

Analysis of manufacturing system containing a mutual exclusion in the context of Petri net theory.

Mata Guelvis^{*,a}, Méndez Arnaldo^b, Cardillo Juan^c, Chacón Edgar^c

^a*Departamento de Matemáticas, Facultad de Ciencias, Universidad de los Andes, Mérida, Venezuela.*

^b*Departamento de Física y Matemáticas, Facultad de Ingeniería, Universidad Nacional Experimental Francisco de Miranda, Venezuela.*

^c*Escuela de Sistemas, Facultad de Ingeniería, Universidad de los Andes, Mérida, Venezuela.*

Abstract.-

This article includes the terminology needed in a manufacturing context, to establish some analysis techniques of discrete event systems containing a mutual exclusion. More precisely, our problem is expressed as follows: given the specifications or requirements on a system of manufacturing containing a mutual exclusion, build a Petri net which structure and initial marking guarantee it bounded, live, and reversible.

Keywords: discrete event systems; Petri nets; mutual exclusion.

Análisis de sistemas de manufactura conteniendo una exclusión mutua usando redes de Petri.

Resumen.-

Este artículo incluye la terminología necesaria en un contexto de manufactura para establecer las técnicas de análisis mas novedosas de los Sistemas de Eventos Discretos conteniendo una exclusión mutua. Mas precisamente, nuestro problema general es establecido como sigue: dadas las especificaciones o requerimientos en un Sistema de Manufactura conteniendo una exclusión mutua, construir una red de Petri cuya estructura y marcación inicial garanticen acotamiento, no bloqueo y reiniciabilidad.

Palabras clave: sistemas de eventos discretos; redes de Petri; exclusión mutua.

Recibido: Julio 2015

Aceptado: Marzo 2016

significa que un proceso ocupa el recurso) los otros procesos deben esperar por la liberación de dicho recurso.

1. Introducción

Un conflicto en un Sistema de Eventos Discreto (SED) ocurre cuando dos o más procesos están listos para ejecutar acciones diferentes que dependen directamente de la utilización de un recurso compartido. Tales acciones o eventos son llamados exclusivos mutuamente en el sentido que ellos no pueden ocurrir al mismo tiempo. De hecho, cuando uno de ellos toma lugar (lo cual

En este artículo incluiremos la terminología necesaria, en un medio ambiente de manufactura, para establecer algunos conceptos novedosos de síntesis de Redes de Petri (RP) conteniendo una Exclusión Mutua (EM). Mas precisamente, el problema general para la modelación y análisis de sistemas de manufactura usando RP, es expresado como sigue: dadas las especificaciones o requerimientos de un sistema de manufactura conteniendo una exclusión mutua, construir una RP cuya estructura y marcación inicial garanticen acotamiento, no bloqueo y reiniciabilidad.

*Autor para correspondencia

Correo-e: gmata@ula.ve (Mata Guelvis)

La organización de este artículo comienza por incluir las definiciones básicas de RP, sus propiedades y la metodología de modelación, lo cual constituye los fundamentos necesarios para nuestro problema. Luego, estableceremos la clasificación de lugares y un par de condiciones para facilitar la representación de la EM; y en consecuencia, expresar los resultados teóricos en este trabajo. Finalmente, presentaremos una aplicación.

2. Definiciones Básicas, Propiedades y Metodología de Modelación

Una Red de Petri (RP) es un cuádruple $R = (L, T, E, S)$ donde $L = \{l_1, l_2, \dots, l_n\}$ es un conjunto finito de lugares, $T = \{t_1, t_2, \dots, t_k\}$ es un conjunto finito de transiciones, $L \cap T = \emptyset$, $E : T \rightarrow L^\infty$ es una función de entrada: para cada $t \in T$, $E(t) \in L^\infty$ es llamado multiconjunto de lugares de entrada para t (L^∞ denota el multiconjunto con números de ocurrencias ilimitado); y $S : T \rightarrow L^\infty$ es una función de salida: para cada $t \in T$, $S(t) \in L^\infty$ es llamado multiconjunto de lugares de salida para t .

Ahora, para determinar el comportamiento dinámico de la red damos paso a la representación de estatus de lugares asociando a cada lugar de la red un número natural que especifica un significado preciso de la condición del lugar. Formalmente, una RP marcada es un par $M = (R, m)$, donde R es una RP y $m : L \rightarrow \mathbb{N}$, $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$, es una función de marcación (o marcación): para cada $l_i \in L$, $m(l_i) \in \mathbb{N}$ es llamado número de fichas en el lugar l_i ; la cual especifica un vector $m = (m_1, m_2, \dots, m_n)$, $n = \text{card}L$, $m_i \in \mathbb{N}$, $i = 1, 2, \dots, n$ con $m(l_i) = m_i$ [1, 2].

Las RP marcadas pueden ser representadas por multigrafos dirigidos bipartitos donde los lugares son representados por círculos y las transiciones por barras. Si un lugar l_i es un lugar de entrada para una transición t ; es decir $l_i \in E(t)$, entonces hay $|l_i, E(t)|$ (número de veces que l_i está en el multiconjunto de lugares de entrada $E(t)$) arcos dirigidos del correspondiente círculo a la correspondiente barra. Si un lugar l_j es un

lugar de salida para la transición t ; es decir, $l_j \in S(t)$, entonces hay $|l_j, S(t)|$ (número de veces que l_j está en el multiconjunto de lugares de salida $S(t)$) arcos dirigidos de la correspondiente barra al correspondiente círculo. Finalmente, las fichas son representadas por puntos en el interior del círculo y, en consecuencia, la función de marcación es representada por el número de puntos en el interior de cada círculo.

En relación al comportamiento dinámico de una RP debemos considerar que una marcación representa el estatus de cada uno de los lugares en la red. Así, ésta especifica exactamente el estado actual del sistema que establece las condiciones lógicas para la ocurrencia de eventos, luego, una vez que ocurra un evento las condiciones del sistema varían dando lugar a una nueva marcación o estado. Más precisamente, una transición $t \in T$ en una RP marcada $M = (R, m)$ es llamada habilitada si $m(l_i) \geq |l_i, E(t)|$, para todo lugar $l_i \in L$. En este caso también diremos que la transición t es habilitada por la marcación m o disparable desde m . El conjunto de transiciones habilitadas por la marcación m es dado por $\mathcal{E}(m) = \{t \in T / m(l_i) \geq |l_i, E(t)|, \forall l_i \in L\}$.

