

# Study of the mathematical equation of the heart rate on the base of the viscous damped oscillator

Aleida Cantor Rudas\*

*Departamento de Física, Facultad de Ingeniería, Universidad de Carabobo, Valencia, Venezuela*

---

## Abstract.-

To establish the mathematical relationship of the heart rate and a viscous dampened oscillator, we proceeded to compare a cardiac cycle represented by a succession of waves in the ECG record of 30 people before and after the exposure to the radiation of colored light bulbs and the solution of the differential equation of second order and grade one of a spring mass system with viscous damping linked to a resistive force provide at its speed. In a non-probabilistic sample, three records or typical cases of the population were selected at random to identify the P wave, the QRS wave or complex, the T wave and U with the graph of the solution of a viscous damped oscillator, through the enunciation of Newton's law. Consequently, the analysis of this oscillator provides information regarding similar phenomena, such as the heart rate. In conclusion, a mechanical system and a biological system present analogies in their behavior, which is described through a mathematical equation that allows to relate the variables that intervene in the phenomenon under study.

**Keywords:** cardiac cycle; heart rate; oscillator; cushioned; viscous.

## Estudio de la ecuación matemática de la frecuencia cardiaca en base del oscilador amortiguado viscoso

### Resumen.-

Para establecer la relación matemática de la frecuencia cardiaca y un oscilador amortiguado viscoso se procedió a comparar un ciclo cardiaco representado por una sucesión de ondas en el registro del ECG de 30 personas antes y después de la exposición a la radiación de bombillos de colores y la solución de la ecuación diferencial de segundo orden y grado uno de un sistema masa muelle con amortiguamiento viscoso vinculado a una fuerza resistente proporcional a su velocidad. En una muestra no probabilística, se seleccionaron al azar tres registros o casos típicos de la población para identificar la onda P, la onda o complejo QRS, la onda T y U con la gráfica de la solución de un oscilador amortiguado viscoso, a través del enunciado de la ley de Newton. En consecuencia, el análisis de este oscilador proporciona información respecto a los fenómenos semejantes, como es el caso de la frecuencia cardiaca. En conclusión, un sistema mecánico y un sistema biológico presentan analogías en su comportamiento, el cual es descrito a través de una ecuación matemática que permite relacionar las variables que intervienen en el fenómeno en estudio.

**Palabras clave:** ciclo cardiaco; frecuencia cardiaca; oscilador; amortiguado; viscoso.

Recibido: octubre 2017

Aceptado: diciembre 2017

### 1. Introducción

La capacidad de oscilación de los sistemas físicos puede ser de diferentes maneras y la característica común de estos fenómenos es su periodicidad. Existe un esquema de movimiento o desplazamiento que se repite y que permite

---

\*Autor para correspondencia

Correo-e: aleidacant@hotmail.com (Aleida Cantor Rudas)

analizar el comportamiento de las oscilaciones de estos sistemas, desde una perspectiva dinámica que considera el movimiento vibratorio como un problema físico en base a cálculos matemáticos.

### 1.1. Oscilaciones del ritmo cardiaco

Actualmente se habla de la inteligencia del corazón, cuando en una época prevaleció el concepto de la inteligencia asociada al cerebro. Mediante investigaciones realizadas en el Instituto HeartMath (Matemáticas del corazón), muestran que la información perteneciente al estado emocional de una persona, también es comunicada vía campo electromagnético del corazón. Los patrones rítmicos de los latidos del corazón cambian significativamente mientras experimenta diferentes emociones. A su vez, estos cambios en el patrón del ritmo cardiaco crean los cambios correspondientes en la estructura del campo electromagnético irradiado por el corazón, que puede ser medido mediante una técnica llamada análisis espectral. El siempre presente campo rítmico del corazón tiene una influencia poderosa en los procesos del cuerpo por lo que el ritmo cardiaco exhibe una ola con patrones de forma sinusoidal como la figura 1:

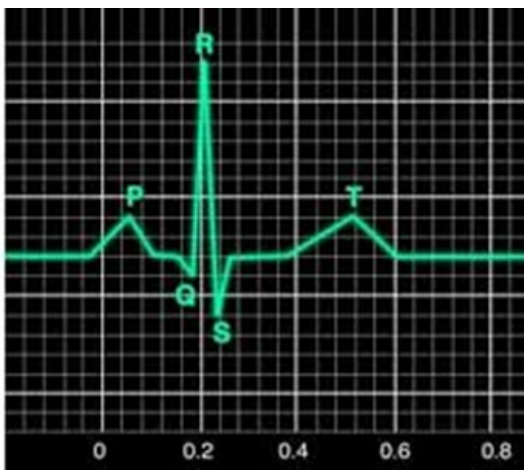


Figura 1: Ritmo Cardiaco.

El corazón contiene miocitos especializados que forman el sistema de conducción eléctrica. Los impulsos generados producen la contracción del miocardio y son los que se registran en los monitores cardíacos y el electrocardiograma.

El primer paso para la interpretación de este importante estudio es conocer la información que nos da el complejo PQRST:

- La onda P representa la propagación del impulso desde el nodo sinoauricular (SA) y a través de las aurículas.
- El intervalo PR representa el tiempo necesario para que el impulso se propague sobre la aurícula y a través del nodo auriculoventricular (AV), donde el impulso se detiene por un periodo corto de tiempo.
- El complejo QRS representa la propagación del impulso a través de los ventrículos estimulado eléctricamente (despolarización ventricular).
- La onda T indica repolarización ventricular, la cantidad de tiempo que transcurre desde el final de una contracción de los ventrículos hasta el comienzo del período de reposo.

Si un impulso viaja a través del sistema de conducción, y es iniciado desde el nodo SA, en la forma descrita anteriormente, el ritmo se describe como un ritmo sinusoidal [1, 2, 3].

### 1.2. Oscilaciones amortiguadas viscosas

Las oscilaciones de un sistema real desaparecen con el tiempo, debido a sus características disipativas mediante las cuales se pierde energía mecánica de vibración. Describir matemáticamente estas vibraciones mediante una señal sinusoidal de amplitud constante, donde la ecuación de las vibraciones debe incluir estas fuerzas disipativas. El estudio se enfoca en el sistema masa – muelle, donde el amortiguamiento se simuló introduciendo un indicador a la masa móvil en un cilindro lleno de líquido. El enunciado de la ley de Newton para la masa móvil, incluyendo la fuerza resistente que ejerce el fluido [4]:

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -kx - bv \quad (1)$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{b}{m} \frac{dx}{dt} + \frac{k}{m} x = 0$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \gamma \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0$$

$$x = Ae^{-\gamma t/2} \cos(\omega t + \alpha) \quad (2)$$

La ecuación (2), su gráfica se muestra en la Figura 2.

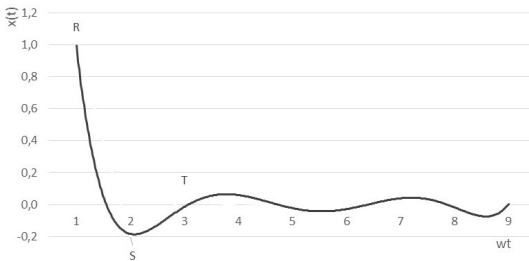


Figura 2: Oscilador Amortiguado Viscoso.

## 2. Analogía de una oscilación amortiguada viscosa y el ritmo cardiaco

Un ciclo cardiaco es representado por una sucesión de ondas en el trazado del ECG: la onda P, la onda o complejo QRS y la onda T.

