






Fractal Dynamic for the particles PM_{2,5} in Mexico City

Mario Aguilar-Fernández ^{*,a} , Sergio Barrientos-Ramírez ^b , Arturo Merlín-Rodríguez ^a ,
Brenda García-Jarquín ^c , Víctor M. López-Sánchez ^b 

^aInstituto Politécnico Nacional. UPHICSA. SEPI. Iztacalco, Ciudad de México, México.

^bUniversidad Anáhuac México. Facultad de Ingeniería. Lomas Anáhuac, Huixquilucan, Estado de México. México.

^cInstituto Politécnico Nacional–ESIME-ZACATENCO. Manuel de Anda y Barredo. Unidad Profesional Adolfo López Mateos, Zacatenco, Gustavo A. Madero, Ciudad de México, México.

Abstract.- Air pollution is a relevant problem today due to the risk posed by urban environments. High concentrations of PM_{2,5} particles are extremely harmful to human health and cause high mortality rates in the most vulnerable population. The objective of this work is to characterize the dynamics of PM_{2,5} particles in the north, south, east, west and center of Mexico City by means of fractal analysis and kinetic roughness within the framework of the systemic to find emerging patterns (at different time-space scales), to model relevant aspects for decision-making in environmental policy and control strategies. The results show that PM_{2,5} levels adjust to different distributions, and that the time series of standard deviations display persistent behaviors as the time horizon lengthens. The projections that use the dynamic fractal analysis allow to know the response that the system may have over a time horizon. In conclusion, PM_{2,5} concentration levels vary in each country or region and depend on innumerable factors that satisfy the Family-Vicsek ansatz scaling dynamics.

Keywords: PM_{2,5}; Fractal Analysis; Time Series; Forecasts.

Dinámica fractal de las partículas PM_{2,5} en la Ciudad de México

Resumen.- La contaminación atmosférica es un problema relevante en la actualidad debido al riesgo que representa para los entornos urbanos. Las altas concentraciones de partículas PM_{2,5} son sumamente dañinas para la salud humana y generan altos índices de mortalidad en la población más vulnerable. El objetivo de este trabajo es caracterizar la dinámica de las partículas PM_{2,5} en las zonas norte, sur, oriente, poniente y centro de la Ciudad de México mediante análisis fractal y de rugosidad cinética dentro del marco de la sistémica para hallar patrones emergentes (a diferentes escalas de tiempo-espacio), para modelar los aspectos relevantes para la toma de decisiones en materia de política ambiental y estrategias de control. Los resultados muestran que los niveles de PM_{2,5} se ajustan a diferentes distribuciones, y que las series de tiempo de desviaciones estándar, muestran comportamientos persistentes a medida que se alarga el horizonte de tiempo. Las proyecciones que utilizan el análisis fractal dinámico permiten conocer la respuesta que puede tener el sistema en un horizonte temporal. En conclusión, los niveles de concentración de PM_{2,5} varían en cada país o región y dependen de innumerables factores que satisfacen la dinámica de escalado Family-Vicsek ansatz.

Palabras clave: PM_{2,5}; Análisis fractal; Series de tiempo; Pronósticos.

Recibido: 23 de enero, 2021.

Aceptado: 02 de marzo, 2021.

1. Introducción

La Organización Mundial de la Salud, estima que, una de cada nueve muertes en el mundo, es atribuida a la contaminación atmosférica [1]. A nivel nacional se estiman 26,941 muertes al año a

causa de las partículas PM₁₀ y PM_{2,5}. En la Zona Metropolitana del Valle de México, fallecieron alrededor de 2864 personas (7,8 diariamente, por cáncer de pulmón y situaciones del corazón), a causa de las partículas ultrafinas PM_{2,5} en el año 2017. Los costos sociales llegan a ser de entre el 3% y el 5%, del PIB nacional, relacionados con gases de efecto invernadero, ruido, siniestros de tránsito y congestión [2] lo que se traduce en un grave y creciente problema no solo ambiental, sino también social y económico.

Las partículas suspendidas (PM_{2,5} y PM₁₀), re-

* Autor para correspondencia:

Correo-e: maguilarf@yahoo.com (M. Aguilar-Fernández)

presentan una variable común en la contaminación atmosférica. En específico, las partículas $PM_{2,5}$ pueden llegar a los pulmones, además de ingresar al torrente sanguíneo, contribuyendo al desarrollo de afecciones cardiovasculares, respiratorias y cáncer pulmonar. Solamente, a causa de la exposición a las $PM_{2,5}$, mundialmente se estiman 4,2 millones de decesos prematuros al año [1][3], dato relevante en las estadísticas por muerte antes de nacer.

Para este estudio, la problemática se centra en la Ciudad de México [4], que es reconocida por ser un territorio con mayor vulnerabilidad ambiental en el país y donde urge la elaboración y la aplicación de nuevas prácticas en la gestión ambiental.

Las infructuosas acciones gubernamentales se relacionan con la escasa información y comprensión del problema [5], así como con la falta de competencia de los organismos encargados de atenderlo. Es necesario, que en materia ambiental, se desarrollen e instrumenten estrategias innovadoras [4] que complementen acciones políticas, legislativas y tecnológicas, dirigidas a favorecer los principios de sustentabilidad, en el manejo de los recursos naturales.

A pesar de que la Secretaría del Medio Ambiente del Gobierno de la Ciudad de México, cuenta con un sistema de pronóstico, este sólo estima el estado de la calidad del aire para las siguientes 24 horas, por ello, es importante desarrollar una herramienta útil que favorezca a tomar decisiones informadas, a lo largo de uno o varios horizontes de tiempo, para la protección de la salud y contribuir a mejorar la calidad del aire. Este trabajo se justifica por el hecho de que, el pronóstico en los niveles de partículas $PM_{2,5}$, es un componente de suma importancia en la investigación de la calidad del aire.

Es importante mencionar, que la mayoría de los estudios enfocados en partículas suspendidas de menos de 2,5 micras ($PM_{2,5}$) en la Ciudad de México [6][7], tienen como objetivo, solamente estimar los perfiles de fuentes de riesgo para la salud, de los residentes de dicha zona. Además, de que sólo utilizan modelos clásicos como el análisis factorial, o simples regresiones, para sus pronósticos. En este sentido, el análisis fractal, proporciona herramientas poderosas para comprender la naturaleza compleja, no lineal, de las

series temporales, en diversos campos que estudien sistemas naturales y socioeconómicos, complejos [8]. Los fractales, como su nombre lo indica, son partes fraccionales de un todo, que explican el comportamiento rugoso de una eventualidad o inconsistencia, a través de escalamientos y persistencias. Surgen como solución a los sistemas complejos que imposibilitan la proyección o estimación de valores subsecuentes a través del tiempo, y los generalizan en una dimensión no lineal. A su vez, modela el fenómeno de memoria larga, por medio de la ley de potencias y la enfoca en una distribución de colas pesadas [9] por su alta sensibilidad a estímulos iniciales en el tiempo.

Para determinar si el comportamiento de un sistema complejo, a partir de las series de tiempo auto-afines o estocásticas generadas a partir de dicho sistema, despliega persistencia a diferentes escalas de tiempo, se debe obtener, en principio, el valor del exponente Hurst (H) (o de rugosidad) para las series de tiempo auto-afín, con base en la ecuación (1).

$$F(bx) = aF(x) = bHF(x) \quad (1)$$

Donde el exponente $H = \log a / \log b$, es el exponente de Hurst [10]. La solución de la ecuación (1) es simplemente $F(x) = Ax^H$.

Los valores de $H < 1/2$, indican comportamiento anti-correlacionado (o antipersistente) a largo plazo: si los valores de la variable observable van aumentando, lo más probable es que el siguiente valor sea menor al último, y viceversa. Valores de $H > 1/2$, indican comportamiento correlacionado positivo a largo plazo: si los valores de la variable observable van aumentando, lo más probable es que el siguiente valor sea mayor al último, y viceversa. Por último, para valores de $H = 1/2$, no existen correlaciones, se tiene un comportamiento totalmente aleatorio.

Se realizó una revisión tradicional de literatura, con base en las propuestas de [23, 24, 25, 26], y los criterios de [27]. La exploración de documentos científicos, se produjo en el periodo de 1980 al 2020, en la base de datos *Web of Science*. Se pone especial atención en los artículos publicados con mayor influencia. Una breve descripción y estratificación, de cada uno de ellos, fue efectuada

Tabla 1: Artículos más citados en la *Web of Science* para los trabajos relacionados con los contaminantes PM_{2,5} en el mundo

Referencia	Descripción	Aportación	Metodología	Resultados
[11]	Un modelo híbrido de pronóstico para mapear el PM _{2,5} en Beijing.	Aplicación de redes neuronales artificiales.	Análisis de variables geo-atmosféricas con distribución logística.	Predicciones para PM _{2,5} con 2 días de anticipación identificando los días pico.
[12]	Localización de fuentes contaminantes en 25 ciudades de China.	El método de clustering permitió identificar fuentes potenciales contaminantes.	Clúster jerárquico y análisis de sensibilidad para las concentraciones del PM _{2,5} .	Un modelo de pronósticos estacionales temporales.
[13]	Identificación de las principales regiones contaminadas por PM _{2,5} .	Un modelo que estima las concentraciones de PM _{2,5} para el mundo.	A través de un modelo de investigación de operaciones.	China, EUA y Japón resultaron ser las regiones más contaminadas.
[14]	Un modelo de pronóstico de PM _{2,5} a largo plazo.	A diferencia de los modelos a corto plazo, este predice a largo plazo.	Análisis de series de tiempo considerando temperatura, índice de morbilidad.	Los registros satelitales facilitaron el mapeo en sobrepoblaciones.
[15]	Modelo lineal para la composición del PM _{2,5} en Heze, China.	Los modelos lineales resultaron útiles para el cálculo de impacto.	Modelo de factorización de matrices positivas y correlaciones lineales.	Patrones de estacionalidad en las localidades de la ciudad en estudio.
[16]	Modelo para pronosticar concentraciones de PM _{2,5} en EUA.	Se comprueba que la precisión de los datos de entrada influye en la salida.	Monitoreo satelital para un modelo de interpolación y regresión simplificado en R.	Alta precisión en las predicciones (> 8, 8).
[17]	Proyecto ESCAPE el cual estima PM en 20 regiones de Europa.	LUR que es un sistema de ecuaciones de regresión múltiple y GPS.	Se usó el modelo de regresión de uso del suelo (LUR).	Modelo con precisión relativamente baja (<7).
[18]	Con MAIAC se estimó el PM _{2,5} en el sureste de EUA.	Las concentraciones terrestres son más complejas que las del aire.	El algoritmo MAIAC es de naturaleza no lineal y fue empleado en radios de 1 km.	La precisión del modelo >8, ero se limita a áreas con acceso a esta tecnología.
[19]	Análisis para demostrar los efectos de los árboles con el PM _{2,5} .	Se demostró que la masa vegetativa es reguladora a favor de la salud.	Se modelaron distintas regiones de EUA mediante el algoritmo BenMap.	Una alta reducción de PM _{2,5} en las zonas con más población vegetativa.
[20]	Modelo de predicción de PM _{2,5} en Suiza del 2003 al 2013.	Uso del algoritmo MAIAC desarrollado por la NASA.	El algoritmo MAIAC usado en radios de 1 km.	Alta precisión en los resultados r>8.
[21]	Modelo multifractal asimétrico para PM _{2,5} China.	Modelos fractales con comportamientos multifractales.	Correlaciones asimétricas y series de tiempo.	Resultados con tendencia alcista. Similar a Hong Kong y Shangai.
[22]	Cotejo de 3 métodos para PM _{2,5} en Chile.	La evaluación de métodos de pronóstico tanto lineales como no lineales.	Métodos: estadística lineal, red neuronal multicapa y clustering jerárquico.	El algoritmo de clustering jerárquico resultó ser el pronóstico más preciso.

