INGENIERIA UC
Organo de Divulgación Ciencifica y Tecnológica de la Facultad de Ingeniería de la Universidad de Carabobo
FACULTAD DE INGENIERIA U.C.

CÁLCULO DE ELEMENTOS PRISMÁTICOS DE CONCRETO ARMADO SOMETIDO A FLEXO-COMPRESIÓN BIAXIAL. TEORÍA DE CÁLCULO EN ROTURA

Carlos A. García S., Adalgiza Pombo de la Rosa.
Escuela de Ingeniería Civil. Universidad de Carabobo. Valencia, Venezuela.

Resumen

En el presente trabajo se plantea la posibilidad de calcular la cuantía de acero y el estado tensional, de una sección sometida a solicitaciones de flexo-compresión biaxial, no importando la forma de la sección de concreto, ni el número, ni distribución de las cabillas. Para ello se utilizó el método de cálculo en rotura del bloque de tensiones simplificado de Whitney, la teoría de los sólidos prismáticos y las ecuaciones de equilibrios entre las solicitaciones internas y externas. La obtención de los resultados se logra empleando un programa realizado en lenguaje Basic.

Palabras claves: Cálculo a la rotura., flexo-compresión biaxial, concreto armado.

Abstract

The following paper, brings an alternative to estimate the amount of steel and strain state in a biaxial flexo-compretion condition, of a structural section. This criterial take any shape of concrete section, and any number of steel bars distribution. In order to accomplish this, several¡ theories were used, first the Whitney method, which consists in calculating the tension of the block while collapsing; second, prismatic solids theory; third, and last, the balance equation between the internal¡ and external¡ reactions. Final results are obtained by developing a program using BASIC computer language.

Key words: Ultimate design, biaxial flexo-compretion, armed concrete.

INTRODUCCIÓN

El objetivo principal de este artículo es presentar un procedimiento de cálculo que nos, permita determinar la cuantía de acero de una sección de concreto armado sometida a flexo-compresión biaxial determinando el régimen tensional en la sección en el estado de rotura. Para ello se creará un programa de computación capaz de darle solución a este problema.

METODOLOGÍA

Procedimiento general de cálculo para la determinación de las cuantías de acero requeridas.
Para determinar esta cuantía de acero es necesario calcular el régimen de deformaciones que se genera en la sección de concreto armado en condición de rotura. Conocidas las deformaciones se pueden determinar las tensiones de los materiales las fuerzas generadas en cada uno de ellos y las solicitaciones internas sobre la sección. Para ello haremos uso de las ecuaciones de equilibrio, y el método del bloque de tensiones de Whitney.
Las Ecuaciones de Equilibrio a utilizar son las siguientes:

$$P = \int \sigma \, dA \qquad (1)$$

$$M_x = \int \sigma \, y \, dA \qquad (2)$$

$$M_y = \int \sigma \, x \, dA \qquad (3)$$

Donde:

P = Fuerza axial resultante.
Mx = Momento resultante alrededor del eje X.
My = Momento resultante alrededor del eje Y.
σ = Tensión normal en la sección.
dA = Diferencial de área en estudio.
x,y = Coordenadas del diferencial de área respecto a los ejes X,Y.

Procedimiento de cálculo.

Los pasos para resolver el problema planteado son los siguientes:

1. Se fijan las características mecánicas de los materiales.
Para el concreto:

f'_c = Resistencia especificada del concreto a compresión

Para el acero:

f_y = Resistencia cedente especificada del acero
E_s = Módulo de elasticidad del acero
ρ_{min} = Cuantía mínima de armadura en la sección de concreto armado.
ρ_{max} = Cuantía máxima de armadura en la sección de concreto armado.

2. Se fija la geometría de la sección transversal (el método acepta cualquier forma de sección transversal que tenga trazado poligonal). Se ubican las cabillas dentro de la sección definida.
3. Fijar un valor para la cuantía mecánica,

$$\rho = A_s/A_b$$

Donde:

ρ = Cuantía relativa de armadura en la sección de concreto armado.
A_b = Área bruta de la sección.
A_s = Área total de armadura en la sección de concreto armado.

