudales mínimos, siendo un factor condicionante la disponibilidad de datos. Si se dispusiera de suficientes análisis en una cuenca dada, debería usarse como procedimiento estándar aquella función de distribución que se adapte mejor a los registros y requiera menos tiempo de cálculo. Mientras tanto, se recomienda utilizar la distribución que mejor se ajuste a los datos observados disponibles, utilizando los criterios matemáticos para la prueba de significación.

## ANALISIS DE SEQUIAS

### Generalidades

El análisis de los eventos extremos mínimos centra la atención en la independencia de los elementos de la serie. El análisis de las sequías (períodos secos), se orienta a demostrar la persistencia de los eventos hidrológicos y meteorológicos. La persistencia se refiere a la tendencia que existe que un período seco (año, día, etc.) sea seguido por otro seco y que un período húmedo ocurra después de otro húmedo, de acuerdo a un comportamiento similar al de cualquier variable aleatoria.

De acuerdo con lo expuesto, también debe considerarse la independencia de los "Períodos secos" dentro de la serie. Los modelos matemáticos que describen ese tipo de proceso son los denominados "estocásticos". La teoría de los procesos estocásticos es compleja y su uso requiere de grandes computadoras; por ello aquí sólo se estudian modelos sencillos de corta memoria (lo que sucede ahora depende de lo que sucedió ayer), aunque describen el proceso en forma aproximada. Se pretende que sirvan como una alternativa
en el análisis de sequías y como base para un mejor entendimiento de los modelos más complejos.

**Planteamiento del Problema**

El análisis de sequías debe orientarse a resolver las siguientes interrogantes:

1. ¿Cuál es la probabilidad de ocurrencia de un período seco de cierta duración, dependiente de un período húmedo?
2. ¿Cuál es la esperanza matemática del número de períodos secos de determinada duración que pueden ocurrir en un intervalo de ***n*** días?
3. ¿Cuál es la probabilidad de ocurrencia de períodos secos con duración igual o mayor que d, condicionado a que por lo menos ya haya ocurrido uno de ellos (previsión de la longitud de los períodos secos)?

Para resolver las interrogantes planteadas, se sigue el procedimiento siguiente (caso de un serie anual de caudales diarios durante un determinado período):

- A todos los caudales menores que el límite mínimo preestablecido $\boldsymbol{Q_s}$ se les asigna el símbolo binario ***1***.
- A los caudales restantes (mayores que $Q_s$) se les asigna el símbolo ***0***.

Este sistema de codificación proporciona una serie de secuencias enteras de ceros y unos de longitud deseada.
En relación con la segunda interrogante, se debe desarrollar un modelo que simule la ocurrencia de la serie de unos, es decir, los períodos secos. La dependencia de cada elemento de la serie se simplifica a través de la probabilidad condicional, o también de la denominada probabilidad de transición. La probabilidad condicional de la probabilidad de ocurrencia de un día seco después de otro seco. Las frecuencias relativas calculadas sobre la base de la serie codificada representan la primera aproximación de la probabilidad condicional; se estiman como se indica a continuación:

$$(\mathbf{H})_r = \frac{\text{Número de casos ocurridos}}{\text{Número de casos posibles}} \qquad (19)$$

($\boldsymbol{H_r}$) = frecuencia relativa

**Ocurrencia de períodos secos de duración "d".**

Se describe el modelo general de Wiser (1967), el mismo que se construye sobre la base de una especie de modelo de urna. La primera realización de un evento, en este caso día húmedo o día seco es independiente de cualquier otro evento. Para cada una de las siguientes realizaciones, la probabilidad de ocurrencia de un día húmedo o seco depende de la longitud de la serie inmediatamente anterior a los mismos eventos.
El modelo general asume que la probabilidad de que p.e., un día seco siga a otro seco, es constante. Es decir, cada realización es dependiente sólo de la realización inmediatamente anterior, además de ser constante; mejor dicho, que posee el mismo valor al inicio y al final de una serie de los mismos eventos. Esta acepción fuertemente simplificada conduce a una cadena de Marcov homogénea y estacionaria, la que sin embargo simula el comportamiento real en forma insuficiente.
En este trabajo se usan los siguientes conceptos de probabilidad condicional:

**YT = Probabilidad de que un día seco siga a otro seco:**

$$T \longrightarrow T$$

**XT = Probabilidad de que un día húmedo siga a uno seco:**

$$T \longrightarrow N$$

**YN = Probabilidad de que un día seco siga a uno húmedo:**

$$N \longrightarrow T$$

**XN = Probabilidad de que un día húmedo siga a otro húmedo:**

$$N \longrightarrow N$$

El número medio de los períodos secos de duración "***d***" que se esperan en las definiciones anteriores se estima como sigue:

$$M(d) = (2 + (n - d - 1) X_T) \cdot X_T \cdot Y_N \cdot Y_T^{d-1} / (X_T + Y_N) \quad (20)$$

$$d = 1, 2, ..., n - 1$$

siendo "***n***" el número total de los días secos y húmedos.
El número de períodos secos $N_p$ es:

$$\mathbf{N_p = (1 + (n - 1) X_t) Y_n / (X_n + Y_n) \qquad (21)}$$

El número de todos los días secos es:

$$\mathbf{N_t = nY_n / (X_t + Y_n) \qquad (22)}$$

Para los valores muy grandes de "n" se usan las siguientes aproximaciones:

$$M(d) = n \ X_T^2 \ Y_N \ Y_T^{d-1} / (X_T + Y_N) \qquad (23)$$

$$Np = n \ X_T \ Y_N / (X_T + Y_N) \qquad (24)$$

$$N_T = n \ Y_N / (X_T + Y_N) \qquad (25)$$

Los valores de $\mathbf{Y_N}$, $\mathbf{X_T}$, $\mathbf{Y_T}$, $\mathbf{X_N}$, se estiman de los datos observados como sigue:

**XT = $N_P$, / NT: Probabilidad de transición (26)**

$$T \longrightarrow N$$

**YT = 1 - $X_T$: Probabilidad de transición (27)**

$$T \longrightarrow T$$

**XN = 1 - YN: Probabilidad de transición (28)**

$$N \longrightarrow N$$

**Duración de los períodos secos**
**Serie geométrica (cadenas de Marcov homogéneas)**
El modelo más simple de las cadenas de Marcov homogéneas viene a ser la probabilidad de ocurrencia de un día seco después de otro día seco. Para simplificar la explicación, se recurre nuevamente al modelo de "urna", con bolas rojas y negras. Sea "***p***" la probabilidad de extraer una bola roja, y (***1 -p***) la de extraer una bola negra. Luego, la probabilidad de extraer una serie de bolas rojas de "m" unidades será:

$$\mathbf{P(x = m) = P^m (1 - p) \qquad (29)}$$

Como se ha indicado anteriormente, uno de los problemas a resolver en el análisis de sequías es la probabilidad de ocurrencia de una serie de duración igual o mayor que "***d***" ( $d \geq 1$). Por lo tanto, restaría calcular la probabilidad (***1 -p***) para el inicio y final de la serie. Así resulta que la probabilidad de ocurrencia de un período seco mayor o igual que la duración "***d***" sería:

$$p\,(x \geq d) = p_d^m \qquad (m = 2, 3, 4, \ldots) \qquad (30)$$

La frecuencia absoluta (número) de períodos secos esperados con duración igual o mayor que "***d***" es:

$$N_{d+m-1} = N_d \cdot p_d^m \qquad (m = 2, 3, 4, \ldots) \qquad (31)$$

$$\text{Para: } m = 1,\ N_{d+m-1} = N_d$$

donde:

Nd = Frecuencia absoluta observada de los períodos secos con duración mayor o igual que ***d***.
Pd= Se calcula sobre la base de los días secos observados solamente, a diferencia del modelo Wiser, es decir:

$$P_d = \frac{1 - (\text{N}^{\circ} \text{ de períodos secos})}{(\text{N}^{\circ} \text{ total de períodos secos})} \geq d$$

$$P_d = 1 - N_d \ \Sigma N_d = (\Sigma N_d - 1) / (\Sigma N_d) \qquad (32)$$

**Serie Logarítmica**
La forma de la probabilidad de ocurrencia de un período seco de duración igual o mayor que d se puede ajustar a una función teórica del siguiente tipo:

$$\mathbf{P_d = 1 - P_0\, e^{-kd}} \qquad \mathbf{(33)}$$

Hasta ahora hay pocos resultados sobre este tipo de investigación. Meier (1970) propuso una serie potencial del siguiente tipo:

$$p(x \geq d) - 1 - \frac{n\,(1 - r)}{N} \cdot (1 - r/2 + r^3/3 + \ldots + r^{m-1}/m) \quad (34)$$

$$m = 1, 2, 3, \ldots$$

La serie tiene validez para $r \leq 1$ y $d = m + 1$. Cuando "***m***" tiende al infinito, el segundo paréntesis del término de la derecha tiende a cero, es decir, $p\ (x \geq d) \Rightarrow 0$. El valor de ***r*** se obtiene de los días secos observados y se da como una función implícita en la siguiente expresión:

$$\mathbf{r / (\ln(1 - r)) = -n / N(1 - r)}$$

N = Número de períodos secos ≥ ***d***
n = Número de días secos de los ***N*** períodos secos
n/N = Duración media de un período seca (período seco medio)
En la mayoría de los casos se ha encontrado que la serie logarítmica arroja mejores resultados que la geométrica.

**EJEMPLO DE APLICACION**
Los métodos descritos se ilustran con el siguiente ejemplo, tomado de la referencia (3). Los resultados se resumen de la siguiente forma:

**Tabla 1: Serie anual de caudales diarios mínimos en m3/s (1921- 1967).**

| m | Año | NQ en m³/s | | p % | m | Año | NQ en m³/s | | p % |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | cronológico | ordenado | | | | cronológico | ordenado | |
| 1 | 1921 | 0,79 | 0,79 | 97,92 | 25 | 1945 | 2,85 | 2,66 | 47,92 |
| 2 | 1922 | 0,96 | 0,96 | 95,84 | 26 | 1946 | 3,35 | 2,85 | 45,84 |
| 3 | 1923 | 1,10 | 1,10 | 93,75 | 27 | 1947 | 0,96 | 2,85 | 43,75 |
| 4 | 1924 | 3,72 | 1,32 | 91,67 | 28 | 1948 | 2,20 | 2,95 | 41,67 |
| 5 | 1925 | 2,35 | 1,47 | 89,59 | 29 | 1949 | 1,32 | 3,10 | 39,59 |
| 6 | 1926 | 2,23 | 1,60 | 87,50 | 30 | 1950 | 2,20 | 3,19 | 37,50 |
| 7 | 1927 | 6,11 | 1,60 | 85,42 | 31 | 1951 | 4,07 | 3,35 | 35,42 |
| 8 | 1928 | 1,60 | 1,60 | 83,34 | 32 | 1952 | 1,83 | 3,60 | 33,34 |
| 9 | 1929 | 1,60 | 1,66 | 81,25 | 33 | 1953 | 1,66 | 3,72 | 31,25 |
| 10 | 1930 | 3,19 | 1,78 | 79,17 | 34 | 1954 | 2.00 | 3.85 | 29.17 |
| 11 | 1931 | 5,67 | 1,82 | 77,09 | 35 | 1955 | 3.85 | 4,07 | 27,09 |
| 12 | 1932 | 2.03 | 1,83 | 75,00 | 36 | 1956 | 2,95 | 4,10 | 25,00 |
| 13 | 1933 | 1,60 | 1,88 | 72,92 | 37 | 1957 | 4,20 | 4,20 | 22,92 |
| 14 | 1934 | 1,47 | 2,00 | 70,84 | 38 | 1958 | 5,80 | 4,20 | 20,84 |
| 15 | 1935 | 1,88 | 2,03 | 68,75 | 39 | 1959 | 1.78 | 4,28 | 18,75 |
| 16 | 1936 | 5,23 | 2,20 | 66,67 | 40 | 1960 | 2,66 | 4,48 | 16,67 |
| 17 | 1937 | 2,35 | 2,20 | 64,59 | 41 | 1961 | 4,54 | 4,52 | 14,59 |
| 18 | 1938 | 2,52 | 2,23 | 62,50 | 42 | 1962 | 2,40 | 4,54 | 12,50 |
| 19 | 1939 | 4,28 | 2,25 | 60,42 | 43 | 1963 | 2,85 | 5,23 | 10,42 |
| 20 | 1940 | 4,52 | 2,35 | 58,34 | 44 | 1964 | 1,82 | 5,45 | 8,30 |
| 21 | 1941 | 5,45 | 2,35 | 56,25 | 45 | 1965 | 4,10 | 5,67 | 6,25 |
| 22 | 1942 | 2,25 | 2.40 | 54,17 | 46 | 1966 | 4,48 | 5,80 | 4, 17 |
| 23 | 1943 | 2,45 | 2.45 | 52,09 | 47 | 1967 | 3,10 | 6,11 | 2,08 |
| 24 | 1944 | 3,60 | 2,52 | 50,00 | | | | | |

