

Nota Técnica: Determinación del factor de potencia por fase en cargas eléctricas trifásicas tipo Y-Y usando métodos iterativos.

David Enrique Duarte González*, Carmen Victoria Marín

Departamento de Matemática, Dirección de Estudios Básicos, Facultad de Ingeniería, Universidad de Carabobo, Valencia, Venezuela.

Resumen.-

En este artículo se plantea la utilización de métodos iterativos en la resolución del problema de la determinación del factor de potencia por fase en cargas trifásicas de tipo Y-Y y las ecuaciones lineales simultáneas involucradas. Como bien es sabido las cargas se pueden conectar bien sea en configuración estrella o triángulo dependiendo de los requerimientos de la misma, establecido esto se puede entonces presentar, en muchos casos, valores ineficientes del factor de potencia debido al desequilibrio de cargas que se puede solventar haciendo un adecuado arreglo de la disposición de las mismas. Las configuraciones mixtas son muy comunes en aplicaciones reales. Se presenta un ejemplo simulado que se establece desbalanceado sobre el cual se aplica un método iterativo para resolver el sistema de ecuaciones simultáneas resultante.

Palabras clave: Trifásico, Cargas, Factor, Potencia.

Tech note: Determining power factor in three phase Y-Y electrical loads using iterative methods.

Abstract.-

This article proposes the use of iterative methods in solving the problem of determining the power factor per phase in YY-type phase loads and simultaneous linear equations involved. As well known, loads can be connected in either star or delta configuration depending on the requirements of the system, established this can be present, in many cases, inefficient values of power factor due to load unbalance that can be solved making a suitable arrangement of the layout thereof. Hybrid configurations are very common in real applications. We present a simulated example establishing unbalanced on which applies an iterative method to solve the resulting system of simultaneous equations.

Keywords: Three-phase, Loads, Factor, Power.

Recibido: Agosto 2012

Aceptado: Agosto 2013

1. Introducción

La mayoría de los equipos electrónicos poseen un suministro de energía de la red de 60 Hz, y más del 50 % de esta potencia se procesa a

través de algún tipo de convertidor de potencia. Por lo general, los convertidores de potencia utilizan un diodo rectificador seguido por un condensador para convertir la tensión de corriente alterna a tensión de corriente continua. Dado que estos convertidores de poder absorben la energía de la línea de corriente alterna cuando el voltaje de línea es mayor que el voltaje corriente continua, la corriente de línea de entrada contiene armónicos que contaminan el sistema de alimentación y pueden interferir con los equipos eléctricos. Estos

*Autor para correspondencia

Correo-e: denrique.duarte@gmail.com (David Enrique Duarte González)

convertidores tienen generalmente un bajo factor de potencia de 0,65 [1].

Un factor de potencia inferior a 1,0 requiere un suministro de mayor potencia o volt-amperes para entregar la potencia real (watts) requerida por la carga. Esto aumenta los costos de generación y transmisión. Por ejemplo, si el factor de potencia de la carga fuese tan bajo como 0,7, la potencia demandada sería 1,4 veces la potencia real utilizada por la carga siendo esto un consumo eléctrico ineficiente. Alternativamente todos los componentes del sistema, tales como generadores, conductores, transformadores y equipos se incrementarían en tamaño para transportar la corriente adicional [2].

Las empresas de suministro eléctrico cobran costos adicionales para los clientes que tienen un factor de potencia por debajo de cierto límite, que es típicamente 0,9 a 0,95.

En Venezuela se promueve la mejora del factor de potencia en los usuarios industriales, comerciales y oficiales con cargas superiores o iguales a doscientos kilovoltamperios (200 KVA) a fin de reducir las caídas de tensión y aumentar la disponibilidad de potencia en la red eléctrica [3].

El objetivo de este trabajo es presentar el uso de los métodos numéricos, en este caso el método de Gauss-Seidel, para realizar la evaluación del factor de potencia total de cargas por fases en un circuito trifásico mediante un algoritmo computacional desarrollado con estos fines.

2. Fundamentos Teóricos

2.1. Factor de Potencia

El factor de potencia de un sistema de energía eléctrica de corriente alterna se define como la relación de la potencia real que fluye a la carga y la potencia aparente en el circuito, [4] y es un número sin dimensión con valores entre 0 y 1. La potencia real es la capacidad del circuito para realizar trabajo en un tiempo específico. La potencia aparente es el producto de la corriente y el voltaje del circuito. Debido a la energía almacenada en la carga y devuelto a la fuente, o debido a una carga no lineal que distorsiona la forma de onda de la corriente extraída de la fuente,

la potencia aparente será mayor que la potencia real [5].