Se calcula el centroide plástico de la sección. Entendiéndose como el punto en el cual se debe ubicar P_0 de tal forma que las tensiones en el concreto y en el acero sea la misma en todos los puntos, generando así, sólo, solicitaciones axiales, se plantea que:

$$P_u = \phi \int \sigma \, dA = \phi \left(-0{,}85 \, f'_c \, A_c + \sum_{i=1}^{n} \sigma_{si} A_{si} \right) = P_o \qquad (4)$$

siendo:

$$A_c = A_b = \text{Área bruta de la sección}$$

$$\sigma_{si} = -E_s \, \varepsilon_{cu} \quad \Rightarrow \quad \text{Si } \sigma_{si} > f_y \text{ se hace } \sigma_{si} = -f_y \qquad (5)$$

Donde:

ϕ = Factor de minoración de resistencia.
ε_{cu} = Deformación máxima en el concreto en el estado de rotura.
σ_{si} = Tensión en la *iésima* cabilla (a compresión).
A_{si} = Área de acero de la *iésima* cabilla.
P_o = Fuerza axial en la sección de concreto armado en rotura sometida a sólo compresión.
A_c = Área del bloque de compresión de Whitney.

Si tomamos en cuenta para el cálculo el acero embutido en el concreto a compresión se hará:

$$\sigma_{si} = \sigma_{si} + 0{,}85 \, f'_c \qquad (6)$$

$$M_{ux} = \phi \int \sigma \, y \, d_A = \phi \left(-0{,}85 \, f'_c \, A_c \, y_c + \sum_{i=1}^{n} \sigma_{si} \, A_{si} \, y_{si} \right) \qquad (7)$$

$$M_{uy} = \phi \int \sigma \, x \, d_A = \phi \left(-0{,}85 \, f'_c \, A_c \, x_c + \sum_{i=1}^{n} \sigma_{si} \, A_{si} \, x_{si} \right) \qquad (8)$$

Donde:

x_c , y_c = Coordenadas del centro geométrico del área de concreto respecto a los ejes de referencia X-Y.

x_{si} , y_{si} = Coordenadas de la *iésima* cabilla respecto a los ejes de referencia X-Y.

Luego:

$$X_p = \frac{M_{uy}}{P_0} \qquad (9)$$

$$Y_p = \frac{M_{ux}}{P_0} \qquad (10)$$

Donde:

x_p , y_p = Coordenadas del centroide plástico de la sección de concreto armado respecto a los ejes de referencia X-Y.

Estos valores corresponden a las coordenadas d centroide plástico, *cp*, (ver figura 1).
4. Ubicamos los nuevos ejes X'-Y' sobre el centroide plástico.

