

Radar imaging basics

A. J. Zozaya^{*,**,a}, F. Carrera^b, R. Bolaños^c

^a*Investigador Prometeo, Instituto Espacial Ecuatoriano / Escuela Politécnica Nacional*

^b*Escuela Politécnica Nacional*

^c*Instituto Espacial Ecuatoriano*

Abstract.-

In most specialized literature in synthetic aperture radar the image formation is addressed from the viewpoint of signal theory. An interesting exception can be found in the book of SULLIVAN [1], where the radar image is presented from a physical viewpoint. In this article the basics of imaging radar are revisited from the point of view of field theory based on the work of this author. Two errors committed by him in his book are corrected.

Keywords: synthetic aperture radars; radar imaging; reflectance; backscatterer coefficient; reflectivity; point-spread Function

Fundamentos de la imagen de radar

Resumen.-

En la mayoría de la literatura especializada en radares de apertura sintética abordan la formación de la imagen SAR desde el punto de vista de la teoría de señal. Una excepción de esta regla puede leerse en el libro de SULLIVAN [1], donde la imagen de radar es presentada con cierto formalismo. En este artículo se revisan los fundamentos de la imagen de radar desde el punto de vista de la teoría de campo tomando como referencia el desarrollo de este autor, corrigiendo dos errores cometidos por él en su libro.

Palabras clave: radares de apertura sintética SAR; imagen de radar; reflectancia; coeficiente de retrodispersión; reflectividad; función de dispersión de punto

Recibido: octubre 2016

Aceptado: febrero 2017

1. Introducción

Existen numerosos documentos, entre libros, tesis y artículos que tratan los principios básicos de funcionamiento de un radar de apertura sintética, así como los diferentes algoritmos de enfoque de la imagen de radar. Sin embargo, es algo frustrante no poder leer en un único texto una teoría unificada de la imagen de radar de la cual puedan derivarse en forma de corolarios las distintas

estrategias de enfoque. Toca al lector interesado realizar un gran ejercicio de integración de la numerosa y variada información desperdigada en igual número de fuentes bibliográficas. Los autores más conspicuos, los «gurús» del área, tienden a enfocar sus discursos desde el punto de vista de la teoría de señales [2, 3, 4, 5, 6], sin establecer una apropiada conexión con el origen físico del problema. En el mejor de mis conocimientos la excepción de esta regla se puede leer en el libro de SULLIVAN [1]. En [1] se establecen los fundamentos de la imagen de radar desde el punto de vista de la teoría de campo, lo cual constituye un excelente punto de partida para estudiar la teoría de la imagen de radar y las subsecuentes técnicas de procesamiento de los datos crudos que el radar registra. En este

*Autor para correspondencia

**Dirección permanente: Facultad de Ingeniería, Universidad de Carabobo

Correo-e: azozaya@uc.edu.ve (A. J. Zozaya)

artículo se hace un repaso del enfoque de SULLIVAN corrigiendo dos errores cometidos por él en su libro [1]. Aunque la corrección de estos errores ha sido la principal motivación para la preparación del presente trabajo, de estos errores no se hace ninguna mención explícita en el artículo, para no quitarle continuidad al discurso. El lector interesado podrá ubicarlos mediante una lectura comparativa de ambos documentos.

La parte restante de este artículo está organizada de la siguiente manera: en la Sección 2, además de anticipar la definición de imagen de radar, se revisan los conceptos de reflectancia, coeficiente de retrodispersión, coeficiente de reflexión y reflectividad. En la Sección 3 se establecen propiamente los fundamentos de la imagen de radar. En la Sección 4 se define la función de dispersión de punto y se la estima para un sistema de radar genérico, y finalmente en la Sección 5 se concluye.

2. Definiciones preliminares

La imagen de radar es un mapa 2D (o 3D) de reflectancias. La reflectancia es una figura de mérito de los objetos, en la jerga de radares denominados simplemente «blancos», que indica cuanta potencia retrodispersa dicho objeto cuando es *iluminado* por ondas electromagnéticas. La reflectancia es una función de la frecuencia, la dirección de iluminación, la polarización y de las características geométricas y constitutivas de propio blanco. La reflectancia se mide en metros cuadrados, se designa con la letra griega σ y se conoce también como sección transversal de radar (RCS, por sus siglas en inglés: Radar Cross Section). Cuando el objeto es muy grande, en comparación con la huella de la antena, cual es el caso en los radares de apertura sintética que generan imágenes de sectores de la tierra, desde un satélite o un avión, se suele medir la reflectancia mediante un parámetro denominado coeficiente de retrodispersión. El coeficiente de retrodispersión se designa con la letra griega σ° , y se define como:

$$\sigma^\circ = \frac{\bar{\sigma}}{A_0}$$

donde $\bar{\sigma} = (1/N) \sum_n^N \Delta\sigma_n$ es la media estadística de la RCS en el área A_0 iluminada por el radar.

