

# Modelo colisional para la penetración de proyectiles sobre un plano semi-infinito

Peña, E.<sup>\*,a</sup>, Centeno, A.<sup>a</sup>, Cordido, F.<sup>b</sup>, Falcón, N.<sup>c</sup>

<sup>a</sup>Departamento de Física, Estudios Básicos, Facultad de Ingeniería, Universidad de Carabobo, Valencia, Venezuela

<sup>b</sup>Instituto Venezolano de Investigaciones Científicas (I.V.I.C), Caracas, Venezuela

<sup>c</sup>Departamento de Física, Facultad Experimental de Ciencias y Tecnología, Universidad de Carabobo, Valencia, Venezuela

---

## Resumen.-

Se formula un modelo teórico de la colisión de un proyectil sobre un medio semi-infinito, abordando el problema de la penetración como un choque perfectamente inelástico y el comportamiento del material blanco como un fluidoelástico para el cálculo de la longitud de penetración. El modelo fue corroborado experimentalmente en el laboratorio Balístico de la Compañía Anónima de Venezuela de Industria Militar (CAVIM). Los resultados concuerdan satisfactoriamente con el modelo, según el cual la longitud de penetración depende primordialmente de la longitud y la densidad del proyectil. Adicionalmente se discuten aplicaciones en: Tecnología Militar, la determinación de la presión máxima de materiales y la colisión del navío Deep Impact sobre el cometa Temple 1.

**Palabras clave:** Modelo colisional, Proyectiles de Barrena, Longitud de Penetración, Misión Impacto Profundo.

## Collision model for projectile penetration on a semi-infinite plane

### Abstract.-

A theoretical model for projectile collision on a semi-infinite plane is proposed. The problem of penetration is addressed as a perfectly inelastic collision and the behavior of the white material as an elastic fluid in order to calculate the length of penetration. The model was experimentally proven (corroborated) at the Ballistic Laboratory of Venezuela's Military Industry Corporation (Cavim, by its acronym in Spanish). The results are in good agreement with the model, according to which the length of penetration depends primarily on the length and density of the projectile. Moreover, applications in Military Technology, the determination of maximum material pressure, and the Deep Mission spacecraft collision on the Temple 1 comet are discussed.

**Keywords:** Collision model, Drill projectiles, Penetration length, Deep Impact Mission

Recibido: diciembre 2011

Aceptado: octubre 2012.

### 1. Introduction

La penetración de proyectiles de barrena se manifiesta cuando un proyectil colisiona en forma completamente inelástica con un medio sólido. Si bien la balística estudia el movimiento de un

proyectil antes del impacto, hay muchas aplicaciones donde es necesario estimar la longitud de penetración de un proyectil, o sea la máxima distancia recorrida por un móvil luego de su completa inserción en un medio (Blanco, en la jerga balística) cuya profundidad es mucho mayor que las dimensiones del proyectil. Se dice entonces que la penetración ocurre en un medio de longitud "semi-infinita". Debe observarse que la balística puede predecir los valores del alcance y de la velocidad instantánea justo antes del impacto del proyectil sobre una superficie, pero no dice nada sobre la longitud de penetración, que dependerá en

---

\*Autor para correspondencia

Correo-e: eliana.pena@gmail.com (Peña, E.)

general de las características del medio que funge como “blanco”. Se trata de predecir cuanto penetra una bala al incrustarse en concreto armado, o la máxima distancia a la que penetraría un cohete balístico al interior de la tierra luego del impacto sobre la superficie. Es intuitivo que la longitud de penetración dependerá si el medio que sirve de Blanco es sólido o fluido. En este estudio nos limitamos a la penetración de proyectiles sobre Blancos sólidos, es decir a los Proyectiles de Barrena, pues se denomina barrena a cualquier objeto útil para la penetración o perforación de un medio sólido. Luego el estudio de la longitud de penetración de proyectiles de barrena se emplea también en el diseño de barrenas de perforación de pozos e incluso a menor escala, en el diseño de herramientas [1]. También hay aplicaciones en astronomía, como por ejemplo la determinación de la máxima profundidad de los cráteres de impacto de la Luna causada por impactos de meteoritos [2]. ¿Cómo se relaciona el poder de penetración de un proyectil de barrena con la densidad del material que lo constituye? o mejor ¿de qué factores depende la penetración de un proyectil de barrena?, son algunas interrogantes que nos hemos planteado para la realización del modelo, con la pretensión de poder predecir la eficiencia de los búnkeres contra las municiones existente contra “blancos duros” o proyectiles de barrena. La importancia desde un punto de vista civil estriba en el diseño de taladros y perforadoras de impacto para terrenos duros (taladros de perforación petrolera y topas retroexcavadoras de túneles).

