

Diseño óptimo de permutadores para turbo códigos de longitudes cortas

Carlos José Peña⁽¹⁾, Salehi Masoud.⁽²⁾

⁽¹⁾ *Departamento de Electrónica y Comunicaciones, Facultad de Ingeniería,
Universidad de Carabobo. Venezuela*

⁽²⁾ *Centro para la Investigación de Comunicaciones y Procesamiento Digital de Señales. Facultad de Ingeniería.
Northeastern University, Boston Massachusetts. USA
Email: cjpena@ieee.org; msalehi@ece.neu.edu*

Resumen

Este documento formula una técnica de diseño de permutadores para turbo códigos de longitudes cortas, como una solución óptima para un problema de optimización combinatoria. Esta técnica de construcción de permutadores puede ser resumida como un proceso de optimización que utiliza al algoritmo de recocido simulado (Simulated Annealing), bajo dos criterios: la mejora de las propiedades de distancia espectral y la minimización de los coeficientes de correlación entre la información extrínseca de un receptor subóptimo. Simulaciones computarizadas para tasa de error de bits y tasa de error de tramas, en canales contaminados con ruido aditivo, gaussiano, blanco, son presentadas como esquema de comparación de la nueva técnica con algunas técnicas de diseño de permutadores.

Palabras clave: Permutadores, distancia espectral, ruido aditivo.

Optimal interleaver design for short blocklength turbo codes.

Abstract

This work formulates an interleaver design technique for turbo codes with short blocklength as an optimal solution for a combinatorial optimization problem. The proposed technique can be summarized as an interleaver optimization technique, using Simulated Annealing algorithm, under two criteria constraints: the minimization of correlation coefficients between extrinsic information and the improvement of its distance spectrum properties. Computer simulations for bit error rate and frame error rate performance are presented comparing the new technique with some previously proposed interleaver design techniques.

Keywords: Interleaver, spectral distance, noise additive.

1. INTRODUCCIÓN

Desde el descubrimiento de los Turbo Códigos [1], un gran número de publicaciones surgieron presentando tópicos relacionados con su diseño e implementación en próximas generaciones de sistemas de comunicaciones. Este marcado interés de la comunidad científica internacional se debe al desempeño excepcional que estos nuevos códigos presentaron, el nivel de tasa de error de bits (Bit Error Rate, *BER*), los cuales están muy cercanos al límite de Shannon [2].

Uno de los aspectos de diseño que se tomó en cuenta para la implantación de turbo códigos es el permutador; cuyas características están directamente relacionadas con el desempeño de los turbo códigos.

Un gran número de técnicas para el diseño de permutadores para turbo códigos son presentadas, las cuales se basan principalmente en dos criterios: 1) las propiedades de distancia espectral del código (distribución de pesos) [6, 7, 8] y 2) el mejoramiento de ambiente de la decodificación iterativa (conocida

como Iterative Decode Suitability, IDS) [11, 12] o medida de correlación de la información extrínseca entre la primera etapa de decodificación y la segunda. Estos esfuerzos son orientados para tratar de acortar la longitud del permutador y al mismo tiempo obtener el máximo de desempeño posible de BER; para lograr que los turbo códigos puedan ser empleados en la codificación de señales como transmisión digital de audio y video en tiempo real, así como la reducción en la memoria del decodificador.

El buen desempeño de los Turbo Códigos originan varios estudios que se refieren al comportamiento de este nuevo esquema de codificación [6, 7, 8, 21]. En donde se establece las principales razones que justifican su operación cercana al límite de capacidad. Los Turbo Códigos muestran un desempeño que esta dominada principalmente por la mínima distancia hamming (d_{min}) [6] y su multiplicidad (N_{dmin}). Un límite asintótico al comportamiento de los Turbo Códigos [7], se obtiene bajo la asunción de la existencia de un decodificador de máxima probabilidad (Maximum Likelihood, ML), el cual en la práctica no esta disponible. Adicionalmente, es altamente complejo realizar el estudio matemático basado en decodificadores subóptimos e iterativos, los cuales son utilizados por los turbo códigos [1, 3, 9].