El flujo de energía alterna tiene tres componentes: la potencia real (P) (también conocida como potencia activa), medida en vatios (W), la potencia aparente (S), medido en voltios-amperios (VA) y potencia reactiva (Q), medida en voltios-amperios reactivos (VAR) [2].

De modo que se define el factor de Potencia (1)

$$f.p. = P/S, \quad (1)$$

donde:

f.p.: Factor de Potencia (sin dimensión),

P: Potencia Activa (W) y

S: Potencia Aparente (VA).

Cuando se tiene un suministro perfectamente sinusoidal, P, Q y S se pueden expresar como vectores que forman un triángulo vectorial tal como la siguiente expresión (2):

$$S^2 = P^2 + Q^2 \quad (2)$$

Estableciendo que φ es el ángulo entre la corriente y el voltaje entonces el factor de potencia es igual al coseno del ángulo $|\cos \varphi|$ y:

$$P = |S| |\cos(\varphi)|$$

Dicho triángulo vectorial quedaría representado como en la Figura 1.

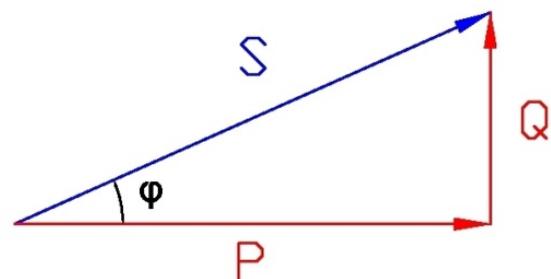


Figura 1: Triángulo de vectores de potencia.

2.2. Características de las Cargas

En el diseño de instalaciones eléctricas o de los circuitos eléctricos para comercios o industrias, es necesario considerar una gran variedad de

tipos de cargas que intervienen y que genéricamente se pueden agrupar en alumbrado, motores, circuitos electrónicos y aplicaciones especiales. En el renglón de aplicaciones especiales puede intervenir una gran variedad de tipos de cargas, dependiendo de las características de la industria o local al cual se le va a diseñar la instalación eléctrica y de hecho, cada caso representa un problema particular que debe ser resuelto para cada proyecto o diseño específico [6].

En un circuito resistivo puro recorrido por una corriente alterna, la corriente y el voltaje están en fase ($\varphi=0^\circ$). Por otro lado, en un circuito reactivo puro, la corriente y el voltaje están en cuadratura ($\varphi=90^\circ$).

Las cargas inductivas, tales como transformadores, motores de inducción y, en general, cualquier tipo de inductancia, generan potencia inductiva con la corriente retrasada respecto al voltaje.

Las cargas capacitivas, tales como bancos de condensadores o cables enterrados, generan potencia reactiva con la corriente adelantada respecto al voltaje [6].

2.3. Método de Solución de Ecuaciones Lineales Gauss-Seidel

Los métodos iterativos o aproximados proveen una alternativa de los métodos de eliminación convencionales. El método de Gauss-Seidel es el método iterativo más comúnmente usado. Suponiendo que se da un conjunto de n ecuaciones:

$$[A][X] = [B]$$

Por ejemplo, en un conjunto de ecuaciones de 3x3 si los elementos de la diagonal no son todos cero, la primera ecuación se puede resolver para x_1 , la segunda para x_2 y la tercera para x_3 , para obtener:

$$X_1 = (b_1 - a_{12}x_2 - a_{13}x_3) / a_{11}, \quad (3)$$

$$X_2 = (b_2 - a_{21}x_1 - a_{23}x_3) / a_{22}, \quad (4)$$

$$X_3 = (b_3 - a_{31}x_1 - a_{32}x_2) / a_{33}. \quad (5)$$

Ahora se puede empezar un proceso de solución al escoger los valores iniciales de las x . una forma

simple para obtener los valores iniciales es suponer que todos son cero. Estos ceros se pueden sustituir en la ecuación (3), la cual se puede usar para calcular un nuevo valor para $x_1 = b_1/a_{11}$. Después se sustituye este nuevo valor de x_1 junto con los valores previos de cero para x_3 en la ecuación (4) y calcular el nuevo valor para x_2 . Este proceso se repite en la ecuación (5) para calcular un nuevo estimado de x_3 . Después se regresa a la primera ecuación y se repite todo el procedimiento hasta que la solución converja lo suficientemente cercana a los valores reales. La convergencia se puede verificar usando el criterio:

$$|\varepsilon_{a,i}| = \left| (X^k - X^{k-1}) / X^k \right| 100 \% < \varepsilon_s,$$

donde $\varepsilon_{a,i}$: error relativo estimado.