La reflectancia es una figura de mérito del blanco que se define en la zona lejana de este, es una cantidad real y básicamente es una relación entre potencias. Existe otra figura de mérito de mayor importancia en la teoría de imágenes de radar denominada reflectividad. La reflectividad se asocia al coeficiente de reflexión $\rho(\mathbf{r}')$, donde \mathbf{r}' denota posición, de una superficie plana de separación entre dos medios de propiedades electromagnéticas distintas. La reflectividad se mide justo sobre tal superficie, es una cantidad compleja $\rho(\mathbf{r}') = |\rho(\mathbf{r}')| \exp[j\phi_\rho(\mathbf{r}')]$, y básicamente es la relación entre las amplitudes complejas de los campos eléctricos reflejado a incidente [7]. En general, es la fase $\phi_\rho(\mathbf{r}')$ de la reflectividad, que pudiendo ser bastante aleatoria, la que esparce la información de la amplitud de la reflectividad sobre un gran ancho de banda, lo cual permite obtener imágenes de radar muy precisas [8, 9]. La capacidad de un radar de apertura sintética de estimar con gran precisión la imagen de un blanco reside en su naturaleza coherente. La coherencia de un sistema de radar viene establecida, a su vez, por la disponibilidad de una fase de referencia, usualmente provista por un oscilador local muy estable. La fase del campo eléctrico retrodispersado por el blanco se extrae al demodular en cuadratura la señal de voltaje que el *hardware* del radar registra, convirtiéndola en una señal compleja. Aún demodulando la señal recibida por el radar de manera convencional, una vez en el dominio digital, la transformada de HILBERT permite recuperar la fase de la señal recibida y su conversión a compleja mediante la extracción de la señal analítica. La fase no solo es importante para la estimación propiamente de la imagen, sino que, como es bien sabido, para la aplicación de las técnicas de interferometría y con ello la elaboración de modelos de elevación digital DEM (por sus siglas en inglés *Digital Elevation Model*), o mapas 3D. De modo que la reflectividad, debidamente generalizada, es una figura de mérito superior a la reflectancia en la teoría de la imagen de radar. En el mejor de mis conocimientos, el mejor intento por relacionar la reflectividad con

el coeficiente de retrodispersión, y así con la reflectancia, es de SULLIVAN, en su libro [1].

2.1. Relación entre σ , σ° y ρ

En una situación estándar, un radar de apertura sintética ilumina solo un sector S_0 del área total S , tal como se muestra en la Figura 1.

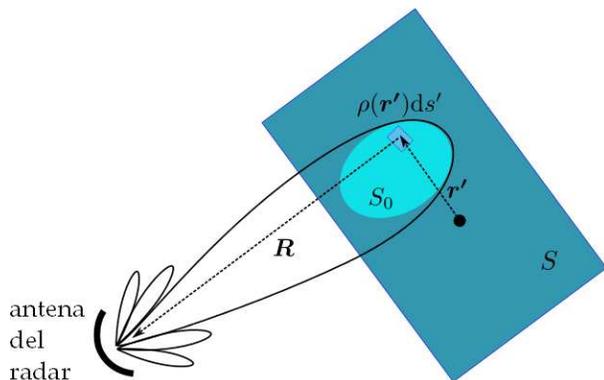


Figura 1: Radar de apertura sintética iluminando una área S_0 del área total S .