**Parámetros:** $\mu$ = **2,98 m³/s; s = 1.48 m³/s; p = (1 – m / (n + 1))100**

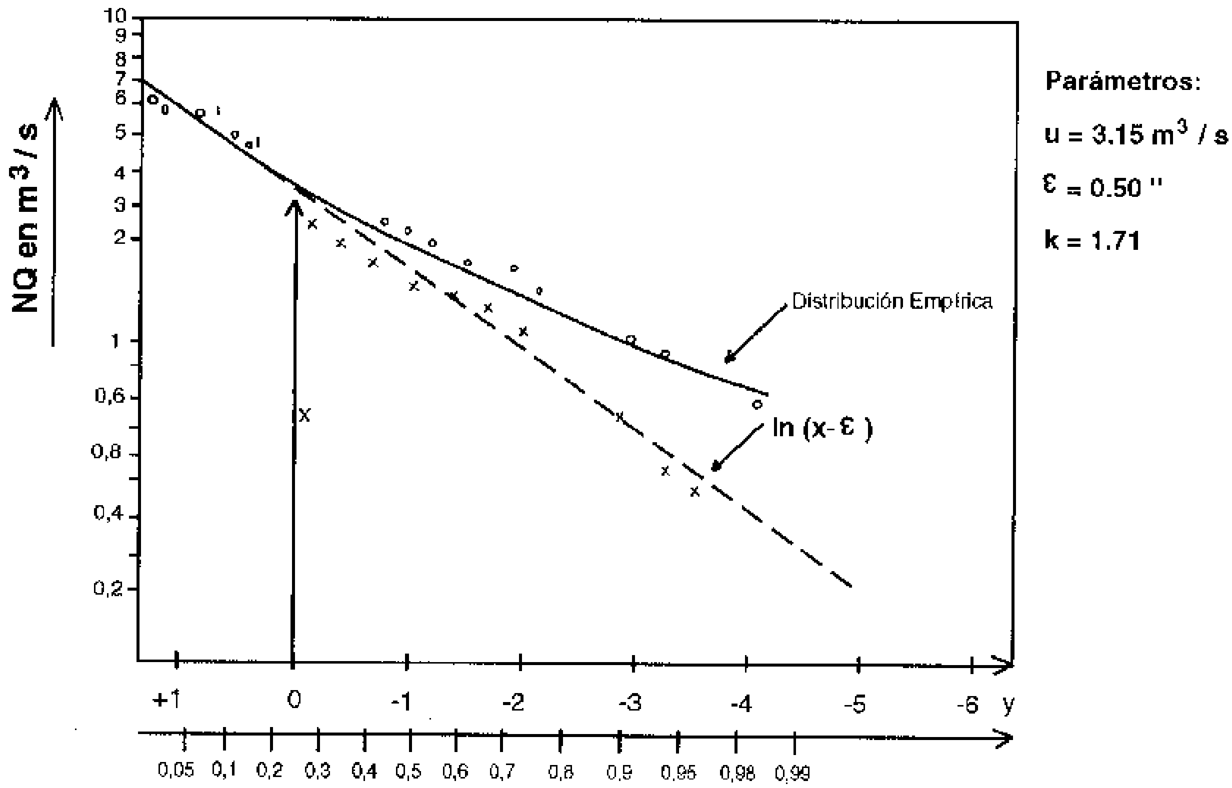



**Figura 4. Determinación gráfica de los parámetros de la Distribución Weibull.**

**Tabla 2. Períodos secos observados para Q < 3.5 m³/s.**

| Duración d | Nº Periodos secos de duración d $n_d$ | Nº Periodos secos de duración ≥ d $N_d = \Sigma n_d$ | $\Sigma N_d$ | Nº de los días secos $n_d \cdot d$ | Nº días secos duración − d $\Sigma d \cdot n_d$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 62 | 164 | 880 | 60 | 680 |
| 2 | 23 | 102 | 716 | 46 | 618 |
| 3 | 15 | 79 | 614 | 45 | 772 |
| 4 | 10 | 64 | 535 | 40 | 727 |
| 5 | 12 | 54 | 471 | 60 | 687 |
| 6 | 13 | 42 | 417 | 78 | 627 |
| 7 | 4 | 29 | 375 | 28 | 549 |
| 8 | 1 | 25 | 346 | 8 | 521 |
