

Simulación de la capa límite turbulenta sobre una placa plana

Nilo Espinoza Bravo

*Departamento de Térmica y Energética, Escuela Ing. Mecánica, Facultad de Ingeniería
Universidad de Carabobo, Valencia, Edo. Carabobo, Venezuela
Email: nespinoz@uc.edu.ve*

Resumen

La mayoría de los estudios de la capa límite, se han realizado analizando los fenómenos particulares que se presentan en cada una de las diferentes zonas que dividen a ésta. Tal es el caso de los estudios de Prandtl, quien describe la capa límite dividiéndola en dos zonas representadas cada una de ellas por una ecuación por separado, seguido por Van Driest quien logra describir el comportamiento de estas mismas zonas en forma continua sin llegar hasta la zona externa ó estela de la capa límite, la cual fue estudiada por Coles de forma muy particular sin ninguna conexión con las zonas antes mencionadas. El presente trabajo desarrolla una metodología de cálculo para incorporar un modelo de turbulencia en las ecuaciones de cantidad de movimiento y de la energía, con el cual se logra describir en forma continua los perfiles de velocidad y temperatura a través de la capa límite, abarcando las tres zonas que dividen a ésta. Estos resultados están en concordancia con datos experimentales obtenidos de la literatura.

Palabras clave: Capa límite, modelo de turbulencia, placa plana.

Simulation of the turbulent boundary layer on a flat plate

Abstract

Most of the studies about the boundary layer had been carried out analyzing the particular phenomena presented in each one of the different areas that divide this. Such it is before the case of the studies of Prandtl, who describes the boundary layer dividing it in two represented areas each one of them for an equation for separate, continued by Van Driest who is able to describe the behavior of these same areas in continuous form without arriving until the external area or trail of the boundary layer, which was studied by Coles in a very particular way without any connection with the mentioned areas. The present work develops a calculation methodology to incorporate a turbulence model in the equations of quantity of movement and of the energy, with which is possible to describe in continuous form the profiles of speed and temperature through the boundary layer, involving the three areas that divide this layer. These results are in agreement with experimental data obtained in the literature.

Keywords: Boundary layer, turbulence models, flat plate.

1. INTRODUCCIÓN

El presente trabajo desarrolla una metodología de cálculo basado en la solución de las ecuaciones parabólicas de la capa límite (conservación de masa, conservación de cantidad de movimiento y conservación de energía), con el fin de describir en forma continua los perfiles de velocidad y temperatura a través de la capa límite, sobre una placa plana con la ubicación de inicio de cálculo cerca del borde de ataque de la placa. Para tal fin se consideró un flujo de aire

($v \approx 1,5 \times 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$) pasando sobre una placa plana a 3,3 m/s, sin que esto sea una limitante en este trabajo ya que dicha velocidad puede ser variada arbitrariamente, la razón de tomar estos datos se debe a que ya han sido usados en pruebas experimentales por Nakayama [1].

La metodología de cálculo que se describe a continuación, se inicia con un análisis hidrodinámico que permite generar los perfiles de velocidad y difusividad turbulenta que conducen al análisis térmico necesario para generar los perfiles de temperaturas

dentro de la capa límite turbulenta, para esto es necesario estudiar primero los esfuerzos de corte cerca de la pared.

2. METODOLOGÍA

Distribución de los esfuerzos de corte cerca de la pared

Según lo descrito por Kays y Crawford [2], partiendo de la ecuación diferencial del momentum (E.D.M.), se tiene que:

$$\rho \bar{u} \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \right) + \rho \bar{v} \left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial y} \right) - \frac{\partial \tau}{\partial y} + \left(\frac{\partial \bar{p}}{\partial x} \right) = 0 \quad (1)$$

Donde τ/ρ es el Esfuerzo de corte aparente y se define como:

$$\frac{\tau}{\rho} = \left[(\nu + \varepsilon M) \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right] \quad (2)$$

Considerando la región de flujo Couette, por encima de la sub-capa viscosa en la cual se supone que la componente axial de la velocidad varía solo en la medida que se aleja de la pared (en la coordenada y^+), se obtiene:

$$\frac{\tau}{\tau_0} = 1 + u^+ v_0^+ + p^+ y^+ \quad (3)$$

Donde:

$$u^+ = \frac{\bar{u}}{u_\tau} \quad ; \quad v_0^+ = \frac{v_0}{u_\tau} \quad ; \quad u_\tau = \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}} \quad (4)$$

$$y^+ = \frac{y u_\tau}{\nu} \quad ; \quad p^+ = \frac{\nu (d \bar{p} / dx)}{\tau_0 u_\tau}$$