De esta forma, según la ecuación de radar, y suponiendo que el campo eléctrico incidente es uniforme en toda el área iluminada, el campo eléctrico copolar recibido en el radar vendría dado por [10]:

$$E^s = E^o \left[\frac{G^2 \lambda^2}{(4\pi)^3 \bar{R}^4 L} \right]^{\frac{1}{2}} \sigma_{S_0}^{\frac{1}{2}} \quad (1)$$

$$E^s = E^o \left[\frac{G^2 \lambda^2}{(4\pi)^3 \bar{R}^4 L} \right]^{\frac{1}{2}} \left(\int_{S_0} \sigma^\circ(r') ds' \right)^{\frac{1}{2}} \quad (2)$$

donde E^s es el campo retrodispersado recibido en los terminales de la antena receptora, E^o es el campo eléctrico transmitido medido en la entrada de la antena transmisora, $1/L$ las pérdidas en los dispositivos electrónicos y la atmósfera, G la ganancia directiva de la antena en el modo de transmisión, $\lambda^2 G/4\pi$ el área efectiva de la antena en modo de recepción, \bar{R} es la distancia promedio del sector S_0 al radar, $1/(4\pi \bar{R}^2)^2$ las pérdidas de espacio libre, y σ_{S_0} la RCS del área S_0 del blanco.

Si el coeficiente de reflexión se generaliza de forma que $\rho = \rho(r')$ pase a ser una suerte de densidad de reflectividad por unidad de superficie,

de tal modo que cada punto iluminado del blanco retrodispersa una fracción del campo incidente por $\rho(r') ds'$ sin que medien, antes de la llegada del eco correspondiente a la antena, ulteriores reflexiones, ni se produzca cambio alguno de la polarización del campo. Y asimismo, las zonas no iluminadas del blanco, así como sus puntos interiores, se caracterizan por $\rho(r') = 0$, y siempre y cuando toda S se encuentre en la zona lejana del radar, se podrá escribir [10]:

$$E^s = E^o \left[\frac{G^2 \lambda^2}{(4\pi)^3 \bar{R}^4 L} \right]^{\frac{1}{2}} \left[\int_{S_0} \rho(r') e^{j2\kappa \cdot r'} ds' \right] e^{-j2\kappa r} \quad (3)$$

donde r' es el vector que va desde el centroide de S a un punto genérico sobre S_0 y r es el vector que desde el centroide de S al radar, tal que $R = r - r'$, y

$$\left| \int_{S_0} \rho(r') e^{j2\kappa r'} ds' \right| = \sigma_{S_0}^{\frac{1}{2}} \quad (4)$$

esto es: el módulo de la integral entre corchetes de la Ecuación (3) es la definición generalizada de la $\sqrt{\text{RCS}}$ del área S_0 iluminada.

Evidentemente, el coeficiente de reflexión $\rho(r')$ generalizado, junto a la integral $\int_{S_0} \rho(r') e^{j2\kappa \cdot r'} ds'$, ambos complejos, contienen mucha más información que los parámetros σ° y σ , respectivamente, ambos reales.

3. La imagen de radar

Previamente habíamos adelantado que la imagen de radar es un mapa 2D (o 3D) de reflectancias. De manera más precisa, la imagen de radar es propiamente la función de reflectividad $\rho(r')$ del objeto. En general, de $\rho(r')$ solo puede obtenerse una estimación $\hat{\rho}(r')$. La función $\hat{\rho}(r')$ es conocida como estimación de la imagen compleja, y su magnitud $|\hat{\rho}(r')|$ se conoce como imagen estimada [9].

A partir de la Ecuación (3) se comprende que la estimación de la reflectividad es un problema de inversión, esto es: toca invertir el campo eléctrico retrodispersado por el blanco, convertido en voltaje por el *hardware* del radar, y transformarlo

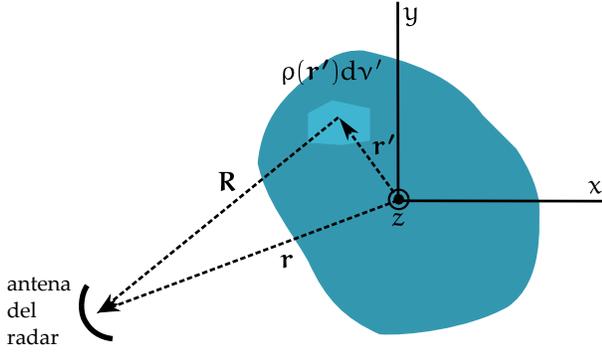


Figura 2: Blanco de extensión (tamaño) mayor a la huella de la antena.

