

# Heterogeneous globally coupled chaotic maps systems

Argenis López<sup>a,\*</sup>, Orlando Alvarez-Llamoza<sup>b</sup>

<sup>a</sup> *Departamento de Física. Facultad Experimental de Ciencias y Tecnología. Universidad de Carabobo. Valencia, Venezuela*

<sup>b</sup> *Grupo de Investigación en Simulación, Modelado, Análisis y Accesibilidad, Universidad Católica de Cuenca, Cuenca, Ecuador*

**Abstract.-** This study is about the emergence of non-trivial collective behaviors in globally coupled chaotic maps with heterogeneous parameters. We use gaussian and uniform distributions of probability in order to introduce heterogeneity in system parameters, namely, the map parameter or local parameter and the coupling parameter. As local dynamic in the globally coupled chaotic systems we employ the logistic map and the singular map. We found that, the presence of heterogeneity unequivocally contributes to the appearance of non-trivial collective behaviors, characterized by periodic evolution of the macroscopic variables in the presence of uncorrelated local dynamics at the microscopic level. In addition, dynamic domains or cluster was observed in the logistic map. Heterogeneity in system's parameters can be related, in a sense, to the presence of diversity in the social and biological environments. Heterogeneity coexists with coherence and consensus in nature.

**Keywords:** collective behavior; globally coupled maps; heterogeneity.

## Sistemas heterogéneos de mapas caóticos acoplados globalmente

**Resumen.-** Se estudió la aparición de comportamientos colectivos no triviales en mapas caóticos acoplados globalmente con parámetros heterogéneos. Se utilizaron distribuciones gaussianas y uniformes de probabilidad para introducir la heterogeneidad en los parámetros del sistema, a saber, el parámetro del mapa o parámetro local y el parámetro de acoplamiento. Como dinámica local en los sistemas caóticos acoplados globalmente empleamos el mapa logístico y el mapa singular. La presencia de heterogeneidad contribuye inequívocamente a la aparición de comportamientos colectivos no triviales, caracterizados por la evolución periódica de las variables macroscópicas en presencia de dinámicas locales no correlacionadas a nivel microscópico. Además, en el mapa logístico se observaron dominios dinámicos o clusters. La heterogeneidad en los parámetros del sistema puede estar relacionada, en cierto sentido, con la presencia de diversidad en los entornos sociales y biológicos. La heterogeneidad coexiste con la coherencia y el consenso en la naturaleza.

**Palabras clave:** comportamiento colectivo; mapas acoplados globalmente; heterogeneidad.

Recibido: 06 de junio, 2019.

Aceptado: 18 de noviembre, 2019.

### 1. Introducción

El estudio de comportamientos colectivos no triviales en sistemas de elementos dinámicos acoplados tiene implicaciones fundamentales para la comprensión de propiedades universales en los sistemas complejos y ha sido foco de mucha atención recientemente [1]. Este fenómeno consiste en el surgimiento de orden en la evolución temporal de cantidades macroscópicas de un sistema de elementos caóticos acoplados [2]. Por ejemplo, el

campo medio del sistema puede ser periódico, al mismo tiempo que la evolución de los elementos que lo constituyen es caótica y desincronizada [3, 4]. En la mayoría de las investigaciones acerca de redes de mapas acoplados se ha asumido homogeneidad, en el sentido de que la dinámica de los elementos y las interacciones entre ellos son idénticas [5, 2]. Sin embargo, muchos sistemas de elementos son heterogéneos. En una matriz de unión Josephson, cada unidad no es idéntica. En un sistema óptico, la ganancia de cada modo depende de su número de onda. En un sistema biológico, cada unidad como una neurona o una célula es heterogénea. Por lo tanto, se estudia el comportamiento colectivo de mapas acoplado globalmente, considerando tres fuentes de heterogeneidad: en el primer caso sobre los

\*Autor para correspondencia:

Correo-e: argenis.296@gmail.com ( A. López)

parámetros de la dinámica local [6]; en el segundo caso en el parámetro de acoplamiento, esto hace que cada mapa del sistema reciba y/o procese una información diferente [7]; y por último se toman en cuenta, interacciones parciales, donde solo una fracción de los mapas del sistema recibe la influencia de la función de acoplamiento global [8].

La dinámica local de los mapas estará descrita por el mapa logístico [9], ampliamente estudiado y que pertenece a la clase de universalidad estándar de los mapas unimodales; y el mapa singular [10], que exhibe caos robusto en una región bien definida de su parámetro local.

Existen dos tipos principales de interacciones que se emplean para el estudio de la emergencia de comportamientos colectivos: la primera se basa en la suposición de que fuerzas externas existen, que causan los cambios y rigen el comportamiento de los elementos. En este caso se habla de Sistemas Forzados, es decir, existe un campo global externo que posee una dinámica propia, independiente de la dinámica de los elementos. La segunda interacción describe que las propiedades del sistema surgen debido a las interacciones locales entre los elementos, sin ningún comando externo. En este caso se habla de Sistemas Autónomos, donde existe un campo global regido por la misma dinámica de los elementos constituyentes [11]. Existen trabajos que demuestran la analogía entre sistemas autónomos globalmente acoplados y sistemas sujetos a interacciones globales externas [12].

## 2. Redes de mapas acoplados

Las redes de mapas acoplados (RMA) constituyen modelos dinámicos con espacio y tiempo discretos, pero variables locales continuas, fueron introducidos en 1984 por K. Kaneko [14], y por I. Waller y R. Kapral [15] de forma independiente.

En general las RMA pueden ser escritas en la forma que muestra la ecuación (1):

$$x_{t+1}^i = f(x_t^i) + \sum_{j \in \mathfrak{N}_i} g_j(x_t^j), \quad (1)$$

donde  $x_t^i$  es la variable que especifica el estado del elemento  $i$  ( $i = 1, 2, \dots, N$ ) de una red de  $N$  elementos en el tiempo  $t$ ,  $f(x)$  es la función no-lineal descrita por el mapa local que depende de uno o varios parámetros (llamados parámetros locales) y el último término de la ecuación (1), da razón del acoplamiento entre los elementos. En el término de acoplamiento, la sumatoria es sobre todos los sitios  $j$  en una vecindad  $\mathfrak{N}_i$  del elemento  $i$  y la función  $g_j$  es una función lineal o no lineal de las variables dinámicas.