La máxima longitud de penetración de los proyectiles en medios sólidos semi-infinitos ha sido estudiada desde el siglo XVIII por sus aplicaciones en el campo de la Ingeniería Militar, en el diseño de fortificaciones y en la artillería. Puede decirse que su estudio sistemático se inicia con los trabajos de Jean-Víctor Poncelet, oficial del ejército napoleónico, deduciendo una expresión empírica para la longitud de penetración, aplicable para balas de cañón (ver [3] y referencias en él), y en general se sigue estudiando hoy día para distintos medio y aproximaciones semi empíricas que están aún en discusión [4, 5]. Sin embargo, tales estudios son de

carácter empírico, inconexos de principios físicos elementales como la Conservación del Momento lineal durante el impacto sobre el blanco; y no existen modelos fundamentales que incorporen la dinámica de la penetración en el sólido [6]. El objetivo del presente trabajo es salvar esa dificultad, para ello se presenta un modelo teórico (sección 2), abordando el problema de la penetración como un choque perfectamente inelástico y el comportamiento del material en un medio semi infinito como fluido, para obtener el Coeficiente de Penetración (sección 3) y el cálculo expreso de la longitud de penetración de proyectil. En la sección 4 se presentan los ensayos experimentales que validan el modelo realizado. En la sección 5 se discuten posibles aplicaciones tanto en balística, como en ensayos de determinación de la tensión máxima (presión máxima) asociada a la dureza de un material, y finalmente se presentan las conclusiones (sección 6)

## 2. Modelo colisional

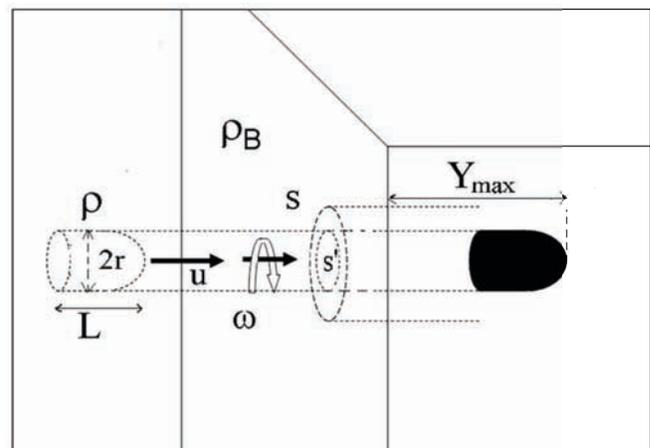


Figura 1: Diagrama de un proyectil de densidad  $\rho$  con velocidad lineal  $u$  y velocidad angular  $\omega$  penetrando en un sólido semi-infinito de densidad  $\rho_B$ , hasta la profundidad  $Y_{max}$ .

Considérese un proyectil de masa  $m$ , viajando a una velocidad “ $u_t$ ” justo antes de hacer blanco en la superficie sólida (penetrar) como se ilustra en la Figura 1.

Al penetrar el proyectil en la superficie sólida, su aceleración disminuye debido a una fuerza resistiva, por unidad de masa, tipo Rayleigh que es proporcional al cuadrado de su velocidad [7]; y también a la fuerza ( $R$ ), por unidad de masa, necesaria para introducir el proyectil cuasiestáticamente en el sólido, la Ecuación (1) muestra el modelo matemático de la aceleración del proyectil

$$\frac{dV}{dt} = -kV^2 - R, \quad (1)$$

donde  $V$  es la velocidad del proyectil dentro del sólido, el coeficiente  $k$  depende de la densidad  $\rho$  :  $B$  del blanco, de un coeficiente de penetración  $C$  y de la densidad y longitud  $L$  del proyectil, tal como se indica a continuación en la Ecuación (2)

$$k \equiv \frac{C\rho_B}{2\rho L}. \quad (2)$$

Integrando la ecuación 1 se tiene:

$$V(t) = \sqrt{\frac{k}{R}} \tan \left[ \sqrt{kR}(-t + \Lambda) \right],$$

donde  $\Lambda$  queda determinada por la velocidad del proyectil " $u_i$ " justo en el instante en que colisiona con el blanco

$$\Lambda = \frac{1}{kR} \tan^{-1} \left( \sqrt{\frac{k}{R}} u_i \right).$$

En el instante  $t = \Lambda$ , la velocidades nula y la penetración es máxima, luego

$$Y_{max} = k^{-1} \ln \left| 1 + \frac{k}{R} u_i^2 \right|. \quad (3)$$

Hay que considerar que la velocidad del proyectil " $u_i$ " justo en el instante en que principia la colisión tiene una componente radial " $u$ " y una componente angular de giro  $\omega$ , por lo tanto la expresión de la Ecuación (3) se reescribe como

$$Y_{max} = k^{-1} \ln \left| 1 + \frac{k}{R} (u_i^2 + \alpha r^2 \omega^2) \right|, \quad (4)$$

donde se ha usado que  $r$  es la distancia del eje de giro del proyectil (radio) y  $\alpha$  es el coeficiente del momento de inercia,  $2/5$  para un proyectil esférico,  $1/2$  para proyectiles cilíndricos, etc.

Por otro lado, el trabajo necesario para que el proyectil penetre toda su longitud, es

$$T = mRL.$$

La energía cinética del proyectil con momento de inercia  $I$  respecto al eje paralelo a la dirección de desplazamiento, y velocidad angular en  $\omega$  es

$$R = \frac{m}{2} (u_i^2 + \alpha r^2 \omega^2).$$

Para el cociente  $E/T$ , el balance de energía demanda que

$$\begin{aligned} \frac{F}{k} \frac{C\rho_B}{\rho} &= \frac{(u_i^2 + \alpha r^2 \omega^2) C\rho_B}{2Rl} \frac{C\rho_B}{\rho} \\ &= (u_i^2 + \alpha r^2 \omega^2) \frac{k}{R}. \end{aligned} \quad (5)$$

Como quiera que el trabajo realizado en la penetración ( $T$ ) se relaciona con la presión máxima ( $P_{max}$ ) del "blanco duro" antes de ceder

$$T = sP_{max}L = \frac{mP_{max}}{\rho}.$$

La presión máxima por unidad de volumen le corresponde a la "tensión mecánica" de máximo esfuerzo en el argo de las ciencias de los materiales [8] y la Relación (5) puede ser escrita como

$$(u_i^2 + \alpha r^2 \omega^2) \frac{C\rho_B}{2P_{max}} = (u_i^2 + \alpha r^2 \omega^2) \frac{k}{R} \quad (6)$$

Reemplazando las Ecuaciones (2) y (6) en la Ecuación (4), se obtiene finalmente

$$Y_{max} = \frac{2L\rho}{C\rho_B} 5 \ln \left| 1 + \frac{C\rho_B}{2P_{max}} (u_i^2 + \alpha r^2 \omega^2) \right|. \quad (7)$$

### 3. Coeficiente de penetración

Para estimar el coeficiente de penetración se supondrá el caso límite en el cual el material se comporta como fluido en un área  $S'$  alrededor del proyectil de área  $S$ , durante la penetración de éste; y como sólido rígido a dimensiones mayores; donde la fluidez del medio es debida al aumento de temperatura ocasionada por la transferencia

de energía durante la penetración. Por otra parte, si  $\mu$  es la velocidad de eyección de detritus del blanco a medida que el proyectil penetra, tenemos de la transferencia de momentum, por unidad de longitud, durante el impacto

$$S' - S) \mu = VS',$$

donde  $S$  denota la sección transversal del orificio dejado por el proyectil de sección transversal  $S'$ , ver Figura 1. Relación que puede ser escrita como

$$\mu = \frac{Vf}{f-1},$$

donde ; así bajo las suposiciones previas, la fuerza viscosa será:

$$F = \frac{1}{2} \rho_B \mu^2 (S' - S) = \frac{1}{2} \frac{f^3}{f-1} \frac{\rho S}{L} V^2,$$