en una estimación de la imagen. La clave de este problema está contenida en la propia Ecuación (3), la cual analizaremos de seguido a partir de su versión más general. Para ello utilizaremos como referencia un blanco genérico volumétrico como el que se muestra en la Figura 2. Un punto \mathbf{r}' sobre dicho blanco, iluminado por el radar, retrodispersa un eco diferencial por a:

$$dE^s = E^o A \rho(\mathbf{r}') dv' e^{-j2\kappa \cdot \mathbf{R}} \quad (5)$$

donde $\rho(\mathbf{r}') dv'$ es el coeficiente de reflexión del punto ubicado en $\mathbf{r}' = x' \hat{x} + y' \hat{y} + z' \hat{z}$ del blanco, medido desde el centroide de este, \mathbf{R} es el vector que va desde el punto \mathbf{r}' considerado del blanco a la antena del radar, $\kappa = \frac{\omega}{c} \hat{k}$ es el vector de onda local del punto definido en la dirección de retrodispersión: $\hat{k} = \hat{R}$, $2\kappa \cdot \mathbf{R}$ es la fase acumulada por el campo en su viaje de ida y vuelta, y A es una constante que toma en cuenta las pérdidas y ganancias del sistema según la ecuación de radar que vale [10]:

$$A = \sqrt{\frac{G^2 \lambda^2}{(4\pi)^3 R^4 L}}$$

De esta forma, aplicando el principio de superposición, el eco total producido por el blanco viene dado por:

$$E^s = \int A \rho(\mathbf{r}') e^{-j2\kappa \cdot \mathbf{R}} dv' \quad (6)$$

donde se ha asumido $E^o = 1$.

La Ecuación (6), aplicando la siguiente aproximación de zona lejana para el vector \mathbf{R} dentro de

la fase [7]:

$$\begin{aligned} \mathbf{R} &= |\mathbf{r} - \mathbf{r}'| \hat{R} \\ &\approx |\mathbf{r} - \mathbf{r}'| \hat{r} \\ &\approx (r^2 + r'^2 - 2\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}')^{\frac{1}{2}} \hat{r} \\ &\approx (r^2 - 2\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}')^{\frac{1}{2}} \hat{r} \\ &\approx r \left(1 - \frac{2\hat{r} \cdot \mathbf{r}'}{r} \right)^{\frac{1}{2}} \hat{r} \\ &\approx (r - \hat{r} \cdot \mathbf{r}') \hat{r} \end{aligned}$$

donde \hat{r} es un vector unitario que apunta hacia el radar desde el centroide del blanco, y para la amplitud $R \approx r$, asume la forma:

$$E^s = A \left(\int \rho(\mathbf{r}') e^{j2\kappa \cdot \mathbf{r}'} dv' \right) e^{-j2\kappa \cdot \mathbf{r}} \quad (7)$$

donde queda claro que el vector de onda κ apunta en la dirección de \hat{r} .

En la composición de la Ecuación (7), como ya se ha apuntado previamente, se supone que cada punto iluminado del blanco retrodispersa una fracción del campo incidente por a $\rho(\mathbf{r}') dv'$ sin que medien, antes de la llegada del eco correspondiente a la antena, posteriores reflexiones, ni se produzca cambio alguno de la polarización del campo. Asimismo, las zonas no iluminadas del blanco, así como sus puntos interiores, se caracterizan por $\rho(\mathbf{r}') = 0$.

La aproximación de zona lejana permite descomponer la onda esférica reflejada desde el punto \mathbf{r}' hacia el radar, en el producto de una onda esférica que parte de \mathbf{r}' hacia el origen $e^{j2\kappa \cdot \mathbf{r}'}$, y de otra que parte del centroide hacia el radar $e^{-j2\kappa \cdot \mathbf{r}}$:

$$e^{-j2\kappa \cdot \mathbf{R}} \approx e^{j2\kappa \cdot \mathbf{r}'} e^{-j2\kappa \cdot \mathbf{r}}$$

La integración en la Ecuación (7) es una suerte de agregación en el centroide de las respuestas reflectivas individuales de los puntos iluminados del blanco, desde donde se irradia un eco resultante global hacia el radar. Desprendiéndonos de los términos constantes A y $e^{-j2\kappa \cdot \mathbf{r}}$, los cuales son comunes a todos los puntos del dispersor (dispersor=blanco), y reteniendo solo las amplitudes complejas, se podrá escribir:

$$E^s(\kappa) \sim \int_V \rho(\mathbf{r}') e^{j2\kappa \cdot \mathbf{r}'} dv' \quad (8)$$

donde hemos indicado de manera explícita la dependencia del campo retrodispersado del vector de onda. Recordemos que el vector de onda se correlaciona directamente con la frecuencia mediante la definición $\kappa = 2\pi f/c$, y con la dirección de iluminación del radar $\hat{\kappa} = \hat{r}$. En coordenadas Cartesianas la Ecuación (8) asume la forma:

$$E^s(\kappa) \sim \int_V \rho(x', y', z') e^{j2\kappa_x x'} e^{j2\kappa_y y'} e^{j2\kappa_z z'} dx' dy' dz' \quad (9)$$

la cual tiene, ciertamente, la apariencia de una transformada de FOURIER espacial tridimensional. Su inversión nos permitiría recuperar la función de reflectividad $\rho = \rho(x', y', z')$, o imagen del dispersor. Este proceso de inversión podrá realizarse mediante una transformación inversa de FOURIER del campo $E^s(\kappa)$ recibido por el radar:

$$\rho(x', y', z') \sim \int_{\kappa} E^s(\kappa_x, \kappa_y, \kappa_z) e^{-j2\kappa_x x'} \times \dots e^{-j2\kappa_y y'} e^{-j2\kappa_z z'} d\kappa_x d\kappa_y d\kappa_z \quad (10)$$

Ciertamente, en la práctica, el valor del campo eléctrico retrodispersado no está disponible para todos los valores de κ , sino para un subconjunto de estos. Por esta razón, solo se puede obtener una estimación $\hat{\rho}(x', y', z')$ de la imagen.

Una forma de estimar la calidad de un determinado sistema de imagen de radar, esto es: de establecer la calidad de la estimación $\hat{\rho}(x', y', z')$, consiste en analizar su función de dispersión de punto, la cual será definida a continuación de forma generalizada. En un sistema particular de imagen de radar habría que considerar, en el estudio de la función de dispersión de punto propia, además del *hardware*, el algoritmo de enfoque utilizado. Existen diferentes algoritmos de enfoque [2, 3, 6], sin embargo, su estudio está fuera del alcance de los objetivos de este artículo.

4. Función de dispersión de punto

La función de dispersión de punto es la traducción que *Google* hace de la expresión *Point-Spread Function*, abreviada PSF en inglés, la cual

se define como la función de la respuesta impulsiva del sistema de imagen de radar. O sea, si el dispersor se reduce a un blanco puntual ubicado en el origen, la estimación de la imagen que se obtiene de él, sometiendo al campo eléctrico retrodispersado E^s (blanco puntual) medido por el radar a la transformación dada por la Ecuación (10), es la función de dispersión de punto:

$$PSF = \hat{\rho}(x', y', z') \sim \int_{\text{limites}} E^s(\text{blanco puntual}) e^{-j2\kappa_x x'} \times \dots e^{-j2\kappa_y y'} e^{-j2\kappa_z z'} d\kappa_x d\kappa_y d\kappa_z \quad (11)$$

donde «limites» se refiere al conjunto de valores de $\kappa_x, \kappa_y, \kappa_z$ para los cuales el radar haya tomado registros del campo retrodispersado $E^s = E^s(\kappa_x, \kappa_y, \kappa_z)$. Es necesario recordar que en coordenadas esféricas:

$$\begin{aligned} \kappa_x &= \kappa \sin \theta \cos \phi \\ \kappa_y &= \kappa \sin \theta \sin \phi \\ \kappa_z &= \kappa \cos \theta \end{aligned}$$

donde los ángulos θ y ϕ definen la dirección del radar: $\hat{r} = \sin \theta \cos \phi \hat{x} + \sin \theta \sin \phi \hat{y} + \cos \theta \hat{z}$, y $\kappa = 2\pi f/c$. En particular, θ coincide con el ángulo de observación del radar y ϕ con el ángulo de aspecto del blanco [11]. De este modo, tanto las posiciones ocupadas por el radar, relativas al centroide del blanco, así como las frecuencias usadas por el mismo durante el registro de los ecos, definen los límites de integración en la Ecuación (11).

4.1. PSF de un sistema de radar genérico

Veamos que forma tiene la PSF de un sistema de radar genérico que ilumina un blanco bidimensional puntual ubicado sobre una superficie plana como se muestra en la Figura 3.