Las dimensiones espaciales juegan un importante rol en la aplicación de las redes de mapas acoplados y en muchos problemas de la mecánica estadística. En todo caso, el presente estudio, se asume un acoplamiento global dado por la ecuación (2):

$$x_{t+1}^i = (1 - \epsilon)f(x_t^i) + \frac{\epsilon}{N} \sum_{j=1}^N f(x_t^j), \quad (2)$$

donde  $x_t$  representa el estado del elemento  $i$ -ésimo de la red en el tiempo discreto  $t$ ,  $N$  es el número de elementos de la red,  $f(x_t)$  describe la dinámica interna de cada elemento  $i$  y  $\epsilon$  es el parámetro de acoplamiento correspondiente al sistema; en el intervalo de  $[0; 1]$ .

Este tipo de modelo se puede considerar como un caso límite de un sistema con interacciones a gran escala. El concepto de espacio pierde significado y solamente las propiedades temporales se vuelven relevantes en estos sistemas. Esta característica permite descripciones más simples en cuanto al comportamiento del campo medio de la red. La interacción global se caracteriza por el campo medio del sistema, es decir, la media del estado de los mapas locales en el tiempo  $t$ , que se define según la ecuación (3):

$$\bar{x}_t = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N x_t^j. \quad (3)$$

La ecuación (2) es estrictamente representación de un acoplamiento global homogéneo, es el caso donde cada elemento que conforma la red siente la misma información, y que además todos los

elementos se conectan de la misma forma con todos los demás.

Otro caracterizador del sistema empleado para medir el grado de la sincronización es el promedio para largos períodos de tiempo  $\langle \sigma \rangle$ , después de descartar los estados transitorios, de la desviación estándar  $\sigma_t$  de los estados de los elementos del sistema acorde con la ecuación (4):

$$\sigma_t = \left[ \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N (x_t^j - \bar{x}_t)^2 \right]^{1/2} \quad (4)$$

### 2.1. Dinámica local heterogénea

Este tipo de heterogeneidad consiste en un modelo de acoplamiento cuyos mapas  $f(x_t^i)$  del sistema no presenten igual parámetro local. Para el caso del mapa logístico [9],  $x_{t+1} = f(x_t) = rx_t(1 - x_t)$ , tenemos para los  $N$  mapas del sistema una distribución uniforme de la forma mostrada en la ecuación (5),

$$f^i(x_t^i) = r(i)x_t^i(1 - x_t^i), \quad (5)$$

donde ahora existe un  $r(i)$  ( $i = 1, 2, \dots, N$ ) diferente para cada mapa. El primer cambio que se da al sistema definido por la ecuación (2), es sobre el parámetro local bajo la condición definida por la ecuación (5). De esta forma, la red con heterogeneidad en el parámetro local  $r$  del mapa logístico queda como se muestra en la ecuación (6):

$$x_{t+1}^i = (1 - \epsilon)f^i(x_t^i) + \frac{\epsilon}{N} \sum_{j=1}^N f(x_t^j), \quad (6)$$

donde  $f^i(x_t^i)$  describe la dinámica local del elemento  $i$  (ecuación (5)), y  $\epsilon$  sigue siendo el parámetro de acoplamiento para todos los elementos del sistema.

Para el mapa singular  $x_{t+1} = f(x_t) = b - |x_t|^z$ , la heterogeneidad recae en el parámetro  $b$ , así se tiene para el sistema ecuación (6),  $N$  mapas distribuidos, bajo dos tipos de distribuciones; uniforme y normal, de la forma expresada a través de la ecuación (7):

$$f^i(x_t^i) = b(i) - |x_t^i|^z, \quad (7)$$

donde  $|z| < 1$  es un exponente fijo para los mapas que describe el orden de singularidad en el origen que separa las dos ramas de la función [10, 13].

### 2.2. Acoplamiento heterogéneo

El acoplamiento heterogéneo en la red, está definido como se muestra en la ecuación (8):

$$x_{t+1}^i = (1 - \epsilon(i))f(x_t^i) + \frac{\epsilon(i)}{N} \sum_{j=1}^N f(x_t^j), \quad (8)$$

donde  $\epsilon(i)$  es el parámetro de acoplamiento correspondiente al elemento  $i$ , la variedad de este parámetro obedece a una distribución uniforme y normal.  $f(x_t^i)$  describe la dinámica interna de cada elemento, con parámetro local igual para todos los elementos.

### 2.3. Iteraciones Parciales

Se considera el sistema discreto parcialmente acoplado propuesto por Alvarez [8] según la ecuación (9):

$$x_{t+1}^i = \begin{cases} (1 - \epsilon)f(x_t^i) + \frac{\epsilon}{N} \sum_{j=1}^N f(x_t^j), & \text{si } i \in R_t, \\ f(x_t^i), & \text{si } i \notin R_t, \end{cases} \quad (9)$$

donde  $R_t$  es un subconjunto que contiene  $pN$  elementos del sistema ( $p \leq 1$ ), los cuales son elegidos aleatoriamente en cada tiempo  $t$ . Así, solamente una fracción  $p$  de los mapas recibe la función de acoplamiento en cada tiempo  $t$ , siendo el parámetro  $p$  la probabilidad de conexión de un elemento con el campo medio en un tiempo  $t$ .

## 3. Resultados

### 3.1. Heterogeneidad en el parámetro local

El sistema dado por la ecuación (6) se modela distribuyendo aleatoriamente el parámetro local,  $r(i)$  para el mapa logístico y  $b(i)$  para el singular, en intervalos determinados, para cada elemento  $i$  del sistema. Estos valores del parámetro local permanecen fijos durante toda la simulación para cada mapa. A continuación se parte de condiciones iniciales aleatorias uniformemente distribuidas de

los estados  $x_0^i$  de los  $N$  elementos del sistema, dentro de su rango del atractor, se coloca el valor de  $\epsilon$  fijo y se deja evolucionar el sistema. Luego de grandes tiempos se descartan los estados transitorios y se caracterizan las propiedades del sistema.