$\bar{p}$ = Presión promedio, N/m²

p^+ = Presión, adimensional

$\bar{u}$ = Componente de la velocidad promedio, m/s

$\bar{u}$ = Componente de la velocidad, adimensional

u_τ = Velocidad de corte ó fricción, m/s

$\bar{v}$ = Componente de la velocidad promedio, m/s

v_0 = Componente de la velocidad en la pared, m/s

v_0^+ = Componente de la velocidad en la pared, adimensional

x = Eje de coordenadas cartesianas, m

y = Eje de coordenadas cartesianas, m

y^+ = Eje de coordenadas cartesianas, adimensional

ε_M = Difusividad turbulenta para el momentum, m²/s

ν = Viscosidad cinemática, μ/ρ , m²/s

ρ = Densidad del fluido, kg/m³

τ = Esfuerzo de corte, N/m²

τ_0 = Esfuerzo de corte en la pared, N/m²

Ley de la pared para la capa límite hidrodinámica

Evaluando la ecuación (3), para el caso en que no existe gradiente de presión y sin transpiración, es decir:

$$\left(\frac{d\bar{p}}{dx} \right) \cong 0 \Rightarrow p^+ = 0 \quad ; \quad v_0^+ = 0 \quad (5)$$

Sustituyendo (5) en (3), se demuestra que el esfuerzo de corte es constante, por lo que la ecuación (2) se expresa de la siguiente manera:

$$\frac{\tau_0}{\rho} = (\nu + \varepsilon M) \frac{d \bar{u}}{d y} \quad (6)$$

La ecuación (6) es válida para el modelo de capa límite hidrodinámica de dos regiones, las cuales se describen a continuación:

a. Sub-capa laminar o viscosa

En esta zona de la capa límite se asume que:
 $\nu \gg \varepsilon_M \rightarrow \varepsilon_M \approx 0$.

Sustituyendo en la ecuación (6), integrando y expresando en términos adimensionales, se obtiene:

$$u^+ = y^+ \quad (7)$$

b. Capa totalmente turbulenta

En esta zona de la capa límite se asume que:
 $\nu \ll \varepsilon_M \rightarrow \nu \approx 0$.

Sustituyendo en la ecuación (6), se obtiene:

$$\frac{\tau_0}{\rho} = \varepsilon M \frac{d \bar{u}}{d y} \quad (8)$$

Teoría de la longitud de mezcla de Prandtl

La teoría de la longitud de mezcla de Prandtl propone la siguiente expresión para la difusividad turbulenta hidrodinámica ε_M :

$$\varepsilon_M = l^2 \left| \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right| \quad (9)$$

Donde: k = Constante de Van Karman ($k=0,41$) y l = Longitud de mezcla de Prandtl y $l=ky$.

Sustituyendo en la ecuación (8), y expresándola en términos adimensionales, se obtiene:

$$1 = (ky^+)^2 \left(\frac{du^+}{dy^+} \right)^2 \quad (10)$$

Ordenando e integrando para un límite crítico de la sub-capa viscosa de $y_{crit.}^+ = y_{crit.}^+ = 10,8$ se obtiene:

$$u^+ = 2,44 \ln y^+ + 5,0 \quad (11)$$

Teoría de la longitud de mezcla de Van Driest

La teoría de la longitud de mezcla de Van Driest propone para la longitud de mezcla, una variación continua a través de la zona de la pared y es dada por:

$$l = ky \left[1 - e^{-(y^+ / A^+)} \right] \quad (12)$$

Donde $A^+ \cong 25$

Sustituyendo en la ecuación (9) y expresado en términos adimensionales, se obtiene:

$$\frac{\varepsilon_M}{\nu} = (ky^+)^2 \left[1 - e^{-(y^+ / A^+)} \right]^2 \left| \frac{du^+}{dy^+} \right| \quad (13)$$

Sustituyendo en la ecuación (6), expresada en términos adimensionales, se obtiene una ecuación de segundo grado que es:

$$L \left(\frac{du^+}{dy^+} \right)^2 + \left(\frac{du^+}{dy^+} \right) - 1 = 0 \quad (14)$$

Donde:

A^+ = Constante de la Ec. Van Driest.