Ahora, si $t \in \mathcal{E}(m)$ entonces la marcación m' dada por $m'(l_i) = m(l_i) - |l_i, E(t)| + |l_i, S(t)|$, $i = 1, 2, \dots, n$; $n = \text{card}L$, es llamada marcación alcanzable desde m por el disparo de t . Además, si $t' \in \mathcal{E}(m')$ y esta es disparada obtenemos como antes una marcación m'' , y así sucesivamente. Por lo tanto, se obtiene una función de cambio de marcaciones, la cual puede ser extendida de manera natural; es decir, si la función de cambio de marcaciones $\delta : \mathbb{N}^n \times T \rightarrow \mathbb{N}^n$, $n = \text{card}L$, es dada por $\delta(m, t) = m'$ donde $m'(l_i) = m(l_i) - |l_i, E(t)| + |l_i, S(t)|$, $i = 1, 2, \dots, n$; entonces su extensión es la función parcial $\widehat{\delta} : \mathbb{N}^n \times T^* \rightarrow \mathbb{N}^n$, dada por $\widehat{\delta}(m, \theta) = m$ y $\widehat{\delta}(m, \sigma t) = \delta(\widehat{\delta}(m, \sigma), t)$, $m \in \mathbb{N}^n$, $t \in T$, $\sigma \in T^*$. Aquí, T^* denota el monoide libre con unidad θ : T^* es el conjunto de todas las combinaciones finitas de elementos de T . Finalmente, como $\widehat{\delta}$ es una extensión de δ no haremos distinción notacional entre ambas.

Note que la función parcial de cambio de marcaciones δ está definida en (m, t) sí, y solamente sí, $t \in \mathcal{E}(m)$.

Por su parte, en una RP marcada $M = (R, m_0)$, una marcación $m \in \mathbb{N}^n$, $n = \text{card}L$, será llamada alcanzable desde m_0 si existe una sucesión de disparos de transiciones $\sigma = t_{j_1}t_{j_2}\dots t_{j_k} \in T^*$ tal que $\delta(m_0, \sigma) = m$. Luego, el conjunto de alcanzabilidad de la RP desde la marcación m_0 es dado por $A(R, m_0) = \{m \in \mathbb{N}^n / \exists \sigma \in T^*, \delta(m_0, \sigma) = m\}$.

Ahora incluiremos algunas propiedades de RP las cuales serán útiles en un medio ambiente de manufactura.

Sea $M = (R, m_0)$ una RP marcada. Un lugar $l \in L$ es llamado k -acotado si existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $m(l) \leq k$, para todo $m \in A(R, m_0)$. Si todos los lugares en la red son k -acotados, entonces la red es llamada k -acotada o simplemente acotada. En particular, si la red es 1-acotada diremos que la red es segura. En manufactura el acotamiento implica, por ejemplo, ausencia de capacidad de desbordamiento y la seguridad determina la disponibilidad o no de un recurso simple.

Por otro lado, la red es llamada no bloqueada (viva) si para toda marcación $m \in A(R, m_0)$ y toda transición $t_i \in T$, existe una marcación $m' \in A(R, m_0)$ alcanzable desde m tal que $t_i \in \mathcal{E}(m')$. En la clase de sistemas que nos ocupa, el no bloqueo garantiza que el sistema no se estanca, lo cual implica que éste puede producir exitosamente.

Finalmente, otra propiedad de interés es la reiniciabilidad, la cual garantiza que para toda marcación $m \in A(R, m_0)$, $m_0 \in A(R, m)$. En nuestro contexto la reiniciabilidad implica el comportamiento cíclico de un sistema.

Un sistema de manufactura es un conjunto de actividades que interactúan con un conjunto de recursos para obtener un producto. Las actividades son los procesos de fabricación: maquinación, manejo de materiales y procesos de información; que son necesarios para la producción. Los recursos son el personal, las máquinas, los materiales, etc; que son necesarios para la ejecución de las actividades. Un sistema de manufactura incluye, por supuesto, un plan de proceso de producción (programa) que especifica las actividades y los recursos así como también las relaciones de precedencia entre actividades: algunas actividades

podrían ocurrir antes que otras. Adicionalmente, el programa puede especificar varios recursos para diferentes actividades y dar prioridad a alguna de ellas para la utilización de estos recursos.

La **metodología de modelación para sistemas de manufactura usando RP** es fundamentada en las interpretaciones de lugares, transiciones y fichas tal como sigue.

1. Identificar las actividades y recursos necesarios para la producción de un artículo (producto);
2. Ordenar las actividades por las relaciones de precedencia tal como lo establece el programa;
3. Para cada actividad, crear y etiquetar un lugar para representar su estatus; luego, etiquetar una transición (comienzo de actividad) creando finalmente un arco desde la transición hasta el lugar. Por último, crear una transición (completación de actividad) para incluir un arco desde el lugar a la transición. En general, la transición de Completación para una actividad será la transición de comienzo para la nueva actividad.
Una ficha en un lugar de actividad especifica que la actividad está siendo ejecutada y la ausencia de fichas en el lugar indica que la actividad no está siendo ejecutada. Múltiples fichas indicarán que la actividad está ocurriendo de manera múltiple;
4. Para cada actividad, crear y etiquetar un lugar para cada recurso que sea necesario para el comienzo de la actividad; luego, conectar todos estos lugares con la transición de comienzo de la actividad mediante arcos dirigidos desde los lugares a la transición de comienzo. Finalmente, crear un arco desde la transición de completación de la actividad a cualquier lugar de recurso que se haga disponible luego de la completación de la actividad.
Si un lugar representa un estatus de recurso, entonces una o más fichas en el lugar indican que el recurso está disponible y la ausencia de fichas indica la no disponibilidad del recurso.
5. Especificar la marcación inicial.