Es claro que  $F$  es mínima cuando el coeficiente sea  $f = 3/2$ . Este coeficiente relaciona en promedio, al área del orificio causado por el impacto del proyectil con la sección transversal del mismo. Con lo cual  $C = f = 3/2$  y la Ecuación (2) puede ser escrita como

$$k \equiv \frac{3\rho_B}{4\rho L}.$$

Así también la Ecuación (7) puede escribirse como

$$Y_{max} = \frac{4L\rho}{3\rho_B} \ln \left| 1 + \frac{3\rho_B}{4P_{max}} (u_i^2 + \alpha r^2 \omega^2) \right|. \quad (8)$$

La expresión (8) muestra que la longitud de penetración aumenta linealmente con la longitud y densidad del proyectil, en acuerdo con la fenomenología observada de diferentes sistemas de armas bélicas como flechas, torpedos y misiles aire-aire de cazabombarderos. En efecto los misiles denominados “anti bunker”, diseñados para demoler refugios subterráneos, son construidos con geometría deliberadamente alargada, y la mas de las veces construidos con materiales altamente densos como plomo y uranio “empobrecido”(U-238), demostrando empíricamente su “eficacia” en las últimas contiendas bélicas [5] (Guerra del Golfo, Bombardeo en Bosnia-Herzegovina,

Invasión de Irak). La dependencia logarítmica en la expresión de la Ecuación (8) muestra que un incremento significativo en la velocidad lineal de los proyectiles o en su momento angular no implica una variación importante en la longitud de penetración del proyectil de barrena. Como es de esperar la Ecuación (8) predice que la penetración es nula cuando la velocidad total del proyectil de barrena es despreciable frente a la presión máxima del medio semi infinito considerado.

#### 4. Desarrollo experimental

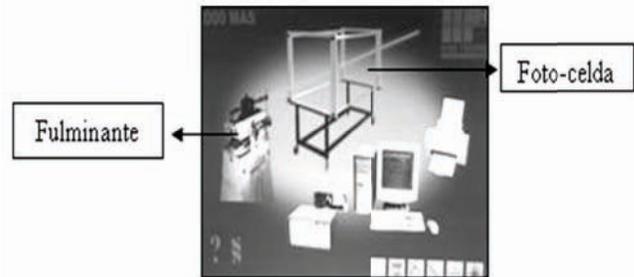


Figura 2: El proyectil luego de ser disparado por un fulminante, pasa por la foto-celda midiendo la velocidad que se digitaliza en un ordenador.

La verificación empírica del modelo se realizó mediante pruebas balísticas con proyectiles de diversos calibres, longitudes y composición; sobre blancos de arena cernida. El modelo fue corroborado mediante datos experimentales obtenidos de pruebas realizadas [9] en el Laboratorio Balístico, de la Compañía Anónima de Venezuela de Industria Militar (CAVIM). Estas se realizaron efectuando disparos con una carga de fulminante y proyectiles de calibres de 9 mm; 7,62 mm; 7,65 mm y 0,38 spl. El esquema experimental se resume en la Figura 2. Se usó arena cernida como material de frenado del proyectil porque es de fácil manipulación y presenta la propiedad de modificar su agregación durante la transferencia de energía cinética del proyectil, dejando un rastro visible que puede ser medido posteriormente del impacto. La velocidad antes del impacto se determina por una foto

celda del sistema B2000MAS, perteneciente al Laboratorio de Control de Calidad de CAVIM. Las mediciones para la presión máxima  $P_{max}$  se llevaron a cabo en el laboratorio de suelos de la Facultad de Ingeniería, Universidad de Carabobo, con el equipo para ensayos de penetración o ensayo CBR.

## 5. Resultados y discusión

La Tabla 1 muestra los resultados de las pruebas para las magnitudes físicas de las ojivas y su longitud de penetración. El parámetro de la densidad del medio, para nuestro caso la densidad de la arena, se utilizó el valor tabulado,  $\rho_B = 2,650 \text{ Kg/m}^3$ , para la se utilizó el ensayo de penetración, obteniendo el valor medio de  $P_{max} = (22,5 \pm 0,1) \text{ MPa}$ . Para la comprobación del modelo, debemos comparar los resultados experimentales para la longitud máxima de penetración, con los valores teóricos obtenidos por la Ecuación (8).