L = Término de la Ec. Van Driest, el cual se define según se indica en la siguiente ecuación

$$L = (ky^+)^2 \left[1 - e^{-(y^+ / A^+)} \right]^2 \quad (15)$$

Resolviendo la ecuación de segundo grado considerando solo el signo (+) e integrando numéricamente, se obtiene:

$$u^+ = \int_0^{y^+} \left(\frac{-1 + \sqrt{1 + 4L}}{2L} \right) dy^+ \quad (16)$$

Ley de la estela de Coles

Para representar el perfil de velocidad en la región externa (Estela) de la capa límite, Coles propone la siguiente expresión [3]:

$$u^+ = \frac{1}{k} \ln y^+ + B + \frac{2\Pi}{k} f(\eta) \quad (17)$$

Donde:

$$f(\eta) \cong \text{Sen}^2 \left(\frac{\pi}{2} \eta \right) \cong 3\eta^2 - 2\eta^3 \quad (18)$$

Con:

$$\eta = \left(\frac{y}{\delta} \right) ; \quad B = 5 ; \quad \Pi = \frac{Ak}{2}$$

$$A = 2,35$$

y para placas planas: $\Pi = 0,47$

A = Parámetro de la Ec. Coles

B = Constante de la Ec. Coles

Π = Parámetro Wake de la Ec. Coles

δ = Espesor de capa límite local, m

η = Parámetro adimensional de Coles y se puede expresar en función de y^+ de la siguiente manera:

$$\eta = \frac{y^+}{\delta^+} \quad (19)$$

Sustituyendo la ecuación (19) en (17), se obtiene:

$$u^+ = \frac{1}{k} \ln y^+ + B + \frac{2\Pi}{k} \text{Sen}^2 \left(\frac{\pi}{2} \frac{y^+}{\delta^+} \right) \quad (20)$$

Donde δ^+ = Espesor de capa límite adimensional y se obtiene evaluando la ecuación (20), para el caso en que $\eta = 1 \rightarrow u^+ = u_{\text{Máx.}}^+$.

Si $y = \delta \rightarrow u = u_{\infty}$; por lo tanto, se puede decir que:

$$u^+ = u_{\text{Máx.}}^+ = \frac{u_{\infty}}{u_{\tau}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{Cf}{2}}} = \sqrt{\frac{2}{Cf}} \quad (21)$$

Donde: Cf = Coeficiente de fricción local.

Sustituyendo en la ecuación (20) y despejando δ^+ , se obtiene:

$$\delta^+ = e^{k \left[\sqrt{\frac{2}{Cf}} - B - \frac{2\Pi}{k} \text{Sen}^2 \left(\frac{\pi}{2} \right) \right]} \quad (22)$$

Los resultados que se obtienen con estas ecuaciones no satisfacen la condición $u = u_{\infty}$, razón por la cual el autor de este trabajo propone una corrección para la ecuación propuesta por Coles, la cual se describe a continuación:

Partiendo de la condición principal de que, para $\eta = 1 \rightarrow u^+ = u_{\text{Máx.}}^+ = \text{Ctte.}$, y además $du^+/dy^+ = 0$. A fin de satisfacer ambas condiciones se propone la siguiente expresión:

$$\eta = ay^+/\delta^+ \quad (23)$$

Donde a = Factor de corrección y sustituyendo en la ecuación (20), se obtiene:

$$u_c^+ = \frac{1}{k} \text{Ln} y^+ + B + \frac{2\Pi}{k} \text{Sen}^2 \left(\frac{a\pi}{2} \frac{y^+}{\delta^+} \right) \quad (24)$$

Derivando la ecuación (24) e igualando a cero ($du^+/dy^+ = 0$), se obtiene:

$$0 = (2a\pi\Pi) \text{Sen} \left(\frac{a\pi}{2} \right) \text{Cos} \left(\frac{a\pi}{2} \right) \quad (25)$$

El valor de a que satisface esta expresión es: $a = 1,192$

De igual forma el término δ^+ queda afectado por el factor a de la siguiente manera:

$$\delta^+ = e^{k \left[\sqrt{\frac{2}{Cf}} - B - \frac{2\Pi}{k} \text{Sen}^2 \left(\frac{a\pi}{2} \right) \right]} \quad (26)$$

Los resultados que se obtienen introduciendo este factor de corrección en la ecuación de Coles, se ajustan al valor máximo de la velocidad seleccionado ($u = u_{\infty} = 3,3 \text{ m/s}$) y además cumple con la condición $du^+/dy^+ = 0$. Con estos resultados del análisis hidrodinámico (los cuales serán mostrados mas adelante) se inicia el análisis térmico, el cual complementa el desarrollo del presente trabajo. Para tal fin es necesario estudiar la distribución de calor dentro de la capa límite.