Fuente: información consultada en <https://www.clarivate.com/> (2020), *Web of Science*.

(los más citados y los relacionados con México). La calidad de la información sobre el tema PM_{2,5}, cumple el atributo de vigencia [28][29]. Se localizaron los artículos más citados, el 60 % enfocados en la contaminación atmosférica por

PM_{2,5} en China [30], según lo indicado en la Tabla 1.

En la Tabla 2 se revisaron los artículos enfocados en análisis de contaminación atmosférica para México con metodologías de orden complejo y

Tabla 2: Artículos dedicados al estudio de los contaminantes $PM_{2,5}$ en México, en la *Web of Science*

Referencia	Descripción	Aportación	Metodología	Resultados
[31]	Análisis de la calidad del aire en de 3 zonas de la ciudad de México.	Zonas: 1) Xalostoc (norte), 2) la merced (centro) y 3) pedregal (sur).	Análisis de muestras en laboratorio y estadística descriptiva.	$R > 0.9$: alta precisión en los resultados. Xalostoc fue la zona más contaminada.
[32]	Análisis de la calidad del aire en de 6 zonas de la ciudad de México.	Zonas: 1) Xalostoc, 2) Merced, 3) pedregal, 4) Nezahualcoyotl, 5) Tlalnepantla y 6) Iztapalapa.	Análisis de muestras en laboratorio y estadística descriptiva.	Nezahualcoyotl, Xalostoc e Iztapalapa fueron las zonas más contaminadas.
[33]	Análisis de la calidad del aire en de 6 zonas de la ciudad de México con estaciones satelitales.	Datos tomados de la estación satelital IMADA-AVER de EUA.	Recolección de datos vía satélite en 24 horas continuas y analizadas con IMADA-AVER.	La zona Nezahualcoyotl resultó ser la zona más contaminada por sulfatos y nitratos.
[34]	Identificación de fuentes y análisis de la composición del aire en la ciudad de Monterrey.	El monitoreo y análisis de contaminantes de $PM_{2,5}$ en la ciudad de Monterrey.	Análisis de cromatografía de 60 muestras del sureste y noreste de la ciudad.	Las principales fuentes son la refinería y zonas industriales. Sobresale el aerosol inorgánico.
[35]	Análisis de exposición al benceno, $PM_{2,5}$ y CO para los pasajeros de transporte público en la ciudad de México.	Conocer las posibles afecciones de salud a las que son expuestas las personas que viajan en transporte público diariamente.	Análisis gravimétrico para descomponer los contaminantes y regresiones para el análisis de datos.	Principales contaminantes: carbono y monóxido de carbono, principalmente en las horas pico.
[36]	Contribución de la quema de basura al $PM_{2,5}$ en la ciudad de México en marzo 2006.	Debido a que la quema de basura es una práctica común en México, la aportación de su análisis es de sumo impacto.	Se usó el modelo WRF-CHEM para simular las emisiones, transportes y compuestos químicos	La combustión por quema de basura constituye de un 3-30 % de los contaminantes de $PM_{2,5}$.
[37]	Evaluación de los riesgos a la salud de los habitantes de la ciudad de México por $PM_{2,5}$.	Este estudio se enfocó en la medición del nivel de riesgo de salud de acuerdo a las muestras poblacionales.	Análisis de partículas PIXE (particle induced X-ray emission).	La población de niños de 6 a 12 años de edad en Naucalpan y Xalostoc mostraron el mayor riesgo.
[38]	Modelo de redes neuronales para $PM_{2,5}$ en la frontera de México con EUA.	Las redes neuronales artificiales permitieron modelar de una manera precisa el comportamiento.	Se modeló con la base de datos de la red de monitoreo de calidad del aire de Texas.	Las redes presentaron coeficientes de correlación cercanos a 8.
[39]	Identificación de componentes orgánicos para el $PM_{2,5}$ en la ciudad de México.	Se utilizó segregación por temporadas en 5 zonas de la Cd. de México.	Análisis gravimétrico, multivarianza, regresión lineal y diagramas de cajas.	El carbón natural fue el mayor factor orgánico en la zona de Tlalnepantla en época de sequía.
[6]	Identificación de contaminantes en las fuentes emisoras en Cd. de México.	Identificación de contaminantes desde las principales fuentes emisoras.	Mediante análisis gravimétrico se tomaron muestras de diversas fuentes.	Presencia de metales en la quema de basura y carbono en las emisiones de vehículos de diésel.
[40]	Identificación de fuentes y distribución de carbono en ambientes de $PM_{2,5}$ y PM_{10} para la Cd. de México.	La mayor aportación reside en la evaluación con isótopos de carbón considerando al carbón como el mayor contaminante de las partículas suspendidas.	Recolección de muestras en 5 zonas de la ciudad de México y la evaluación con isótopos.	La zona norte de la ciudad de México resultó ser la mayor fuente de carbono por las incineradoras de plásticos y caucho.
[41]	Localización geográfica de las distribuciones del $PM_{2,5}$ en Cd. de México.	Recolección de datos por satélite AOD de forma localizada.	Recolección de datos con AOD y modelado en lenguaje R.	Alta precisión en los resultados pero se limita a radios de 1 km.

Fuente: información consultada en <https://www.clarivate.com/> (2020), *Web of Science*.

comparando tanto la Tabla 1 y 2, se tiene que en conclusión, se revisaron 24 artículos de la *Web of Science*, donde los más citados usaron modelos no lineales. En México, sólo se ha realizado 1 no

lineal (redes neuronales) pero no se ha empleado el análisis fractal, he aquí la necesidad de realizar el presente estudio.

2. Metodología

El tipo de estudio es de carácter correlacional, ya que busca determinar si existe, o no, persistencia en las series de tiempo de los niveles de partículas $PM_{2,5}$, y en sus fluctuaciones. El estudio es longitudinal, puesto que se buscan cambios en la relación en determinadas variables a través del tiempo.

Las cifras históricas de los niveles de partículas $PM_{2,5}$, se obtuvieron de la Red Automática de Monitoreo Atmosférico (RAMA), la cual, emplea equipos, de manera continua, para la medición de dióxido de azufre, monóxido de carbono, dióxido de nitrógeno, ozono, PM_{10} y $PM_{2,5}$. La RAMA se forma por 34 estaciones de monitoreo, y un laboratorio para el mantenimiento y calibración de los equipos de monitoreo, a través de los métodos de gravimetría y de atenuación de radicación beta [42].

Las cifras históricas de los niveles de partículas $PM_{2,5}$, se obtuvieron del sitio [42], de la Secretaría del Medio Ambiente de la Ciudad de México. La información que se genera es pública y los usuarios son la población en general.

Dicha Secretaría del Gobierno, calcula el promedio de 24 horas desde la hora 1 a la 24, por lo que el primer dato de publicación, corresponde a la hora 1 del día, es el promedio aritmético de los minutos comprendidos dentro las 00 horas, es decir, se realiza con los datos desde el minuto 0 (00:00) al minuto 59 (00:59). Este promedio aritmético de las 00 horas se publica en la hora siguiente, es decir a la 01:00 hora, y así sucesivamente, para cada hora, hasta llegar al cálculo del último dato del día (hora 24), los cuales son los datos comprendidos dentro de las 23:00 horas (de las 23:00 a las 23:59), y este se publica a las 00:00 horas. Para no tener series de tiempo excesivamente grandes se decidió que de manera aleatoria, se seleccionaron cinco observaciones por día, para generar las series de tiempo originales, para los últimos cinco años (2016-primer semestre del 2020).

Como primer paso, de las series de tiempo originales $z(t)$ de los datos de partículas $PM_{2,5}$ contra tiempo, se construyeron series de tiempo de desviaciones estándar (fluctuaciones) de cada una

de las cinco zonas de la Ciudad de México (norte, sur, poniente, oriente y centro), ya que la desviación estándar, es el parámetro más empleado para determinar la variación, cambio o fluctuación de una variable (en este caso de las partículas $PM_{2,5}$), a través del tiempo. Para caracterizar la dinámica de las series de tiempo $v(t, \tau)$, se consideró la longitud de cada una de las 5 series de tiempo $z(t)$ de $T = 6,650$ registros de partículas $PM_{2,5}$ (μV) versus tiempo (segundos), con una tasa de muestreo $\Delta t = 1$ segundo. Así como también se consideró para las 5 series de tiempo $v(t, \tau)$, un rango del intervalo de tiempo de la muestra de $3 \leq \tau \leq 300$, con ventanas de tiempo de los intervalos de las muestras de $\delta_t = 1$ segundo.

Una vez obtenidos los datos necesarios para la construcción de las series de tiempo de la zona norte, sur, centro, oriente y poniente de la Ciudad de México, se analizó y caracterizó la dinámica de las fluctuaciones de las emisiones de partículas $PM_{2,5}$, dentro de un marco conceptual de la cinética del crecimiento de interfaces rugosas (análisis fractal o de escalamiento). El comportamiento aleatorio de la dinámica espacio-tiempo, puede ser caracterizado por las fluctuaciones de los parámetros observables. De igual forma, la memoria a largo plazo en las series de tiempo de fluctuaciones, se ha analizado frecuentemente, a través de su función de estructura, definida según la ecuación (2).

$$\sigma(\tau, \delta_t) = \langle \overline{([v(t + \delta_t, \tau) - v(t, \tau)])^2} \rangle^{(1/2)} \quad (2)$$

Donde la barra superior, denota el promedio sobre todos los tiempos t en las series de tiempo de longitud $T - \tau$ (con T como la longitud de la serie de tiempo original $z(t)$, y los paréntesis triangulares, indican el promedio sobre diferentes realizaciones de la ventana de tiempo de tamaño δ_t . Normalmente, se espera que la dinámica de escalamiento de invarianza, implique que las fluctuaciones $\sigma(\tau, \delta_t)$ satisfagan la dinámica de escalamiento *ansatz* de Family-Vicsek. Dicha función de estructura de las fluctuaciones, exhibe comúnmente, el comportamiento de ley de potencia, característico de los fractales auto-afines (Balankin, 2007) según la ecuación (3).

$$\sigma \propto (\delta_t)^\zeta \quad (3)$$

El exponente de escala o de rugosidad ζ , mejor conocido como exponente de Hurst, se encarga de caracterizar el grado de intensidad de las correlaciones a largo plazo, en la dinámica de las fluctuaciones.