ε_s : error total estimado.

X^k : valor de la variable en la k-ésima iteración.

X^{k-1} : valor de la variable en la k-ésima-1 iteración [7].

2.4. Algoritmo de Gauss Seidel

En la Figura 2 se muestra un algoritmo para el método de Gauss-Seidel. Se observa que este algoritmo no garantiza la convergencia si las ecuaciones no se introducen en una forma de diagonal dominante.

```

función Gauss-Seidel(A,x0)
  //x0 es una aproximación inicial a la solución //
  para k ← 1
  hasta convergencia hacer
    para i ← 1 hasta n hacer
      σ ← 0
      para j ← 1 hasta n hacer
        si j ≠ i hacer
          σ = σ + aijxij
        fin para
      xi = bi - σ/aij
    fin para
    comprobar si se alcanza
    convergencia
  fin para

```

Figura 2: Pseudocódigo para el método de Gauss-Seidel [7].

2.5. Macros en Hojas de Cálculo

Una macro es un conjunto de instrucciones escritas en lenguaje Basic, que nos permite automatizar ciertas tareas que la aplicación no contempla desde las herramientas de la hoja. Dicho de otra

manera, una macroinstrucción es una instrucción compleja, formada por otras instrucciones más sencillas. Esto permite la automatización de tareas repetitivas [8].

Las macros tienden a almacenarse en el ámbito del propio programa que las utiliza, en este caso una hoja de cálculo, y se ejecutan pulsando una combinación especial de teclas o un botón especialmente creado y asignado para tal efecto. La diferencia entre una macroinstrucción y un programa es que en las macroinstrucciones la ejecución es secuencial y no existe el concepto del flujo de programa [8].

3. Metodología

3.1. Modelo de la Red

Si se considera un pequeño circuito que opera en un tramo aislado de la red eléctrica de modo que los aspectos locales de una carga son equilibradas por otras cargas vecinas.

Para la investigación se tomó el siguiente esquema donde se observan las impedancias de las cargas conectadas por fase y por línea y donde también se observan las impedancias equivalentes de las líneas y del cable neutro, ver Figura 3:

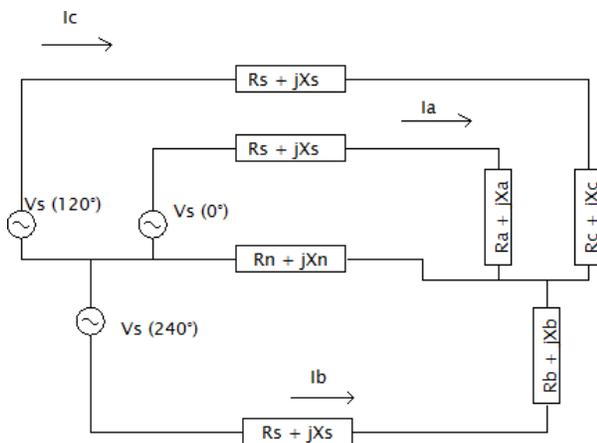


Figura 3: Modelo de circuito equivalente.

Sabiendo que:

$R_a + jX_a$: Impedancia vectorial de la carga en fase A

$R_b + jX_b$: Impedancia vectorial de la carga en fase B

$R_c + jX_c$: Impedancia vectorial de la carga en fase C

$R_n + jX_n$: Impedancia vectorial de la línea neutro.

$R_s + jX_s$: Impedancia vectorial de cada una de las líneas.

El circuito se puede analizar estableciendo tres ecuaciones realizando la malla de corrientes I_a , I_b , e I_c como se muestra en la Figura 3. Se obtienen las siguientes ecuaciones:

Para la Malla A, se presenta una ecuación de tipo vectorial:

$$-V_s(0^\circ) + I_A(R_s + jX_s + R_a + jX_a) + (I_a + I_b + I_c)(R_n + jX_n) = 0$$

Para la Malla B:

$$-V_s(120^\circ) + I_B(R_s + jX_s + R_b + jX_b) + (I_a + I_b + I_c)(R_n + jX_n) = 0$$

y para la Malla C:

$$-V_s(240^\circ) + I_C(R_s + jX_s + R_c + jX_c) + (I_a + I_b + I_c)(R_n + jX_n) = 0$$

Donde:

Corrientes de Suministro

I_a : Corriente de Fase A.

I_b : Corriente de Fase B.

I_c : Corriente de Fase C.

Sabemos que el algoritmo de solución de ecuaciones no es capaz de manejar números complejos, se pueden convertir cada una de las ecuaciones anteriores en dos ecuaciones no complejas abordando tanto la parte real como la parte imaginaria por separado.