Distribución de calor cerca de la pared

Según lo descrito por Kays y Crawford [2], partiendo de la ecuación diferencial de la energía (E.D.E.), se tiene que:

$$\bar{u} \left(\frac{\partial \bar{t}}{\partial x} \right) + \bar{v} \left(\frac{\partial \bar{t}}{\partial y} \right) + \frac{1}{\rho c} \left(\frac{\partial \dot{q}''}{\partial y} \right) = 0 \quad (27)$$

Donde $\dot{q}''$ = Flujo de Calor total por unidad de área y se define como:

$$\dot{q}'' = -\rho c (\alpha + \varepsilon_H) \frac{\partial \bar{t}}{\partial y} \quad (28)$$

C = Calor específico a $P = \text{Ctte.}$, J/kg-K

$\bar{t}$ = Temperatura promedio, °C ó K

α = Difusividad térmica, m^2/s

ε_H = Difusividad turbulenta para la transferencia de Calor, m^2/s .

Sustituyendo la ecuación (28) en la (27) y considerando la región de flujo Couette, por encima de la sub-capa viscosa se obtiene:

$$\frac{\dot{q}''}{\dot{q}_o''} = 1 + \frac{\rho c v_o (\bar{t}_o - \bar{t})}{\dot{q}_o''} \quad (29)$$

Introduciendo los siguientes términos adimensionales:

$$t^+ = \frac{\rho c (\bar{t}_o - \bar{t}) u_{\tau}}{\dot{q}_o''} \quad ; \quad v_o^+ = \frac{v_o}{u_{\tau}} \quad (30)$$

Sustituyendo en la ecuación (29), se obtiene:

$$\frac{\dot{q}''}{\dot{q}_o''} = 1 + v_o^+ t^+ \quad (31)$$

Donde: t^+ = Temperatura adimensional

$\dot{q}_o''$ = Flujo de calor por área de interfase, W/m^2

Ley de la pared para la capa límite térmica

Evalutando la ecuación (31), para el caso en que no existe transpiración, es decir: $v_o^+ = 0$

Por lo tanto el flujo de calor, en la zona de la pared es constante, es decir: $\dot{q}'' = \dot{q}_o'' = C_{tte}$

Considerando el flujo de calor total, $\dot{q}_o''$. La ecuación (28) se puede expresar de la siguiente manera:

$$-\frac{\dot{q}_o''}{\rho c} = (\alpha + \varepsilon_H) \frac{dT}{dy} \quad (32)$$

Integrando y expresando en términos adimensionales, se obtiene:

$$t^+ = \int_0^{y^+} \frac{dy^+}{\left(\frac{1}{Pr} + \frac{\varepsilon_H}{\nu} \right)} \quad (33)$$

La ecuación (33) es válida para el modelo de capa límite térmica de dos regiones, las cuales se describen a continuación:

a. Sub-capa laminar o viscosa

En esta zona de la capa límite térmica se asume que: $\nu \gg \varepsilon_H \rightarrow \varepsilon_H/\nu \approx 0$.

Sustituyendo en la ecuación (33), se obtiene:

$$t^+ = \int_0^{y^+} Pr dy^+ \Rightarrow t^+ = Pr y^+ \quad (34)$$

b. Capa totalmente turbulenta

En esta zona de la capa límite térmica se asume que: $\nu \ll \varepsilon_H \rightarrow \varepsilon_H/\nu \neq 0$.

Sustituyendo en la ecuación (33), ordenando e integrando para un límite crítico de la sub-capa viscosa de: $y_{crit}^+ = 13,2$; se obtiene:

$$t^+ = \int_0^{13,2} Pr dy^+ + \int_{13,2}^{y^+} \frac{dy^+}{\left(\frac{1}{Pr} + \frac{\varepsilon_H}{\nu} \right)} \quad (35)$$

Teoría de la longitud de mezcla de Prandtl

La cual propone, basándose en la analogía de

Reynolds que:

$$\frac{\varepsilon_M}{\nu} = ky^+ = \frac{\varepsilon_H}{\nu} \quad (36)$$

En función a esto, el término en el denominador de la última integral en la ecuación (35), se puede transformar corrigiéndolo con el Número de Prandtl turbulento (Pr_t), de la siguiente manera:

$$\left(\frac{1}{Pr} + \frac{\varepsilon_H}{\nu} \right) = \frac{ky^+}{Pr_t} \quad (37)$$