La parte del trazado que es una sección corta descendente conectada con una sección alta ascendente. La misma se denomina onda o complejo QRS. Esta parte indica que los ventrículos (las dos cavidades inferiores del corazón) se están estimulando eléctricamente (despolarizando) para bombear la sangre hacia fuera. En la Figura 3, se visualiza la sección descendente RS y la onda T del ritmo cardiaco, que coincide con la trayectoria del oscilador amortiguado viscoso.

Por analogía se puede decir que, matemáticamente, el ciclo cardiaco o ritmo cardiaco, se representa con la ecuación (1) y la solución de esta por la ecuación (2).

### 2.1. Metodología

Para validar la suposición del comportamiento de las gráficas, se utilizó el electrocardiograma (ECG o EKG) que midió la actividad eléctrica del corazón, se utilizaron estos datos experimentales. El ECG, genera una señal eléctrica (Fig1), se transmite a través del sistema de conducción cardiaco,

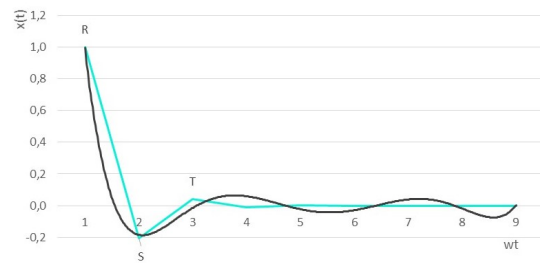


Figura 3: Superposición de Oscilaciones.

como primer componente es el nodo sinusal, cuya característica principal es el automatismo de sus células, que generan una estimulación eléctrica a una frecuencia de 60 a 70 impulsos por minuto, iniciando el estímulo eléctrico y controlando el ritmo cardiaco. El procedimiento consistió en interpretar las señales cardiacas registradas en el electrocardiograma antes y después de la exposición a la radiación con bombillos de colores en zonas del cuerpo humano para cada color. La radiación de colores se aplicó a 30 personas o sujetos de estudio en condiciones normales de salud, como criterio de inclusión, con edades comprendidas entre 18 y 46 años, de ambos sexos [5].

## 3. Discusión de resultados

La investigación, cumplió con las disposiciones del Código de Ética para la Vida [6] en cuanto al consentimiento informado de la radiación. Se seleccionaron al azar tres personas de los 30 que se tomó como una muestra no probabilística de tipo accidental, porque el tamaño de la población es indefinido y estos estudios no probabilísticos permiten un mayor control de las variables, originando una característica de la población y no del tamaño de la muestra como significativo por lo que se seleccionó unidades muestrales típicas de la población [7] para el registro de las señales del electrocardiograma, y corroborar la hipótesis de la analogía de la ecuación matemática entre el ritmo cardiaco y el oscilador amortiguado viscoso son solo válidas para la muestra del estudio. En la Tabla 1 se muestran los resultados.

Se graficó los datos de la personas seleccionadas sin radiación, obteniéndose las Figuras 4, 5 y 6.

Tabla 1: Registros del electrocardiograma antes y después de la radiación.

color	Edad 18 años		Edad 23 años		Edad 46 años	
	P (pulso/min)	P <sub>R</sub> (pulso/min)	P (pulso/min)	P <sub>R</sub> (pulso/min)	P (pulso/min)	P <sub>R</sub> (pulso/min)
1-violeta	65	72	64	68	66	68
2-Azul	64	71	66	71	64	71
3-verde	66	73	66	73	65	74
4-amarillo	65	83	64	85	65	85
5-naranja	66	85	65	85	65	84
6-rojo	64	89	66	88	63	86

P: pulso.  
P<sub>R</sub>: pulso con radiación.

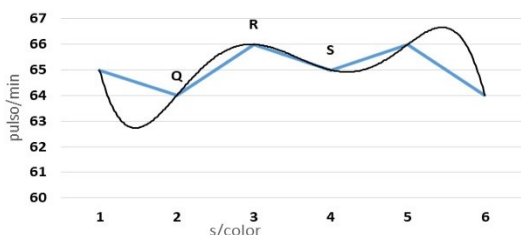


Figura 4: Ritmo cardiaco y oscilador amortiguado viscoso sin radiación edad 18 años.