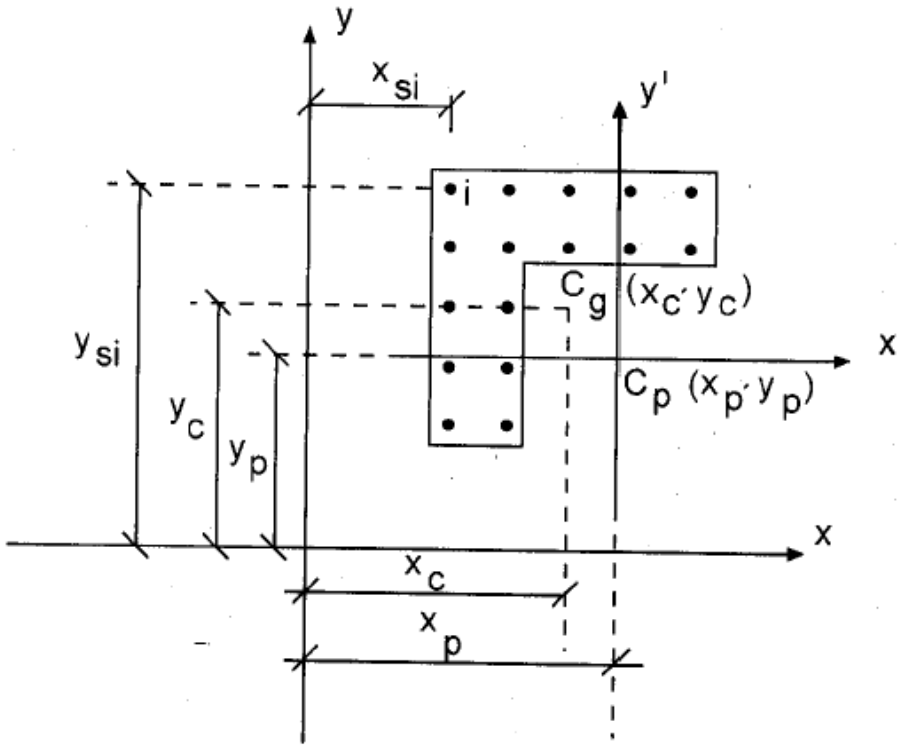

Figura 1. Ejes de referencia X' , Y' ubicados en el centroide plástico.

5. Se fija un valor del ángulo de inclinación del eje neutro n-n igual a θ (este ángulo varia entre 0° y 360°) con recorrido antihorario como positivo. Definiremos como c la distancia desde la fibra más comprimida hasta el eje neutro. Con c podemos calcular el régimen de deformaciones toda la sección. Como se observa en la figura 2.
Se calculan las deformaciones unitarias:

$$\frac{\varepsilon_{cu}}{c} = \frac{\varepsilon_{si}}{d_{si}} = \frac{\varepsilon'_{si}}{d'_{si}} \qquad (11)$$

Donde:

ε_{si} = Deformación unitaria de la *iésima* cabilla a tracción.
ε'_{si} = Deformación unitaria de la *iésima* cabilla a compresión.
c = Profundidad del eje neutro.
d_{si} = Distancia de la *iésima* cabilla a tracción hasta el eje neutro de la sección de concreto armado.
d'_{si} = Distancia de la *iésima* cabilla a compresión hasta el eje neutro de la sección de concreto armado.

Se calculan las tensiones en el acero:
cabillas a tracción:

$$\sigma_{si} = \varepsilon_{si}\, E_s \quad \Rightarrow \text{Si } \sigma_{si} > f_y \quad \Rightarrow \quad \sigma_{si} = f_y \qquad (12)$$

cabillas a compresión:

$$\sigma'_{si} = -\varepsilon'_{si}\, E_s \quad \Rightarrow \text{Si } \sigma'_{si} > f_y \quad \Rightarrow \quad \sigma'_{si} = -f_y \qquad (13)$$

Donde:

σ_{si} = Tensión en la *iésima* cabilla a tracción.
σ'_{si} = Tensión en la *iésima* cabilla a compresión.

Para el caso en que las cabillas están embutidas en el concreto a compresión se toma:

$$\sigma'_{si} = \sigma'_{si} + 0{,}85\, f'_c \qquad (14)$$

Se procede a calcular las tensiones en el concreto:
Se determina el bloque de compresión de Whitney. Ver figura 2b.
El volumen real de tensiones que se genera en la sección de concreto comprimido es sustituido por un volumen de tensiones simplificado de valor único 0,85f'c. Actuando en un área definida de altura a cuyo valor se determina como: $a = \beta_{1\,c}$.
Luego:

$$\sigma_c = -0{,}85 f'_c = \text{Constante} \qquad (15)$$

Donde:

β_1 = Factor que determina la profundidad del bloque de compresión.

Cálculo de la fuerza resultante en el concreto a compresión:

$$C = \sigma_c\, A_c \qquad (16)$$

esta fuerza está aplicada en el centroide del área Ac (Área rayada en la figura 2) cuyas coordenadas son Cc (xc, yc).
Cálculo de las fuerzas resultantes en las cabillas:
a tracción:

$$F_{si} = \sigma_{si}\, A_{si} \qquad (17)$$

a compresión:

$$F'_{si} = \sigma'_{si}\, A_{si} \qquad (18)$$

Cálculo de resultante de fuerza axial interna en la sección: Pu

$$P_u = \phi \int \sigma\, d_A = \phi \left(C + \sum_{i=1}^{n} \sigma'_{si}\, A_{si} + \sum_{i=1}^{n} \sigma_{si}\, A_{si} \right) \qquad (19)$$