El segundo criterio esta relacionado con una medida de efectividad de la decodificación subóptima [11, 12], en la cual se establece la relación entre la información extrínseca del primer decodificador con la del segundo decodificador [1, 2, 3]. Esta medida es expresada por Hokfelt et al. [12] como una relación que decae exponencialmente a medida que la separación entre dos bits aumenta. Teniendo como principal objetivo la reducción de los eventos de "ciclos cortos"; los cuales corresponden al mapeo de bits que se encuentran cerca uno de otro antes y después del proceso de permutación; los "ciclos cortos" de bits son responsables de la aparición de secuencias de bits con bajos d_{min} que afectan notablemente el desempeño de los turbo códigos.

Existe una gran cantidad de técnicas para la construcción de permutadores son presentados [2, 5, 11, 14, 15, 16, 17]; la mayoría de estas técnicas son de carácter determinístico y demuestran [5,6,7] que el carácter aleatorio de los permutadores contribuye notablemente con la maximización del desempeño del

código. Por último un aspecto que en general debe ser tomado en cuenta en el diseño de Turbo Códigos es la terminación de su diagrama de Trellis ya que puede causar la aparición de d_{min} de muy bajo peso Hamming [4].

Este documento está organizado como se describe a continuación: En la segunda sección del documento se realiza una breve discusión acerca de los distintos tipos de permutadores y de los criterios de diseños que se utilizaron en este documento. En la sección 3, se plantea el diseño como la solución a un problema de optimización combinatoria, así como el método de construcción del permutador basado en el algoritmo de recocido simulado. En la quinta sección se presentan simulaciones de BER y de rata de error de tramas (Frame Error Rate, FER) para los permutadores obtenidos y comparados con otros permutadores.

2. EL PERMUTADOR DE TURBO CÓDIGOS

El permutador p tiene la función de reordenar una trama de N bits de datos $p(N)@N'$, de tal forma que N' carezca de un orden aparente. A partir de la aparición del permutador de bloque presentado en [1, 2], llamado así debido a que el mismo está conformado por una matriz $M \times M$, que es rellenada por filas y leída en columnas; muchos otros esquemas determinísticos son propuestos como métodos de construcción de permutadores. Bennedetto et al. [8], introduce por primera vez la noción del permutador pseudo-aleatorio, el cual prueba que es una herramienta muy útil a la hora de realizar comparaciones de desempeño de BER y FER, el cual consiste en un vector de $p=[p_1 \dots p_n]$, de posición que es generado por métodos no determinísticos y sin repetición de elementos.

Otro permutador conocido como el permutador Semi-aleatorio (S-aleatorio) [6] se construye de tal forma que se traten de evitar los bajos pesos de paridad producidos por entradas de orden de peso 2 al permutador; básicamente consiste en establecer que una posición i en el permutador se encuentra a una distancia mayor o igual a $|S|$ en una ventana de comparación de posición de $\pm S$; adicionalmente Divsalar et al. demostraron [6] que si se selecciona

$S < (N/2)^{1/2}$, un algoritmo de búsqueda simple converge en un tiempo razonable. Este tipo de permutadores ha demostrado producir una mejora significativa sobre muchos permutadores determinísticos, ya que evita los ciclos cortos de primer orden o después de la permutación y al mismo tiempo incrementa d_{min} a medida que N se incrementa. Esta condición S para permutadores semi-aleatorios es una característica utilizada en la técnica de diseño propuesto en la próxima sección.

Un nuevo criterio para el diseño de permutadores basado en la efectividad de los turbo decodificadores, fue presentado por Hokfelt et al. [11, 12]. Quienes demostraron que la correlación producida por las salidas de los decodificadores de símbolo por símbolo Máximos a Posteriori, posee un impacto significativo en la turbo decodificación.

Hokfelt encontró que la correlación entre la información extrínseca que procede de un decodificador y la secuencia de entrada al decodificador, viene dada por la siguiente expresión:

$$\rho_{L_i y_j^s} = \begin{cases} 0, i = j \\ ae^{-c|i-j|}, i \neq j, \end{cases} \quad (1)$$

donde L es la información extrínseca, y es la secuencia a decodificar, i, j son las posiciones relativas con respecto al permutador, las variables a y c pueden ser estimadas utilizando el método propuesto en [16] y dependen del decodificador, los codificadores el ruido del canal.