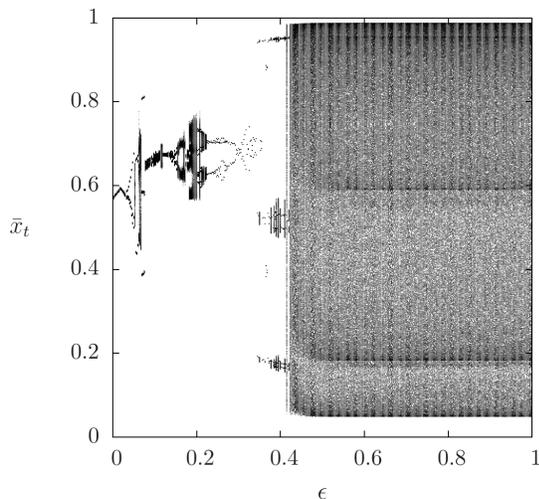


Figura 1: Diagrama de bifurcación  $\bar{x}$  vs.  $\epsilon$ , correspondiente al sistema de la ecuación (6) con dinámica local dada por el mapa logístico, parámetro  $r(i) \in [3,9; 4,0]$ , y número de elementos  $N = 10^5$ .

### 3.1.1. Parámetro local $r(i)$ heterogéneo del mapa logístico

Se elige el intervalo de distribución aleatoria uniforme cercano a  $r = 4$ , donde el mapa logístico exhibe comportamiento caótico.

En la Figura 1 se observa el diagrama de bifurcación del campo medio del sistema dado por la ecuación (3) en función del parámetro de acoplamiento  $\epsilon$ . Adicionalmente la Figura 2 muestra la convergencia a estados caóticos sincronizados a partir de  $\epsilon = 0,5$ , determinado a través de la desviación estándar media (ecuación (4)), la cual va disminuyendo hasta  $\langle \sigma \rangle = 0$  en  $\epsilon = 1$ , donde el sistema se sincroniza.

A nivel microscópico se observa un gran número de elementos cuyos estados están agrupados. La Figura 3 permite apreciar la distribución de probabilidad instantánea  $P_t(x)$  de los estados de los elementos del sistema  $x_t^i$  para dos valores del parámetro de acoplamiento  $\epsilon$ , ambos para

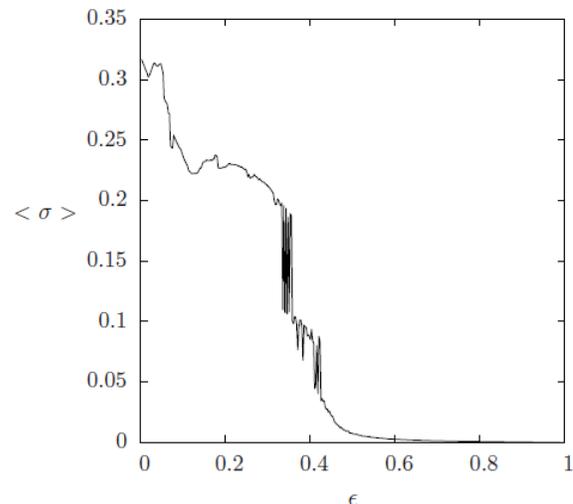
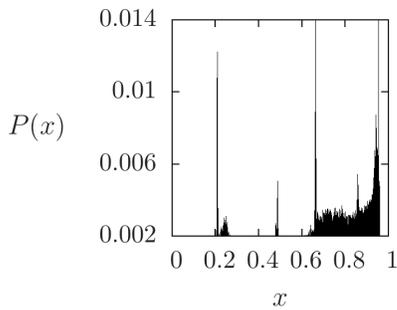


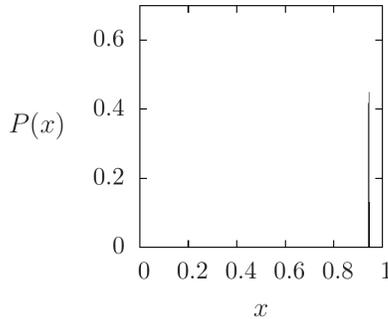
Figura 2: Desviación estándar media en función del parámetro de acoplamiento  $\epsilon$  del sistema correspondiente a la ecuación (6) con el mapa logístico,  $r(i) \in [3,9; 4,0]$ . Número de elementos  $N = 10^5$ .

un mismo tiempo  $t = 12000$ . Para  $\epsilon = 0,10$  se constata que los elementos del sistema están parcialmente ordenados, se distribuyen en el rango permitido del mapa local y se observan algunos picos en la distribución, lo que indica que ciertos elementos se agrupan en dominios dinámicos o clusters: conglomerados ordenados de elementos que comparten el mismo estado. Para  $\epsilon = 0,80$  los estados colectivos pertenecientes a los elementos tienden a un único pico, sin haber alcanzado la sincronización, como lo demuestra la Figura 2.

Para el caso de  $\epsilon = 0,30$  los elementos tienden a moverse juntos en dos grupos diferenciables, como se puede apreciar en la Figura 4. Por otro lado, la Figura 5 ilustra la evolución temporal de un elemento escogido al azar, y se observa que sigue un período 2, es decir, a lo largo del tiempo el elemento puede alternar su estado entre dos valores posibles, tal como lo predice la probabilidad  $P_t(x)$  de la Figura 4, calculada para dos tiempo consecutivos. Este es un fenómeno de comportamientos colectivo no trivial (CCNT), donde los estados de los elementos muestran una evolución temporal regular a pesar de la dinámica caótica de los mapas para esos valores

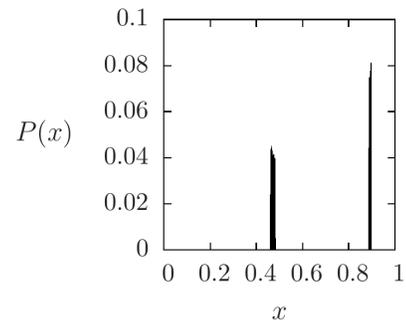


(a)  $\epsilon = 0,10$ .

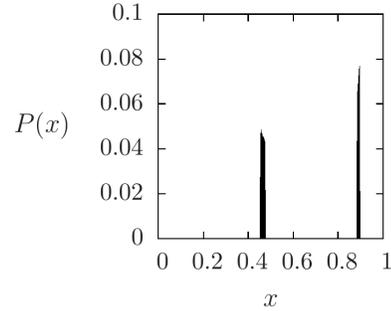


(b)  $\epsilon = 0,80$ .

Figura 3: Distribución de probabilidad de los estados  $x^i$  de los elementos del sistema correspondiente a la ecuación (6), con el mapa logístico,  $r(i) \in [3,9; 4,0]$ , para  $t=12000$  y  $N=10^5$ .