3. Lugares en manufactura y condiciones.

En relación a la metodología de modelación considerada en este artículo para sistemas de manufactura, hemos comentado que un lugar representa un estatus de recurso o de operación: si un lugar representa una operación, entonces una ficha en el lugar indica que la operación está siendo ejecutada, ninguna ficha en el lugar indica que la operación no está ocurriendo y múltiples fichas muestran que la operación está ocurriendo de manera múltiple. Sin embargo, cada lugar de operación debe ser seguro ya que la misma operación nunca puede ser ejecutada en la misma máquina más de una vez al mismo tiempo: una operación puede ser dividida en varias sub-operaciones; así, un lugar de operación puede ser reemplazado por una subred en un modelo RP. En lo que sigue usaremos L_o para denotar el conjunto de lugares de operaciones. Ahora, si un lugar representa un recurso entonces el número de fichas en este lugar puede ser constante: robots, máquinas, transportadores, etc; o variable: trabajos, instalaciones, etc. Por lo tanto, podemos dividir los lugares de recurso en dos clases disjuntas: L_f = conjunto de lugares de recursos cuyo número es fijo y L_v = conjunto de lugares de recursos cuyo número es variable. L_v juega un papel clave en el medio ambiente de recursos compartidos: el número inicial de fichas en cada lugar de L_v debe ser determinado de tal manera que el sistema modelado sea libre de estancamiento. Finalmente, hemos particionado el conjunto de lugares L como $L = L_o \cup L_f \cup L_v$.

Establecidas las características que definen un sistema de manufactura junto con la metodología de modelación incluida en este artículo, para ésta clase de sistemas es claro que las funciones de entrada E y salida S tienen rango en el conjunto potencia de L : para cualesquiera $l \in L$ y $t \in T$, $|l, E(t)| \leq 1$ y $|l, S(t)| \leq 1$. Por lo tanto, en lo que sigue solamente haremos referencia a ésta clase de redes.

Sea $R = (L, T, E, S)$ una RP. Un nodo en R es un lugar $l \in L$ o una transición $t \in T$. En relación al grafo de R incluiremos las definiciones siguientes. Un camino elemental en R es una sucesión de

nodos $x_1 x_2 \dots x_k$, $k \geq 1$, tal que si $k > 1$ entonces $x_i \neq x_j$, $\forall i \neq j$, $1 \leq i, j \leq k$. Notación: $c(x_1, x_k)$.

Por su parte, un circuito elemental en R es una sucesión de nodos $x_1 x_2 \dots x_k$, $k > 1$, tal que si $x_i = x_j$, $1 \leq i < j \leq k$, entonces $i = 1$ y $j = k$. Notación: $c(x_1)$.

Por otro lado, sea $L = L_o \cup L_f \cup L_v$ una partición dos a dos disjunta de L . Un O -camino entre los nodos x e y es un camino elemental $xx_1 x_2 \dots x_k y$ tal que $x_i \in L_o \cup T$, $\forall i$, $1 \leq i \leq k$; $x, y \notin L_o$. Note que, los arcos en los grafos asociados a RP contienen un nodo en T y el otro en L (grafos bipartitos). Así, un O -camino es una sucesión finita de arcos que expresa una sucesión finita de actividades u operaciones. En particular, si un O -camino comienza y finaliza con transiciones y los lugares constituyendo el O -camino no tienen fichas inicialmente, entonces esto podría representar en manufactura una secuencia para algún tipo de trabajo.

Por conveniencia trataremos a $c(x_1, x_n)$ como un conjunto; por lo tanto, $x \in c(x_1, x_n)$ significa que x es un nodo sobre el camino elemental entre x_1 y x_n . En este caso escribiremos $c(x_1, x_n) = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$. También, trataremos a $c(x_1, x_n)$ como el conjunto de todos los caminos elementales entre x_1 y x_n ; análogamente, estas consideraciones son ajustadas a los circuitos $c(x_1)$. En consecuencia, si no hay caminos elementales entre x_1 y x_n escribiremos $c(x_1, x_n) = \emptyset$. Finalmente, si Y es un conjunto de nodos, entonces $c(x, Y) := \{w / \exists y \in Y, \exists c(x, y), w \in c(x, y)\}$ es el conjunto de todos los nodos sobre los caminos elementales entre x y Y .

Con la finalidad de formalizar el concepto de exclusión mutua, formulado en la próxima sección, incluiremos la definición siguiente que determina una condición para la clasificación de lugares en una estructura RP.

Condición CL. Una RP marcada $M = (R, m_0)$, $R = (L, T, E, S)$, con $L = L_o \cup L_f \cup L_v$ una partición dos a dos disjunta de L especificando los conjuntos de o -lugares, f -lugares y v -lugares, posee la condición **CL** si:

$$l' \in (L_f \cup L_v) \cap E(t_{j_i}), m_0(l') = 0,$$

$$m_0(l) = \begin{cases} 0, & \text{si } l \in L_o \\ \geq 1, & \text{si } l \in (L_f \cup L_v) \setminus \{l'\} \end{cases}$$

$$\Rightarrow t_{j_i} \notin \mathcal{E}(m), \forall m \in A(R, m_0).$$

En este caso también diremos que $L_f \cup L_v$ satisface la condición **CL**.

Uno puede notar desde la condición **CL** que ningún recurso en un lugar de $L_f \cup L_v$ puede ser transformado en un recurso en otro lugar diferente de $L_f \cup L_v$.

Como comentamos anteriormente, en un contexto de manufactura los lugares de recurso son incluidos para representar estatus de disponibilidad de máquinas, robots, materia prima, instalaciones, etc. Más aún, si dos fichas representan situaciones diferentes entonces éstas no son surtidas en un mismo lugar (posiblemente representando alguna operación). De hecho, las fichas son incluidas para representar contenidos diferentes que van a un lugar idéntico mediante una transición común; es decir, mediante sincronización. Esta sincronización podría, por ejemplo, determinar el comienzo de una operación. Por lo tanto, las fichas de cualesquiera dos o más lugares de recursos fluyen en un lugar común solamente mediante la misma transición. Este comentario motiva la condición siguiente.

Condición S. Una RP marcada $M = (R, m_0)$, $R = (L_o \cup L_f \cup L_v, T, E, S)$, posee la condición **S** si para cada par $l, l' \in L_f \cup L_v$, $l \neq l'$, $t \in T$ y O -caminos $c(l, t)$ y $c(l', t)$, si existen, se tiene que el primer encuentro (o intersección) entre los O -caminos ocurre en una transición.

Un comentario final corresponde al hecho de que la condición **S** no implica la condición **CL**; e inversamente, la condición **CL** no implica la condición **S**.