Sustituyendo en la ecuación (35), se obtiene:

$$t^+ = 13,2 Pr + \int_{13,2}^{y^+} \frac{Pr_t dy^+}{ky^+} \quad (38)$$

Integrando y evaluando para: $k = 0,41$; $Pr_t = \varepsilon_M/\varepsilon_H = 0,9$ y $Pr > 0,5$ se obtiene:

$$t^+ = 2,195 Lny^+ + 13,2 Pr - 5,66 \quad (39)$$

Teoría de la longitud de mezcla de Van Driest

La cual propone para la longitud de mezcla, lo siguiente:

$$l = ky \left[1 - e^{-\left(\frac{y^+}{A^+} \right)} \right] \quad (40)$$

Donde $A^+ \cong 25$

Sustituyendo en la ecuación (9) y expresado en términos adimensionales, se obtiene:

$$\frac{\varepsilon_M}{\nu} = (ky^+)^2 \left[1 - e^{-\left(\frac{y^+}{A^+} \right)} \right]^2 \left| \frac{du^+}{dy^+} \right| \quad (41)$$

Donde:

$$\left| \frac{du^+}{dy^+} \right| = \left| \frac{-1 + \sqrt{1 + 4L}}{2L} \right| \quad (42)$$

Modelo del Pr_t para la zona totalmente turbulenta

Para representar el perfil de temperatura en la zona totalmente turbulenta, se debe sustituir en la ecuación (33), los siguientes términos.

La difusividad turbulenta para la transferencia de calor (ε_H), es corregida con el Número de Prandtl Turbulento (Pr_t), como sigue:

$$\varepsilon_H = \frac{\varepsilon_M}{Pr_t} \quad (43)$$

$$Pr_t = \frac{1}{\frac{1}{2 Pr_{t\infty}} + C Pe_t \sqrt{\frac{1}{Pr_{t\infty}} - D}} \quad (44)$$

Donde:

$$D = (C Pe_t)^2 \left[1 - e^{-\left(1/C Pe_t \sqrt{Pr_{t\infty}}\right)} \right] \quad (45)$$

$$Pe_t = \left(\frac{\varepsilon_M}{\nu} \right) Pr \quad (46)$$

C = Constante experimental del fluido
 D = Término de la Ec. Prandtl turbulento
 Pe_t = Número de Peclet turbulento
 Pr = Número de Prandtl, ν/α
 Pr_t = Número de Prandtl turbulento
 $Pr_{t\infty}$ = Número de Prandtl turbulento evaluado en corriente libre del fluido

Sustituyendo en la ecuación (33), se obtiene:

$$t^+ = \int_0^{y^+} \frac{dy^+}{\left(\frac{1}{Pr} + \frac{\varepsilon_M}{\nu Pr_t} \right)} \quad (47)$$

Desarrollo de la difusividad turbulenta para el momentum

Partiendo de la ecuación (1), la cual corresponde a la ecuación diferencial de momentum (E.D.M.). El autor desarrolla en el presente trabajo la siguiente metodología para definir una expresión que permita

obtener la difusividad turbulenta para el momentum, con la cual se logra resolver la ecuación (47), para obtener los perfiles de temperatura locales, en forma continua a lo largo de la capa límite sobre una placa plana. Es importante señalar que en la zona de la estela (wake), las componentes de la son diferentes de cero, pero si se puede decir que el gradiente de presión es despreciable.

Como primer paso, se define el esfuerzo de corte como:

$$L_M = \left[(\nu + \varepsilon_M) \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right] \quad (48)$$

Sustituyendo en la ecuación (1), se obtiene:

$$\bar{u} \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \right) + \bar{v} \left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial y} \right) - \frac{\partial L_M}{\partial y} = 0 \quad (49)$$

Integrando numéricamente, se obtiene:

$$L_M = \int_0^y (fu + fv) dy \quad (50)$$

Donde: L_M = Término difusivo de la Ec. Momentum y los términos fu y fv , se definen como:

$$fu = \bar{u} \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \right) \quad y \quad fv = \bar{v} \left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial y} \right) \quad (51)$$

El campo de velocidades $\bar{u}$ es conocido de las soluciones anteriores (Van Driest + Coles) para distintos valores de (x) , por lo que es fácil determinar la función (fu) .

