Evaluation of uncertainty in deterministic models

Aleida Cantor Rudas*

Departamento de Física, Facultad de Ingeniería, Universidad de Carabobo, Valencia, Venezuela

Abstract.-

When an experimental assembly is carried out, the objectives establish the search for the functional relationship between the variables from a set of experimental points, the registration of these variables is carried out with instruments that are indispensable for the development of a mathematical model suitable for the explanation of the phenomenon under study. There are experimental assemblies that can be studied by determining the relationship between the output and the physical magnitudes that describe it and others, which require a probabilistic mathematical model for its study, where the phenomenon needs to be repeated experimentally under equal conditions. Therefore, a procedure that assesses the appropriate expression of the uncertainty and the error of the measurement of a physical phenomenon that establishes its reliability is contextualized since every measurement will always be accompanied by uncertainty. This article presents the evaluation of uncertainty in a process of measuring variables directly and indirectly according to the mathematical model presented.

Keywords: mathematical models; deterministic models; probabilities; statistics; uncertainty; errors.

Evaluación de la incertidumbre en modelos determinísticos

Resumen.-

Cuando se realiza un montaje experimental, los objetivos establecen la búsqueda de la relación funcional entre las variables a partir de un conjunto de puntos experimentales, el registro de estas variables se efectúa con instrumentos que son indispensables para el desarrollo de un modelo matemático adecuado para la explicación del fenómeno en estudio. Existen montajes experimentales que pueden ser estudiados determinando la relación entre la salida y las magnitudes físicas que lo describen y otros, que requieren de un modelo matemático probabilístico para su estudio, donde el fenómeno necesita repetirse experimentalmente en igualdad de condiciones. Por lo tanto, se contextualiza un procedimiento que evalúe la expresión apropiada de la incertidumbre y el error de la medición de un fenómeno físico que establezca su confiabilidad ya que toda medición siempre va a estar acompañada de incertidumbre. En este artículo se presenta la evaluación de la incertidumbre en un proceso de medición de variables de manera directa e indirecta según el modelo matemático que se presente.

Palabras clave: modelos matemáticos; modelos determinísticos; probabilidades; estadística; incertidumbre; errores.

Recibido: octubre 2017
Aceptado: diciembre 2017

1. Introducción

El modelo matemático de la medición, que transforma la serie de observaciones repetidas en resultado de medida es de importancia crítica ya que, además de las observaciones, incluye generalmente varias magnitudes de influencia, no conocidas con exactitud. Este conocimiento imperfecto contribuye a la incertidumbre del resultado de medida, lo mismo que lo hacen las variaciones encontradas en las observaciones repetidas y cualquier otra incertidumbre asociada al propio modelo matemático [1, 2].

*Autor para correspondencia

Correo-e: aleidacant@hotmail.com (Aleida Cantor Rudas)

Cuando el resultado de una medición se obtiene a partir de los valores de otras magnitudes, la incertidumbre típica de este resultado se denomina incertidumbre típica combinada, y se representa por u_c. Se trata de la desviación típica estimada asociada al resultado, y es igual a la raíz cuadrada positiva de la varianza combinada, obtenida a partir de todas las varianzas y covarianzas [1, 2].

Para satisfacer las necesidades de determinadas aplicaciones industriales y comerciales, así como las exigencias de los campos de la salud y la seguridad, la incertidumbre típica combinada u_c se multiplica por un factor de cobertura k, obteniéndose la denominada incertidumbre expandida U. El propósito de esta incertidumbre expandida U es proporcionar un intervalo en torno al resultado de medida, que pueda contener una gran parte de la distribución de valores que razonablemente podrían ser atribuidos a la medición. La elección del factor k, habitualmente comprendido entre los valores 2 y 3, se fundamenta en la probabilidad o nivel de confianza requerido para el intervalo[1].