Similarmente, la secuencia permutada de probabilidades a priori del decodificador anterior está correlacionada con la entrada permutada al siguiente decodificador; la expresión aproximada para esta correlación viene dada por:

$$\rho_{L_i y_j^s}^{(2)} = \frac{1}{2} ae^{-c|\pi(j)-i|} + \frac{1}{2} \sum_{\substack{i=1 \\ l \neq 1}}^N a^2 e^{-c(|l-j|+|i-l|-\pi(l))} \quad (2)$$

El autor [12] con base en las expresiones (1) y (2) estableció una medida para realizar la evaluación de los permutadores que se conoce como IDS (Iterative Decode Suitability), la cual es derivada expresión de la desviación estándar, de la correlación

entre coeficientes,

$$\Gamma_i = \frac{1}{N-1} \sum_{j=1}^N (\rho_{L_i y_j^s}^{(2)} - \overline{\rho_{L_i y_j^s}^{(2)}})^2 \quad (3)$$

donde,

$$\overline{\rho_{L_i y_j^s}^{(2)}} = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \rho_{L_i y_j^s}^{(2)} \quad (4)$$

Por lo tanto el IDS viene dado por la expresión:

$$IDS = \frac{1}{2N} \left(\sum_{i=1}^N \Gamma_i + \sum_{i=1}^N \Gamma'_i \right) \quad (5)$$

los valores bajos de IDS [14], indican que la correlación entre las secuencias de entrada a los decodificadores y la información extrínseca correspondiente, se encuentra dispersa de manera uniforme para un permutador de longitud N .

3. EL PERMUTADOR: UN PROBLEMA DE OPTIMIZACIÓN COMBINATORIA

De acuerdo con Aarts et al. [11], un problema de optimización combinatoria podría definirse como: "un par (Q, C) , donde el conjunto solución Q es el conjunto de todas las soluciones posibles y la función de costo C es un mapeado $C: Q \rightarrow \mathbb{R}$. El problema es encontrar una solución global óptima, por ejemplo un elemento $q^* \in Q$ de tal forma que $C(q^*) \leq C(q)$ para todos los $q \in Q$. Adicionalmente, $C^* = C(q^*)$ puede ser conocido como el costo óptimo y $Q^* = \{q \in Q \mid C(q) = C^*\}$ como el conjunto de soluciones óptimas."

En general, el diseño de un permutador puede considerarse como un problema de optimización combinatoria. Dado un conjunto de índices $\{1, \dots, N\}$ de un vector de permutación p y definiendo una función de costo, probabilidad de error de bit $P_b(p)$; el problema es encontrar una permutación $p^* \in P$, donde P es el conjunto de todas las soluciones posibles, tal que $P_b(p^*) \leq P_b(p)$ para todo $p \in P$; entonces p^* es llamada la solución óptima para un mínimo costo $P_b(p^*)$. El tratar de resolver el problema por una búsqueda exhaustiva es imposible ya que la dimensión del conjunto de solución es $N!$ y no existe una expresión exacta para la probabilidad de error para turbo decodificadores.

En la sección anterior, se establece que los dos criterios más importantes que se deben tomar en cuenta para el diseño de permutadores son sus propiedades espectrales de distancia y la correlación entre la información extrínseca del decodificador. La combinación de las dos condiciones propuestas están orientadas a disminuir el piso de error de los Turbo Códigos y a mejorar el proceso de decodificación. El problema del diseño de permutadores puede ser redefinido como: Dado un conjunto de índices $\{1, \dots, N\}$ de un vector de permutación p y definiendo una función de costo, Medida de correlación $C(p)$; el problema es encontrar una permutación $p^* \in P$, donde P es el conjunto de todas las soluciones posibles de permutadores con buenas propiedades de distancia espectral, tal que $C(p^*) \leq C(p)$ para todo $p \in P$; entonces p^* es llamada la solución óptima para un mínimo costo $C(p^*)$. Es importante hacer notar que la restricción impuesta al diseño del permutador reduce el campo de búsqueda de la función de optimización.

4. DISEÑO DEL PERMUTADOR

La solución propuesta al problema de optimización combinatoria planteado consiste en la aplicación del algoritmo de recocido simulado (Simulated Annealing) [11, 20, 21] como método de optimización combinatoria; para ello es necesario realizar las siguientes analogías:

- Un estado térmico del sistema se define como un vector permutador p que pertenece al conjunto de todas las posibles soluciones P , $p \in P$.
- La energía de un estado térmico será equivalente a la función de costo C , definida como medida de correlación, de tal forma que $C: P \rightarrow \mathbb{R}$.
- Un dispositivo perturbador de estado para un vector permutador p se define como una función f , tal que $p' = f(p)$ el nuevo estado térmico $p' \in P$, es una pequeña distorsión del estado previo p .
- El conjunto de posibles soluciones P , esta conformado por vectores permutadores p que cumplen con las condiciones de los permutadores semi-aleatorios.