De acuerdo con Morales [43], el cálculo del coeficiente Hurst, por el método de Rango Reescalado (R/S), se inicia con una serie de tiempo de tamaño M , pero como interesan los rendimientos logarítmicos, entonces la serie original, se reduce a una nueva serie de tiempo de tamaño $N = M - 1$, donde cada rendimiento está definido por la ecuación (4).

$$N_i = \log \left(\frac{M_i + 1}{M_i} \right), \quad i = 1, 2, 3, \dots, N \quad (4)$$

Se divide este periodo de tiempo N en A subperiodos contiguos de longitud n , tal que $A \cdot n = N$. Se nombra cada uno de los subperiodos o subgrupos I_a , con $a = 1, 2, 3, \dots, A$. Y cada elemento es etiquetado por $N_{(k,a)}$ tal que $k = 1, 2, 3, \dots, n$. Y para cada subperiodo I_a de longitud n , el valor promedio está definido, por la ecuación (5).

$$e_a = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n N_{k,a}. \quad (5)$$

La diferencia de cada elemento $N_{(k,a)}$ con respecto a la media e_a para cada subperiodo I_a se van sumando para obtener la serie de tiempo acumulada ($X_{k,a}$), definida según la ecuación (6) como:

$$X_{k,a} = \sum_{i=1}^k (N_{i,a} - e_a), \quad k = 1, 2, 3, \dots, n. \quad (6)$$

El rango R_{I_a} se define como la diferencia entre el valor máximo y el valor mínimo de $X_{k,a}$ para cada subperiodo I_a , de acuerdo con la ecuación (7).

$$R_{I_a} = \text{Max}(X_{k,a}) - \text{Min}(X_{k,a}), \quad (7)$$

donde $1 \leq k \leq n$.

Para el análisis estadístico se siguió la metodología de Morales [43], se utilizó el software @Risk, con la finalidad de ajustar los datos a la mejor

distribución, y posteriormente, se analizaron sus parámetros estadísticos para identificar distribuciones de colas pesadas (comportamiento de leyes de potencia), esto con el objetivo de identificar si persiste algún comportamiento complejo o fractal en la distribución de la contaminación por $\text{PM}_{2.5}$. a través de indicar el rango de valores, el software @Risk, ofrece un listado de posibles distribuciones ordenadas por bondad de ajuste, por medio de los criterios estadísticos de la Chi-cuadrada, Anderson-Darling, y Kolmogorov-Smirnov, lo cual permite comparar los datos en un gráfico.

3. Análisis y discusión de resultados

Para un mayor orden y entendimiento de los resultados obtenidos, estos se muestran divididos en series de tiempo original, análisis estadístico, análisis dinámico fractal y pronóstico. Los hallazgos obtenidos se muestran a continuación.

En las Figuras 1a, 2a, 3a, 4a, 5a se muestran las gráficas de las series de tiempo originales, $z(t)$, de las zonas sur (Figura 1), poniente (Figura 2), centro (Figura 3), oriente (Figura 4) y norte (Figura 5) de la CDMX para intervalos de tiempo $\tau = 0$ s, $\tau = 75$ s, $\tau = 150$ s y $\tau = 300$ s, respectivamente.

Posteriormente, lo anterior sumado al análisis estadístico realizado con el software @Risk citado en la metodología se analizaron los parámetros estadísticos para identificar algún comportamiento fractal y la Figura 6 indica que los datos originales de las series de tiempo de la zona norte, sur, centro, oriente y poniente de la CDMX, tienen un mejor ajuste con las distribuciones Gamma, Log-logística, Log-normal, Pearson 5 y Gamma, respectivamente. También, al analizar los resultados del ajuste de datos, se puede apreciar que existe un exceso de curtosis en todas las series originales $z(t)$, lo cual significa que la distribución de los resultados de los eventos, presenta valores extremos (datos atípicos), causando colas pesadas en la curva de distribución. Cuanto más alto sea el coeficiente de curtosis por encima del «nivel normal», o «cuanto más gruesas» sean las colas en el gráfico de distribución de retornos, más probable será que los retornos futuros sean extremadamente

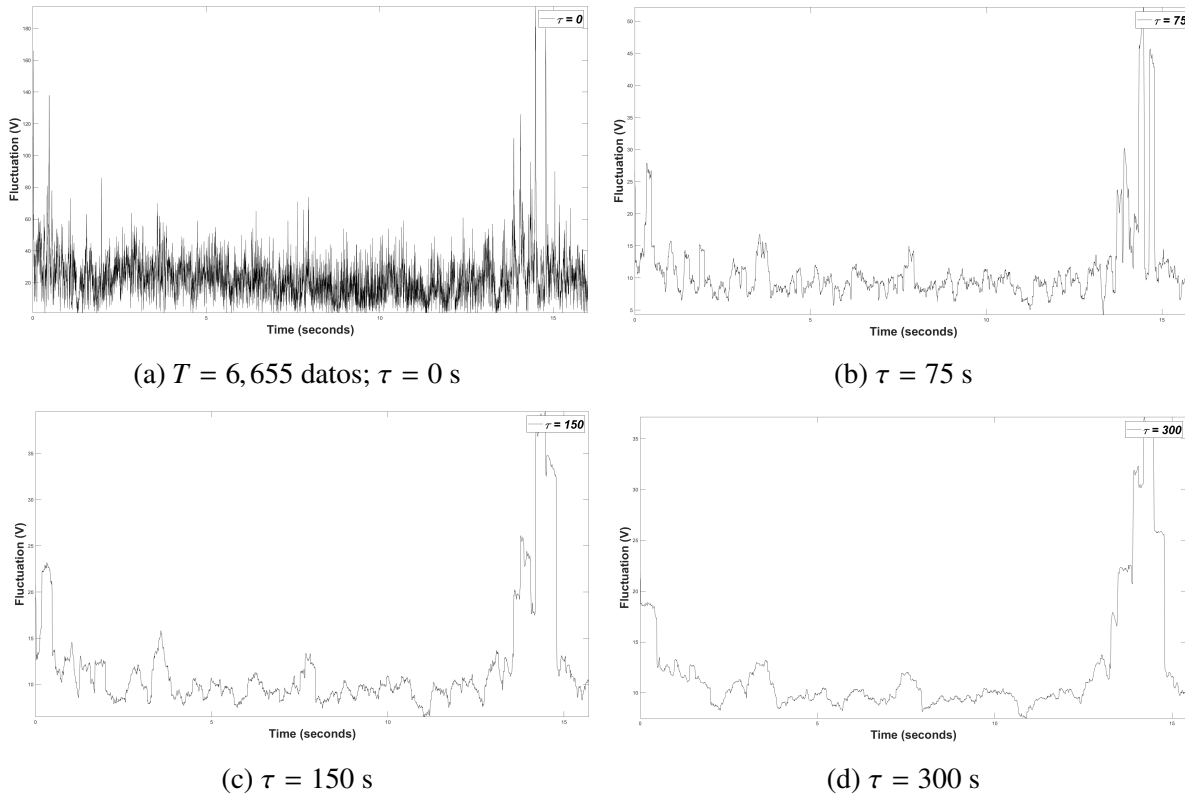


Figura 1: Series de tiempo de fluctuaciones $v(t, \tau)$, del canal F_{p1} con intervalos de tiempo, para la zona sur de la CDMX

grandes o pequeños. Para confirmar la presencia de colas pesadas (es decir, exceso de curtosis >0) en las distribuciones de las distintas zonas analizadas, se realiza una prueba estadística, la cual descartó la presencia de ruido blanco y de normalidad. De hecho, los datos originales de la muestra de cada zona, exhiben un efecto ARCH, ya que los valores cuadrados de la serie de tiempo están autocorrelacionados.

Muchos conjuntos de datos de series temporales muestran una interdependencia temporal entre sus valores, por lo que es necesario detectar y optimizar la calidad de previsión del modelo. A través del complemento NumXL, se puede simplificar el proceso de construcción de los gráficos ACF (Función de Autocorrelación) y PACF (Función de Autocorrelación Parcial), ya que dicho software, admite numerosas funciones. Los resultados sobre las series originales para todas las zonas de la CDMX, muestran la presencia de autocorrelación, tanto en la ACF como en la PACF. También, es

posible ejecutar el análisis de correlograma en las series temporales diferenciadas (es decir, en los rendimientos logarítmicos y en los valores absolutos de estos rendimientos). Los retornos del registro, muestran una fuerte interdependencia, ya que las barras laterales exceden los límites, por lo que existe presencia de autocorrelación para todas las zonas. Sin embargo, la función de autocorrelación de los niveles de partículas $PM_{2,5}$, decrece lentamente. Para cuantificar la intensidad de las correlaciones a largo plazo, se calcula el exponente de Hurst (H), utilizando la metodología de Rango Reescalado (R/S), para las series de tiempo de los niveles de partículas $PM_{2,5}$ en la CDMX.