El modelo matemático debe revisarse cuando los datos obtenidos, incluyendo aquí los resultados de determinaciones independientes de la misma medición, demuestren que el modelo es incompleto. Con el fin de decidir si un sistema de medida funciona correctamente, a menudo se compara la variabilidad observada experimentalmente de sus valores de salida, caracterizada por su desviación típica, con la desviación típica esperada, obtenida mediante combinación de las distintas componentes de incertidumbre que caracterizan la medición. En tales casos, solamente deben considerarse aquellas componentes que puedan contribuir a la variabilidad observada experimentalmente, de los valores de salida.

2. Proceso de estimación de la incertidumbre estándar

2.1. Modelo de medición

En un modelo determinístico, una medición Y, no se realiza de manera directa, sino que se determina a partir de otras N magnitudes, $x_{1,}x_2 \ldots x_N$ por medio de una relación funcional.

$$f : Y = f(x_{1,}x_2 \ldots x_N) \tag{1}$$

Las magnitudes de entrada, $x_{1,}x_2 \ldots .x_N$ de las que depende la magnitud de salida Y pueden ser consideradas a su vez como medidas, pudiendo depender de otras magnitudes, junto con las correcciones y factores de corrección de los efectos sistemáticos, llegándose así a una relación funcional f compleja, que podría ser difícil de escribir en forma explícita. Además, la función f puede determinarse experimentalmente o existir solamente en forma de algoritmo calculable numéricamente.

También, el conjunto de magnitudes de entrada $x_{1,}x_2 \ldots .x_N$ puede clasificarse en magnitudes cuyos valores e incertidumbres se determinan directamente en el curso de la medición. Estos valores e incertidumbres pueden obtenerse, por ejemplo, a partir de una única observación, o a partir de observaciones repetidas, o por una decisión basada en la experiencia. Pueden implicar la determinación de correcciones para las lecturas de los instrumentos y correcciones debidas a las magnitudes de influencia. [2]

2.2. Magnitudes de entrada correlacionadas

El caso en que existe una relación entre dos o más magnitudes de entrada; es decir, en que son dependientes entre sí o correlacionadas, La incertidumbre típica de y, siendo y la estimación del mensurando Y; es decir, el resultado de medida, se obtiene componiendo adecuadamente las incertidumbres típicas de las estimaciones de entrada $x_1, x_2 \ldots x_N$. Esta incertidumbre típica combinada de la estimación y se nota como $u_c(y)$. La incertidumbre típica combinada $u_c(y)$ es la raíz cuadrada positiva de la varianza combinada $u_c^2(y)$, dada por:

$$\begin{aligned} {u_c}^2(y) &= \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial x_j} u(x_i, x_j) \\ &= \sum_{i=1}^{N} \left[\frac{\partial f}{\partial x_i} \right]^2 u^2(x_i) \\ &+ 2 \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^{N} \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial x_j} (u(x_i, x_j)) \end{aligned} \tag{2}$$

Donde x_i, x_j son las estimaciones de $X_{i,}$, X_j, y $u(x_i, x_j) = u(X_i, X_j)$ es la covarianza estimada asociada a $X_{i,}$, X_j. El grado de correlación entre $X_{i,}$, X_j viene dado por el coeficiente de correlación estimado [2]

$$r(i, j) = \frac{u(x_i, x_j)}{u(x_i)u(x_j)} \tag{3}$$

Cuando la no linealidad de f (ecuación (1)) resulta significativa, es necesario incluir términos de orden más elevado en el desarrollo en serie de Taylor para la expresión de $u_c^2(y)$ de la ecuación (2). Cuando la distribución de cada X_i es simétrica alrededor de su media, los términos más importantes de orden inmediatamente superior que deben ser añadidos a los términos de la ecuación (2).

3. Análisis y procedimiento de medidas directas e indirectas

Cuando en el proceso de medición se obtienen medidas directas por un instrumento, la incertidumbre queda definida por el 50 % de la apreciación y la dispersión de los datos, cuando se ha medido varias veces [3]. Las medidas indirectas están relacionadas por un modelo matemático, donde la magnitud se obtiene de otras magnitudes que se han medido varias veces de manera directa, la incertidumbre esta expresada en función de la desviación estándar experimental y la apreciación del instrumento, además de las derivadas parciales de la ecuación matemática en función de las magnitudes de medición directa.