4. Exclusión Mutua en manufactura.

Una vez que el modelo RP sea satisfactorio: no bloqueado, acotado y reinicializable entonces es posible transformar las definiciones de una RP en códigos de control supervisorios para sistemas de manufactura. Por lo tanto, la modelación sistemática de un sistema es muy importante. Justamente

esta sección está direccionada hacia el problema de análisis para sistemas de manufactura con recursos compartidos por procesos independientes. Para esto, formularemos el concepto de exclusión mutua (**EM**) (Definición 1) en el contexto de RP, conforme a los trabajos de Zhou y Dicesare [3], y Mata *et al* [4], e incluiremos las condiciones bajo las cuales las RP conteniendo tal estructura son no bloqueadas, acotadas y reiniciables.

En lo que sigue, el i -ésimo proceso, $i = 1, 2, \dots, k$, será modelado por un par de transiciones (t_{a_i}, t_{b_i}) y el recurso compartido será modelado por un lugar l_E .

Definición 1 (k -EM). Sea $M = (R, m_0)$, $R = (L, T, E, S)$, $L = L_o \cup L_f \cup L_v$, una RP marcada. Una k -exclusión mutua para M (k -EM) es un par (l_E, φ) tal que:

- 1) $l_E \in L_f$, $m_0(l_E) = 1$ y $\varphi := \{(t_{a_1}, t_{b_1}), (t_{a_2}, t_{b_2}), \dots, (t_{a_k}, t_{b_k})\}$, $k \geq 1$, es un conjunto finito de pares de transiciones satisfaciendo las condiciones siguientes:
 - (1.1) $i \neq j$, $1 \leq i, j \leq k \Rightarrow t_{a_i} \neq t_{b_j}$, $t_{a_i} \neq t_{a_j}$, $t_{b_i} \neq t_{b_j}$;
 - (1.2) $t_{a_i} \neq t_{b_i}$, $1 \leq i \leq k \Rightarrow |l_E, E(t_{a_i})| = |l_E, S(t_{b_i})| = 1$, $|l_E, S(t_{a_i})| = |l_E, E(t_{b_i})| = 0$; $t_u \notin T_a \cup T_b$, $T_a = \{t_{a_i} / 1 \leq i \leq k\}$, $T_b = \{t_{b_i} / 1 \leq i \leq k\} \Rightarrow |l_E, E(t_u)| = |l_E, S(t_u)| = 0$;
 - (1.3) $1 \leq i \leq k$, $l \in L_v$, $l \in c(t_{a_i}) \Rightarrow t_{b_i} \in c(t_{a_i})$;
 - (1.4) $1 \leq i \leq k$, $c(t_{a_i}) \cap (L_f \cup L_v) = \{l_E\} \Rightarrow t_{b_i} \in c(t_{a_i})$;
 - (1.5) $1 \leq i \leq k$, $t \in T$, $t \in c(t_{a_i}, t_{b_i}) \Rightarrow t \in c(t_{a_i}, t_{b_i}) = O\text{-camino}$.
- 2) $L_f \cup L_v$ satisface las condiciones **CL** y **S**; $t \in T_b$, $t' \in T_a \Rightarrow \nexists c(t, t') = O\text{-camino}$.

Condiciones del comportamiento dinámico de una RP $M = (R, m_0)$ conteniendo una k -exclusión mutua, con una clasificación de lugares dada.

- 1') Existen una marcación m_1 y una sucesión de disparos de transiciones σ que no contiene transiciones en T_a tales que $t \in \mathcal{E}(\delta(m_1, \sigma))$, para todo $t \in T_a$ (T_a es como en (1.2) de la definición 1).

2') Para toda marcación m_1 , si t_{a_j} dispara en $m \in A(R, m_1)$ entonces para todo $t \in T$ tal que $c(t_{a_j}, t) \neq \emptyset$ y $t_{b_j} \notin c(t_{a_j}, t)$, t es permitida y para toda sucesión de disparos de transiciones σ_j que no contiene a t_{b_j} existe h_j tal que $t_{b_j} \in \mathcal{E}(\delta(m, t_{a_j}\sigma_j h_j))$; más aún, si $m(l_E) = 1$ y $t_u \in \mathcal{E}(m)$, entonces $t_u \notin T_b$ (T_b es como en (1.2) de la definición 1).

Proposición 1. Sea $M' = (R', m'_0)$ conteniendo una k -EM (l_E, φ) y satisfaciendo las condiciones del comportamiento dinámico, con $R' = (L_o \cup (L_f \cup \{l_E\}) \cup L_v, T', E', S')$. Si existe una sucesión de disparos de transiciones σ que no contiene a t_{b_i} tal que $t_{a_i}\sigma t_{b_i}$ es disparable desde $m \in A(R', m'_0)$, entonces σ no contiene a t_{a_j} , para todo j , $1 \leq j \leq k$, e i , $1 \leq i \leq k$.

Demostración:

Desde la condición 2') se sigue que el disparo de t_{a_i} remueve la única ficha en l_E ; en consecuencia, ninguna transición t tal que $|l_E, E'(t)| = 1$ es habilitada antes del disparo de la transición t_{b_i} , para todo i , $1 \leq i \leq k$. De aquí que t_{a_j} no puede disparar, para todo j , $1 \leq j \leq k$. Por lo tanto, σ no contiene a t_{a_j} para todo j , $1 \leq j \leq k$. ■

Observación 1. La proposición 1 establece que si el recurso compartido es ocupado por algún proceso, entonces éste no puede ser utilizado por ningún otro proceso hasta que dicho recurso sea liberado.

Proposición 2. Sea $M' = (R', m'_0)$ una RP marcada conteniendo una k -EM (l_E, φ) y satisfaciendo las condiciones del comportamiento dinámico, con $R' = (L_o \cup (L_f \cup \{l_E\}) \cup L_v, T', E', S')$. Entonces, l_E es un lugar seguro.

Demostración:

La condición 2') establece que ninguna transición en $T_b = \{t_{b_i} / 1 \leq i \leq k\}$ es habilitada cuando $m(l_E) = 1$; en consecuencia, $m(l_E) \leq 1$ para todo $m \in A(R', m'_0)$. Por lo tanto, l_E es un lugar seguro. ■

En lo que sigue siempre supondremos dada una RP marcada $M' = (R', m'_0)$ conteniendo una k -EM (l_E, φ) y satisfaciendo las condiciones del comportamiento dinámico, con $R' = (L_o \cup (L_f \cup \{l_E\}) \cup L_v, T', E', S')$, y una subred M de M' , $M = (R, m_0)$, $R = (L_o \cup L_f \cup L_v, T, E, S)$: $T = T'$; $l \in L_o \cup L_f \cup L_v$, $t \in T \Rightarrow |l, E(t)| = |l, E'(t)|$, $|l, S(t)| = |l, S'(t)|$; $m_0(l) = m'_0(l)$ [5].