Finalmente se varia c hasta que P_u sea igual a la fuerza externa que llamaremos P_{ud}, que es un dato del problema. En caso de que se requiera un valor de c mayor que d el régimen tensional escapa del rango de aplicación de esta teoría. Por lo que como valor máximo de c debe utilizarse el valor de d.
Luego:

$$P_{ud} = P_u \qquad (20)$$

(esto implica una igualdad entre fuerzas axiales internas y externas).
Donde:
Cumplida esta igualdad se procede al cálculo de los momentos flectores internos:

$$M_{ux} = \theta \left(\int \sigma \; y' \, d_A \right) = \theta \left(C \; y'_c + \sum_{i=1}^{n} F'_{si} \; y'_{si} + \sum_{i=1}^{n} F_{si} \; y'_{si} \right)$$

$$M_{ux} = \theta \left(\int \sigma \; x' \, d_A \right) = \theta \left(C \; x'_c + \sum_{i=1}^{n} F'_{si} \; x'_{si} + \sum_{i=1}^{n} F_{si} \; x'_{si} \right)$$

(21) (22)

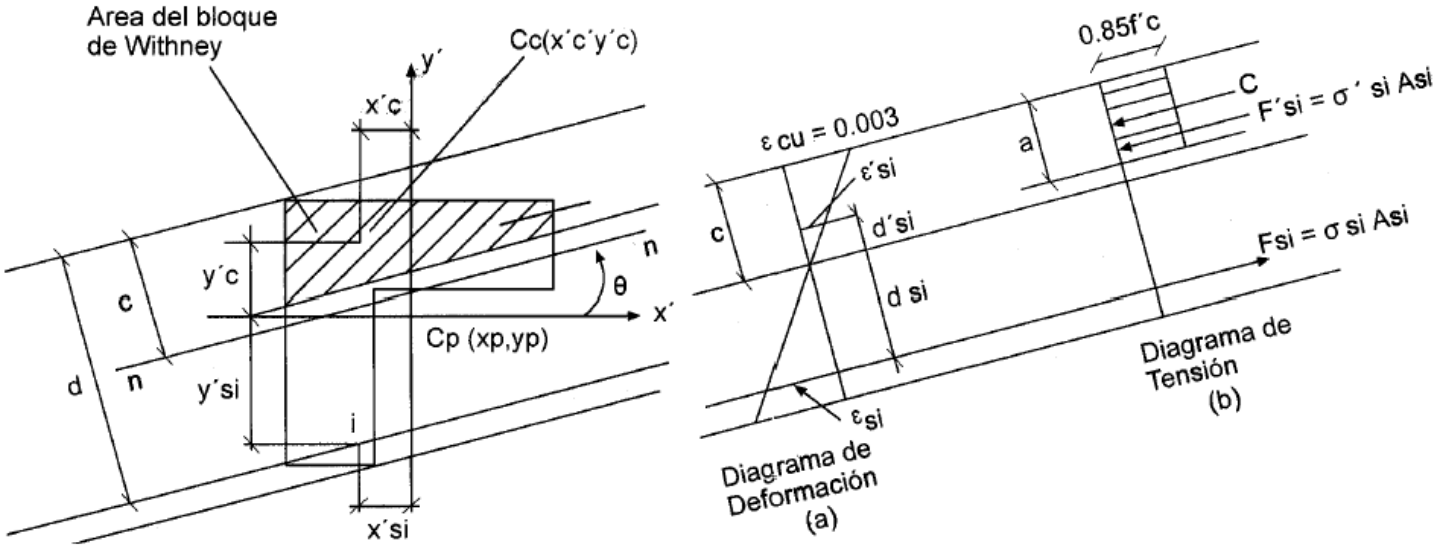

Figura 2. Sección Transversal de la columna.

Gráficamente observamos:

Si graficamos los valores de M_{ux} y M_{uy}, obtendremos un punto, que correspondería a un valor de θ determinado, ver figura 3.