(a)  $t=11999$ .



(b)  $t=12000$ .

Figura 4: Distribución de probabilidad de los estados  $x^i$  de los elementos del sistema ecuación (6), con el mapa logístico,  $r(i) \in [3,9; 4,0]$ , para  $\epsilon=0,3$  y  $N=10^5$ .

del parámetro local  $r$ .

### 3.1.2. Parámetro local $b(i)$ heterogéneo del mapa singular

Para este caso, al igual que en la sección anterior se distribuye de manera uniformemente aleatoria el parámetro  $b$ , en un intervalo donde el mapa singular exhibe caos robusto, para cada elemento  $i$  del sistema. También se considera el caso de una distribución aleatoria normal o gaussiana.

Las figuras 6 y 7 muestran el diagrama de bifurcación de  $\bar{x}$  en función de  $\epsilon$ , para dos intervalos diferentes de la distribución uniforme. Para la Figura 6  $b(i)$  se distribuye entre  $[0; 1]$  y en la Figura 7  $b(i) \in [0; 2]$ . En ambos casos se observa el surgimiento de CCNT, que no se puede atribuir a la dinámica del mapa singular, ya que este exhibe solamente período uno, sin presencia de bifurcaciones ni períodos de orden superior, y caos robusto, sin ventanas de periodicidad. El CCNT se puede atribuir al acoplamiento y a la heterogeneidad del sistema.

Cuando mayor es el intervalo de distribución en el espacio del parámetro local  $b$ , se observa una pérdida en la diversidad de las estructuras en los diagramas de bifurcación a favor de comportamientos colectivos periódicos, como se puede apreciar en la Figura 7.

Por otro lado, la Figura 8 muestra la distribución de probabilidad instantánea  $P_i(x)$  de los estados de los elementos del sistema  $x_i^j$  para un valor fijo de  $\epsilon$  en el tiempo  $t = 12000$ , en el caso  $b(i) \in [0; 2]$ . No se observa formación de clúster, como con el mapa logístico.

En la Figura 9 se puede apreciar el diagrama de bifurcación de  $\bar{x}$  en función de  $\epsilon$  cuando se asigna aleatoriamente el parámetro local  $b(i)$  siguiendo una distribución normal, en este caso en particular, para una media  $\mu = 0,5$  y una desviación estándar  $\rho = 0,5$ . Si se compara con las figuras 6 y 9, los valores de periodicidad de  $\bar{x}$  están más cercanos y las bandas caóticas reducen su ancho, producto de una menor dispersión de los  $b(i)$  con a la media.

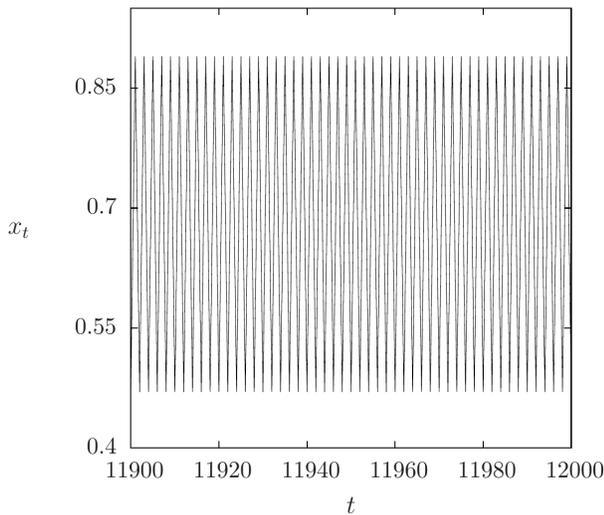


Figura 5: Iterados correspondientes al estado  $x_t$  del elemento  $i=500$ , para el sistema ecuación (6) con el mapa logístico,  $r(i) \in [3.9,4.0]$ .  $\epsilon=0.30$  y  $N = 10^5$ .

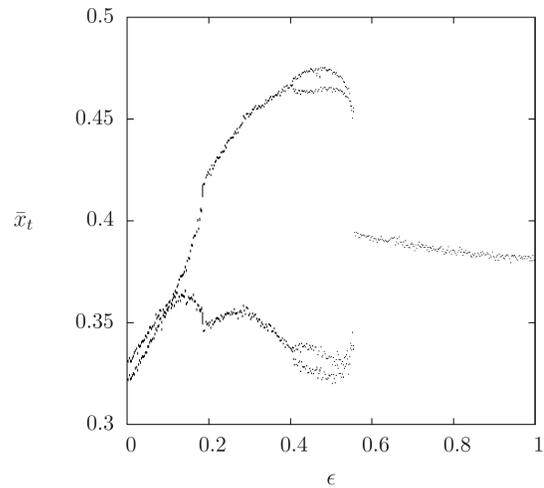


Figura 7: Diagrama de bifurcación  $\bar{x}_t$  vs.  $\epsilon$  del sistema ecuación (6) con dinámica local dada por el mapa singular, parámetro local  $b(i) \in [0;2]$  y singularidad  $z=0,5$ . Tamaño del sistema  $N = 10^5$  elementos.

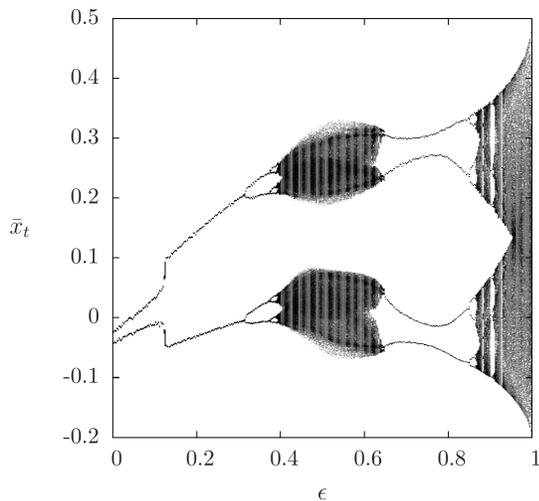


Figura 6: Diagrama de bifurcación  $\bar{x}_t$  vs.  $\epsilon$  del sistema ecuación (6) con dinámica local dada por el mapa singular, parámetro local  $b(i) \in [0;1]$  y singularidad  $z=0,5$ . Tamaño del sistema  $N = 10^5$  elementos.