El campo de velocidades $\bar{v}$ no es conocido, por lo que es necesario usar la ecuación de conservación de masa a fin de calcular (dv/dy) y luego integrando se calcula $\bar{v}$ tal como se describe a continuación.

Partiendo de la ecuación de continuidad:

$$\left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \right) + \left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial y} \right) = 0 \quad (52)$$

Despejando $\bar{v}$ e integrando, se obtiene

$$\bar{v} = \int_0^y - \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \right) dy \quad (53)$$

Una vez conocido ambos campos de velocidades $\bar{u}$ y $\bar{v}$ se procede al cálculo numérico de las fun-

ciones (f_u) y (f_v), para luego integrar la suma de ambas funciones y determinar al término difusivo (L_M). Conocido (L_M), se procede a calcular la difusividad turbulenta para el momentum (ε_M), la cual se puede expresar como sigue:

$$\varepsilon_M = \frac{L_M}{\left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right)} - \nu \quad (54)$$

Definida la difusividad turbulenta para el momentum (ε_M), se sustituye en la ecuación (47) con la que se obtiene el perfil de temperatura local en todo el espesor de capa límite, recorriendo en forma continua las tres zonas en que se divide ésta.

3. DISCUSIÓN DE RESULTADOS

Una comparación con los datos experimentales obtenidos por Anderson [4], para valores de $Re_{\Delta 2} = 1251, 2240$ y 3093 ($Re_{\Delta 2} = \text{Número de Reynolds del espesor del Momentum, } x \Delta 2/\nu$), se muestra en la Figura 1, donde se observa que en la cercanía de la pared, la ecuación (7) se comporta de forma similar a los datos experimentales. Mientras que un poco más lejos de la superficie de la pared, por encima de la sub-capa laminar o viscosa, la ecuación (11) se aproxima a los datos experimentales manteniendo el mismo comportamiento en la zona externa de la capa límite. En cambio la ecuación (16) logra acercarse con buena precisión al comportamiento de los datos experimentales tanto en la zona viscosa como en la zona turbulenta, siguiendo con igual comportamiento en toda la zona externa de la capa límite.

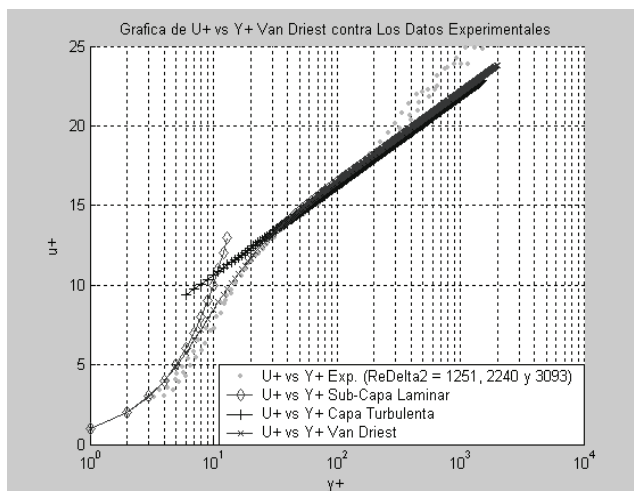


Figura 1. Perfiles de velocidad adimensional en la capa límite turbulenta.

Es importante señalar que estos resultados son válidos solamente cuando no hay gradiente de presión ni transpiración.

Los resultados obtenidos con las ecuaciones (20) y (22) las cuales representan la ley de la estela de Coles sin corregir, se muestran en la Figura 2.

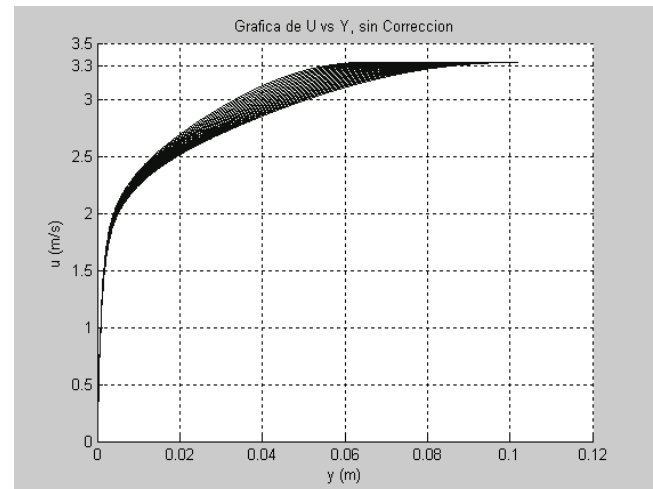


Figura 2. Perfiles de velocidad dimensional en la capa límite turbulenta.