Para dicho caso, la integral (9) asume la forma:

$$E^s(\kappa) \sim \int_S \delta(x', y') e^{j2\kappa_x x'} e^{j2\kappa_y y'} dx' dy' \quad (12)$$

donde la superficie de integración S viene definida por la posición relativa del radar respecto del

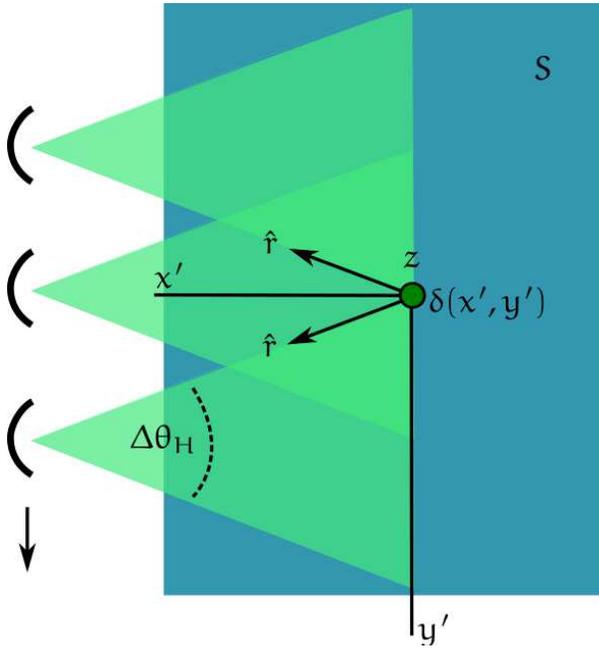


Figura 3: Dispersor puntual ubicado en el centroide de una superficie S . El radar se desplaza paralelo al eje y , casi rasante a la superficie, de forma que $\theta \sim 0$, mientras ilumina un área cuyo ancho en la dirección horizontal es de $\sim r\Delta\theta_H$.

origen de coordenadas durante el registro de los ecos, por las aperturas horizontal y vertical del haz de la antena del radar y por el tamaño de la compuerta temporal de registro de los ecos en distancia. Con todo, el resultado de dicha integral es 1:

$$E^s(\boldsymbol{\kappa}) \sim 1 \quad (13)$$

Para el problema inverso, o sea el computo de la PSF, es necesario conocer los valores de $\boldsymbol{\kappa}$ para los cuales $E^s(\boldsymbol{\kappa}) \sim 1$. Si suponemos que el radar se ha movido a lo largo del eje y , a cierta altura $z = h$ constante, el blanco puntual habrá sido iluminado solo mientras permaneció dentro de la huella de la antena, de modo que si llamamos $\Delta\theta_H$ el ancho horizontal de -3dB del haz, el ángulo ϕ habrá variado entre: $-\Delta\theta_H/2 \leq \phi \leq \Delta\theta_H/2$ (ver Figura 3). Si asumimos $\theta \sim 90^\circ$ podemos escribir:

$$\begin{aligned} \kappa_x &\approx \kappa \cos \phi \\ \kappa_y &\approx \kappa \sin \phi \\ \kappa_z &\approx 0 \end{aligned}$$

con $-\Delta\theta_H/2 \leq \phi \leq \Delta\theta_H/2$, como indicado arriba. Por otro lado, si el pulso transmitido por el radar es

del tipo *chirp*, de modo que $f \in \{f_0 - B/2, f_0 + B/2\}$ y siendo $\kappa = 2\pi f/c$, entonces $\kappa \in \{\kappa_0 - \Delta\kappa/2, \kappa_0 + \Delta\kappa/2\}$. De esta forma, la integral Ecuación (11) asume la forma:

$$PSF \sim \int_{\kappa_0 - \frac{\Delta\kappa}{2}}^{\kappa_0 + \frac{\Delta\kappa}{2}} \int_{-\frac{\Delta\theta}{2}}^{\frac{\Delta\theta}{2}} e^{-j2\kappa \cos \phi x'} e^{-j2\kappa \sin \phi y'} d(\kappa \cos \phi) d(\kappa \sin \phi) \quad (14)$$

Asumiendo ahora que el ancho de haz horizontal sea muy pequeño (antena muy directiva), podemos añadir las siguientes simplificaciones:

$$\begin{aligned} \kappa \cos \phi &\approx \kappa \\ \kappa \sin \phi &\approx \kappa \phi \end{aligned}$$

y reescribir la Ecuación (14) de la forma:

$$PSF \sim \int_{\kappa_0 - \frac{\Delta\kappa}{2}}^{\kappa_0 + \frac{\Delta\kappa}{2}} \int_{-\frac{\Delta\theta}{2}}^{\frac{\Delta\theta}{2}} e^{-j2\kappa x'} e^{-j2\kappa \phi y'} \kappa d\phi d\kappa \quad (15)$$

cuya solución puede seguirse en [1], pero que aquí reproducimos de seguido para darle completamente al artículo.