La medida de correlación C se deriva de la expresión (2), en donde el primer término de la expresión no existe ya que se asume que tan solo la primera iteración esta presente; por lo tanto el proceso de permutación aún no se ha producido;

$$c(\pi(p)) = \frac{1}{2} \sum_m a^2 e^{-c(|\pi(m) - \pi(p)| + |m - p|)} \quad (6)$$

esta función de costo esta dada por la contribución de un solo elemento $\pi(p)$ del permutador; posteriormente se puede considerar la función de costo como sumatoria de la contribución individual de todas las posiciones del permutador y eliminando los términos constantes de la sumatoria la expresión de costo se resume a:

$$C(\pi) = \sum_{p=1}^N \sum_{\substack{m=1 \\ p \neq m}}^N e^{-c(|\pi(m) - \pi(p)| + |m - p|)} \quad (7)$$

por lo tanto esta expresión (7) puede ser minimizada por medio de la exploración de los distintos vectores permutadores. El factor c fue fijado en 0.15, el mismo se calculó por el método presentado por Hokfelt et al. [12].

La función de perturbación $f(p)$ fue implantada como un mecanismo de intercambio de índices del vector de posición p ; los cuales eran seleccionados aleatoriamente por una variable uniformemente distribuida en la longitud del permutador $[1, N]$. El rango de mapeo de esta función es todo el conjunto de permutadores P que cumplen con las condiciones del permutador Semi-aleatorio presentado en [6].

La versión del algoritmo de recocido simulado para la optimización combinatoria de este problema se escribe de la siguiente forma:

```

Producir un permutador inicial  $p$  e igualar el permutador inicial al
permutador óptimo  $p^* = p$ 
Fije la temperatura de inicio  $T$ 
Do
{
  Do
  {
    encuentre  $p' = f(p)$ , una perturbación aleatoria de la solución
previa
    Calcule  $DC = C(p') - C(p)$ 
    if  $D < 0$ 
    {
       $p = p'$ 
      If  $C(p) < C(p^*)$ , then  $p^* = p$ 
    }
    else
    {
      Seleccione un número  $q$  uniformemente distribuido
entre  $[0, 1)$ 
      if  $q < \exp(-DC/T)$ , then  $p = p'$ 
      else, rechace  $p'$ 
    }
  }
  Until (muchas iteraciones o varias disminuciones del nivel de
energía  $C$ )
  Reducir  $T$ 
}
Until (sistema alcance el equilibrio, "Sistema Congelado")
Return  $p^*$ 

```

Otro aspecto fundamental en la implementación del recocido simulado fue la determinación del esquema de enfriamiento; el cual fue seleccionado heurístico y estático [11] y para ello se estableció lo siguiente:

- La temperatura inicial T_0 : que se puede definir como la diferencia más grande existente entre dos estados subsecuentes;

$$T_0 = \max_{\pi', \pi \in \Pi} |C(\pi') - C(\pi)| \quad (8)$$

pero fue seleccionada en $T_0=1$, para mejorar la velocidad de convergencia del algoritmo implementado.

- El control decremental de temperatura fue definido por la ecuación $T'=T.a$, donde la constante a fue seleccionada a 0.99.
- La temperatura final fue establecida como $T_f=T_0.a^{2000}$, donde 2000 es el número de pasos máximo, en el cual se puede conseguir el estado de equilibrio.

5. SIMULACIÓN Y RESULTADOS

El algoritmo presentado para la aplicación del recocido simulado fue instrumentado usando ANSI C para estaciones UNIX. Durante el diseño de este programa se determinó que la complejidad del sistema implementado es de orden $O(N^3)$, lo cual se determinó basado en el algoritmo y en la función de costo (7). La constante de Boltzman se establece en 1 y el programa se diseña para obtener permutadores de longitud $N=192$ y $N=256$. La condición Semi-aleatoria S es calculada usando el límite $S < (N/2)^{1/2}$ y fijada en $S=9$ y $S=11$, respectivamente. En las Figuras 1 y 2 pueden observarse los resultados de las curvas de enfriamiento para el recocido simulado.