| 9 | 3 | 24 | 321 | 27 | 513 |
| 10 | 1 | 21 | 297 | 10 | 486 |
| 11 | 1 | 20 | 276 | 11 | 476 |
| 12 | 1 | 19 | 256 | 12 | 465 |
| 13 | 3 | 18 | 237 | 39 | 453 |
| 14 | 1 | 15 | 219 | 14 | 414 |
| 15 | 1 | 14 | 204 | 15 | 400 |
| 16 | 1 | 13 | 190 | 16 | 385 |
| 17 | 1 | 12 | 177 | 17 | 369 |
| 18 | · | 11 | 165 | — | · |
| 19 | -- | 11 | 154 | — | — |
| 20 | 1 | 11 | 143 | 20 | 352 |
| 21 | — | 10 | 132 | — | — |
| 22 | 2 | 10 | 122 | 44 | 332 |
| 23 | 1 | 8 | 112 | 23 | 289 |
| 24 | — | 7 | 104 | — | — |
| 25 | 1 | 7 | 97 | 25 | 265 |
| . | — | — | — | — | — |
| 32 | 2 | 6 | 54 | 64 | 240 |
| . | — | — | — | — | — |
| 36 | 1 | 4 | 36 | 36 | 176 |
| — | 1 | 3 | 26 | 39 | 140 |
| 40 | 1 | 2 | 23 | 40 | 101 |
| . | — | — | — | — | — |
| 61 | 1 | 1 | 1 | 61 | 61 |