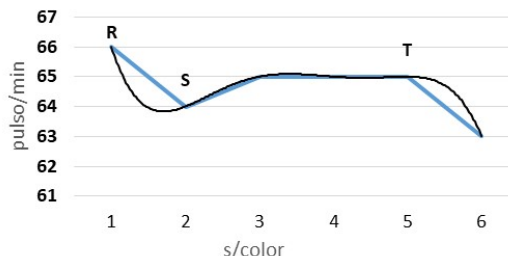


Figura 6: Ritmo cardiaco y oscilador amortiguado viscoso sin radiación edad 46 años.

Se observa que los datos de las gráficas oscilan en el mismo entorno por lo que, son semejantes. En cuanto al complejo QRS que corresponde a la despolarización ventricular (descarga eléctrica) que tiene una duración de menos de 0,12 s y puede presentar diversas morfologías. En este caso se aproxima a la Figura 1 y tiene una tendencia a la Figura 2.

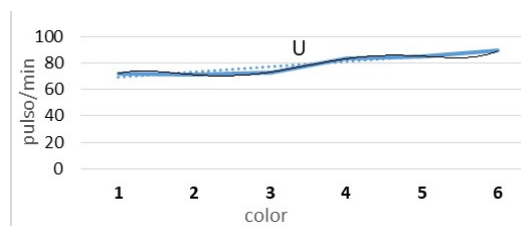


Figura 7: Ritmo cardiaco y oscilador amortiguado viscoso con radiación edad 18 años.

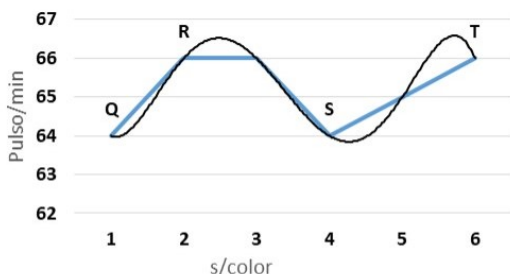


Figura 5: Ritmo cardiaco y oscilador amortiguado viscoso sin radiación edad 23 años.

De igual modo, se graficó los datos de las personas seleccionadas después de la radiación, obteniéndose las Figuras 7, 8 y 9. En la gráfica de la Figura 2 del oscilador amortiguado, se observa que se asemejan en el envejecimiento de

la amplitud de la misma al final de la trayectoria con las trayectorias mostradas en las Figuras 7, 8 y 9, en las cuales la amplitud es más atenuada. Esto se puede observar con más detalle en la Figura 3, al final de su trayectoria para ambos, tanto del amortiguador como del ciclo cardiaco.

Con referencia a lo anterior, se observa que los datos de las gráficas de las Figuras 7, 8 y 9 oscilan en el mismo entorno por lo que, son semejantes a la onda U identificada en la Figura 10. La onda U es de origen incierto, puede indicar la repolarización del tabique interventricular (recarga eléctrica), o una repolarización lenta de los ventrículos en un tiempo de 0,1 a 0,2 s.

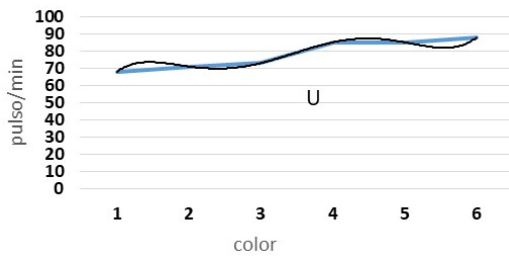


Figura 8: Ritmo cardiaco y Oscilador Amortiguado Viscoso con radiación edad 23 años.