3.1. Descripción del dispositivo experimental

Se realizara un experimento de caída libre [3], se suelta el cuerpo desde una altura H prefijada y se mide el tiempo que tarda en llegar al suelo. Las ecuaciones relacionadas con el tratamiento de los datos experimentales para calcular la aceleración de gravedad a través de la ecuación del movimiento uniformemente acelerado, como modelo matemático.

Ecuaciones relacionadas con el tratamiento de los datos experimentales. Para medir la aceleración de gravedad se empleara la ecuación del movimiento uniformemente acelerado, como modelo matemático:

$$\Delta Y = \frac{gt^2}{2} \tag{4}$$

Dónde: ΔY es el desplazamiento del cuerpo de modulo igual a la altura H, g la aceleración de gravedad y t el tiempo del movimiento. Para determinar la aceleración de gravedad de la ecuación (4).

$$g = \frac{2H}{t^2} m/s^2 \tag{5}$$

El error estadístico E_e y el error instrumental E_i se obtienen de las ecuaciones (6) y (7) [4].

$$E_e = t\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \quad \text{con} \quad t = 3 \tag{6}$$

$$E_I = \frac{A}{2} \tag{7}$$

A = apreciación.

3.2. Explicación del método que se siguió para efectuar las mediciones

Se dispone de los siguientes instrumentos, un cronometro de apreciación 0,01 s y una cinta métrica de apreciación 0,10 cm. Se determinan la altura y el tiempo, siguiendo el procedimiento para medir directamente y la ecuación (5) para hallar g como una medición indirecta. Para las mediciones directas, se determina, la media, como estadístico para el valor central y la desviación estándar, estadísticos para la dispersión de datos. Las medidas se indican en la Tabla 1 y la Figura 1 el movimiento del cuerpo.

De la Tabla 1 el criterio de rechazo de las medidas directas x_i (tiempo y altura) se indica en la expresión (8).

$$\bar{x}_i - 3\sigma < x_i < \bar{x}_i + 3\sigma \tag{8}$$

No se requiere rechazar medidas, cuando están dentro de este rango.

El valor mayor entre los errores instrumental y estadístico es el error absoluto. Se expresa el

Tabla 1: Registro de mediciones directas e indirectas.

	Tiempo (s)	Altura (m)	Gravedad (m s^2)
	2,00	19,60	9,800
	2,01	19,59	9,698
	2,02	19,61	9,612
	2,00	19,59	9,795
	2,01	19,59	9,698
	1,98	19,59	9,994
	1,97	19,60	10,101
	2,00	19,61	9,805
	2,01	19,60	9,703
	1,97	19,61	10,106
Media	2,00	19,60	9,829
σ	0,018	0,009	0,176
E_e	0,0168	0,0083	
E_i	0,005	0,005	

σ: Desviacion estandar experimental

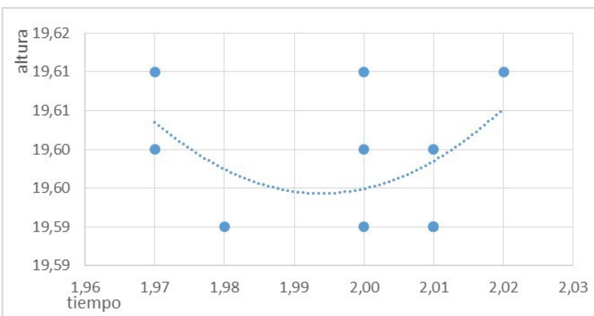

Figura 1: Movimiento del cuerpo.

Tabla 2: Expresión de las medidas directas.