Como indican los resultados de la Tabla 3 utilizando series de datos de rendimientos logarítmicos $\delta(\tau)$, todas las zonas de la CDMX, muestran un valor de ζ perteneciente al rango $0 < \zeta < 0,5$, lo que implica un comportamiento antipersistente o anticorrelacional. En otras palabras, se esperaría,

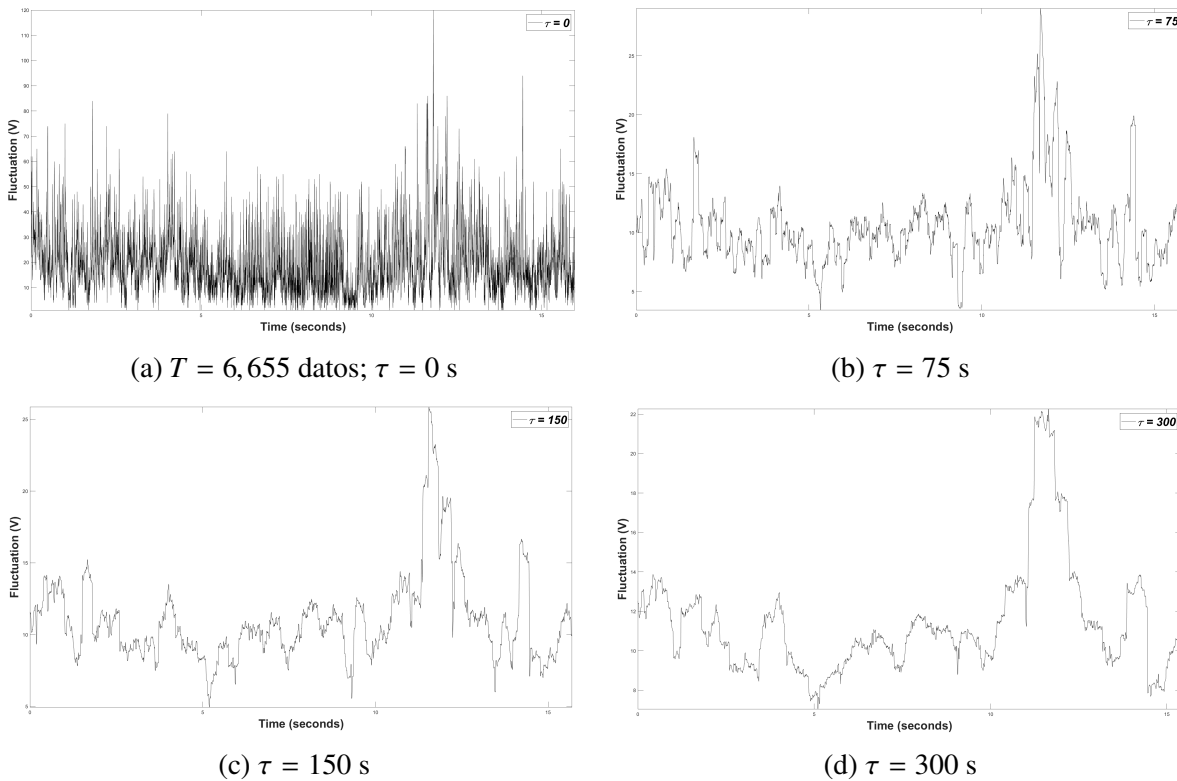


Figura 2: Series de tiempo de fluctuaciones $v(t, \tau)$, del canal F_{p1} con intervalos de tiempo, para la zona poniente de la CDMX

Tabla 3: Coeficiente de Hurst, dimensión fractal y exponente de crecimiento para las diferentes zonas analizadas de la CDMX utilizando el software @Risk

Zona	Coeficiente de Hurst (ζ) utilizando rendimientos logarítmicos $\delta(\tau)$	Coeficiente de Hurst (ζ) utilizando rendimientos logarítmicos absolutos $ \delta(\tau) $	Dimensión fractal $\delta(\tau)$	Dimensión fractal $ \delta(\tau) $	Exponente de Crecimiento (β)
Norte	0,23	0,78	1,77	1,22	0,96
Sur	0,18	0,79	1,82	1,21	0,98
Centro	0,18	0,73	1,82	1,27	0,89
Oriente	0,27	0,75	1,73	1,25	0,93
Poniente	0,16	0,84	1,84	1,16	0,96
CDMX	0,20	0,78	1,80	1,22	0,94

que tras un período de crecimiento en los niveles de partículas $PM_{2,5}$, se continuará con un período de decrecimiento, y viceversa. El haber obtenido este tipo de valores, se indica la presencia de ruido rosa, el cual se caracteriza por su alta frecuencia, y, por tanto, tiende a regresar a su lugar de procedencia, siendo señales muy irregulares. En cambio, utilizando series de tiempo del valor absoluto de los rendimientos logarítmicos $|\delta(\tau)|$, los valores de H , en todas las zonas, se ubican en el

rango $0 < H > 0,5$, lo que significa que las series de tiempo empleadas despliegan comportamiento persistente (correlaciones positivas), con un ajuste de ley de potencia. (Existe invarianza de escala asociada a correlaciones positivas a largo plazo). Hay que aclarar, que el valor absoluto de los rendimientos logarítmicos, refleja el carácter volátil de la serie, al describir la amplitud de la fluctuación, ya que éste siempre es positivo, y no existen tendencias globales que sean obvias [44].

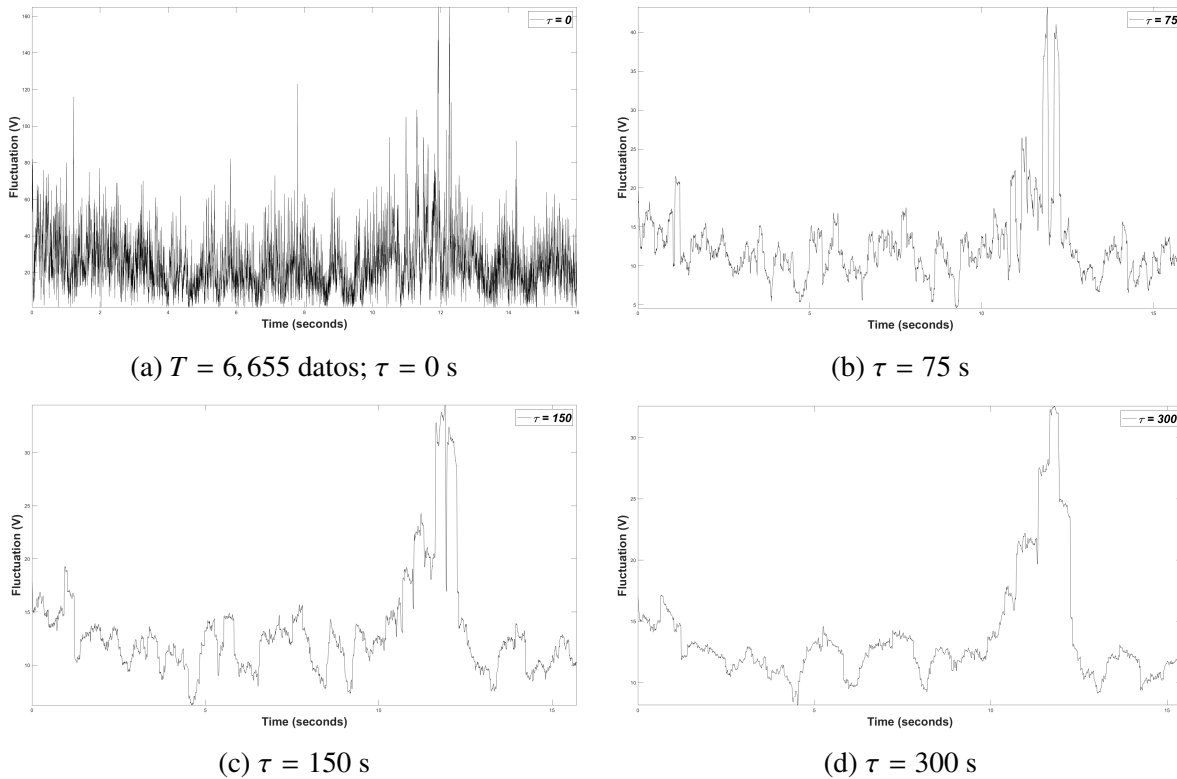


Figura 3: Series de tiempo de fluctuaciones $v(t, \tau)$, del canal F_{p1} con intervalos de tiempo, para la zona centro de la CDMX

Otro rasgo importante en el exponente de Hurst, es que éste se encuentra directamente relacionado con la dimensión fractal D , por la relación, $D = 2 - H$. En los resultados obtenidos, utilizando series de tiempo de datos de rendimientos logarítmicos $\delta(\tau)$, los valores del coeficiente H son bastante bajos, lo cual hace que se obtenga una dimensión fractal mayor, es decir, una traza más “rugosa” de acuerdo con la ecuación anterior. Mientras que los resultados, utilizando series de tiempo con valores absolutos de los rendimientos logarítmicos $|\delta(\tau)|$, muestran valores del coeficiente H bastante altos, con lo cual, la dimensión fractal D , disminuye, y la traza es “suave”, y por tanto menos rugosa. En cuanto a los valores del exponente de crecimiento β , se observa que estos valores son mayores que 0,5 para todas las zonas, sobre todo para la parte sur, norte y poniente y en menor medida para la parte centro y oriente. Lo anterior, indica que las fluctuaciones del sistema continúan creciendo en los diferentes intervalos de tiempo τ , como una ley de potencia, lo que sugiere que el

sistema en estudio, tarda mucho tiempo en asimilar la información que fluye hacia el mismo, pero parece que en algún intervalo de tiempo mayor al considerado, el sistema va a dejar de fluctuar. En la Figura 7, aparecen las series de fluctuaciones para diferentes intervalos de tiempo, en donde se aprecia que la volatilidad cambia día a día, de tal forma que las volatilidades históricas, a diferentes intervalos de tiempo, parecen ser similares. Resalta el hecho de que las fluctuaciones o volatilidades de los niveles de partículas $PM_{2,5}$ en un rango amplio de horizontes, posee una invarianza estadística autoafín, atribuida a los niveles altos de persistencia de su función de autocorrelación.

Las fluctuaciones de los valores absolutos se correlacionan con el tiempo o número de días utilizados en el análisis, dado que las fluctuaciones despliegan comportamientos cada vez más persistentes, conforme aumenta el plazo. Lo dicho hasta aquí, supone que las fluctuaciones a largo plazo, satisfacen la dinámica de escalamiento

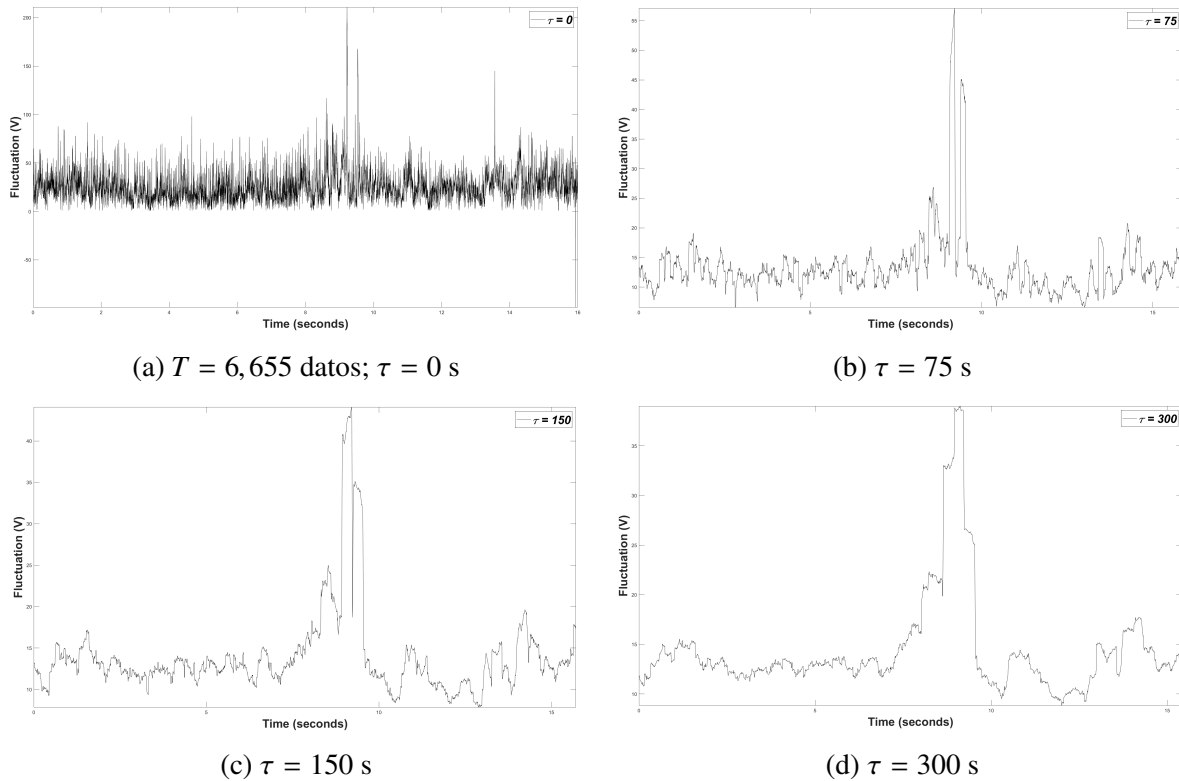


Figura 4: Series de tiempo de fluctuaciones $v(t, \tau)$, del canal F_{p1} con intervalos de tiempo, para la zona oriente de la CDMX

de la célebre ansatz de Family-Vicsek [44][45, 46, 47, 48], el cual se caracteriza por ser un sistema complejo fractal.