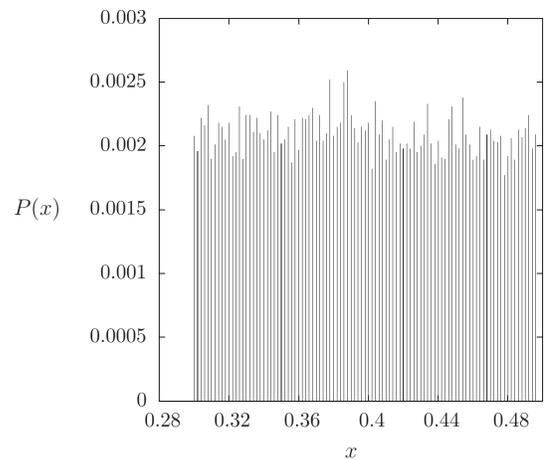


Figura 8: Distribución de probabilidad en el evolución temporal de los elementos  $x^i$  (ecuación (6)), con dinámica local dada por el mapa singular en un tiempo  $t=12000$ , parámetro local  $b(i) \in [0;2]$  y singularidad  $z = 0,5$ . Tamaño del sistema  $N = 10^5$  elementos.

### 3.2. Heterogeneidad en el parámetro de acoplamiento $\epsilon$

A continuación se estudia el efecto de la heterogeneidad en el parámetro de acoplamiento  $\epsilon$ , dejando fijo el parámetro local para todos los elementos del sistema, como se indica en la ecuación (8).

#### 3.2.1. $\epsilon(i)$ en RMA con dinámica local dada por el mapa logístico

La Figura 10 exhibe el diagrama de bifurcación del  $\bar{x}$  en función del parámetro local  $r$ , para el sistema dado por la ecuación (8). Se puede apreciar la aparición de período 2, lo cual puede ser atribuido a la dinámica local del mapa logístico, particularmente para el intervalo de

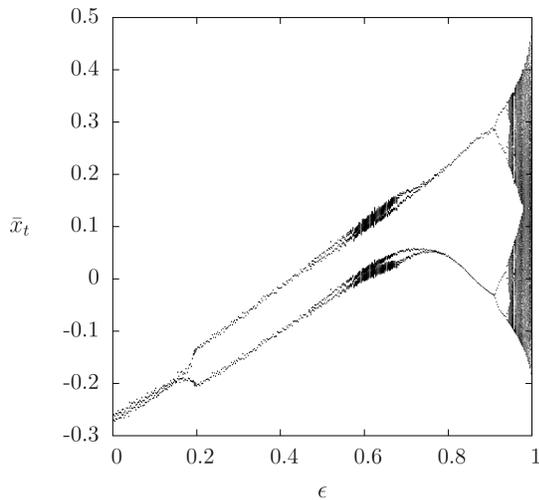


Figura 9: Diagrama de bifurcación  $\bar{x}_t$  vs.  $\epsilon$  para el sistema 6, con distribución normal  $b(i)$  en el mapa singular,  $\mu = 0,5$ ,  $\rho=0,5$  y singularidad  $z=0,5$ , para  $N=10^5$  elementos.

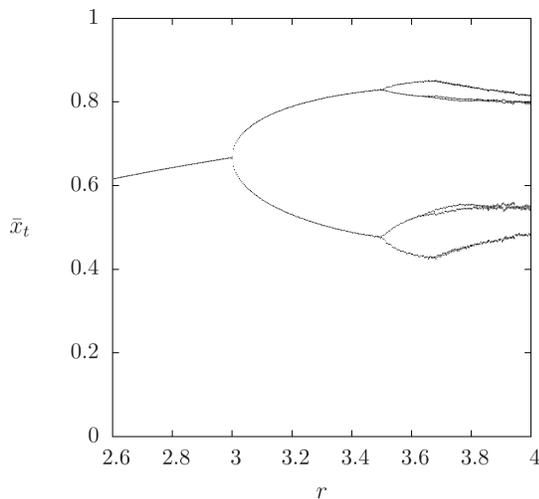


Figura 10: Diagrama de bifurcación  $\bar{x}$  vs.  $r$ , correspondiente al sistema ecuación (8), con dinámica local dada por el mapa logístico, parámetro  $\epsilon(i) \in [0;1]$ . Tamaño del sistema  $N = 10^5$  elementos.

$r \in [0; 3,57]$  aproximadamente (donde no hay comportamiento caótico). La heterogeneidad de la fuerza de acoplamiento no genera cambio alguno en el ordenamiento de los elementos del sistema. A partir de  $r = 3,57$  aproximadamente, donde a nivel local se comienza alternar el caos con ventanas periódicas, el parámetro de acoplamiento ejerce influencia sobre el sistema; para valores mayores

a este parámetro local la distribución uniforme del parámetro de acoplamiento  $\epsilon(i)$  elimina la presencia de la dinámica local del mapa logístico, dando lugar a pequeñas bandas caóticas colectivas reflejadas en las propiedades macroscópicas del sistema.

### 3.2.2. $\epsilon(i)$ en RMA con dinámica local dada por el mapa singular

La distribución normal de  $\epsilon(i)$  para el sistema ecuación (8) con dinámica local dada por el mapa singular, no exhibe una diferenciación considerable entre el comportamiento local de los mapas y las características macroscópicas exhibidas por el sistema acoplado, sin embargo induce CCNT expresado como bandas caóticas colectivas bien definidas exhibida por la variables macroscópicas del sistema en un rango donde la dinámica local de este mapa es caótico sin ventanas periódicas, además no se observan estados sincronizados, de acuerdo con la Figura 11.

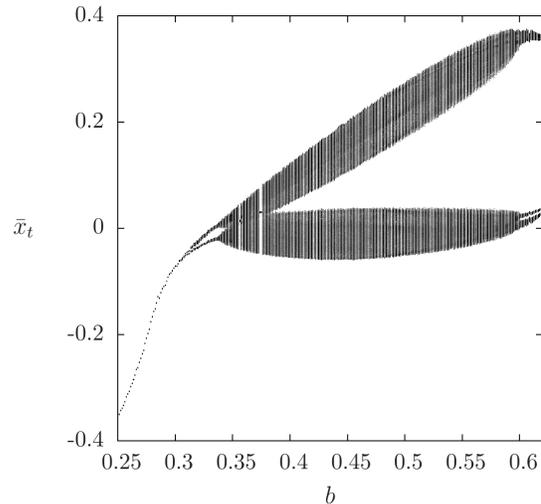


Figura 11: Diagrama de bifurcación  $\bar{x}$  vs.  $b$ , correspondiente al sistema ecuación (8), con dinámica local dada por el mapa singular,  $z = 0,5$  y distribución normal  $\epsilon(i)$  con valores de  $\mu = 0,5$ ,  $\rho = 0,5$ . Tamaño del sistema  $N = 10^5$  elementos.