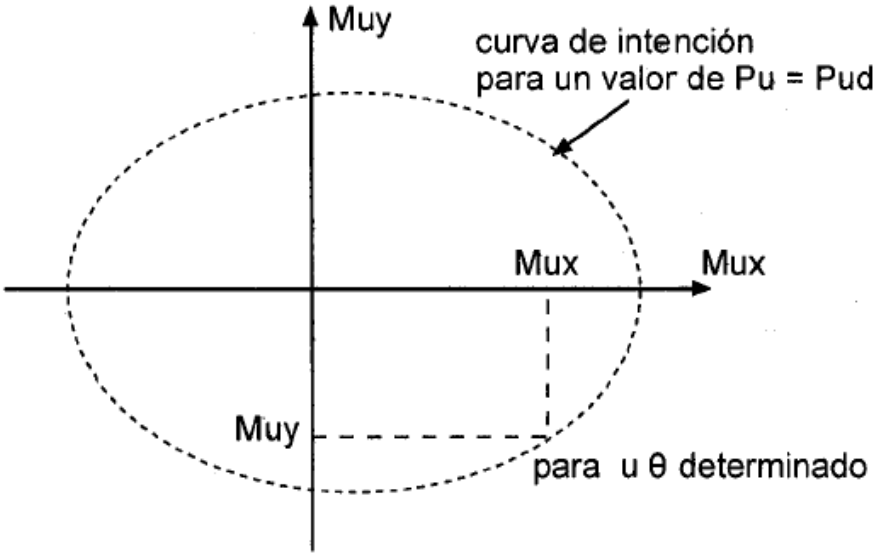

Figura 3. Gráfica de los pares de valores M_{ux} y M_{uy} para un valor de A dado.

Si se grafican todos los valores de M_{ux} y M_{uy} variando de 0° a 360° se obtendría la curva de interacción de la sección para un P_u conocido ($P_u = \theta P_u$).

6. Se define la constante md la cual es el ángulo que forma el radio (r_{md}) definido por los momentos de diseño M_{uxd}, M_{uyd}, y el origen de los ejes coordenados (positivo sentido antihorario) que varía entre 0° y 360°; 0°≤ a_{md} ≤ 360°, ver figura 4.

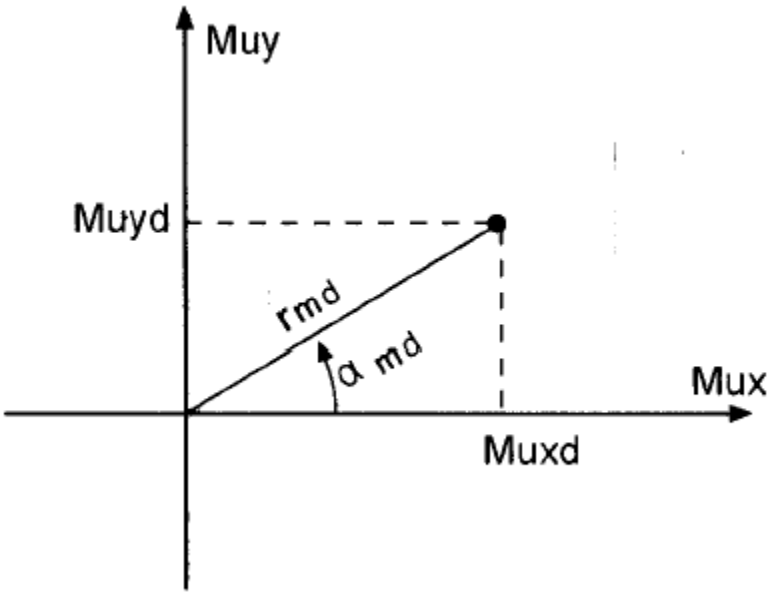

Figura 4. Definición del radio rmd y el ángulo md función de M_{ux} y M_{uyd}

Se calcula igualmente el ángulo m y el radio r_m a partir de los momentos flectores internos (M_{ux} y M_{uy}= ver figura 5.