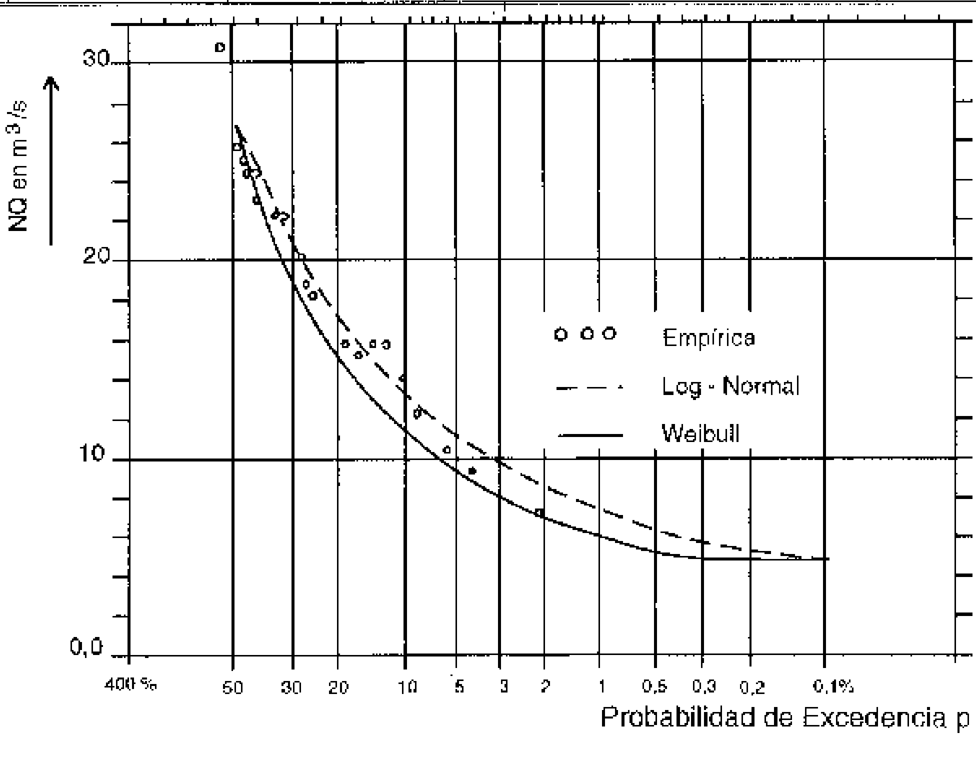



**Figura 5. Distribución de frecuencias de loa caudales mínimos del ejemplo.**

**Tabla 3: Períodos secos calculados de acuerdo con el modelo Wiser.**

**Resumen de los parámetros**

Número total de dias $n = 16925$

Número total de dias secos $N_T = 880$

Número de períodos secos $N_p = 164$

**Cálculos:**

$p\,(N/N) = X_N = 1 - Y_N = 0.98984$

$p\,(T/T) = Y_T = 1 - X_T = 0.81360$

$p\,(T/N) = Y_N = N_p / (n - N_T) = 0.01016$

$p\,(N/T) = X_T = N_p / N_T = 0.18630$

| Duración d | Nº de períodos secos | |
|---|---|---|
| | Calculados * $n_d$ | Observados $n_d$ |
| 1 | 31 | 62 |
| 2 | 25 | 23 |
| 3 | 20 | 15 |
| 4 | 16 | 10 |
| 5 | 13 | 12 |
| 6 | 11 | 13 |
| 7 | 9 | 4 |
| 8 | 7 | 1 |
| 9 | 6 | 3 |
| 10 | 5 | 1 |
| 11 | 4 | 1 |
| 12 | 3 | 1 |
| 13 | 3 | 3 |
| 14 | 2 | 1 |
| 15 | 2 | 1 |
| 16 | 1 | 1 |
| 17 | 1 | 1 |
| 18 | 1 | – |
| 19 | 1 | – |
| 20 | 1 | 1 |

* **Números redondeados**

**Cálculos:**

**Serie geométrica:**

$d \geq 2$:

$\Sigma N_{d-1} = 614$

$\Sigma N_d = 716$

$P_d = 614/716 = 0.857$

$d \geq 6$:

$\Sigma N_{d-1} = 375$

$\Sigma N_d = 417$

$P_d = 375/417 = 0.900$

**Ecuación:**

$N_{d+m-1} = N_d \cdot P_d^m$

$m = 2, 3, 4, \ldots$

**Serie logarítmica:**

| | d = 2 | d = 6 |
|---|---|---|
| N | 102 | 42 |
| n | 818 | 627 |
| r | 0,964 | 0,984 |