### 3.3. RMA con interacciones parciales aleatorias

Por último se introduce heterogeneidad en la aplicación de la interacción. Se considera el sistema definido por la ecuación (9), donde solo una

fracción al azar de los elementos recibe la función de acoplamiento en un tiempo  $t$ , y la otra fracción evoluciona según su propia dinámica.

### 3.3.1. Interacción parcial con dinámica local dada por el mapa logístico

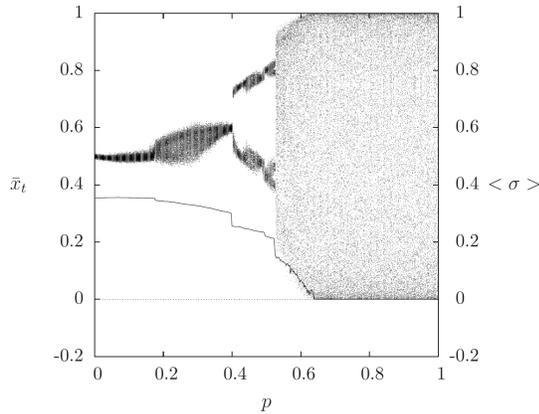


Figura 12: Diagrama de bifurcación de  $\bar{x}_t$  (eje vertical izquierdo) y  $\langle \sigma \rangle$  (eje vertical derecho), vs.  $\epsilon$ , correspondiente al sistema (ecuación 9) para el mapa logístico con  $r = 4,0$ , acoplamiento  $\epsilon = 0,80$  y  $N = 10^4$  elementos.

En la Figura 12 se observa el diagrama de bifurcación de  $\bar{x}$  (eje vertical izquierdo), sobrepuesta con la desviación estándar promedio asintótica del sistema  $\langle \sigma \rangle$  (eje vertical derecho), ambas como función de la fracción de los elementos que recibe la función de acoplamiento  $p$ . Se exhibe la emergencia de CCNT y el cambio de fase a estados sincronizados; la influencia de que una pequeña fracción de elementos tenga la posibilidad de acoplarse induce a la presencia de una primera banda caótica, que se bifurca a partir de un  $p=0,4$  aproximadamente. La desviación estándar del sistema revela que la reinyección de la función global de acoplamiento a una fracción de elementos seleccionados al azar en el sistema es suficiente para que este se sincronice a partir de  $p = 0,63$  aproximadamente [8].

La Figura 13 muestra el diagrama de bifurcación de  $\bar{x}$  vs.  $\epsilon$  para  $p = 0,5$ . Se comprueba que mientras menor sea el número de elementos acoplados mayor será la probabilidad de CCNT. Por otro lado, la Figura 14 corresponde a  $p = 1$  (todos los elementos acoplados, ecuación (2)), donde se

evidencia la formación de clústers, (sub-estructuras ordenadas) para pequeños valores del acoplamiento  $\epsilon$  y el surgimiento de sincronización a partir de  $\epsilon = 0,5$ , caracterizado por  $\langle \sigma \rangle = 0$ .

### 3.3.2. Interacción parcial con dinámica local dada por el mapa singular

La Figura 15 muestra el diagrama de bifurcación de  $\bar{x}$  en función de la probabilidad  $p$  con  $\epsilon = 0,4$ , para el mapa singular. La Figura 15 revela la emergencia de diversos tipos de CCNT en relación a  $\bar{x}$ : i) una región de turbulencia en el intervalo  $p \in [0,0; 0,071]$ , donde  $\bar{x}$  sigue un comportamiento estadístico normal alrededor de un valor medio «un punto fijo colectivo» con fluctuaciones que reflejan el promedio de los  $N$  elementos caóticos completamente desincronizados; ii) estados colectivos periódicos: periodo-2 a partir de  $p \simeq 0,071$ , periodo-4 en  $p \simeq 0,38$ , periodo-8 en  $p \simeq 0,47$ , correspondiente a fluctuaciones intrínsecas de órbitas periódicas del campo medio; iii) bandas caóticas a partir de  $p \simeq 0,58$ ; y iv) estados sincronizados a partir de  $p \simeq 0,80$ , como se evidencia en la Figura 16.

La Figura 17 representa el diagrama de bifurcación de  $\bar{x}_t$  vs.  $\epsilon$ , correspondiente al sistema ecuación (9) con probabilidad fija  $p = 0,5$  y  $N = 10^5$  elementos. Se pueden distinguir los

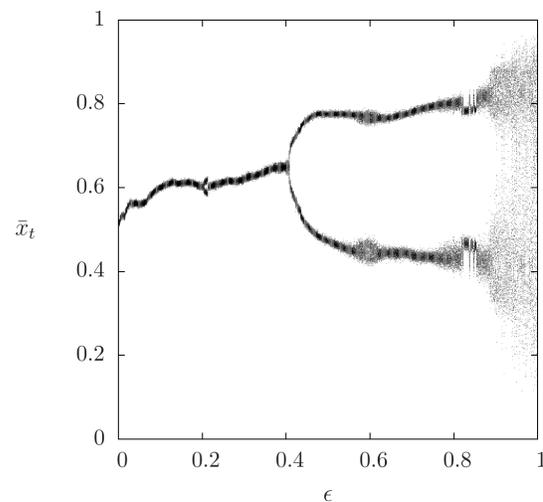


Figura 13: Diagrama de bifurcación de  $\bar{x}_t$  vs.  $\epsilon$ , correspondiente al sistema en la ecuación (9) para el mapa logístico con  $r = 4,0$ ,  $p = 0,5$  y  $N = 10^5$  elementos.