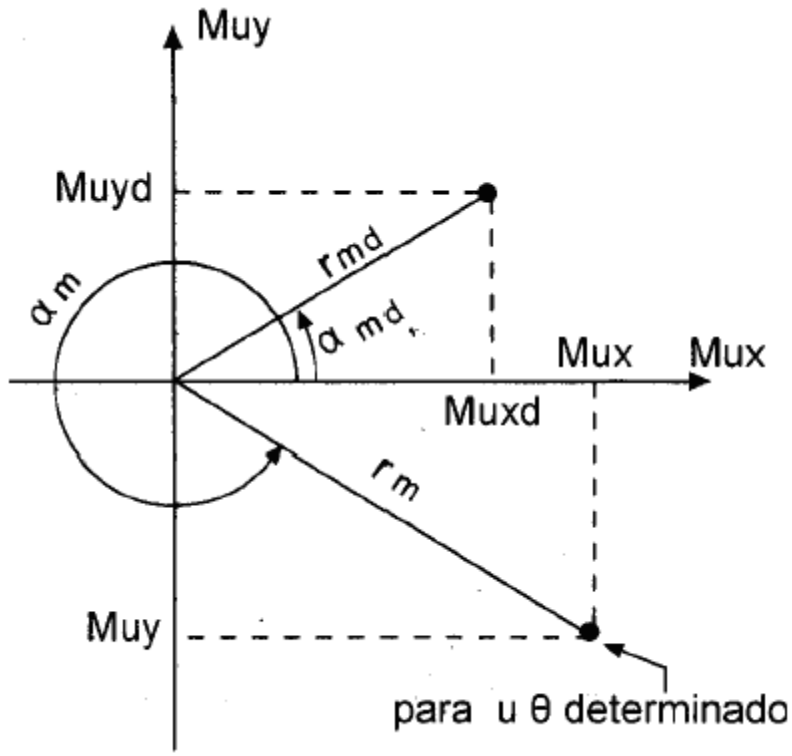

Figura 5. Gráfica de los radios y ángulos, en función de los momentos internos y de diseño.

Luego se procede a variar el ángulo θ fijado en el paso N° 5 hasta que a_m sea iguala a_{md}, ver figura 6.

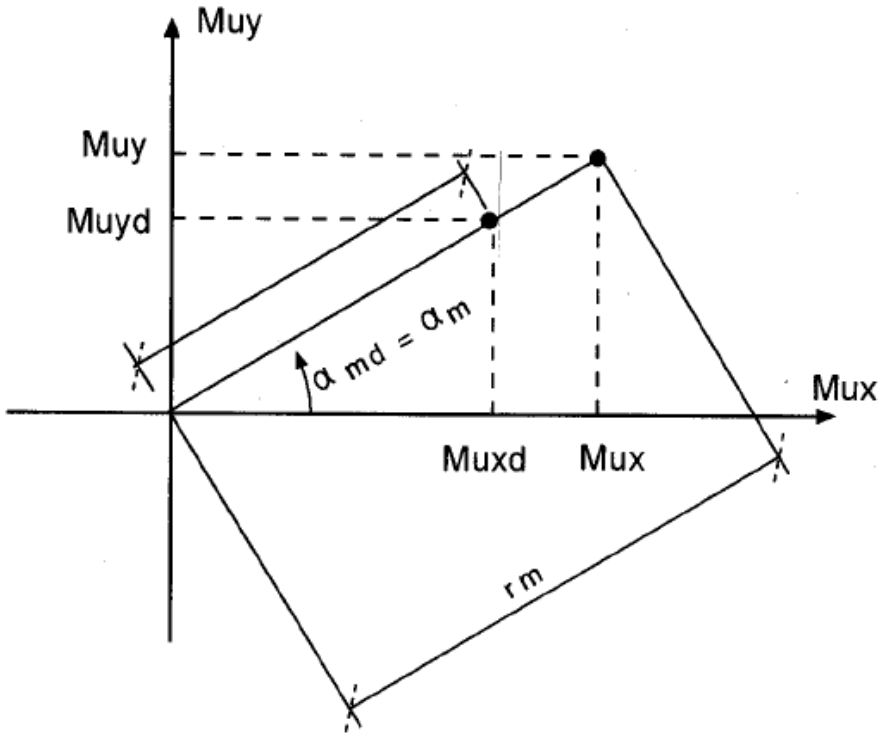

Figura 6. Igualada establecida entre los ángulos que forman los radios de los momentos internos y de diseño.

Cuando esto sucede θ es igual a θm.