**Ecuación:**

$$-\frac{N \cdot r}{n\,(1-r)} = \ln(1-r)$$

$$N \cdot p(x \leq d) = N.n(1-r)\,(1 + r/2 + r^2/3 + \ldots r^{m+1}/m)$$

$m = 1, 2, 3, \ldots.$

**TABLA 4. Períodos secos calculados de acuerdo con las series geométricas y logarítmica.**

| Duración de los períodos secos d | Frecuencia acumulada Nd | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | Serie geométrica d ≥ 2 | Serie geométrica d ≥ 6 | Serie observada | Serie logarítmica d ≥ 2 | Serie logarítmica d ≥ 6 |
| 1 | – | – | 164 | | |
| 2 | – | – | 102 | | |
| 3 | 75 | | 79 | 72 | |
| 4 | 64 | | 64 | 59 | |
| 5 | 55 | | 54 | 50 | |
| 6 | 47 | | 42 | 43 | |
| 7 | 41 | 34 | 29 | 38 | 32 |
| 8 | 35 | 31 | 25 | 33 | 27 |
| 9 | 30 | 28 | 24 | 30 | 24 |
| 10 | 26 | 25 | 21 | 27 | 21 |
| 11 | 22 | 22 | 20 | 24 | 20 |
| 12 | 19 | 20 | 19 | 22 | 18 |
| 13 | 16 | 18 | 18 | 20 | 17 |
| 14 | 14 | 16 | 15 | 18 | 16 |
| 15 | 12 | 15 | 14 | 16 | 15 |
| 16 | 10 | 13 | 13 | 15 | 14 |
| 17 | 8 | 12 | 12 | 14 | 13 |
| 18 | 7 | 11 | 11 | 13 | 12 |
| 19 | 6 | 10 | 11 | 12 | 12 |
| 20 | 6 | 9 | 11 | 11 | 11 |
| 21 | 5 | 8 | 10 | 10 | 10 |
| 22 | 4 | 7 | 10 | 9 | 10 |
| 23 | 3 | 6 | 8 | 8 | 9 |
| 24 | 3 | 6 | 7 | 7 | 9 |
| 26 | 3 | 5 | 7 | 7 | 9 |
| 32 | 1 | 2 | 6 | 4 | 7 |
| 36 | – | 2 | 4 | 2 | 6 |
| 39 | – | 1 | 3 | 1 | 5 |
| 40 | – | 1 | 2 | 1 | 5 |
| 61 | – | 1 | 1 | – | 1.5 |

**REFERENCIAS**


1. Aitchinson, Brown, 1966. The Lognormal Distribution. Univ of Cambridge, Dept. of Applied Economics. Monograph 5.
2. Bechteler, W., 1969. Untersuchung langjaeriger hydrologischer Reihen. Mitt. Inst. f. Hydraulik und Gewwaesserkunde Muenchen. Heft 3.
3. Eggers, H., 1970. Parameterfrei statistische Methoden zur Analyse von Datenrehien. Mitt. Inst. f. Wasserbau und Wasserwirtschaft, Heft 158, Karlsruhe.
4. Gumbel, E.J. Statistical Theory of Floods and Droughts. Journal of the Inst. of Water Engineers. Vol. 12, 1958.
5. Hersfield, O.M., 1970. The Frequency and Intensity of Wet and Dry Seasons an their Interrelationship. Water Resources Bulletin, Vol. 6, N° 1.
6. Kirsten, M. Statistische Methoden der Hydrologie, VEB Verlag Technik, Mitt. Nr. 2, Fortbildungslehrgang fuer Hydrologie, Muenchen.
7. Meier R.C., 1970. Niedrigwasseranalyse, 2. Fortbildungslebrgang fuer Hydrologie, Muenchen.
8. Plate, E., 1971. Analyse kontinuierlicher Zufallsfunktionen. Mitt. Nr. 1, Inst. f. Wasserbau 111, Karlsruhe.
9. Pinkayan, S., 1966. Conditional Probabilities of Occurrence of Wet and Dry Years. Hydrology. Paper N° 12, CSU, Fort Collins.

10. Wiser, E.H., 1967. An Analysis of Runs of Precipitation Events. Proceedings Int. Hydrology Symp., Fort Collins.
11. WM.O., 1966. Statistical Analysis of Prognosis in Meteorology. Technical Note N° 71, Gen£
12. Yevdjevich, WM., 1970. Fluctuation of Wet and Dry Years. Hydrol. Paper N° 1,4, CSU, Fort Collins.