Usando,

$$I = I_xr + jI_xi$$

donde:

I_xr : Parte Real de la corriente.

I_xi : Parte Imaginaria de la Corriente.

Para la fase A se sabe que:

$$V_s(0^\circ) = 120 + j0$$

Y se obtiene:

Real A:

$$\begin{aligned} & Iar(Rs + Ra + Rn) \\ & -Iai(Xs + Xa + Xn) + \\ & IbrRn - IbiXn + \\ & IcrRn - IciXn = 120 \end{aligned}$$

Imaginario A:

$$\begin{aligned} & Iar(Xs + Xa + Xn) + IbrXn + \\ & Iai(Rs + Ra + Rn) + \\ & IbiRn + IcrXn + IciRn = 0 \end{aligned}$$

Para la fase B se sabe que:

$$Vs(120^\circ) = -60 + j103,9$$

Y se obtiene:

Real B:

$$\begin{aligned} & IarRn - IaiXn + \\ & Ibr(Rs + Rb + Rn) \\ & -Ibi(Xs + Xb + Xn) + \\ & IcrRn - IciXn = -60 \end{aligned}$$

Imaginario B:

$$\begin{aligned} & IarXn + IaiRn + \\ & Ibr(Xs + Xb + Xn) + \\ & Ibi(Rs + Rb + Rn) + \\ & IcrXn + IciRn = -103,9 \end{aligned}$$

Para la fase C se sabe que:

$$Vs(240^\circ) = -60 - j103,9$$

Y se obtiene:

Real C:

$$\begin{aligned} & IarRn - IaiXn + IbrRn - IbiXn + \\ & Icr(Rs + Rc + Rn) \\ & -Ici(Xs + Xc + Xn) = -60 \end{aligned}$$

Imaginario C:

$$\begin{aligned} & IarXn + IaiRn + IbrXn + \\ & IbiRn + Icr(Xs + Xc + Xn) \\ & -Ici(Rs + Rc + Rn) = 103,9 \end{aligned}$$

Esto produce un sistema de seis ecuaciones lineales y seis incógnitas (Iar , Iai , Ibr , Ibi , Icr e Ici) que se va a resolver con el algoritmo de Gauss-Seidel.

Tabla 1: Valores de resistencia y reactancia características de las cargas (valores referenciales calculados basados en las hojas de datos de distintos dispositivos y conductores eléctricos otorgados por los fabricantes).

Descripción	Acrónimo	Valor (Ω)
Resistencia Línea	Rs	0,023
Reactancia Inductiva Línea	Xs	0,045
Resistencia Carga Fase A	Ra	0,7130
Reactancia Inductiva Carga Fase A	Xa	0,3986
Resistencia Carga Fase B	Rb	0,7457
Reactancia Inductiva Carga Fase B	Xb	0,4675
Resistencia Carga Fase C	Rc	0,7750
Reactancia Inductiva Carga Fase C	Xc	0,5510
Resistencia Neutro	Rn	0,01
Reactancia Inductiva Neutro	Xn	0,008

En la Tabla 1 se muestran los valores de resistencia y reactancia características de las cargas y de las líneas.

En la Tabla 2 se muestran las sumatorias de resistencias y reactancias para su posterior sustitución en las ecuaciones

Tabla 2: Sumatoria de Resistencias y Reactancias para sustituir los valores en las ecuaciones.

Sumatoria	Valor Ω
Rs + Ra + Rn	0,7460
Xs + Xa + Xn	0,4516
Rs + Rb + Rn	0,7787
Xs + Xb + Xn	0,5205
Rs + Rc + Rn	0,8080
Xs + Xc + Xn	0,6040

3.2. Implementación del algoritmo Gauss-Seidel

Para implementar el algoritmo Gauss-Seidel en el ejemplo anterior debemos establecer una matriz de ecuaciones cuadrada cuya diagonal principal contenga los elementos de mayor valor y que su valor sea mayor que la sumatoria del resto de los elementos de las filas. Este requisito es necesario para garantizar la convergencia del método. En las ecuaciones planteadas en el ejemplo podemos observar que esta condición se cumple para las seis ecuaciones involucradas. En la Tabla 3 podemos ver el arreglo matricial de las ecuaciones.

Tabla 3: Arreglo de Variables para la ejecución del algoritmo de Gauss-Seidel.