Recordando que la Ecuación (8) define la penetración de proyectiles de barrena, en la cual además se observa, que la penetración depende de la longitud de la bala y la densidad de ésta, por ende se podría intuir que la bala de 7,62 mm debería haber penetrado mayor longitud, pero no fue así porque las balas se fragmentaron al impactar el blanco, lo que le impide a la bala tener mayor penetración, aumentando así su diferencia porcentual con respecto al valor predicho. Para las balas 9mm y 7,65 mm los resultados tuvieron una diferencia porcentual con respecto al valor predicho de tan sólo 7,2 % y 9,8 % respectivamente; por lo que el modelo teórico puede predecir de manera aproximada la longitud de penetración de un proyectil al que se le sea conocido las variables tomadas en cuenta en la Ecuación (8), mas sin embargo, su predicción se limita a proyectiles que no se fragmenten durante el impacto.

Sin embargo, como los proyectiles fragmentados penetran menos que los no fragmentados, el modelo permite acotar en todo momento la longitud máxima de penetración de un proyectil de

barrena. Ese también es el caso de la penetración máxima del navío espacial Deep Impact [10] que el 04 de Julio del 2005 fue deliberadamente proyectado balísticamente sobre la superficie del Cometa Temple 1. La sección del explorador de barrena sobre el Cometa Temple 1, fue diseñada con una longitud máxima de 1,4 m, de material de cobre alta pureza,  $\rho_B = 8,960 \text{ Kg/m}^3$ , impactando a la velocidad de 34.000 km/h [11]. El plano semi infinito en este caso lo constituye la superficie del Cometa Temple 1 de densidad 0,6 g/cm<sup>3</sup> [12], ocasionando un cráter del orden de 100 metros de diámetro y 30 metros de profundidad. Estos resultados concuerdan con la penetración máxima esperada, de la Ecuación (8) se tiene

$$Y_{max} \approx \frac{4 \cdot 8,96}{3 \cdot 0,6} 1,4 \ln 3 \cong (30,6 \pm 0,5) \text{ m.}$$

Por otra parte, si se conoce la longitud máxima de penetración sobre un medio considerado, de un proyectil de barrena usado como testigo, puede emplearse la Ecuación (8) para estimar la Presión máxima del medio semi-infinito, en efecto se obtiene

$$P_{max} = \frac{3\rho_B}{4} \frac{(u_t^2 + \alpha r^2 \omega^2)}{\left[1 - \exp\left(\frac{3}{4} \frac{\rho_B Y_{max}}{\rho L}\right)\right]}. \quad (9)$$

Como el argumento del exponencial es siempre menor a la unidad, puesto que se ha supuesto  $\rho > \rho_B$  y que  $L \sim Y_{max}$ , se obtiene de la Ecuación (9) que podemos comparar dos materiales diferentes sometidos al mismo ensayo con un mismo proyectil penetrador, en cuyo caso la dureza relativa a la dureza patrón del blanco puede caracterizarse a través de la relación

$$P_{max} = P_{max}^{patron} \left( \frac{\rho_B Y_{max}}{(\rho_B Y_{max})^{patron}} \right). \quad (10)$$

Así, un diseño experimental como el propuesto, podría emplearse para estimar la tensión mecánica o presión máxima ( $P_{max}$ ) y con ella se obtiene una relación empírica para estimar la resistencia de un material a la deformación plástica localizada

Table 1: Características de proyectiles y su longitud de penetración.

Calibre de la bala Ojiva	7,62 mm Cobre	0,38 spl Plomo	9 mm Blindada	7,65 mm Blindada
Longitud de la bala [m]	28,85x10 <sup>-3</sup>	18,20x10 <sup>-3</sup>	15,70x10 <sup>-3</sup>	11,85x10 <sup>-3</sup>
Densidad de la bala [Kg/m <sup>3</sup> ]	9.550	10.040	10.670	9.250
Velocidad [m/s] ±0,01	800,28	268,33	380,18	304,83
Longitud de penetración teórica [m]	0,562	0,183	0,221	0,122
Longitud de penetración experimental [m] ±0,001	0,157	0,163	0,205	0,134
Diferencia porcentual [%]	72,1	17,3	7,2	9,8
Nota	Fragmentado			

o dureza, siendo un método empírico similar al aparato de Brinnell o de Poldi, que podría emplearse para medios cuyas escalas de dureza son relativamente bajas comparadas al acero, para los cuales los métodos convencionales (Hardness Vickers Number, Hardness Knoop) no son útiles [13]. Debe destacarse que el método propuesto y la validez de la Ecuación (10) está limitada a la condición:  $\rho > \rho_B$ , lo que exige una colección de proyectiles de barrena de diferentes rangos de densidades, en concordancia con los medios a examinar.