Introduciendo el factor de corrección en las ecuaciones antes citadas se logra satisfacer ambas condiciones para $\eta = 1 \Rightarrow u^+ = u^+_{\text{Máx.}} = \text{Ctte.}$, y además $du^+/dy^+ = 0$, como se puede observar en la Figura 3.

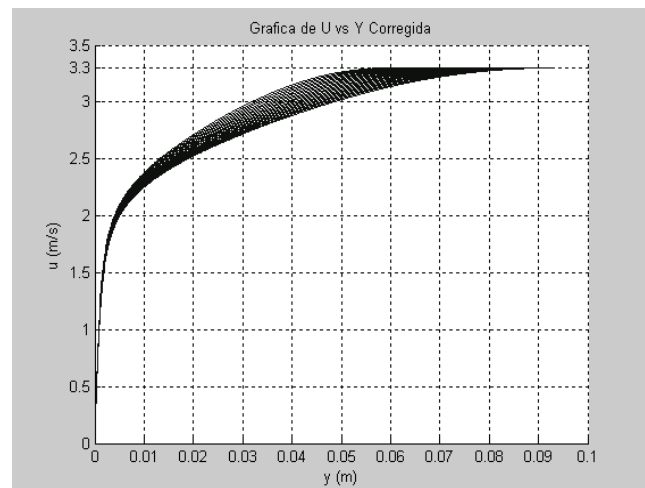


Figura 3. Perfiles de velocidad dimensional corregida en la capa límite turbulenta.

En la Figura 4 se muestra el perfil de velocidad adimensional de Van Driest, representada por la ecua-

ción (16), la cual es constante para cualquier posición a lo largo de la placa plana, seguida de una familia de curvas que representan los perfiles de velocidades adimensionales de la estela de Coles corregida, representada por las ecuaciones (24) y (26) evaluada para varias posiciones a lo largo de la placa plana, las cuales se ajustan al comportamiento de los datos experimentales de Anderson.

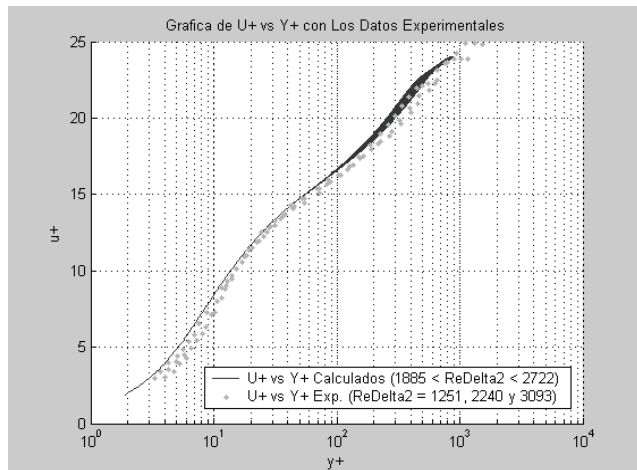


Figura 4. Perfiles de velocidad adimensional corregida en la capa límite turbulenta.

La Figura 5 muestra una comparación de los perfiles de temperatura representados por la ecuación (34), que corresponde a la sub-capa laminar o viscosa, la ecuación (39), que corresponde a la capa totalmente turbulenta y la ecuación (47), que corresponde al modelo de Van Driest, observándose que esta última se ajusta completamente al comportamiento de los datos experimentales de Anderson, tanto en la zona viscosa como en la totalmente turbulenta, conservando igual comportamiento en la zona externa de la capa límite térmica.

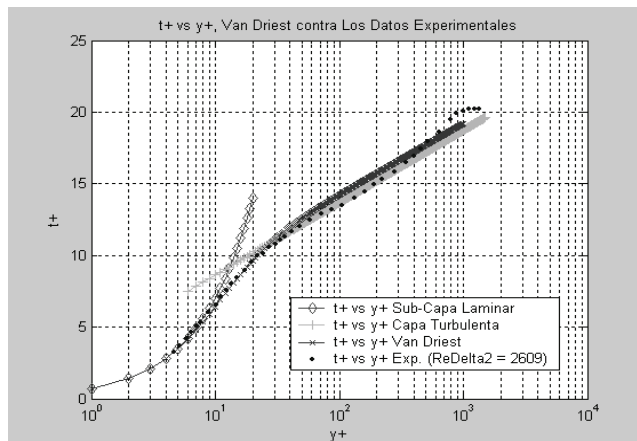


Figura 5. Perfiles de temperatura adimensional en la capa límite térmica.