Para tener una visión más profunda de la dinámica de la volatilidad histórica en los niveles de $PM_{2.5}$ en la CDMX, también se realiza el análisis estadístico de las fluctuaciones o volatilidades. Por otra parte, también, se investiga la distribución de probabilidad de las series de fluctuaciones, en donde para pequeños intervalos de tiempo, los datos se ajustan mejor a las distribuciones Pearson5, valores extremos, Beta General, triangular y Gamma. En tanto, para fluctuaciones a largo plazo, los datos se ajustan a las distribuciones de valores extremos, Beta General y Gamma.

Como se puede observar en la Tabla 4, para la zona norte, la distribución de valores extremos, es la que más se ajusta a las fluctuaciones de corto y largo plazo, mientras que para las otras cuatro zonas, la distribución Beta General y Gamma, son las que mejor se ajustan a los diferentes plazos de

sus fluctuaciones.

Para predecir la evolución del sistema, se utilizó el software NumXL, el cual permite construir un modelo, con base al análisis de las series de tiempo y de las volatilidades o fluctuaciones. Dentro, del análisis de las series de tiempo, se calcula el promedio de los niveles de partículas $PM_{2.5}$ (alturas de los perfiles), en cada zona. Como se nota en la Figura 8, la zona norte es la que tarda más en mantenerse constante, ya que lo hace, a partir del promedio número 1,007, seguido de la zona oriente y poniente (ambas a partir del promedio número 860). En cambio, la zona centro y sur, a partir de la observación 810 y 734, alcanzan un estado constante en sus series.

Por otra parte, se determinó también, el momento a partir del cual, el promedio de $H|\delta(\tau)|$ que representa el valor absoluto de los rendimientos logarítmicos del exponente de Hurst de los niveles de partículas $PM_{2.5}$, se vuelve prácticamente constante. Para ello, se calculó primero, el valor absoluto de los rendimientos logarítmicos

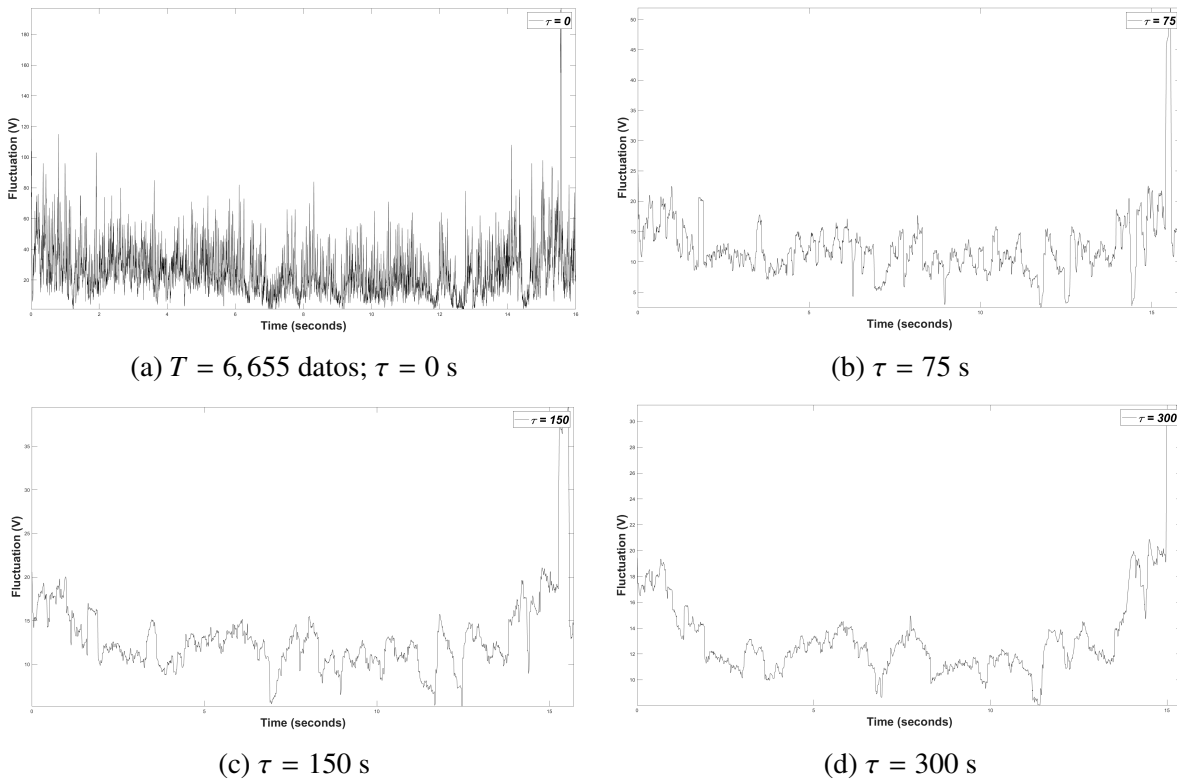


Figura 5: Series de tiempo de fluctuaciones $v(t, \tau)$, del canal F_{p1} con intervalos de tiempo, para la zona norte de la CDMX

Tabla 4: Distribuciones probabilísticas de las fluctuaciones de las series de tiempo de $PM_{2.5}$ en la CDMX, utilizando el software @Risk

	Norte	Sur	Centro	Oriente	Poniente
Fluctuaciones a corto plazo	Pearson 5 y Valores extremos	Beta General	Beta General y triangular	Gamma	Gamma y Beta General
Fluctuaciones a largo plazo	Valores extremos	Beta General	Beta General	Beta General	Gamma

$|\delta(\tau)|$, para diferentes horizontes de estudio $n = 2, 3, 4, \dots, 101$, y posteriormente, con el método de Rango Reescalado, se obtuvo $H|\delta(\tau)|$. En la Figura 8, se aprecia que el promedio de $H|\delta(\tau)|$, alcanza un estado estacionario distinto en cada zona. En la zona norte, se alcanza dicho estado, aproximadamente, en el dato 18, mientras que en el sur, se logra en el dato 38. En el caso de la zona centro, se da en el 26, en el oriente en el 52, y por último, para el poniente, en el 17. Esto se puede interpretar como los días que tardan las fluctuaciones en estabilizarse. Por tanto, el oriente, sur y centro, son las zonas que más tardan, para que su sistema alcance un estado

estacionario, en cambio en el poniente y norte, lo hacen en un periodo bastante corto. Los promedios del coeficiente de Hurst, desde el dato en que se satura el sistema, para la zona norte, sur, centro, oriente y poniente es de 0,73; 0,64; 0,72; 0,72 y 0,37; respectivamente.

Las proyecciones de los niveles de partículas $PM_{2.5}$ para un año (1,800 pasos), muestran que cada zona tendrá un comportamiento diferente. Sin embargo, tienen en común, que el sistema en cierto punto, se estabiliza. En el caso de la zona norte, centro y oriente, el comportamiento de sus fluctuaciones es muy similar, con una tendencia a la baja. En tanto, el sur, muestra

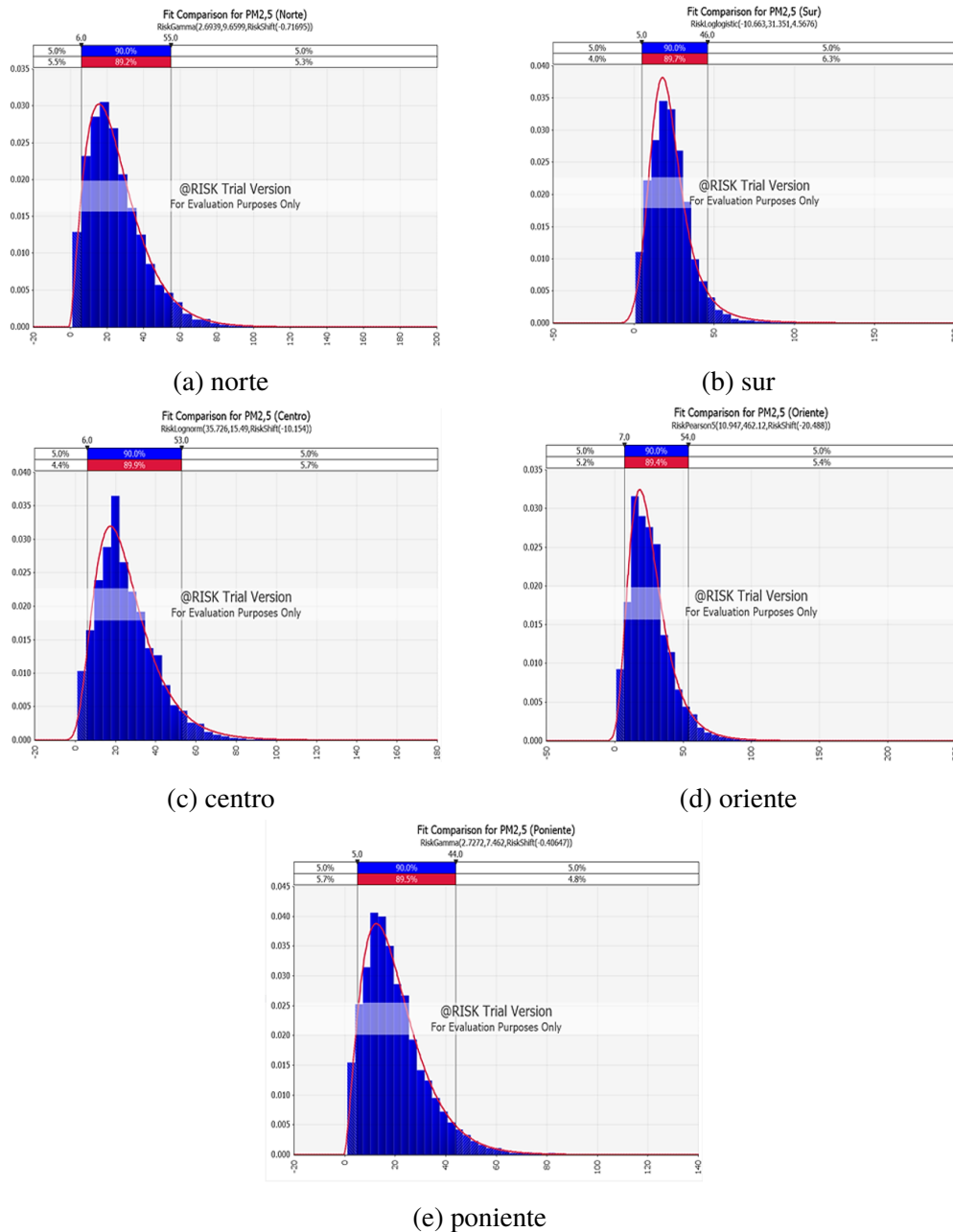


Figura 6: Ajuste de las distribuciones probabilísticas más adecuadas a los datos históricos para el nivel de PM_{2.5} en la CDMX utilizando el software @Risk

un decrecimiento exponencial, y el poniente un crecimiento temprano seguido de periodos de estabilidad (Figura 10).