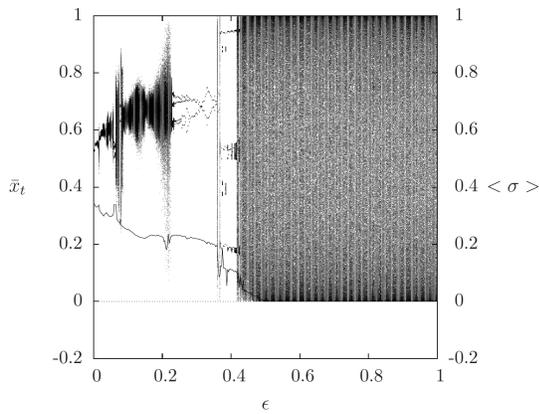


Figura 14: Diagrama de bifurcación  $\bar{x}$  (eje vertical izquierdo) y desviación estándar media  $\langle \sigma \rangle$ , vs.  $\epsilon$ , correspondiente al sistema en ecuación (2) con el mapa logístico, parámetro  $r=4$ , y número de elemento  $N = 10^5$ .

estados colectivos de periodo 2 y 4 además de una banda caótica.

En todos los casos anteriores la amplitud del comportamiento colectivo periódico manifestado en el  $\bar{x}$  no decrece con el incremento del tamaño del sistema  $N$  [8]. Las iteraciones mostradas en esta sección revelan la existencia de CCNT, donde las cantidades macroscópicas en la dinámica espaciotemporal del sistema exhibe una evolución

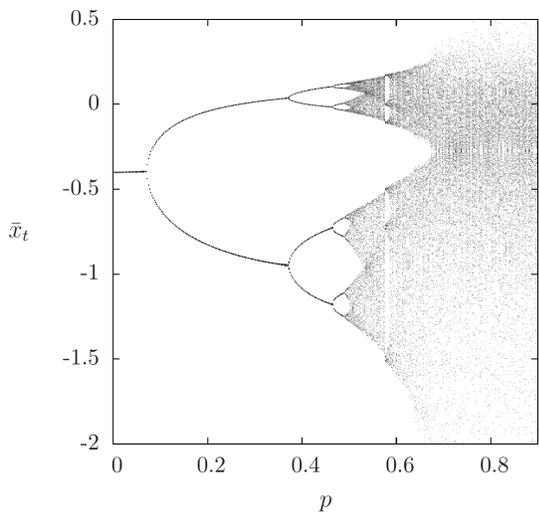


Figura 15: Diagrama de bifurcación de  $\bar{x}_t$  vs.  $p$ , correspondiente al sistema (ecuación (9)), para valores fijos de la dinámica singular  $b=1,11$  y  $z=-0,25$ , acoplamiento  $\epsilon = 0,4$ . Tamaño del sistema  $N=10^5$  elementos.

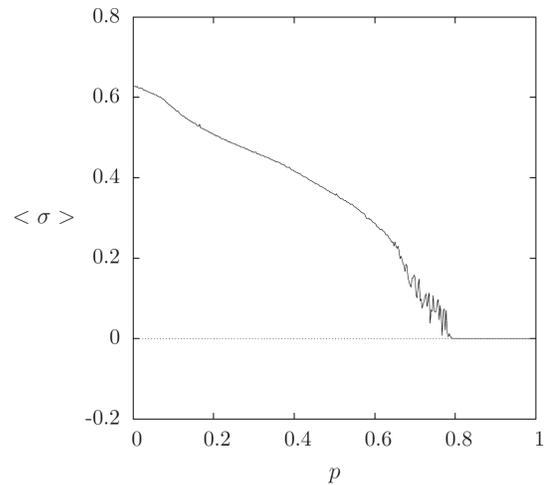


Figura 16: Desviación estándar media vs. probabilidad  $p$ , correspondiente al sistema (ecuación (9)), para valores fijos de la dinámica singular  $b = 1,11$  y  $z = -0,25$ , acoplamiento  $\epsilon = 0,4$ . Tamaño del sistema  $N=10^5$  elementos.

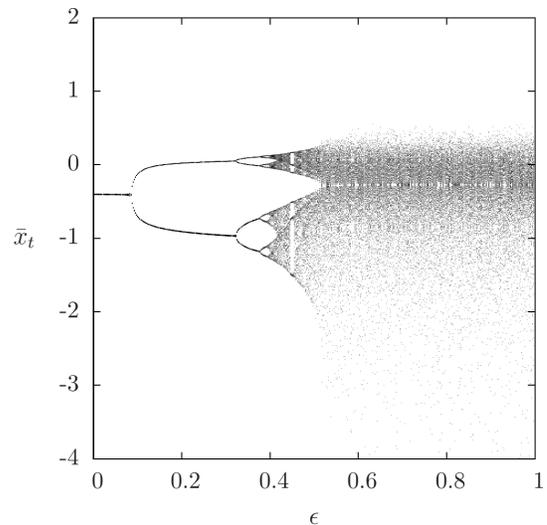


Figura 17: Diagrama de bifurcación de  $\bar{x}_t$  vs.  $\epsilon$ , correspondiente al sistema ecuación 9, para valores fijos de la dinámica singular  $b = 1,11$  y  $z = -0,25$ , con probabilidad  $p = 0,5$ . Tamaño del sistema  $N = 10^5$  elementos.

ordenada, coexistiendo con el caos local [16].

#### 4. Conclusiones

Se han investigado los efectos de introducir heterogeneidad en sistemas de mapas acoplados, proponiendo modelos dinámicos con ingredientes mínimos capaces de generar comportamientos

colectivos no triviales. Se han elegido dos tipos de dinámicas caóticas: la primera corresponde a un mapa unimodal clásico, el mapa logístico, que exhibe una ruta al caos por bifurcación de períodos y la presencia de ventanas periódicas intercaladas dentro de los estados caóticos; la segunda dinámica corresponde a una familia de mapas que exhibe período uno y caos robusto (sin ventanas periódicas en su interior) denominados mapas singulares.

La heterogeneidad en estos modelos se ha introducido con el empleo de distribuciones uniformes o gaussianas de los parámetros dinámicos que rigen la evolución del sistema, así como también por la aplicación parcial de la función de acoplamiento sobre los elementos que lo conforman. Se ha caracterizado el comportamiento de estos sistemas mediante el promedio de las variables de estado, el cálculo de la desviación estándar, la distribución de probabilidad de los estados de los elementos y las series de tiempo.

Se ha constatado que la heterogeneidad en los parámetros locales, produce el surgimiento de diversos comportamientos macroscópicos, conocidos como comportamientos colectivos no triviales: estados periódicos, bandas caóticas y clústers. Si bien, la presencia de ventanas periódicas en las dinámicas locales, exhibidas por el mapa logístico, no parece determinante en la aparición de conducta ordenada colectiva en los mapas acoplados [18], si tiene un rol determinante en la formación de clústers.