Los permutadores obtenidos, son utilizados en simulaciones de BER y FER, en un ambiente de ruido blanco aditivo y gaussiano, y utilizado como turbo codificador el conformado por dos polinomios recursivos convolucionales compuestos por los polinomios $(7)_{oct}$ y $(5)_{oct}$ para alimentación hacia delante (feedforward) y para retroalimentación (feedback) respectivamente. La rata de transmisión fue de $1/3$, con modulación BPSK [4], el método de Turbo Decodificación utilizado es el modificado BCJR, presentado en [1,2,3] con un total de 16 iteraciones. Adicionalmente se utilizaron como permutadores de compa-

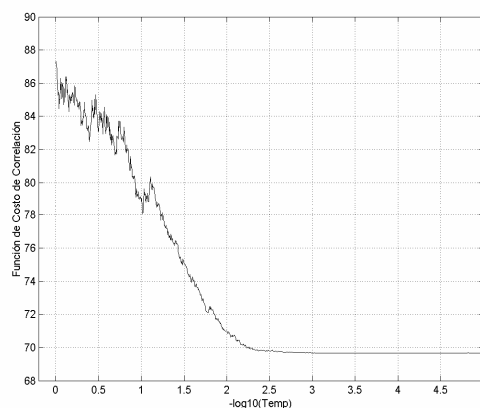


Figura 1. Curva de Enfriamiento para algoritmo de Recocido Simulado de optimización de permutador para $N=192$.

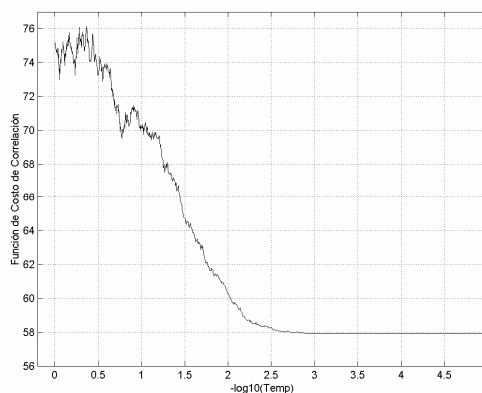


Figura 2. Curva de Enfriamiento para algoritmo de Recocido Simulado de optimización de permutador para $N=256$.

ración el pseudo-aleatorio [8] y el permutador Semi-aleatorio [6]. Los resultados se observan en las figuras 3, 4, 5 y 6. En el Trellis del primer Turbo Codificador se termina utilizando una secuencia de bits establecidos [6], mientras que en el segundo el Trellis no es terminado. Los programas de simulación son implementados en ANSI C, bajo plataforma UNIX.

Analizando la tendencia de las curvas de BER y FER, se observa que los mejores permutadores son aquellos optimizados por medio de la técnica de recocido simulado; se observa en promedio que este método es capaz de mejorar el permutador entre 0.1 y 0.3 dB para VER y entre 0.2 y 0.4 para FER, cuando es comparado con el permutador Semi-aleatorio [6].

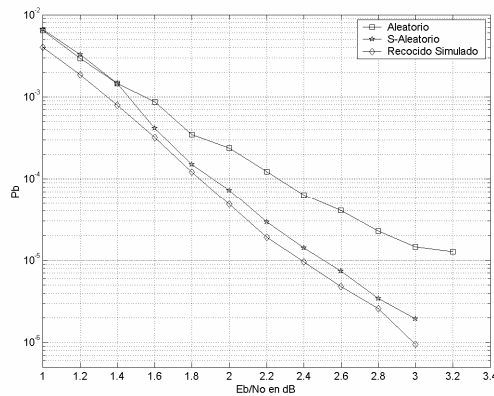


Figura 3. Curva de desempeño de BER para permutadores del tipo Aleatorio, Semi-Aleatorio y el obtenido por Recocido Simulado; para $N=192$ en ruido blanco

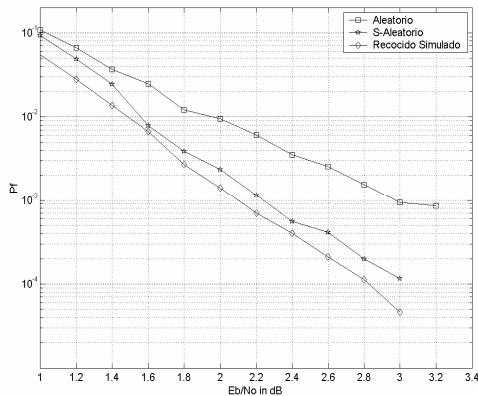


Figura 4. Curva de desempeño de FER para permutadores del tipo Aleatorio, Semi-Aleatorio y el obtenido por Recocido Simulado; para $N=192$ en ruido blanco