7. Verificación de los radios:
Sé calcula:

$$r^2_m = M^2_{ux} + M^2_{uy} \quad (23)$$

$$r^2_{md} = M^2_{uxd} + M^2_{uyd} = \text{constante} \quad (24)$$

Par adecuar el procedimiento a los criterios de diseño del proyectista en lo referente a las cuantías máximas y mínimas que se pueden emplear, se calcula:

Un valor de r_m para una cuantía $\rho = \rho_{min}$ por lo tanto $r_{mmin} = r_m$, se logra esto siguiendo los pasos del 3 al 7.
Se repite el mismo punto a) pero haciendo $\rho = \rho_{max}$ por lo que se obtiene $r_{mmax} = r_m$.
Luego se verifica lo siguiente:

Si: $r_{md} < r_{mmin}$

Se termina el calculo obteniéndose lo siguiente:
La sección debe ser armada con cuantía de acero mínima.

Si: $r_{md} < r_{mmax}$

La sección es insuficiente por lo que se requerirá aumentarla.

Si: $r_{mmin} \leq r_{md} \leq r_{mmax}$

Se procede al cálculo de la cuantía de acero estrictamente necesario, cumpliéndose que:

$\rho_{min} \leq \rho \leq \rho$ y las solicitaciones internas serian iguales a las solicitaciones externas.

7.1. El problema queda resuelto si $r_m = r_{md}$, ya que se cumplen las siguientes igualdades planteadas en las ecuaciones 2 y 3:

$$P_{ud} = P_u \quad (25)$$

$$M_{uxd} = M_{ux} \quad (26)$$

$$M_{uyd} = M_{uy} \quad (27)$$

Igualdad entre las solicitaciones externas (dato) y las internas. Finalmente se obtiene el valor de la cuantía mecánica para la sección en estudio.

7.2. En el caso que $r_m \neq r_{md}$ se debe variar la cuantía mecánica ρ de la sección (ir al paso 3) y calcular para esta nueva cuantía el valor de r_m hasta que sea igual a r_{md}.
Al finalizar el diseño se obtiene lo siguiente:

Siempre se cumple que las solicitaciones internas son iguales a las externas.
Las deformaciones, tensiones y fuerzas en los materiales (concreto y acero) en el estado de rotura son conocidos.
Se obtiene la porción reactiva de concreto a compresión.
Se obtiene la cuantía mecánica ρ.

CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

Este método permite obtener resultados numéricos precisos, sin emplear tablas ni gráficas de diseño.
Con la utilización del programa se pueden diseñar secciones de cualquier forma siempre y cuando se asimilen a secciones poligonales, llegando incluso a resolver secciones tipo cajón.
El método permite conocer el estado tensional de los materiales siempre y cuando la cuantía, este comprendida entre la mínima y la máxima
Es posible la utilización de armadura en cualquier número y posición dentro de la sección de concreto.
El método utilizado toma en cuenta el desplazamiento del concreto por el acero.
El método permite un aprovechamiento total de los materiales concreto y acero ya que solo se empleará la cantidad de materiales estrictamente necesario.
Al ser posible definir los valores de cuantía máxima y mínima solo se diseñan las secciones que cumplan con estos valores límites.

REFERENCIAS

1. Winter, George y A. Nilson, (1985). "Proyecto de Estructuras de Hormigón". 1era Edición, Editorial Reverté. Barcelona.
2. COVENIN MINDUR. (1985). "Normas Venezolanas Estructuras de Concreto Armado para Edificaciones Análisis y Diseño". Caracas.
3. COVENIN MINDUR. (1756-1998). "Edificaciones Sismos Resistentes". 1era Revisión. FUNVISIS. Caracas.
4. Vera I. Santiago. (1980). "Mecánica Racional". 2da Edición. Ediciones Vega S. R. L. Madrid.
5. Hibbeler R. C. (1995). "Ingeniería Mecánica, Estática". Séptima Edición. Prentice Hall. México.
6. Shames I. H. (1998). "Mecánica para Ingenieros Estática". Cuarta Edición. Prentice Hall. España.
7. Singer, Ferdinand. (1971). "Resistencia de Materiales". 4ta Edición. Harper & Row Latinoamericana. México.
8. Nawy, Edward G. (1998). "Concreto Reforzado un Enfoque Básico". 1era Edición. Prentice Hall. México.
9. García, Carlos y Otero J. (1992). "Estudio del Cortante y la Torsión en las piezas de Concreto Armado y Pretensado". Tesis de Grado. Universidad de Carabobo.