Tiempo (t)	Altura (H)
(2,00 ± 0,0168)s	(19,60 ± 0,0083)m

resultado de la medida directa $\bar{x}\pm\Delta x$ en la Tabla 2.

El cálculo de la aceleración de gravedad, se obtiene a partir de la ecuación (5) la cual relaciona otras magnitudes que se miden directamente, como el tiempo y la altura. La ecuación (9) muestra el resultado.

$$\bar{g} = \frac{2\bar{H}}{\bar{t}^2} = 9,8m/s^2 \tag{9}$$

Se utilizan los valores absolutos de las derivadas, para obtener la suma de los errores y se evalúan con los valores promedio de las mediciones directas. El cálculo del error absoluto cuadrático medio, [3] la cual es una expresión más apropiada para determinar el grado de incertidumbre asociado a una medida indirecta ecuación (10) y del error relativo ecuación (11).

$$\Delta\bar{y} = \Delta\bar{g} = \sqrt{\left(\frac{\partial f \Delta x_1}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial f \Delta x_2}{\partial x_2}\right)^2} \tag{10}$$

$$\frac{\Delta g}{\bar{g}} = \frac{\frac{2\Delta H}{\bar{t}^2} + \frac{4\bar{H}}{\bar{t}^3}\Delta t}{\frac{2\bar{H}}{\bar{t}^2}} 100 = 2 \tag{11}$$

3.3. *Evaluación de la incertidumbre*

3.3.1. *Incertidumbre de mediciones directas*

A partir de la apreciación, se determina la incertidumbre asociada al instrumento de medición, tomando como criterio el 50 % de esta, Tabla 3.

Tabla 3: Incertidumbre de los instrumentos de medición directa.

Apreciación del Instrumento		Incertidumbre	
A_c	0,01 s	u_{clt}	0,01/2= 1/200s
A_H	0,01m	u_{clm}	0,u1/2=1/200m

Incertidumbre debida a la dispersión de los datos de medición directa [2]

$$u_{vt} = \frac{S_t}{\sqrt{n}} = 5{,}69 \times 10^{-3} \tag{12}$$

$$u_{vH} = \frac{S_H}{\sqrt{n}} = 2{,}84 \times 10^{-3} \tag{13}$$

3.3.2. *Incertidumbre Combinada de las mediciones directas*

Se calculan con la incertidumbre de los instrumento u_{Ii} y las generadas por la dispersión en el proceso de medición u_{vi}.

$$u_{ci} = \sqrt{(u_{Ii})^2 + (u_{vi})^2} \tag{14}$$

Aplicando la ecuación (14) al tiempo

$$u_{ct} = 7{,}7 \times 10^{-3}$$

Aplicando la ecuación (14) a la altura

$$u_{cH} = 5{,}75 \times 10^{-3}$$

3.3.3. Incertidumbre para mediciones indirectas

Calculo de las derivadas parciales de la ecuación (5), evaluadas en los valores medios de tiempo y altura, Tabla 1.

$$\frac{\partial g}{\partial H} = \frac{2}{t^2} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{\partial g}{\partial t} = \frac{4H}{t^3} = \frac{49}{5} \tag{15}$$

3.3.4. Incertidumbre total combinada

A partir de la incertidumbre combinada de las mediciones directas ecuación (14) y el calculo de las derivadas parciales de la ecuación del modelo matemático de la aceleración de gravedad ecuacion15, se obtiene la incertidumbre total combinada de la gravedad ecuación (16).

$$u_{cg} = \sqrt{u_{ct}^2\left(\frac{\partial g}{\partial t}\right)^2 + u_{cH}^2\left(\frac{\partial g}{\partial H}\right)^2} \tag{16}$$

Para el rango de confianza asociada a los datos y estimación del valor de cobertura K se considera la siguiente expresión

$$g_{max} = \bar{g} \pm KS_g$$

En la Tabla 4 se visualiza los valores de K a considerar.

Tabla 4: Evaluación del rango de confianza.