Los resultados muestran que los niveles de PM_{2.5}, varían significativamente cuando se utilizan rendimientos logarítmicos, y cuando se utilizan este tipo de rendimientos, en sus valores absolutos. En el primer caso, el comportamiento de la serie es persistente (el sistema bajo estudio tiene media

estable), mientras que en el segundo caso, el comportamiento cambia a persistente, es decir, caracterizadas por efectos de memoria de largo plazo. Por su parte, los datos originales de las series de tiempo de las distintas zonas de la CDMX, se ajustan a diferentes distribuciones, además de que presentan un exceso de curtosis, lo que hace más probable que los retornos futuros sean extremadamente grandes o pequeños.

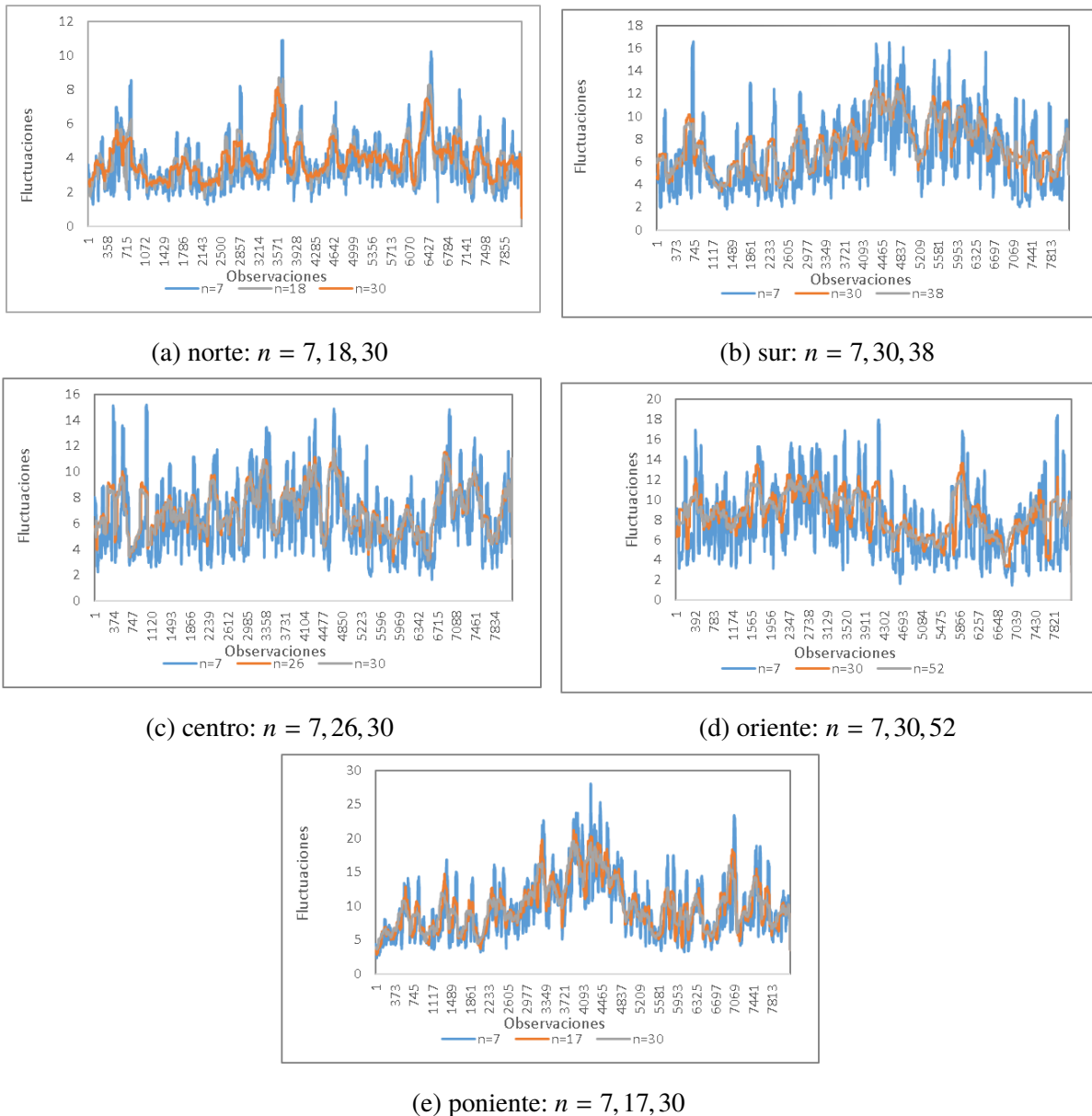


Figura 7: Volatilidades históricas para diferentes horizontes de tiempo de cada zona de estudio

En cuanto a las series de tiempo de fluctuaciones o volatilidades, estas despliegan comportamientos cada vez más persistentes conforme se alarga el horizonte de tiempo, dado los niveles significativos de persistencia en su función de autocorrelación. De igual forma, el análisis estadístico mostró que las fluctuaciones o volatilidades a diferentes intervalos, se ajustan a distribuciones de valores extremos para el caso del norte, mientras que para las zonas restantes, se ajustan mejor a la distribución Beta General y Gamma.

PM_{2,5}, utilizando el análisis de dinámica fractal, permiten conocer mejor la respuesta que puede tener el sistema, a lo largo de un horizonte de tiempo. En otras palabras, al conocer el momento en el que el sistema colapsa, nos brinda un periodo más exacto para pronosticar el comportamiento del sistema, y de esta manera, se puedan implementar a tiempo, mejores estrategias y controles para la disminución de dicho contaminante, sin tener que esperar a que se dé una contingencia ambiental para actuar.

Las proyecciones de los niveles de partículas

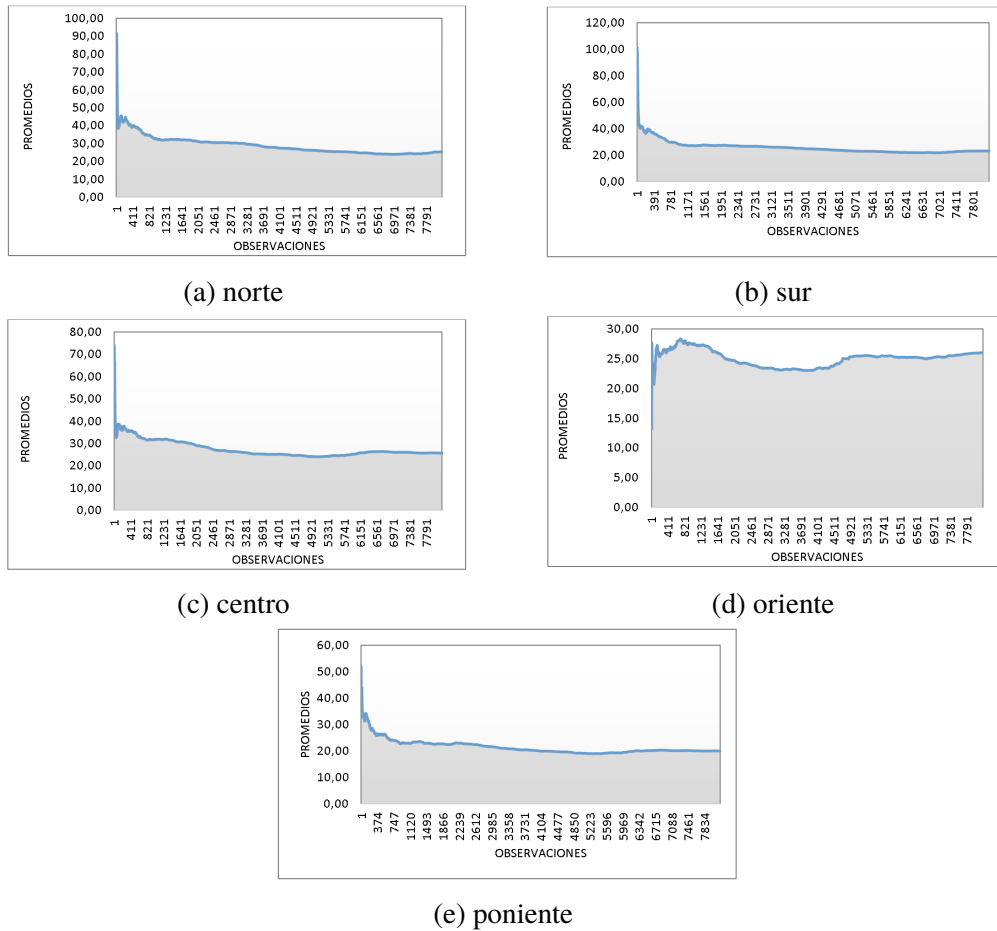


Figura 8: Promedio de los niveles de partículas $PM_{2,5}$ (alturas de los perfiles) en cada zona analizada en la CDMX

4. Conclusiones

Todo parece indicar, que los resultados de las diferentes zonas analizadas, muestran comportamientos muy similares en los niveles de partículas $PM_{2,5}$, por lo que la ciudad parece ser muy homogénea, ya que no hay un área que se diferencie demasiado de las demás, lo cual da la posibilidad de instrumentar de manera integrada, acciones tendientes a la gestión de riesgos a la salud por emisión de estas partículas.