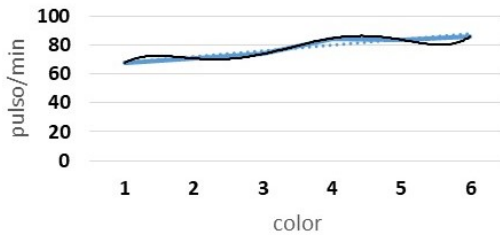


Figura 9: Ritmo cardiaco y oscilador amortiguado viscoso con radiación edad 46 años.

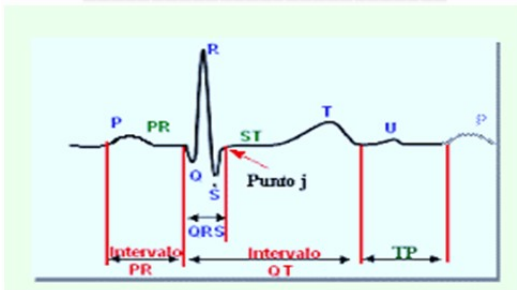


Figura 10: Onda U.

#### 4. Conclusiones

En ingeniería es común el análisis de las oscilaciones en los sistemas físicos reales donde se encuentran presentes fuerzas no conservativas que reducen con el tiempo la amplitud del movimiento definido por una ecuación matemática enfocada en el sistema masa muelle, donde el amortiguamiento se simulo introduciendo un indicador a la masa móvil en un cilindro lleno de líquido fundamentado en el enunciado de la ley de Newton para la masa móvil, que incluye una fuerza resistente que ejerce el fluido en proporcionalidad con su velocidad.

En este estudio se tomó un sistema biológico como es, las oscilaciones del ritmo cardiaco y se comparó con un sistema mecánico amortiguado,

lo que permite modelar estos sistemas a través de la ecuación matemática del oscilador amortiguado. Para los casos seleccionados sin radiación se observó que el ciclo RS y T del ciclo cardiaco en su inicio se ajustan aproximadamente con la solución de la ecuación del oscilador amortiguado, también en su inicio de la trayectoria. En caso contrario, para los mismos casos pero con radiación, se observó aproximadamente, la onda U o etapa final del ciclo cardiaco y la solución de la ecuación del oscilador.

Con la ecuación matemática del oscilador se puede ajustar comportamientos que permitan obtener beneficios a las personas con patologías en el ritmo cardiaco por lo que es necesario profundizar la investigación en estos casos especiales ya que las personas del estudio no presentaban deficiencias cardiacas declaradas. En conclusión, un sistema mecánico y un sistema biológico presentan analogías en su comportamiento, el cual es descrito a través de una ecuación matemática que permite relacionar las variables que intervienen en el fenómeno en estudio.

#### Referencias

- [1] John R. Hampton. *The ECG made easy*. Churchill Livingstone/Elsevier,, 7<sup>th</sup> edition, 2008.
- [2] Dale Dubin. *Dubin: Interpretación de ECG. Método Clásico del Dr. Dubin Para Entender los Mensajes Eléctricos del Corazón*. Cover Publishing Company, 2007.
- [3] Guillermo Franco Salazar y Lilliam Rojas Zuaznábar. *Manual de electrocardiografía y electroencefalografía*. Manual Moderno, México, 2007.
- [4] A. P. French. *Vibraciones y ondas*. Reverté, 1980.
- [5] Aleida Cantor Rudas. Nota técnica: Frecuencia cardiaca después de la exposición a longitudes de onda del espectro visible en áreas del cuerpo humano. *Revista Ingeniería UC*, 23(2):216–222, 2016.
- [6] Ministerio del Poder Popular para la Ciencia, Tecnología e Industrias Intermedias. Código de ética para la vida, 2016. Consulta: 25 de marzo 2016 <https://goo.gl/McyAUH>.
- [7] Roberto Hernández Sampieri, María del Pilar Baptista Lucio y Carlos Fernández Collado. *Metodología de la investigación*. McGraw-Hill, sexta edición, 2006.