## 6. Conclusiones

Los resultados obtenidos concuerdan satisfactoriamente con la Ecuación (8) del modelo teórico, según el cual la longitud de penetración depende de la longitud y densidad del proyectil, en segundo orden varía poco con la velocidad justo antes del impacto, la presión máxima que ejerce el medio al proyectil y la densidad del medio. La virtud del modelo desarrollado en la Sección 2, el mismo provee una metodología basado en la transferencia de momentum, en lugar de basarse en la conservación de la energía. Durante el impacto y el recorrido de un proyectil de barrena, la energía cinética del proyectil se transfiere al medio en forma de calor, fricción y sonido; pero su estimación cuantitativa depende de varios procesos que dependen de la naturaleza del medio y del proyectil, que son de difícil predicción teórica. Sin embargo, la longitud de penetración de una barrena, basada en la transferencia de momentum

permite soslayar estas dificultades, pues en primer orden, el movimiento del proyectil es análogo al movimiento cuasiestático en un medio semifluido (ver Figura 1 y Ecuación (1)). La aplicación del modelo inédito presentado puede emplearse en tecnología militar, para el diseño de bunker contramisiles de alta penetrabilidad y también para una mayor eficacia en penetración de misiles “Bunker Buster” [5], también en el diseño de taladros perforadores de medios sólidos semi-infinitos para pozos de agua y retroexcavadoras de túneles en minería. Finalmente la Ecuación (10) provee un método alternativo para determinar la resistencia de un material a la deformación plástica localizada.

## Agradecimientos

A la Compañía Anónima de Venezuela de Industria Militar (CAVIM) y a la Fuerza Armada Nacional Bolivariana (FANB) por su colaboración en las pruebas balísticas.

## Referencias

- [1] Forrestal, M.J. ; Longcope, D.B., (1990), Target Strength of Ceramic Materials for High-Velocity Penetration. *Journal of Applied Physics*, 67, 3669–3672.
- [2] Mosher, T.J. ; Lucey, P., (2006), A Lunar volatiles Expedition, *Acta Astronáutica*, 59, (8), 585–592.
- [3] Kennedy, R. P., (1976), A review of procedures for the analysis and design of concrete structures to resist missile impact effects. *Nucl. Eng. Des*, 37, 183–203.

- [4] Forrestal MJ, Frew DJ, Hanchak SJ, Brar NS., (1996), Penetration of grout and concrete targets with ogive-nose steel projectiles. *Int J Impact Eng*, 18, (5), 465–76.
- [5] Nelson, R.W., (2002), Low Yield Earth-penetrating Nuclear Weapons. *Science and global security*, 10, (1), 1–20.
- [6] Li Q.M ; Chen XW, (2003), Dimensionless formulae for penetration depth of concrete target impacted by a non-deformable projectile, *Int J. Impact Eng* 281, 93–116.
- [7] Goldstein, H., (1977), *Mecánica Clásica*. Ed. Aguilar Barcelona
- [8] Ortiz-Berrocal, L., (1998), *Elasticidad*, McGraw-Hill, pp 25-84. NY. USA
- [9] Cordido, F.A., (2008), *Penetración de proyectiles de Barrena: aproximación heurística del problema*. Trabajo de Grado. Dpto. de Física Facultad Experimental de Ciencias y Tecnología Universidad de Carabobo.
- [10] McKee, M., (2005), “Deep Impact collision ejected the stuff of life”. *Science* (DOI: 10.1126/science.1118923)
- [11] A’Hearn, M., (2005), “Deep Impact, Mission Results, Excavating Comet Tempel 1” NASA, Tech report.
- [12] Lara, L. Metal, (2006), *Astronomy and Astrophysics* 445, 1151-1157
- [13] Low S.R., (2001), *Rockwell Hardness Measurement of Metallic Materials*. National Institute of Standards and Technology. U.S.