Teorema 1. Si M es acotada (respectivamente segura), entonces M' es acotada (respectivamente segura).

Demostración:

Sea M' una RP marcada conteniendo una k -EM (l_E, φ) , satisfaciendo las condiciones del comportamiento dinámico, y $A(R', m'_0)$ el conjunto de alcanzabilidad de M' . Supongamos que $m(l_E)$ es la última componente de cualquier marcación $m \in A(R', m'_0)$ y consideremos el conjunto $Q(R', m'_0) = \{\mu / (\mu, m(l_E)) \in A(R', m'_0)\}$; es decir, los elementos μ de $Q(R', m'_0)$ poseen las mismas componentes que m excepto a $m(l_E)$.

Si $m \in A(R', m'_0)$, entonces m es alcanzable desde m'_0 por los disparos sucesivos de transiciones determinados por alguna sucesión σ ; es decir, $(\mu, m_0(l_E))$ es alcanzable desde $(m_0, 1)$ por el disparo de σ . Por lo tanto, μ es alcanzable desde m_0 por el disparo de σ . En consecuencia, $m \in A(R, m_0)$. Como $A(R, m_0)$ es acotado entonces μ es acotado, y por la proposición 2 $m(l_E)$ es seguro. Finalmente, $A(R', m'_0)$ es acotado. Por lo tanto, M' es acotada.

Análogamente se procede para el caso de la seguridad. ■

Teorema 2. Si M es no bloqueada, entonces M' es no bloqueada.

Demostración:

Sea M_k una RP marcada conteniendo una k -EM (l_E, φ_k) y satisfaciendo las condiciones del comportamiento dinámico, y $A(R_k, m'_0)$ el conjunto de alcanzabilidad de M_k . Como en la prueba del Teorema 1, supondremos que $m(l_E)$

es la última componente de toda marcación en $A(R_k, m'_0)$ y consideremos el conjunto

$$Q(R_k, m'_0) = \{\mu / (\mu, m(l_E)) \in A(R_k, m'_0)\}.$$

Por inducción sobre k .

Para $k = 1$ (esto significa que M_1 contiene una 1-**EM** (l_E, φ_1) que satisface las condiciones del comportamiento dinámico, con $\varphi_1 = \{(t_{a_1}, t_{b_1})\}$) tenemos que probar que para toda marcación $m \in A(R_1, m'_0)$, existe una sucesión de disparos de transiciones cuyo disparo habilita a t .

Sean $t \in T$ y $m \in A(R_1, m'_0)$, y supongamos que $m(l_E) = 1$, entonces $m = (\mu, 1)$. Ahora, supongamos que $m(l_E) = 0$ (esto significa que el número de disparos de t_{a_1} es uno o más que el número de disparos de t_{b_1}). Como (l_E, φ_1) es una 1-**EM**, entonces existe una sucesión de disparos de transición σ que permite a t_{b_1} .

Sea m' la marcación alcanzada por el disparo de σt_{b_1} , con $m'(l_E) = 1$. Sea $m' = (\mu, 1)$, entonces por la prueba del Teorema 1 $\mu \in A(R, m_0)$. Luego, para μ y t en M estudiaremos los dos casos posibles: $c(t_{a_1}, t) \neq \emptyset$ o $c(t_{a_1}, t) = \emptyset$.

Supongamos que $c(t_{a_1}, t) \neq \emptyset$, entonces de el no bloqueo de M se sigue que existe una sucesión σ , que no contiene a t_{a_1} en M , tal que μ' es alcanzable desde μ por el disparo de σ y t_{a_1} es habilitada por μ' . Luego, σ puede disparar en M_1 ; de donde, m'' es alcanzable desde m' por el disparo de σ , para algunas marcaciones m' y m'' en M_1 , y t_{a_1} es habilitada por m'' . Ahora, si $t_{b_1} \notin c(t_{a_1}, t)$ entonces desde la condición 2') se sigue que t es habilitada por m'' ; en otro caso, como $t_{b_1} \in c(t_{a_1}, t)$, el O -camino $c(t_{b_1}, t) = \emptyset$. En M , existe h tal que μ'' es alcanzable desde μ por el disparo de h y t es habilitada por μ'' . Así, nosotros podemos reordenar a h de manera que cada disparo de t_{a_1} sea seguido por t_{b_1} . Por lo tanto, h es disparable y habilita a t en M_1 . Esto prueba el primer caso.

Para el segundo caso, supongamos que $c(t_{a_1}, t) = \emptyset$.

Desde el no bloqueo de M se sigue que existe σ tal que μ' es alcanzable desde μ por el disparo de σ y t es habilitada por μ' . Ahora, se puede seleccionar a σ de manera que ésta sucesión no contenga a t_{a_1} . Por lo tanto, σ es disparable en M_1 y habilita a t . Esto completa la prueba cuando $k = 1$.

Supongamos que para $k \leq n$ las conclusiones son verdaderas (Hipótesis de Inducción).

Sea $(l_E, \varphi_{n+1}) = (l_E, \varphi_n \cup (t_a, t_b))$ una $(n+1)$ -**EM** satisfaciendo las condiciones del comportamiento dinámico.

Queremos probar que t es habilitada, $\forall t \in T$, $m \in A(R_{n+1}, m'_0)$.

Hay ciertamente dos posibilidades:

- (1) $m \in A(R_n, m'_0)$;
- (2) $m = (\mu, m(l_E)) \notin A(R_n, m'_0) \Rightarrow (\mu, 1) \in A(R_n, m'_0)$.

Por la hipótesis de inducción, existe σ en M_n tal que t es habilitada por la marcación alcanzada desde m por el disparo de σ , o t es habilitada por la marcación alcanzada desde $(\mu, 1)$ por el disparo de σ .

En relación a (1), hay tres subcasos:

- (1.1) Si σ no contiene a t_a ni a t_b , así como también ningún camino elemental entre t_a y t_b entonces σ es disparable en M_{n+1} . Por lo tanto, la marcación alcanzable por el disparo de σ en m también habilita a t en M_{n+1} .
- (1.2) Si $m(l_E) = 1$ y σ contiene una o más veces a t_a , entonces necesitamos probar que existe σ' tal que la marcación alcanzada por el disparo de σ' en m habilita a t en M_{n+1} .

