INGENIERIA UC
Organo de Divulgación Científica y Tecnológica
de la Facultad de Ingeniería
de la Universidad de Carabobo
FACULTAD DE INGENIERIA U.C.

ALGUNOS METODOS PARA OBTENER SERIES DE FOURIER

Darío Castellanos Guédez, Facultad de Ingeniería, Universidad de Carabobo

En este breve artículo quiero ofrecer al lector algunos métodos que permiten simplificar la tarea de calcular los coeficientes de una Serie de Fourier.
Suponemos que la Serie de Fourier es de la forma

$$f(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \operatorname{sen} nx) \qquad (1)$$

con

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(t) \cos nt\, dt,\; b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(t) \cos nt\, dt, \quad (2)$$

donde ***f(x)*** es una función de variación acotada en el intérvalo $(x - \delta, x + \delta)$, para $\delta > 0$.
Si la función ***f(x)*** es par, es decir ***f(x)*** = ***f(-x)***, entonces la Serie de Fourier no posee senos, puesto que ***sen nx*** es una función impar. En este caso no hace falta calcular los b_n, ya que son nulos. Los coeficientes a_n están dados por:

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(t) \cos nt\, dt \qquad (3)$$

Si la función ***f(x)*** es impar, es decir ***f(x)*** = ***-f(x)***, entonces la Serie de Fourier no posee cosenos, puesto que ***cos nx*** es una función par. En este caso no hace falta calcular los a_n ya que son nulos. Los coeficientes b_n, están dados por:

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(t) \operatorname{sen} nt\, dt \qquad (4)$$

A veces sucede que la función dada no es ni par ni impar, pero puede ser convertida en una de esas formas sumando una constante, o cambiando los ejes de coordenadas.
Por ejemplo, la función ***f(x)*** igual a 0 para $\pi < x < 0$, e igual a 1 para $0 < x < \pi$, no es ni par ni impar, y por lo tanto debemos esperar que su desarrollo en serie de Fourier posea senos y cosenos. Sin embargo, si de ***f(x)*** restamos la constante

$$\frac{1}{2}$$

obtenemos la función

$$g(x) = f(x) - \frac{1}{2}, \text{ igual a } -\frac{1}{2} \text{ para } -\pi < x < 0,$$

e igual a

$$\frac{1}{2} \text{ para } 0 < x < \pi,$$

y es por lo tanto impar. El desarrollo en Serie de Fourier de esta función g(x) posee sólo senos y en consecuencia el desarrollo en Serie de Fourier de ***f(x)*** es

$$\frac{1}{2}$$

m ás la serie de Fourier ***g(x)***.

También, la función ***f(x)*** = ***sen x*** para $0 \leq x \leq \pi$, e igual a 0 para $\pi \leq x < -2\pi$ y periódica con período 2π, no es ni par ni impar. La función

$$g(x) = f(x + \frac{1}{2}\pi),$$

sin embargo, es par. Basta por lo tanto calcular los coeficientes a_n para la función ***g(x)***, y en la serie de Fourier resultante cambiar a ***x*** por

$$(x - \frac{1}{2}\pi).$$

Otro caso interesante es el de las funciones ***f(x)*** que poseen la propiedad ***f(x)*** = **-f(x + π)**. Estas funciones se dice que poseen simetría de media onda. Es un sencillo ejercicio, comenzando con las ecuaciones (2), demostrar que para este tipo de funciones los coeficientes a_n y b_n de índice par son cero. Es suficiente en este caso calcular sólo las armónicas de índice par. Por ejemplo la onda cuadrada, ***f(x)*** = -1 para $-\pi < x <$ O, y ***f(x)*** = 1 para $0 < x < \pi$ y periódica con período 2π, posee simetría de media onda. Como la función además es impar es sólo necesario calcular la integral

$$b_{2n+1} = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} 1 \operatorname{sen}(2n+1)\,t\,dt$$

para obtener la Serie de Fourier

$$f(x) = \frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\operatorname{sen}(2n+1)\,x}{2n+1} \qquad (5)$$

A veces es posible integrar una serie conocida para obtener el desarrollo en serie de Fourier de una función buscada. Por ejemplo, la integral indefinida de la onda cuadrada descrita arriba es la integral de 1 para $-\pi < x < 0$ que corresponde a ***-x***, y la integral de 1 para $0 < x < \pi$ que es x. Por lo tanto el desarrollo en Serie de Fourier de la función ***f(x)*** igual a ***–x*** para $-\pi < x < 0$, e igual a ***x*** para $0 < x < \pi$ corresponde a la integral indefinida de (3) más la constante de integración. La constante de integración es el término

$$\frac{1}{2}a_0$$

y corresponde al área promedio de la función en un período. Como la función consta de dos triángulos rectángulos, el término constante es

$$2\left(\frac{1}{2}\pi^2\right)/2\pi = \frac{1}{2}\pi$$

El desarrollo en serie de Fourier de la onda triangular es por lo tanto

$$f(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(2n+1)x}{(2n+1)^2} \qquad (6)$$

Un poco de ingenio puede a veces ahorrar algo de trabajo. Por ejemplo, la función: ***f(x)*** = ***cos x*** para

$$-\frac{1}{2}\pi \leq x \leq \frac{1}{2}\pi,$$

e igual a 0 para

$$|x| \geq \frac{1}{2}\pi$$

y periódica con período 2 π, corresponde a la salida de un rectificador de media onda. Esta función es par y su desarrollo en serie de Fourier es:

$$f(x) = \frac{1}{\pi} + \frac{1}{2}\cos x + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}\cos 2nx}{4n^2 - 1} \qquad (7)$$

Si deseamos obtener el desarrollo en serie de Fourier de la función ***f(x)*** = ***cos x***, para

$$|x| \leq \frac{1}{2}\pi,$$

y periódica con período π, que corresponde a la salida de un rectificador de onda completa, podríamos ir a las fórmulas (2) y calcular los coeficientes apropiados. Sin embargo, es fácil ver que si a la salida del rectificador, de media onda se le resta

$$\frac{1}{2}\cos x$$

tendremos para

$$-\frac{1}{2}\pi \leq x \leq \frac{1}{2}\pi, \cos x = \frac{1}{2}\cos x = \frac{1}{2}\cos x,$$

y para

$$|x| \geq \frac{1}{2}\pi \ , \ 0 - \frac{1}{2} \cos x = -\frac{1}{2} \cos x.$$

Para

$$\pi > |x| \geq \frac{1}{2}\pi, \cos x$$

es negativo y en consecuencia la expresión

$$-\frac{1}{2} \cos x$$

es positiva. Por lo tanto, restando

$$\frac{1}{2} \cos x$$

a la ecuación (7) y multiplicando la expresión resultante por 2 obtenemos el desarrollo en serie de Fourier para la salida del rectificador de onda completa.

$$f(x) = \frac{2}{\pi} + \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \cos 2nx}{4n^2 - 1} \qquad (8)$$

Espero en este corto artículo haber mostrado al lector algunos artificios para ahorrar labor, y en el último ejemplo cómo ser inteligentemente perezoso, es decir, como aprender a trabajar sin trabajar.