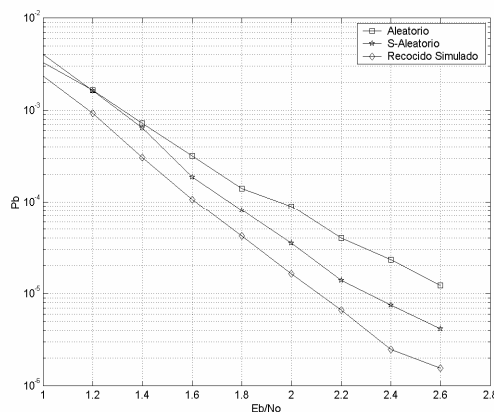


Figura 5. Curva de desempeño de BER para permutadores del tipo Aleatorio, Semi-Aleatorio y el obtenido por Recocido Simulado; para $N=256$ en ruido blanco

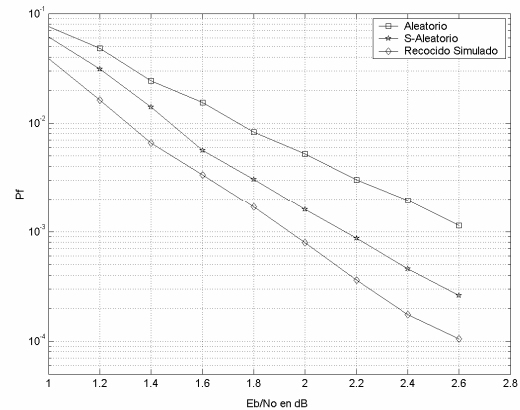


Figura 6. Curva de desempeño de FER para permutadores del tipo Aleatorio, Semi-Aleatorio y el obtenido por Recocido Simulado; para $N=256$ en ruido blanco

En la Tabla 1, se muestran las medidas de calidad de los distintos permutadores utilizados en las simulaciones basadas en medición del costo de la correlación (8) y con el valor normalizado del IDS (5); al igual que en el caso anterior, los permutadores obtenidos con el algoritmo de Recocido Simulado son los que poseen un menor costo y el IDS más bajo.

Tabla 1. Medición de calidad de los permutadores basado en la función de costo (8) y en el IDS (5) normalizado.

Tipo de Permutador	Función de Costo (Eq. 8)	IDS (Normalizado) (Eq. 5)
Aleatorio, $N=192$	140.10	1.308
Semi-Aleatorio, $N=192$	87.48	1.075
Recocido Sim., $N=192$	69.67	1.000
Aleatorio, $N=256$	135.56	1.281
Semi-aleatorio, $N=256$	72.98	1.051
Recocido Sim., $N=256$	57.92	1.000

6. CONCLUSIONES

Una técnica no determinística para el diseño óptimo de permutadores es presentada en este documento. El método de diseño provee una solución a un problema de optimización combinatoria, el cual involucra el mejoramiento combinado del proceso iterativo de decodificación (minimización de los coeficientes de correlación entre la información extrínseca) y de las propiedades espectrales de distancia (Condición de permutador Semi-aleatorio). Adicionalmente, dado

que la técnica de recocido simulado tiende a encontrar la solución óptima cuando el número de iteraciones alcanza el infinito; la solución de permutador encontrada por este esquema de búsqueda es asintótico a la solución global óptima.

La técnica de recocido simulado ha probado ser una herramienta útil en la solución de este problema de optimización combinatoria porque efectivamente minimiza la función de costo relacionada con el permutador sin imponer muchas restricciones algebraicas. Esta característica provee de un alto grado de aleatoriedad, la cual es un factor muy importante en el diseño de Turbo Códigos. Simulación computarizada de rata de error de tramas y de bits demuestra que el nuevo permutador mejora las probabilidades de error comparados con el segundo mejor permutador (ganancia entre 0.1 y 0.3 dB para BER, de 0.2 a 0.4 dB para FER). El algoritmo de recocido simulado presenta baja complejidad computacional y es relativamente simple de implementar.