Como (l_E, φ_{n+1}) es una $(n+1)$ -**EM** satisfaciendo las condiciones del comportamiento dinámico, entonces σ puede ser ordenada de una de las dos maneras siguientes, sin cambiar la marcación resultante:

$\sigma_1 t_a w_1 t_b \sigma_2 t_a w_2 t_b \dots t_a w_l t_b \sigma_{l+1}$, $l \geq 1$ ó $\sigma_1 t_a w_1 t_b \sigma_2 t_a w_2 t_b \dots \sigma_l t_a w_l$, $l \geq 1$, donde w_i y σ_i no contiene a t_a ni a t_b , y σ_i no contiene transiciones en $c(t_a, t_b)$.

Consideremos la primera forma:

$\sigma_1 t_a w_1 t_b \sigma_2 t_a w_2 t_b \dots t_a w_l t_b \sigma_{l+1}$, $l \geq 1$.

Por la proposición 2, aplicada a la RP marcada M_n conteniendo una n -**EM** satisfaciendo las condiciones del comportamiento dinámico, tenemos que σ_i contiene a lo sumo un elemento en $T_a = \{t_{a_i} / 1 \leq i \leq n\}$, digamos t_{a_j} , seguido por la transición t_{b_j} . Si existe, por ejemplo, $t_{a_j} h_i t_{b_j}$ en σ_i entonces $t_{a_j} h_i t_{b_j}$ puede ser aplicado en M_{n+1} , donde

h_i no contiene transiciones en T_a , $\forall i, 1 \leq i \leq l + 1$. Por lo tanto, sin pérdida de generalidad, supongamos que para $1 \leq i \leq l$, $\sigma_i = t_{a_j} h_i$ y $w_i = \gamma_i t_{b_j} e_i$ existe $\varsigma_i = \sigma_i t_{a_j} w_i t_{b_j} = t_{a_j} h_i t_{a_j} \gamma_i t_{b_j} e_i t_{b_j}$ en σ tal que ς_i no puede disparar en M_{n+1} . Probaremos que $\varsigma'_i = t_{a_j} h_i \gamma_i t_{b_j} t_{a_j} e_i t_{b_j}$ puede disparar en M_{n+1} y que la marcación resultante del disparo es la misma que la producida por el disparo de ς_i en M_n .

Afirmación: ς'_i es disparable en M_n . En efecto, si ς'_i no es disparable en M_n , entonces existe una transición, digamos t' , en $\gamma_i t_{b_j}$ cuyo disparo necesita del disparo de las transiciones t_{a_j} y t_a . Esto podría ser verdadero en M_{n+1} ; sin embargo, como (l_E, φ_{n+1}) es una $(n+1)$ -EM satisfaciendo las condiciones del comportamiento dinámico $\varphi_{n+1} = \varphi_n \cup \{(t_a, t_b)\}$ entonces se excluye la existencia de t' . Esto es una contradicción. Por lo tanto, ς'_i es disparable en M_n .

Ahora, $\forall l \in L, \eta \in A(R_n, m'_0)$, el número de fichas en l en la marcación resultante del disparo de ς'_i en η es igual al número de fichas en l , en la marcación resultante del disparo de ς_i en η . En efecto, de acuerdo a la regla de disparos, en una RP marcada tenemos que $\forall l \in L$ y $t, t' \in T$, si tt' y $t't$ son disparables en $\tau \in A(R_n, m'_0)$, entonces el número de fichas en l en la marcación resultante del disparo de $t't$ en τ es igual a $\tau(l) - |l, E(t)| + |l, S(t)| - |l, E(t')| + |l, S(t')|$. Así, el número de fichas en l en las marcaciones resultantes de los disparos de tt' y $t't$ en τ son iguales.

Ahora, como ς'_i y ς_i son disparables y contienen las mismas transiciones, entonces la conclusión es verdadera. Análogamente, se puede mostrar que para todo $l \in L$, el número de fichas en l en las marcaciones resultantes de los disparos de $t_a h_i t_{a_j} \gamma_i t_{b_j} e_i t_{b_j}$ y $t_a h_i \gamma_i t_{b_j} t_{a_j} e_i t_{b_j}$ en m son iguales. Finalmente, usando la técnica anterior σ puede ser transformada en σ' , la cual puede disparar; así, t es habilitada por M_{n+1} .

Consideremos la segunda forma:

$$\sigma_1 t_a w_1 t_b \sigma_2 t_a w_2 t_b \dots \sigma_l t_a w_l, l \geq 1.$$

Usando la misma técnica anterior, σ' puede ser obtenida desde σ y así t es habilitada por

la marcación alcanzada por el disparo de σ' en m . Luego, t es habilitada por M_{n+1} .

- (1.3) Si $m(l_E) = 0$ y σ contiene tanto a t_a como a transiciones sobre los caminos entre t_a y t_b , una o varias veces; entonces se puede probar análogamente que existe σ' tal que la marcación alcanzada por el disparo de σ' en m habilita a t en M_{n+1} .

En relación a la posibilidad (2), se puede construir una prueba análoga a la prueba de la posibilidad (1). Por lo tanto, M_{n+1} es no bloqueada. ■

Teorema 3. Si M es reinicializable, entonces M' es reinicializable.

Demostración:

La prueba es análoga a la del Teorema 2 y es también realizada por inducción sobre k .

Para toda $m \in A(R_{n+1}, m'_0)$, queremos probar que existe σ en M_{n+1} tal que m'_0 es alcanzable desde m por el disparo de σ . Como $m \in A(R_n, m'_0)$ o $(\mu, 1) \in A(R_n, m'_0)$, entonces existe σ en M_n tal que m'_0 es alcanzable desde m por el disparo de σ o m'_0 es alcanzable desde $(\mu, 1)$ por el disparo de σ . Finalmente, usando un razonamiento análogo al de la prueba de el no bloqueo de M_{n+1} obtenemos la conclusión del teorema. ■

5. Aplicación.

Consideremos un sistema de ensamblaje constituido por dos estaciones de trabajos E_1 y E_2 , y por dos robots R_1 y R_2 (ver Figura 1).