Matriz de Resistencias y Reactancias						Vector de Variables
$R_s + R_a + R_n$	$X_s + X_a + X_n$	R_n	X_n	R_n	X_n	I_{ar}
$X_s + X_a + X_n$	$R_s + R_a + R_n$	X_n	R_n	X_n	R_n	I_{ai}
R_n	X_n	$R_s + R_b + R_n$	$X_s + X_b + X_n$	R_n	X_n	I_{br}
X_n	R_n	$X_s + X_b + X_n$	$R_s + R_b + R_n$	X_n	R_n	I_{bi}
R_n	X_n	R_n	X_n	$R_s + R_c + R_n$	$X_s + X_c + X_n$	I_{cr}
X_n	R_n	X_n	R_n	$X_s + X_c + X_n$	$R_s + R_c + R_n$	I_{ci}

Tabla 4: Valores del experimento.

Matriz de Resistencias y Reactancias (Ω)						Vector de Variables
0,7460	0,4516	0,0100	0,0080	0,0100	0,0080	I_{ar}
0,4516	0,7460	0,0080	0,0010	0,0080	0,0100	I_{ai}
0,0100	0,0080	0,7787	0,5205	0,0100	0,0080	I_{br}
0,0080	0,0100	0,5205	0,7787	0,0080	0,0100	I_{bi}
0,0100	0,0080	0,0100	0,0080	0,8080	0,6040	I_{cr}
0,0080	0,0100	0,0080	0,0100	0,6040	0,8080	I_{ci}

En la Tabla 4 se observan los valores utilizados en el experimento de la investigación

4. Resultados y discusión

Con el algoritmo utilizado, basado en el método de Gauss-Seidel, se calcularon un total de 16 iteraciones con una tolerancia de 0,1 para el error y un criterio de convergencia que toma en cuenta el peso de la diagonal principal la cual establece como condición suficiente que el elemento ubicado sobre la diagonal principal se mayor que la suma del resto de los elementos.

En la Tabla 5 se muestran los resultados computados por el algoritmo propuesto.

Software utilizado

El algoritmo fue implementado a través de una Macro de hoja de cálculo del paquete

Tabla 5: Resultados Obtenidos aplicando el método.

Variable (corriente)	Valor (amps)
I_{ar}	256,9903421
I_{ai}	45,804253
I_{br}	25,244504
I_{bi}	339,688559
I_{cr}	286,54693
I_{ci}	180,965523

libreOffice[®] basado en el lenguaje de programación *Basic*[®].

5. Conclusiones

Con fundamento en los resultados obtenidos, se ha demostrado que el algoritmo propuesto es

Tabla 6: Relación angular existente entre los voltajes trifásicos y las corrientes trifásicas y el respectivo valor del factor de potencia.

Vx-Ix	Angulo φ	f.p
Va-Ia (Fase a)	10,11	0,77
Vb-Ib (Fase b)	25,79	0,79
Vc-Ic (Fase c)	27,71	0,84

capaz de computar las soluciones para este tipo de sistemas de ecuaciones. Debido a que a la hora de establecer un modelo para el esquema trifásico Y-Y este siempre va a arrojar un sistema de ecuaciones de 6×6 , hace que el método propuesto sea idóneo para este tipo de cálculos. Se recomienda que para otros tipos de esquemas, bien sea Y- Δ o Δ - Δ se establezca un nuevo análisis para determinar cuál es el algoritmo más adecuado.

Referencias

- [1] Qian, J. (1997). *Advanced single-stage power factor correction techniques*. Virginia: Virginia Polytechnic Institute and State University. P.p 1-2
- [2] Donald Fink, W. B. (1996). *Manual de Ingeniería Eléctrica*. México: Mc Graw Hill. Tomo 2, P. 245
- [3] República Bolivariana de Venezuela, MPP Energía Eléctrica. (10 de Junio de 2011). Resolución 75. Caracas, Distrito Capital, Venezuela: Despacho del Ministro. Art 1. P 3.
- [4] Institute of Electrical and Electronics Engineers Inc. (2000). IEEE Std. 1459-2000 Trial-Use Standard Definitions for the Measurement of Electric Power Quantities Under Sinusoidal, Nonsinusoidal, Balanced, or Unbalanced Conditions. *IEEE Standards* , Note 1, section 3.1.1.1.
- [5] Warne, D. (2000). *Electrical Engineer's Handbook*. London: Newnes. p.p 22-24
- [6] Harper, G. E. (2008). *El ABC de las Instalaciones Eléctricas Industriales*. México: Limusa. p.p 69
- [7] Chapra, S., & Canale, R. (2007). *Métodos numéricos para Ingenieros*. México: Mc Graw Hill. pp. 312-318
- [8] Perry, G. (2010). *Macros con Excel 2007*. Mexico D.F.: Mc Graw Hill. p.p 27-40