REFERENCIAS

- [1] C. Berrou, A. Glavieux, P. Thitimashima, "Near Shannon Limit error-correcting coding and decoding: Turbo Codes", ICC '93, Geneva, Switzerland. May 93, pp.1064-1070.
- [2] C. Berrou, A. Glavieux, "Near Optimum Error Correcting Coding And Decoding: Turbo Codes", IEEE Transactions on Communications. vol. 44 No 10, Oct 1996, pp 1261-1271.
- [3] W. Ryan "A Turbo Code Tutorial", New Mexico State University. 1998.
- [4] J. Proakis, "Digital Communications", McGraw-Hill, 3rd edition 1995.
- [5] D. Divsalar, S. Dolinar and F. Pollara, "Weight distribution of multiple turbo codes", JPL TDA Progress Report, 42-122 Agosto 1995
- [6] D. Divsalar and F. Pollara, "Turbo Codes for PCS Applications", Proc. 1995 Int. Conf. Comm., pp.54-59.
- [7] L. Perez, J. Seghers and D. Costello, "A distance Spectrum Interpretation of Turbo Codes", IEEE Trans. Inf. Theory, pp. 1698-1709, Nov 1996.
- [8] S. Benedetto and G. Montorsi "Unveiling Turbo Codes: Some Results on Parallel Concatenated Recursive Systematic (Turbo) Codes", IEEE Trans. Inform. Theory. vol. 44, no. 2, pp. 409-428, Mar. 1996.
- [9] S. Benedetto and G. Montorsi "Design of Parallel Concatenated Codes", IEEE Trans. Commun, vol. 44, no. 5, pp. 591-600, May 1996.
- [10] L. Bahl, J. Cocke, F. Jelinek and J. Raviv, "Optimal decoding of linear codes for minimizing symbol error rate", IEEE Trans. Inf. Theory, pp.284-287, Mar 1974.
- [11] E. Aarts and J. K. Lenstra "Local search in combinatorial optimization", John Wiley and Sons Ltd., New York, 1997.
- [12] J. Hokfelt, O. Edfors and T. Maseng, "Interleaving design for turbo codes based on the performance of iterative decoding", ICC, 99. Vancouver, Canada, 1999.
- [13] J. Hokfelt, O. Edfors and T. Maseng "Assessing Interleaver Suitability for Turbo Codes", Nordic Radio Symposium, Saltsjöbaden, Sweden, October 1998.
- [14] J. Hokfelt, O. Edfors and T. Maseng "Turbo Codes: Correlated Extrinsic Information and its Impact on Iterative Decoding Performance", VTC'99, Houston, Texas, May, 1999.
- [15] Barbulescu, S. Pietrobon, "Interleaving design for turbo codes", Electronic Letters vol. 30 pp 2107-2108, Jan 1995.
- [16] Barbulescu, S. Pietrobon, "Terminating the trellis of turbo-codes in the same state", Electronic Letters, vol. 31 pp 22-23, Jan 1995.
- [17] O. Takeshita, D. J. Costello, Jr. "New classes of algebraic interleavers for turbo-codes". IEEE Info. Theory Symposium Cambridge, MA, USA August 1998.
- [18] A. Khandani, "Optimization of the interleaver structure for Turbo-Codes", Dept. of Elect. and Comp. Eng., University of Waterloo, ON. 1999.
- [19] F. Daneshgaran and M. Mondin, "An efficient algorithm for obtaining distance spectrum of turbo codes", Proc. Int. Symp. Turbo Codes and Related Topics. Brest, France, Sept. 1997, pp 251-254.
- [20] Kirkpatrick, S., C. D. Gelatt Jr., M. P. Vecchi, "Optimization by Simulated Annealing", Science, 220, 4598, 671-680, 1983.
- [21] Metropolis, N., A. Rosenbluth, M. Rosenbluth, A. Teller, E. Teller, "Equation of State Calculations by Fast Computing Machines", J. Chem. Phys., 21, 6, 1087-1092, 1953.
- [22] Cover, T and Thomas J., "Elements of Information Theory" John Wiley and Sons Inc. 1991.
- [23] P. Robertson, "Illuminating the structure of Code and decoder of Parallel Concatenated Recursive Systematic (Turbo) Codes", Pro. Globecom 1994, pp 591 - 600.