Las especificaciones del sistema son dadas a continuación.

1. Cuando la estación de trabajo E_1 está lista para ejecutar la tarea de ensamblaje, ésta primeramente requiere la utilización del robot R_1 , que es adquirido por E_1 siempre que esté disponible. También, cuando E_2 está lista para ejecutar una tarea, ésta primeramente requiere la utilización de R_2 , que es adquirido por E_2 siempre que esté disponible.

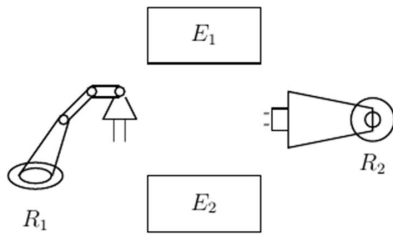


Figura 1: Ilustración de un sistema de ensamblaje con dos robots y dos estaciones de trabajos.

2. Después que la estación de trabajo E_i adquiere R_i ésta requiere la utilización del robot R_j , $i \neq j$, y lo adquiere si está disponible.
3. Cuando alguna estación de trabajo comienza una tarea de ensamblaje, ésta no puede ser interrumpida hasta su completación.
4. Cuando alguna estación de trabajo completa una tarea de ensamblaje, ésta libera ambos robots.

Usando la metodología de modelación para armar el diseño RP, tal como fue establecida en el apartado 2, tenemos que:

1. Las actividades son los procesos de adquisición de los robots R_1 y R_2 , y ensamblajes por parte de las estaciones de trabajos E_1 y E_2 .
2. El orden de las actividades es dado en la tabla siguiente:

Tabla 1: Orden de las actividades en un Sistema de Ensamblaje.

E_1	E_2
Adquiriendo R_1	Adquiriendo R_2
Adquiriendo R_2	Adquiriendo R_1
Ensamblando	Ensamblando

3. En relación al orden de las actividades correspondientes a la estación de trabajo E_1 , tal como fue establecido en 2, son creados respectivamente los lugares l_2 , l_3 y l_4 . La Figura 2 muestra esta sucesión de actividades

junto con sus transiciones de comienzos y completaciones: t_1 representa el comienzo de adquisición de R_1 por E_1 , t_2 es el comienzo de adquisición de R_2 por E_1 , t_3 representa el comienzo de ensamblaje en E_1 y t_4 modela la completación de ensamblaje en E_1 . Análogamente se procede para la sucesión de actividades correspondiente a E_2 .

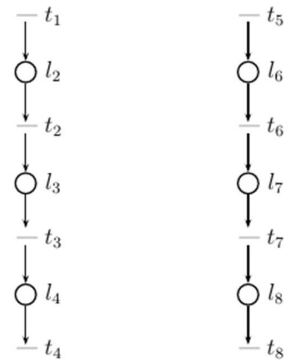


Figura 2: Dos fragmentos de una RP modelando las sucesivas actividades de un sistema de ensamblaje.

4. Para la actividad l_2 es necesario $l_1 :=$ la solicitud de R_1 por E_1 ; así como también $l_9 :=$ la disponibilidad de R_1 . Luego, creamos un arco desde cada uno de estos lugares a la transición t_1 . Después que R_1 es adquirido por E_1 , la nueva operación es adquirir R_2 para lo cual es necesario $l_{10} :=$ disponibilidad de R_2 . Así, creamos un arco desde l_{10} a t_2 . Ahora, una vez que R_2 es adquirido, E_1 comienza la tarea de ensamblaje (esto es modelado por el arco desde l_3 a t_3 y el arco desde t_3 a l_4 tal como es mostrado en la Figura 2). Después de la tarea de ensamblaje los dos robots son liberados. Esto es representado por el par de arcos de salidas desde t_4 a l_9 y l_{10} . Finalmente, creamos un arco desde t_4 a l_1 para representar requerimientos repetidos. Análogamente modelamos la estructura correspondiente a E_2 (ver Figura 3).
5. La marcación inicial es $m_0 = (1, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 1, 1)$. m_0 indica que inicialmente hay dos solicitudes desde las estaciones de trabajos E_1 y E_2 , y los robots R_1 y R_2 están disponibles.

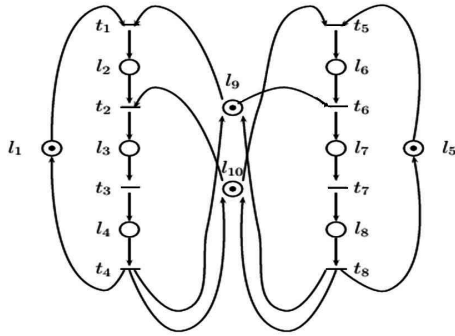


Figura 3: Una RP marcada representando un sistema de ensamblaje.

Para finalizar, todas las transiciones y lugares son dadas en la siguiente tabla

Tabla 2: Lugares y transiciones.

Lugares
$l_1 = E_1$ solicita R_1
$l_2 = E_1$ adquiere R_1
$l_3 = E_1$ adquiere R_2
$l_4 =$ ensamblando en E_1
$l_5 = E_2$ solicita R_2
$l_6 = E_2$ adquiere R_2
$l_7 = E_2$ adquiere R_1
$l_8 =$ ensamblando en E_2
$l_9 =$ disponibilidad de R_1
$l_{10} =$ disponibilidad de R_2
Transiciones
$t_1 =$ comienzo de adquisición de R_1 por E_1
$t_2 =$ comienzo de adquisición de R_2 por E_1
$t_3 =$ comienzo de ensamblaje en E_1
$t_4 =$ completación de ensamblaje en E_1
$t_5 =$ comienzo de adquisición de R_2 por E_2
$t_6 =$ comienzo de adquisición de R_1 por E_2
$t_7 =$ comienzo de ensamblaje en E_2
$t_8 =$ completación de ensamblaje en E_2

En relación a la RP marcada ilustrada en la Figura 3, consideremos los pares $(l_9, \{(t_1, t_4), (t_6, t_8)\})$ y $(l_{10}, \{(t_2, t_4), (t_5, t_8)\})$.

Ninguno de estos pares determinan una estructura de exclusión mutal para la red satisfaciendo las condiciones del comportamiento dinámico. En efecto, falla la condición 2'). Por ejemplo, con $(l_9, \{(t_1, t_4), (t_6, t_8)\})$ las transiciones t_1 y t_5 son permitidas en $m'_0 = (1, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 1, 1)$, pero

una vez que t_1 dispara t_3 no puede disparar. De hecho, los disparos sucesivos de t_1 y t_5 o de t_5 y t_1 conducen a la marcación $(0, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0)$, la cual determina un estancamiento en el sistema.