La integral en ϕ se resuelve obteniendo:

$$PSF \sim \int_{\kappa_0 - \frac{\Delta\kappa}{2}}^{\kappa_0 + \frac{\Delta\kappa}{2}} e^{-j2\kappa x'} \left[\frac{\sin(\kappa \Delta\theta_H y')}{\kappa y'} \right] \kappa d\kappa \quad (16)$$

$$\sim \int_{\kappa_0 - \frac{\Delta\kappa}{2}}^{\kappa_0 + \frac{\Delta\kappa}{2}} e^{-j2\kappa x'} \frac{\sin(\kappa \Delta\theta_H y')}{y'} d\kappa \quad (17)$$

$$\sim \frac{\sin(\kappa_0 \Delta\theta_H y')}{y'} \int_{\kappa_0 - \frac{\Delta\kappa}{2}}^{\kappa_0 + \frac{\Delta\kappa}{2}} e^{-j2\kappa x'} d\kappa \quad (18)$$

$$\sim \kappa_0 \Delta\theta_H \operatorname{sinc}(\kappa_0 \Delta\theta_H y') \int_{\kappa_0 - \frac{\Delta\kappa}{2}}^{\kappa_0 + \frac{\Delta\kappa}{2}} e^{-j2\kappa x'} d\kappa \quad (19)$$

donde se ha asumido, en el argumento del seno, que $\Delta\kappa \ll \kappa_0$ y por tanto $\kappa \approx \kappa_0$. La integral en κ se

resuelve definiendo una nueva variable $\kappa' = \kappa - \kappa_0$, de la forma:

$$PSF \sim \kappa_0 \Delta\theta_H \operatorname{sinc}(\kappa_0 \Delta\theta_H y') e^{-j2\kappa_0 x'} \int_{-\frac{\Delta\kappa}{2}}^{\frac{\Delta\kappa}{2}} e^{-j2\kappa' x'} d\kappa' \quad (20)$$

$$\sim \kappa_0 \Delta\theta_H \operatorname{sinc}(\kappa_0 \Delta\theta_H y') e^{-j2\kappa_0 x'} \left[\frac{\sin(\Delta\kappa x')}{x'} \right] \quad (21)$$

$$\sim \kappa_0 \Delta\theta_H \operatorname{sinc}(\kappa_0 \Delta\theta_H y') \Delta\kappa \operatorname{sinc}(\Delta\kappa x') e^{-j2\kappa_0 x'} \quad (22)$$

En la Figura 4 se muestra una representación tridimensional de $\hat{\rho}(x', y')$ según la Ecuación (22).

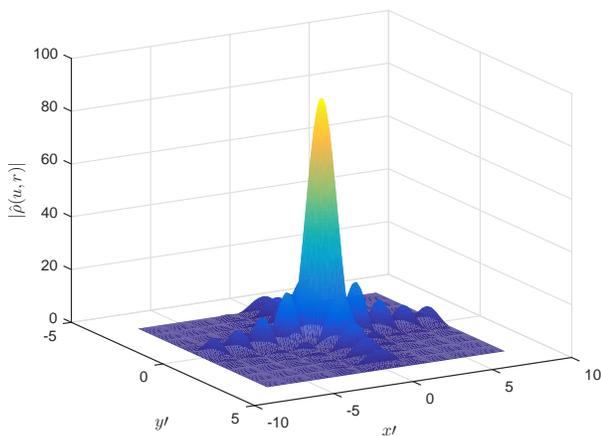


Figura 4: Representación tridimensional de la PSF $|\hat{\rho}(x', y')|$ del radar

La solución expresada por la Ecuación (22), con forma de una función sinc bidimensional, podía anticiparse debido al efecto de enventanado que realiza el radar. En la dirección acimutal, eje y' , el blanco es observado durante una ventana de ancho $\Delta\theta_H$, mientras que en la dirección del eje x' , donde se miden las distancias, la ventana queda establecida por el ancho de banda de la señal *chirp*. Los primeros cruces por cero de la PSF de la Figura 4 quedan determinados de la manera que se describe a continuación. En la dirección acimutal, o eje y' , el primer cruce por cero ocurre

en correspondencia de

$$\kappa_0 \Delta\theta_H y' = \pi \quad (23)$$

$$\frac{2\pi}{\lambda_0} \Delta\theta_H y' = \pi \quad (24)$$

$$y' = \frac{\lambda_0}{\Delta\theta_H} \quad (25)$$

En la dirección de las distancias, o eje x' , el primer cruce por cero ocurre en correspondencia de

$$\Delta\kappa x' = \pi \quad (26)$$

$$\frac{2\pi B}{c} x' = \pi \quad (27)$$

$$x' = \frac{c}{2B} \quad (28)$$

Estos valores de cruce por cero, $y' = \frac{\lambda_0}{\Delta\theta_H}$ y $x' = \frac{c}{2B}$, representan la resoluciones del sistema de imagen de radar en acimut y en distancia, respectivamente. Tales valores coinciden con las resoluciones estimadas de un sistema SAR genérico ampliamente reportadas en la literatura.