De igual forma, se observó que, la variedad en el parámetro de acoplamiento da lugar a la emergencia de CCNT, excluyendo la formación de clústers. Tanto en la heterogeneidad de los parámetros locales como en el de acoplamiento, no se observó la emergencia del fenómeno de sincronización, lo cual se puede atribuir a que la diversidad introducida en los sistema no permite que los elementos lleguen a tener estados exactamente iguales.

En relación con el acoplamiento parcial, la desviación estándar del sistema revela que la reinyección de la función de acoplamiento a una fracción de elementos seleccionados al azar del sistema, en un tiempo  $t$ , es suficiente para que este se sincronice [8]. Sin embargo, se

comprueba que mientras menor sea el número de elementos que recibe la interacción, mayor será la tendencia de que emerja CCNT. El valor crítico de  $p$  para la presencia de sincronización sigue dependiendo de los parámetros del sistema. Por ejemplo, es conocido que al aumentar la fuerza de acoplamiento se está aumentando el flujo de información entre los elementos de la red [17], originando que estos sigan un mismo patrón de conducta. Al sobrepasar un valor crítico del parámetro de acoplamiento  $\epsilon$ , el sistema tiende a definir un comportamiento único y sincronizado de sus elementos.

La distribución uniforme empleada para introducir variedad en los parámetros del sistema parece promover con más facilidad la aparición de CCNT, en comparación con la distribución gaussiana. Esto puede ser debido a que el número de valores que tienen una diferencia determinada con la media de la distribución uniforme es el mismo, en cambio, con la distribución normal los valores tienden a agruparse en torno a la media y mientras tengan más diferencia con la media, menor es el número de estos valores. Así podemos decir que la distribución uniforme introduce una mayor diversidad en los sistemas.

Con respecto a las dinámicas locales utilizadas en los modelos se observó que el mapa singular es más apropiado para exhibir CCNT que el mapa logístico. Éste último solamente mostró bandas caóticas en casi todos los casos y comportamientos periódicos con el parámetro de acoplamiento distribuido uniformemente, no obstante, mostró la formación de clústers con la distribución uniforme del parámetro local, fenómeno no exhibido con el mapa singular.

Finalmente, se puede aseverar que muy a pesar de las variaciones individuales en un sistema, e independientemente de su contexto: físico, químico, social o biológico, es posible alcanzar estados con cierto grado apreciable de consenso y coherencia.

## Agradecimientos

Agradecemos a la Corporación Ecuatoriana para el Desarrollo de la Investigación y Academia

(CEDIA) por el financiamiento otorgado a la presente investigación mediante el proyecto CEPRA-XIII-2019-10: *Interacciones Globales en Sistemas Complejos*.

## 5. Referencias

- [1] S. Manrubia, A. Mikhailov, and D. Zanette. *Emergence of Dynamical Order*. WORLD SCIENTIFIC, 2004.
- [2] K. Kaneko. Relevance of clustering to biological networks. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 75(1-3):55–73, August 1994.
- [3] M. Cosenza and J. González-Estévez. Synchronization and Collective Behavior in Globally Coupled Logarithmic Maps. *Progress of Theoretical Physics*, 100(1):21, 07 1998.
- [4] H. Chaté, A. Lamaitre, and P. Manneville. Non-trivial collective behavior in extensively-chaotic dynamical systems: an update. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 224(1-2):447–457, 1996.
- [5] K. Kaneko. Overview of coupled map lattices. *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*, 2(3):279, 1992.
- [6] J. González-Estévez. Inducción de orden colectivo por heterogeneidad en sistemas de elementos caóticos acoplados. Tesis de maestría, Universidad de Los Andes, Mérida, Venezuela, 2001.
- [7] A. Valdéz y M.G. Cosenza. Comportamientos colectivos inducidos por diversidad en sistemas dinámicos espaciotemporales. *Revista Ciencias e Ingeniería. Edición especial “Jornadas de Modelado y Simulación”*, pages 135–140, 2011.
- [8] O. Alvarez-Llamoza, K. Tucci, M. Cosenza, and M. Pineda. Random global coupling induces synchronization and nontrivial collective behavior in networks of chaotic maps. *The European Physical Journal Special Topics*, 143(1):245–247, 2007.
- [9] R.M. May. Simple Mathematical Models With Very Complicated Dynamics. *Nature*, 261(1):459–467, 1976.
- [10] M.G. Cosenza and O. Alvarez-Llamoza. Chaotic singular maps. *Revista Ciencia*, 15(4):438–443, 2007.
- [11] O. Alvarez-Llamoza. *Sincronización Generalizada y Comportamientos Colectivos en Sistemas Forzados y en Sistemas Autónomos*. Tesis Doctoral, Universidad de Los Andes, Venezuela, 2008.
- [12] A. Parravano and M.G. Cosenza. Driven maps and the emergence of ordered collective behavior in globally coupled maps. *Physical Review E*, 58(2):1665, 1998.
- [13] O. Alvarez-Llamoza and M.G. Cosenza and G.A. Ponce. Critical behavior of the Lyapunov exponent in type-III intermittency. *Chaos, Solitons & Fractals*, 36(1):150–156, 2008.
- [14] K. Kaneko. Period-Doubling of Kink-Antikink Patterns, Quasiperiodicity in Antiferro-Like Structures and Spatial Intermittency in Coupled Logistic Lattice. *Progress of Theoretical Physics*, 72(3):480–486, September 1984.
- [15] I. Waller and R. Kapral. Spatial and temporal structure in systems of coupled nonlinear oscillators. *Physical Review A*, 30:2047–2055, Oct 1984.
- [16] H. Chaté and P. Manneville. Emergence of Effective Low-Dimensional Dynamics in the Macroscopic Behaviour of Coupled Map Lattices. *EPL (Europhysics Letters)*, 17(4):291–296, 1992.
- [17] H. Ming-Chung and S. Fu-Chi. Information flow and nontrivial collective behavior in chaotic-coupled-map lattices. *Physical review. E, Statistical, nonlinear, and soft matter physics*, 67:056214–1–056214–6, 06 2003.
- [18] M. Cosenza and J. González. Synchronization and collective behavior in globally coupled logarithmic maps. *Prog. Theor. Phys*, 100(1), 1998.