Consideremos la red dada en la Figura 4. Aquí es tomado en cuenta únicamente el robot R_1 . Se puede verificar sin dificultad que $(l_9, \{(t_1, t_4), (t_6, t_8)\})$ es una 2-EM para esta red M que satisface las condiciones del comportamiento dinámico. Ahora bien, como fue mencionado anteriormente, si $(l_{10}, \{(t_2, t_4), (t_5, t_8)\})$ es añadida adecuadamente a la especificación del sistema entonces ella no determina una 2-EM satisfaciendo las condiciones del comportamiento dinámico. Por lo tanto, la especificación del sistema es incorrecta para un diseño de red sin estancamiento. Sea la nueva especificación: La estación de trabajo E_1 solicita ambos robots al mismo tiempo.

Entonces, la RP marcada M' ilustrada en la Figura 5 captura esta nueva especificación.

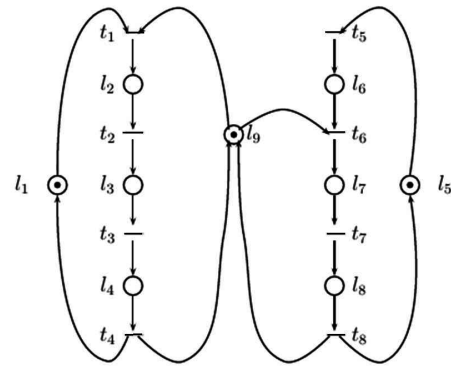


Figura 4: Una subred M de la RP marcada dada en la Figura 3.

Para la RP marcada M' dada en la Figura 5, sea la clasificación $L_o = \{l_2, l_3, l_4, l_6, l_7, l_8\}$, $L_f = \{l_1, l_5, l_9, l_{10}\}$ y $L_v = \emptyset$.

$(l_{10}, \{(t_1, t_4), (t_5, t_8)\})$ es una 2-EM para M' satisfaciendo las condiciones del comportamiento dinámico. En efecto, las condiciones 1) y 2) de la definición 1 son claras. Por otro lado, la condición 1') es satisfecha tomando m'_0 : aquí t_1 y t_5 son permitidas. Finalmente, como $L_v = \emptyset$ entonces basta considerar únicamente a m'_0 . De hecho, si t_1 dispara entonces $t_2 t_3 t_4$ es la única sucesión disparable;

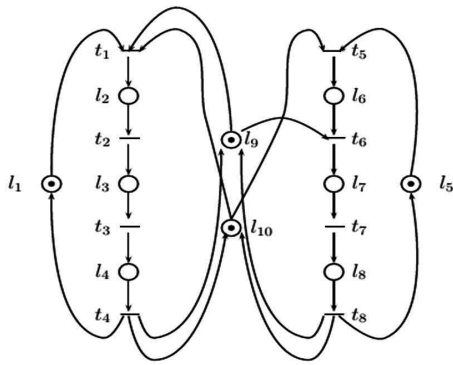


Figura 5: Una RP marcada M' representando un sistema de ensamblaje constituido por dos estaciones de trabajos y dos robots.

asimismo, si t_5 dispara entonces $t_6 t_7 t_8$ es la única sucesión disparable. Luego, la condición 2') se satisface. Por lo tanto, $(l_{10}, \{(t_1, t_4), (t_5, t_8)\})$ es una 2-EM para M' , la cual satisface las condiciones del comportamiento dinámico de la RP dada conteniendo dicha 2-EM.

Para concluir, usando las técnicas convencionales de análisis correspondiente a la RP marcada M dada en la Figura 4 tenemos que M es segura, no bloqueada y reinicializable. Así, como M es una subred de la RP marcada M' dada en la Figura 5, entonces desde los Teoremas 1, 2 y 3 sigue que la RP M' conteniendo la 2-EM $(l_{10}, \{(t_1, t_4), (t_5, t_8)\})$ que satisface las condiciones del comportamiento dinámico es segura, no bloqueada y reinicializable.

6. Conclusión.

Los resultados incluidos aquí, junto con la metodología para el diseño de redes de Petri en un medio ambiente de manufactura con recursos compartidos, permiten la detección de estancamiento durante el proceso de modelación. Esto es crucial desde el punto de vista de costo del diseño, sobre todo cuando el sistema es muy complicado. Justamente, uno de los principales objetivos de nuestro análisis es desarrollar métodos formales para sintetizar una red de Petri que garantice el cumplimiento de un conjunto dado de especificaciones o requerimientos y preserve algunas propiedades cualitativas. En este sentido, los argumentos teóricos presentados en este artículo

son muy útiles y permiten el manejo de sistemas complejos.

Agradecimiento.

Se hace especial agradecimiento al CDCHTA, ULA-Mérida por el financiamiento parcial de los proyectos de códigos: I-1442-15-02-ED y I-1441-15-02-ED, y al proyecto Eco-Nord: Automatización de Sistemas de Producción con supervisión autónoma y coordinación distribuida utilizando enfoque holónico N 201000302.

Referencias

- [1] James Lyle Peterson. *Petri Net Theory and the Modeling of Systems*. Prentice Hall PTR, Upper Saddle River, NJ, USA, 1981.
- [2] Tadao Murata. Petri nets: Properties, analysis and applications. *Proceedings of the IEEE*, 77(4):541–580, 1989.
- [3] MengChu Zhou and Frank DiCesare. Parallel and sequential mutual exclusions for Petri net modeling of manufacturing systems with shared resources. *Robotics and Automation, IEEE Transactions on*, 7(4):515–527, 1991.
- [4] Guelvis Mata, Arnaldo Méndez, Juan José Cardillo Albarrán y Edgar Alfonso Chacón Ramírez. Modelación de exclusión mutua de sistemas de eventos discretos con redes de Petri. *Ciencia e Ingeniería*, 36(2):111–120, 2015.
- [5] MengChu Zhou and Frank Dicesare. A Petri net design method for automated manufacturing systems with shared resources. In *Robotics and Automation, 1990. Proceedings., 1990 IEEE International Conference on*, pages 526–531. IEEE, 1990.