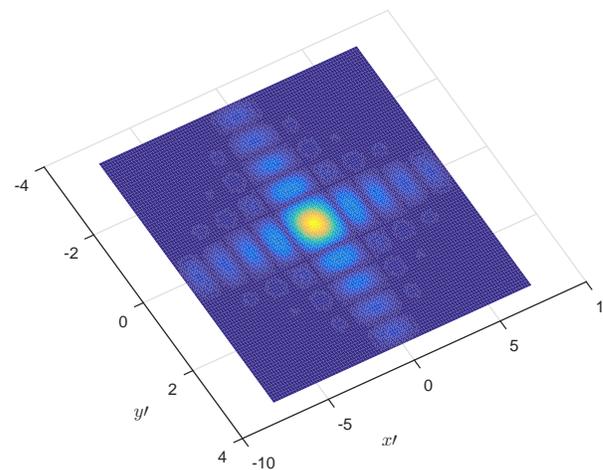


Figura 5: Imagen estimada $|\hat{\rho}(x', y')|$ del blanco puntual $\delta(x')\delta(y')$.

Finalmente, en la Figura 5 se muestra la imagen estimada $\hat{\rho}(x', y')$ del blanco puntual ubicado en el origen.

5. Conclusión

En este artículo se han revisado los fundamentos de la imagen de radar desde el punto de vista de la

teoría de campos. Dicha revisión se ha inspirado en el trabajo de SULLIVAN presentado en su libro [1]. En este trabajo, sin haberlos identificado de manera explícita, se han corregido dos errores cometidos en [1]. Dicha rectificación ha justificado la preparación de este documento. Finalmente, se ha calculado la función de dispersión de punto de un radar genérico siguiendo el formalismo descrito, y se ha obtenido una resolución equivalente a la convencionalmente estimada para los radares de apertura sintética.

Agradecimientos

El presente trabajo fue patrocinado por el Proyecto Prometeo de la Secretaría de Educación Superior, Ciencia, Tecnología e Innovación de la República del Ecuador.

Referencias

- [1] Roger J. Sullivan. *Radar Foundations for Imaging and Advanced Concepts*. SciTech Publishing Inc., 2004.
- [2] Mehrdad Soumekh. *Synthetic Aperture Radar. Signal Processing with MATLAB Algorithms*. John Wiley & Sons, Inc., 1999.
- [3] I. G. Cumming, Y. L. Neo, and F. H. Wong. Interpretations of the omega-k algorithm and comparisons with other algorithms. *Geoscience and Remote Sensing Symposium. IGARSS '03. Proceedings. IEEE International*, 2003.
- [4] Ian G. Cumming and Frank H. Wong. *Digital processing of synthetic aperture radar data, algorithm and implementation*. Artech House, 2005.
- [5] Richard Bamber. A comparison of range-doppler and wavenumber domain sar focusing algorithms. *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing. Vol. 30. No. 4*, 1992.
- [6] BU-Chin Wang. *Digital signal processing techniques and applications in radar image processing*. John Wiley & Sons, Inc., 2008.
- [7] A. J. Zozaya. *Apuntes de Teoría Electromagnética*. 2016.
- [8] IEEE, editor. *Image Reconstruction from Frequency-Offset Fourier Data*, volume 72. IEEE, IEEE, June 1984.
- [9] David W. Hawkins. *Synthetic Aperture Imaging Algorithms: with application to wide bandwidth sonar*. PhD thesis, Electrical and Electronic Engineering at the University of Canterbury, Christchurch, New Zealand, 1996.
- [10] A. J. Zozaya. Electromagnetic interaction models for the characterization of targets in sar scenes:

preliminary literature review. *Revista Ingeniería UC*, 22:26–63, 2015.

- [11] ESA. *Geometry Glossary, ASAR Handbook*.