K	Nivel de confianza	$\bar{g} + KS_g$ Limite Máx.	$\bar{g} - KS_g$ Limite mín.
1	68 %	10,005	9,653
2	95 %	10,180	9,478
3	99 %	10,356	9,302

3.3.5. Incertidumbre Expandida

Con el resultado de la incertidumbre combinada de la variable indirecta y los valores de k Tabla 4, se calcula la incertidumbre expandida que se presenta en la ecuación (17).

$$U_g = Ku_{cg} \tag{17}$$

4. Múltiples magnitudes de salida, determinadas simultáneamente en la misma medición, y la correlación entre sus estimaciones

Los datos se han obtenido a partir de cinco conjuntos de observaciones, de tres magnitudes de entrada V, I y φ, se calculan los valores de R, X y Z para cada conjunto de datos de entrada, y tomar la media aritmética de los cinco valores individuales para obtener las mejores estimaciones de R, X y Z. La desviación típica experimental de cada media se calcula a partir de los cinco valores individuales, y las covarianzas estimadas de las tres medias a los cinco valores individuales que se utilizaron para el cálculo de cada media [1].

4.1. Descripción del dispositivo experimental

La resistencia R y la reactancia X de un elemento de un circuito se determinan midiendo la amplitud V de la diferencia de potencial alterna sinusoidal entre sus bornes, la amplitud de la intensidad de corriente alterna I que lo atraviesa, y el desfase φ entre la diferencia de potencial y la corriente alterna. Así, resulta que las tres magnitudes de entrada son V, I y φ, mientras que las magnitudes de salida, son las tres componentes de la impedancia R, X y Z. Como $Z^2 = R^2 + X^2$, solo hay dos magnitudes de salida independientes [1][2].

4.2. Explicación del método que se siguió para efectuar las mediciones

Se considera que se han obtenido cinco conjuntos independientes de observaciones simultáneas de las tres magnitudes de entrada V, I y φ, en condiciones análogas donde resultan los datos que se presentan en la Tabla 5:

Tabla 5: Valores de las magnitudes de entrada V, I y φ, obtenidos a partir de cinco conjuntos de observaciones simultáneas.

V(v)	I(mA)	$\varphi(rad)$
5,007	19,663	1,045 6
4,994	19,639	1,043 8
5,005	19,640	1,046 8
4,990	19,685	1,042 8
4,999	19,678	1,043 3

4.3. Ecuaciones relacionadas con el tratamiento de los datos experimentales

Las magnitudes de entrada por la ley de Ohm.

$$R = \frac{V\cos(\varphi)}{I}$$
$$X = \frac{V\,\mathrm{sen}(\varphi)}{I}$$
$$Z = \frac{V}{I} \tag{18}$$

Relación funcional de las variables, la resistencia y el voltaje. A continuación se presenta la Tabla 6 y la gráfica del fenómeno Figura 2.

Tabla 6: Datos de gráfica de la resistencia.

$v\cos(\varphi)$	I(A)
2,510	0,020
2,512	0,020
2,504	0,020
2,514	0,020
2,516	0,020

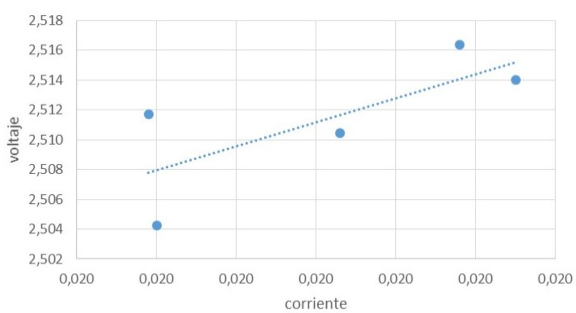

Figura 2: Gráfica del fenómeno.