El estudio de $PM_{2,5}$ implica una gran complejidad, ya que sus niveles de concentración varían en cada país o región. Hay una infinidad de variables que afectan las fuentes de aumento de las concentraciones de $PM_{2,5}$, y por tanto, la dinámica de sus series de tiempo, como lo son: las geográficas, climáticas, antropogénicas, meteorológicos, etc. Esto hace que los modelos de predicción de

las partículas $PM_{2,5}$, no aplique el supuesto de normalidad. Dada esta infinidad de fuentes no controladas, generan un comportamiento inusual en el sistema.

En el caso de la Ciudad de México, esto no es diferente, ya que los datos originales y las fluctuaciones de las series de tiempo de las distintas áreas analizadas, no se ajustan a una sola distribución, y muestran valores extremos, causados probablemente por todas estas fuentes externas y de las cuales no se puede tener ningún control, pero que al tener conocimiento del comportamiento de dicho sistema a lo largo del tiempo, se puede mitigar los riesgos a la salud, por emisión de estas partículas.

El caso específico de la Ciudad de México, es difícil comparar los resultados obtenidos, con otros estudios que abordan la misma problemática

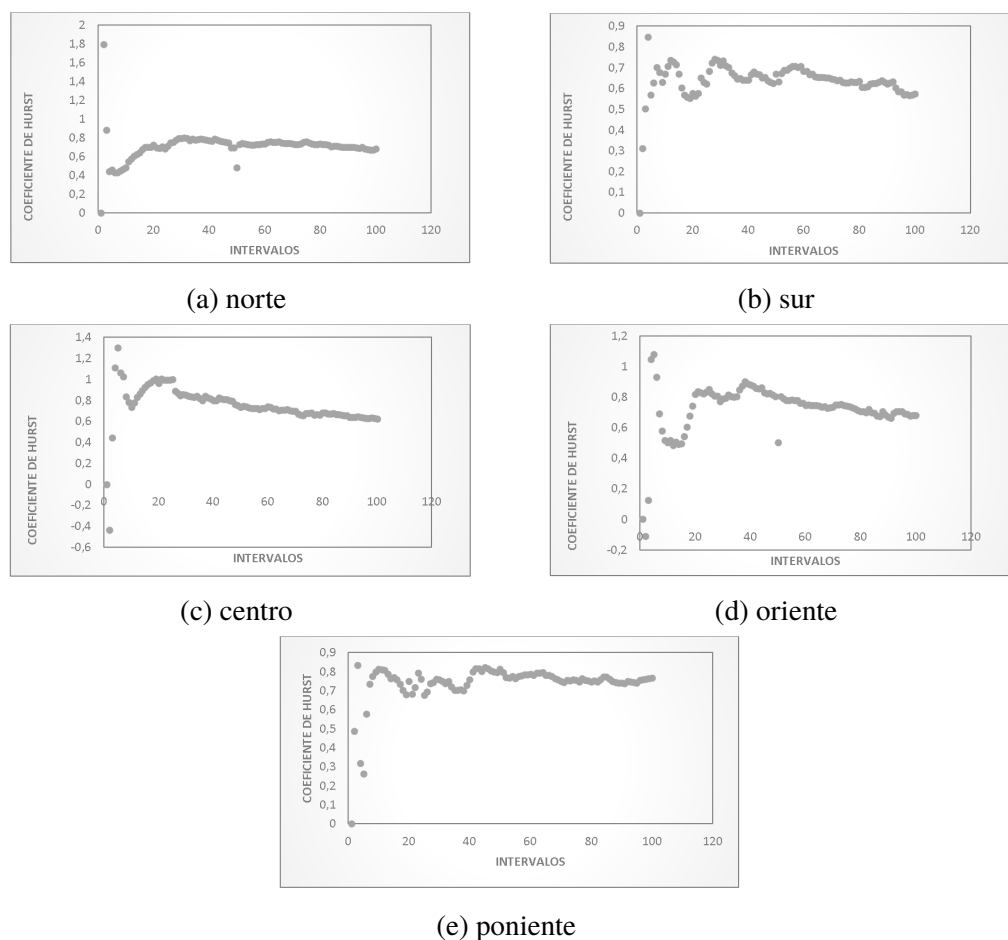


Figura 9: Promedios globales $H_{|\delta(\tau)|}$ del nivel de $PM_{2,5}$ para las diferentes zonas analizadas en la CDMX de cada zona de estudio, obtenidas con el software NumXL

de $PM_{2,5}$, ya que cada investigador, utiliza diferentes teorías, metodologías, modelos, métodos y técnicas. Asimismo, la gran mayoría de las investigaciones, se centran en caracterizar la composición química de dichas partículas, y así identificar las principales fuentes, que contribuyen con efectos adversos para la salud.

A pesar de lo anterior, trabajos como el de [39], que se centran en el comportamiento espacial y temporal, encuentran que hay una distribución bastante uniforme de $PM_{2,5}$ en el valle de México, lo cual, concuerda con los resultados, de la presente investigación. Asimismo, este autor encuentra la presencia de valores extremos ocasionados por hogueras y fuegos artificiales. Si bien, dentro de nuestros resultados se encontró la presencia de valores atípicos en las series analizadas, no se tuvo como objetivo descubrir, si estos hallazgos

se debían a fuentes biogénicas o antropogénicas. También, algo que coincidió con investigaciones, como la de Zhang, Ni & Ni (2016), es que las asimetrías se vuelven cada vez más débiles con el aumento del tamaño de las ventanas, lo cual indica cambios dinámicos en la correlación multiescala para series temporales $PM_{2,5}$. Al igual que [49], coincidimos en que el análisis fractal, es capaz de detectar la complejidad del conjunto de datos al escalar datos empíricos, ya que las series temporales por dimensión fractal, permiten definir los niveles de episodios de contaminación.

Al momento de construir las distintas series de tiempo, se descubrió que existen grandes diferencias diarias en la concentración media de $PM_{2,5}$ en el área de la Ciudad de México, lo cual coincide con lo expuesto por [41]. Sin embargo, estos autores incorporan predictores espaciales y

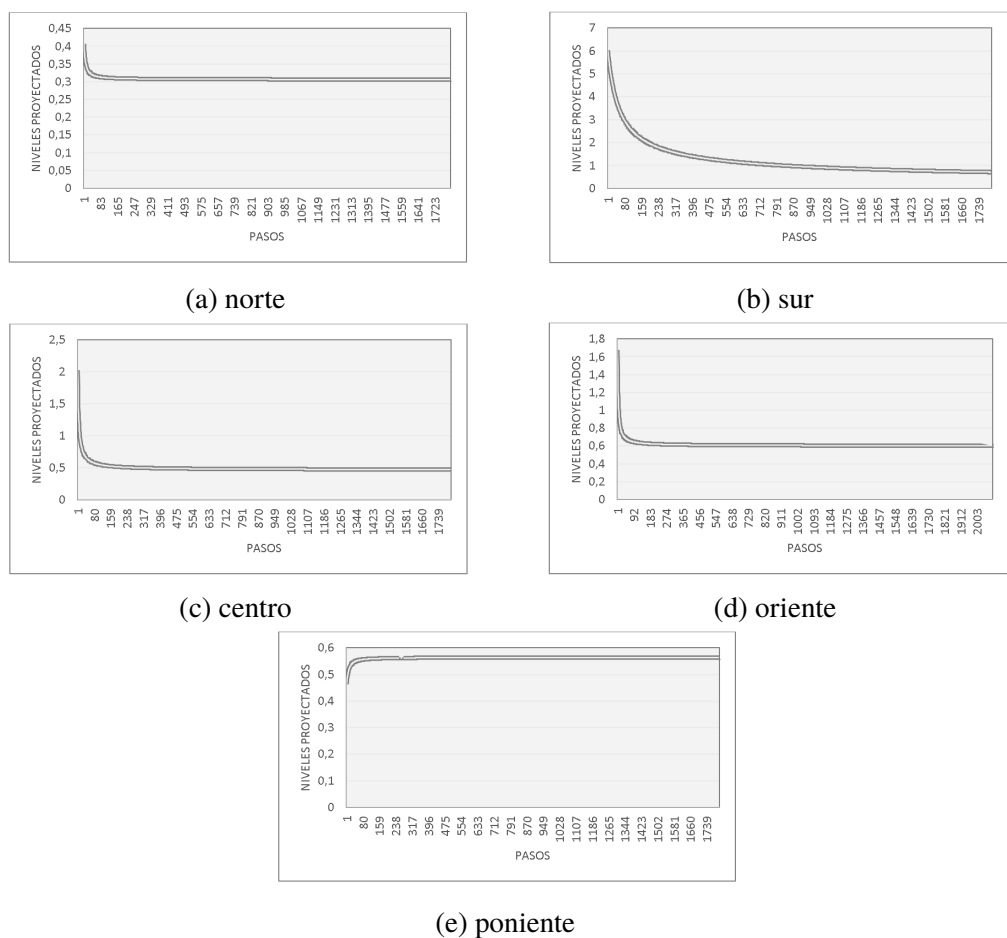


Figura 10: Proyecciones utilizando las volatilidades del nivel de $PM_{2.5}$ para las diferentes zonas analizadas en la CDMX, obtenidas con uso del software NumXL

temporales, junto con efectos aleatorios específicos del día, para tener en cuenta estas variaciones temporales. Por lo tanto, para posibles nuevas investigaciones, es importante tener en cuenta estas cuestiones, ya que como muestra [40], en sus hallazgos, las fuentes estacionarias podrían desempeñar un papel fundamental en el aumento de las concentraciones de $PM_{2.5}$.

La aportación más importante de este estudio es que se cumplió con el objetivo de caracterizar la dinámica de las partículas $PM_{2.5}$, en diversas zonas de la Ciudad de México, hallando distintos patrones, a diferentes escalas de tiempo-espacio, y sobre todo un comportamiento complejo en los niveles de $PM_{2.5}$. Lo antes descrito, permitió generar proyecciones a largo plazo relevantes, para la toma de decisiones en materia de política pública ambiental, además, el diseño de medidas

estratégicas de control. Algunas de ellas podrían ser educación (desde los niños) y la generación y uso de conocimiento científico (mayor inversión como porcentaje del PIB), fundamentalmente. También, se debe reconocer que es imperativo aprender a usar los recursos limitados del planeta. Esto último, ya se estimaba y advertía, desde inicios de los años 70, en el libro “Limits to Growth” [50].

La generalidad de literatura que aborda la problemática sobre los niveles de $PM_{2.5}$, sólo se concentra en caracterizar la composición química de dichas partículas, para así, identificar las principales fuentes que contribuyen efectos adversos para la salud. También, la mayoría utilizan modelos clásicos, y son pocos aquellos que se arriesgan a utilizar herramientas más sofisticadas y complejas. Por lo cual, en futuras investigaciones, sería interesante crear un modelo más robusto

que abarque, tanto un análisis gravimétrico y químico, como un análisis factorial, con series de tiempo, e incluso utilizar otras herramientas, como la simulación de valores extremos, o modelos evolutivos, como las redes neuronales y algoritmos genéticos.