La Figura 6, muestra los resultados que se obtienen con la ecuación (47) usando los datos de la difusividad turbulenta para el momentum (ε_M), que se obtiene con la ecuación (54) producto del modelo desarrollado en la última parte del presente trabajo. Es de hacer notar que el perfil de temperatura obtenido muestra un comportamiento similar e incluso en algunos puntos se ajusta completamente a los datos experimentales obtenidos por Anderson, los cuales han sido el patrón de referencia y validación de los resultados mostrados en este trabajo. Sin embargo existe cierta discrepancia en la zona cercana a la pared, observándose que el perfil de temperatura obtenido se encuentra un tanto desplazado hacia la parte inferior, lo cual pareciera obedecer a los errores sumados por los continuos métodos de integración numéricos utilizados a lo largo de toda la metodología desarrollada en el presente trabajo.

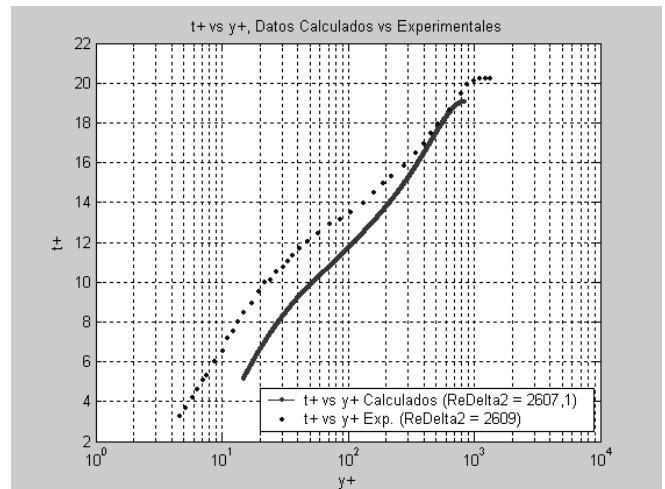


Figura 6. Perfiles de temperatura adimensional en la capa límite térmica.

4. CONCLUSIONES

Siguiendo la metodología presentada en este trabajo, se logra generar en forma continúa los perfiles de velocidad y de temperatura locales a lo largo de la capa límite, abarcando las tres zonas que dividen a ésta, a diferencia de los trabajos publicados en la literatura como son los estudios de Prandtl, quien describe la capa límite con dos zonas representadas cada una de ellas con una ecuación por separado, seguido por Van Driest quien logra describir el comportamiento de estas mismas zonas en forma continua sin llegar hasta la zona externa ó estela de la capa límite, la cual fue estudiada por Coles de forma muy particular sin

ninguna conexión con las zonas antes mencionadas. La metodología del presente trabajo no solo logra unificar los resultados obtenidos por Van Driest y Coles sino que aporta una mejora a la ecuación propuesta por Coles, introduciendo un factor de corrección necesario para satisfacer la condición de la derivada de la velocidad igual a cero en la corriente libre del flujo. Estos resultados han sido comparados y validados con datos experimentales obtenidos de la literatura .

5. REFERENCIAS

- [1] Nakayama A., “An Experimental Investigation of Flowfield About a Multi-Element Aierfoil”, IN: Aerodynamic Testing Conference, 15th, San Diego, CA, May 18-20, 1988, Technical Papers (A88-37907 15-09). p. 311-320.
- [2] Kays W. M. and Crawford M. E. (1980): “Convective Heat and Mass Transfer”, McGraw-Hill, Cap. 10 y 12.
- [3] White Frank, (1991): “Viscous Fluid Flow”, McGraw-Hill, Cap. 5, page. 335-499.
- [4] Anderson P. S., Kays W. M. and Moffat R. J.: J. Fluid Mechanics, Vol. 69, 1975, pp. 353-375.
- [5] Radmehr A. and Patankar S. V., “Computation of Boundary Layer Transition Using Low-Reynolds-Number Turbulence Models”, Numerical Heat Transfer, Part B, Vol. 39, pp. 525-543, 2001.
- [6] Radmehr A. and Patankar S. V., “A New Low-Reynolds-Number Turbulence Model for Prediction of Transition on Gas Turbine Blades”, Numerical Heat Transfer, Part B, Vol. 39, pp. 545-562, 2001.