4.4. Ley de Ohm

La pendiente de la recta, Figura 2 es la impedancia, pero en este caso es la parte real de esta, la resistencia, ver Tabla 7 con sus respectivos valores y correlaciones Como las medias V, I y φ han sido obtenidas a partir de observaciones simultáneas, se hallan correlacionadas, y deben tenerse en cuenta estas correlaciones en la evaluación de las incertidumbres típicas de los cálculos de R, X y Z. Los coeficientes de correlación necesarios se obtienen a partir de la ecuación (3). Los resultados

Tabla 7: Resultados.

	V	I	φ
µ	4.999	19.661	1,044 46
σ_x	0.0032	0.0095	0.00075
	VI	Vφ	Iφ
r	-0.36	0.86	-0.65

se incluyen en la Tabla 7, debiendo recordarse que $r(x_i, x_j) = r(x_j, x_i)$ y que $r(x_i, x_i) = 1$.

La desviación estándar calculada corresponde a una muestra: $\sigma_x = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

La incertidumbre típica combinada para Z en función de los coeficientes de correlación, ecuación (3):

$$u_c^2(Z) = \left[\frac{1}{\bar{I}^2}\right]^2 u^2(\bar{V}) + \left[\frac{\bar{V}}{\bar{I}^4}\right]^2 u^2(\bar{I})$$

Los resultados de los cálculos de R, X y Z según ecuación (18) y coeficientes de correlación ecuación (3) se muestran en la Tabla 8 [1].

Tabla 8: Valores de las magnitudes de salida R, X y Z.

Magnitud Ω	u_c Ω	r
R=127,732	0,071	RX=0,588
X=29,847	0,295	RZ=-0,485
Z=254,260	0,23	XZ=0,993

Si los datos de la Tabla 8, las correlaciones entre las magnitudes V, I y φ se suponen inexistentes, entonces los coeficientes de correlación observados carecen de significado y deben tomarse iguales a cero. Si se realiza esto en la Tabla 8, la ecuación (3) se reduce a una expresión equivalente a la ecuación.

$$u_c^2(y) = \sum_{i=1}^{N}\left[\frac{\partial f}{\partial x_i}\right]^2$$

5. Conclusiones

En un montaje experimental, una magnitud puede repetirse cuando su medición se realiza con un instrumento de manera directa un número de veces en igualdad de condiciones, se puede indicar el conjunto de todos los resultados posibles debido a que estos aparecen al azar en un fenómeno que utiliza un modelo determinístico que permite obtener una magnitud de manera indirecta. Este fenómeno está descrito por un modelo determinístico que lo formula por una ecuación matemática que establece un modelo matemático que permite la medición de magnitudes directas sometidas a un proceso aleatorio.

Se ha presentado el abordaje de dos sistema con variables que se encuentran sometidas a condiciones del azar, debido a un proceso de medición, aun cuando su comportamiento obedece a un modelo determinístico en un área de física como es el movimiento rectilíneo uniformemente acelerado cuya aceleración gravitatoria se calcula de manera indirecta a través de magnitudes de medición directas como el tiempo y el espacio recorrido. Otro modelo es la ley de Ohm, que relaciona magnitudes directas voltaje y corriente y la resistencia como una magnitud indirecta. Estos modelos se toman de referencia para evaluar la incertidumbre con el propósito de convertirse en un soporte técnico para el conocimiento y difusión científica en el área de mediciones en otros modelos determinísticos.

Referencias

[1] JCGM. *Evaluación de datos de medición. Guía para la expresión de la incertidumbre de medida*. Centro Español de Metrología, España, 1^a edition, 2008.

[2] Javier Miranda Martín del Campo. Evaluación de la incertidumbre en datos experimentales. México.

[3] Lilian Miliani de Souza y Zaida González de Clamens. Propuesta para la enseñanza del Laboratorio I de Física. Trabajo de Ascenso, Facultad de Ingeniería, Universidad de Carabobo, Carabobo, Venezuela, 1997.

[4] Sáez Ruiz Sifredo J. y Luis Font Ávila. *Incertidumbre de la medición: teoría y práctica*. L&S Consultores C.A., Aragua, Venezuela, 1^a edición, 2001.