5. Referencias

- [1] Organización Mundial de la Salud, “Calidad del aire y salud,” Organización Mundial de la Salud, Nota descriptiva, 2020.
- [2] Secretaría del Medio Ambiente y Recursos Naturales, “Estimación de impactos en salud por contaminación atmosférica en el región centro del país y alternativas de control,” Instituto Nacional de Salud Pública, México, Informe técnico, 2016.
- [3] Organización Panamericana de la Salud, “Calidad del aire,” Organización Panamericana de la Salud, Nota descriptiva, 2020.
- [4] M. Perevochtchikova, “La situación actual del sistema de monitoreo ambiental en la Zona Metropolitana de la Ciudad de México,” *Estudios demográficos y urbanos*, vol. 24, no. 3, pp. 513–547, 2009.
- [5] A. Navarro-Arredondo, “Control de la contaminación atmosférica en la Zona Metropolitana del Valle de México,” *Estudios demográficos y urbanos*, vol. 34, no. 3, pp. 631–663, 2019.
- [6] V. Mugica, F. Mugica, M. Torres, and J. Figueroa, “PM_{2.5} Emission Elemental Composition from Diverse Combustion Sources in the Metropolitan Area of Mexico City,” *The Scientific World Journal*, vol. 8, pp. 275–286, 2008.
- [7] R. D. Godoy, “Sources of Risk to Health by Exposure to PM_{2.5} in Mexico City,” *Epidemiology*, vol. 19, no. 1, pp. S223–S224, 2008.
- [8] Z.-Q. Jiang, W.-J. Xie, W.-X. Zhou, and D. Sornette, “Multifractal analysis of financial markets,” *Reports on Progress in Physics*, vol. 82, pp. 1–145, 2019.
- [9] F. Ramírez, “Comparación entre modelo browniano, a través de la metodología Box-JenKins y el análisis multifractal: Aplicación al sector financiero,” Tesis de Licenciatura, Universidad Autónoma del Estado de México, Estado de México, 2018.
- [10] B. Mandelbrot, *The Fractal Geometry of Nature*. New York, USA: Times Books, 1982.
- [11] X. Feng, Q. Li, Y. Zhu, J. Hou, L. Jin, and J. Wang, “Artificial neural networks forecasting of PM_{2.5} pollution using air mass trajectory based geographic model and wavelet transformation,” *Atmospheric Environment*, vol. 107, pp. 118–128, 2015.
- [12] X. Qiao, Q. Ying, X. Lid, H. Zhang, J. Hu, Y. Tang, and X. Chen, “Source apportionment of PM_{2.5} for 25 Chinese provincial capitals and municipalities using a source-oriented Community Multiscale Air Quality model,” *The Science of the total environment*, vol. 612, pp. 462–471, 2018.
- [13] L. Tang, T. Nagashima, K. Hasegawa, T. Ohara, K. Sudo, and N. Itsubo, “Development of human health damage factors for PM_{2.5} based on a global chemical transport model,” *The International Journal of Life Cycle Assessment*, vol. 23, pp. 2300–2310, 2018.
- [14] I. Kloog, B. Ridgway, P. Koutrakis, B. A. Coull, and J. D. Schwartz, “Long- and short-term exposure to PM_{2.5} and mortality: using novel exposure models,” *Epidemiology*, vol. 24, no. 4, pp. 555–561, 2013.
- [15] B. Liu, J. Wua, J. Zhang, L. Wang, J. Yang, D. Liang, Q. Dai, X. Bi, Y. Feng, Y. Zhang, and Q. Zhang, “Characterization and source apportionment of PM_{2.5} based on error estimation from EPA PMF 5.0 model at a medium city in China,” *Environmental Pollution*, vol. 222, pp. 10–22, 2017.
- [16] I. Kloog, A. A. Chudnovsky, A. C. Just, F. Nordio, P. Koutrakis, B. A. Coull, A. Lyapustin, Y. Wang, and J. Schwartz, “A new hybrid spatio-temporal model for estimating daily multi-year PM_{2.5} concentrations across northeastern USA using high resolution aerosol optical depth data,” *Atmospheric Environment*, vol. 95, pp. 581–590, Oct. 2014.
- [17] M. Eeftens, R. Beelen, K. de Hoogh, T. Bellander, G. Cesaroni, M. Cirach, C. Declercq, A. Dèdelè, E. Dons, A. de Nazelle, K. Dimakopoulou, K. Eriksen, G. Falq, P. Fischer, C. Galassi, R. Gražulevičienė, J. Heinrich, B. Hoffmann, M. Jerrett, D. Keidel, M. Korek, T. Lanki, S. Lindley, C. Madsen, A. Mølter, G. Nádor, M. Nieuwenhuijsen, M. Nonnemacher, X. Pedeli, O. Raaschou-Nielsen, E. Patelarou, U. Quass, A. Ranzi, C. Schindler, M. Stempfelet, E. Stephanou, D. Sugiri, M.-Y. Tsai, T. Yli-Tuomi, M. J. Varró, D. Vienneau, S. v. Klot, K. Wolf, B. Brunekreef, and G. Hoek, “Development of Land Use Regression Models for PM_{2.5}, PM_{2.5} Absorbance, PM₁₀ and PM_{coarse} in 20 European Study Areas; Results of the ESCAPE Project,” *Environmental Science & Technology*, vol. 46, pp. 11 195–11 205, 2012.
- [18] X. Hu, L. A. Waller, A. Lyapustin, Y. Wang, M. Z. Al-Hamdan, W. L. Crosson, M. G. Estes Jr, S. M. Estes, D. A. Quattrochi, S. J. Puttaswamy, and Y. Liu, “Estimating ground-level PM_{2.5} concentrations in the Southeastern United States using MAIAC AOD retrievals and a two-stage model,” *Remote Sensing of Environment*, vol. 140, pp. 220–232, 2014.
- [19] D. J. Nowak, S. Hirabayashi, A. Bodine, and R. Hoehn, “Modeled PM_{2.5} removal by trees in ten U.S. cities and associated health effects,” *Environmental Pollution*, vol. 178, pp. 395–402, 2013.
- [20] K. de Hoogh, H. Hérítier, M. Stafoggia, N. Künzli, and I. Kloog, “Modelling daily PM_{2.5} concentrations at high spatio-temporal resolution across Switzerland,” *Environmental Pollution*, vol. 233, pp. 1147–1154, 2018.

- [21] C. Zhang, Z. Ni, L. Ni, J. Li, and L. Zhou, "Asymmetric multifractal detrending moving average analysis in time series of PM_{2,5} concentration," *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, vol. 457, pp. 322–330, 2016.
- [22] P. Perez and G. Salini, "PM_{2,5} forecasting in a large city: Comparison of three methods," *Atmospheric Environment*, vol. 42, no. 35, pp. 8219–8224, 2008.
- [23] C. Hart, *Doing a Literature Review: Releasing the Research Imagination*. University of Chester, UK: Sage Publications Ltd, 2018.
- [24] J. Jesson, L. Matheson, and F. M. Lacey, *Doing Your Literature Review: Traditional and Systematic Techniques*. University of Chester, UK: SAGE Publications, 2011.
- [25] L. A. Machi and B. T. McEvoy, *The Literature Review: Six Steps to Success*. University of Chester, UK: SAGE Publications, 2009.
- [26] D. Ridley, *The Literature Review: A Step-by-Step Guide for Students*. University of Chester, UK: SAGE Publications, 2012.
- [27] A. Serenko and N. Bontis, "Investigating the current state and impact of the intellectual capital academic discipline," *Journal of Intellectual Capital*, vol. 14, no. 4, pp. 476–500, 2013.
- [28] P. Creme and M. R. Lea, *Escribir en la universidad CDMX*. México: Gedisa Mexicana, 2017.
- [29] M. Walker, *Cómo escribir trabajos de investigación*. México: Gedisa Maexicana, 2007.
- [30] X. Liu, J. Li, Y. Qu, T. Han, L. Hou, J. Gu, C. Chen, Y. Yang, X. Liu, T. Yang, Y. Zhang, H. Tian, and M. Hu, "Formation and evolution mechanism of regional haze: a case study in the megacity Beijing, China," *Atmospheric Chemistry and Physics*, vol. 13, no. 9, pp. 4501–4514, 2013.
- [31] E. Vega, E. Reyes, H. Ruiz, J. García, G. Sánchez, G. Martínez-Villa, U. González, J. C. Chow, and J. G. Watson, "Analysis of PM_{2,5} and PM₁₀ in the Atmosphere of Mexico City during 2000-2002," *Journal of the Air & Waste Management Association*, vol. 54, no. 7, pp. 786–798, 2004.
- [32] E. Vega, E. Reyes, G. Sánchez, E. Ortiz, M. Ruiz, J. Chow, J. Watson, and S. Edgerton, "Basic statistics of PM_{2.5} and PM₁₀ in the atmosphere of Mexico City," *Sci Total Environ*, vol. 287, no. 3, pp. 167–176, Mar. 2002.
- [33] J. C. Chow, J. G. Watson, S. A. Edgerton, and E. Vega, "Chemical composition of PM_{2,5} and PM₁₀ in Mexico City during winter 1997," *Science of The Total Environment*, vol. 287, no. 3, pp. 177–201, Mar. 2002.
- [34] M. A. Martínez, P. Caballero, O. Carrillo, A. Mendoza, and G. M. Mejia, "Chemical characterization and factor analysis of PM_{2.5} in two sites of Monterrey, Mexico," *Journal of the Air & Waste Management Association*, vol. 62, no. 7, pp. 817–827, 2012.
- [35] J. E. Gómez-Perales, R. N. Colvile, M. J. Nieuwenhuijzen, A. Fernández-Bremauntz, V. J. Gutiérrez-Avedoy, V. H. Páramo-Figueroa, S. Blanco-Jiménez, E. Bueno-López, F. Mandujano, R. Bernabé-Cabanillas, and E. Ortiz-Segovia, "Commuters' exposure to PM_{2,5}, CO, and benzene in public transport in the metropolitan area of Mexico City," *Atmospheric Environment*, vol. 38, no. 8, pp. 1219–1229, 2004.
- [36] G. Li, W. Lei, N. Bei, and L. T. Molina, "Contribution of garbage burning to chloride and PM_{2,5} in Mexico City," *Atmospheric Chemistry and Physics*, vol. 12, no. 18, pp. 8751–8761, 2012.
- [37] R. V. Díaz and E. R. Dominguez, "Health risk by inhalation of PM_{2,5} in the metropolitan zone of the City of Mexico," *Ecotoxicol Environ Saf.*, vol. 72, no. 3, pp. 866–871, 2009.
- [38] J. B. Ordieres, E. P. Vergara, R. S. Capuz, and R. E. Salazar, "Neural network prediction model for fine particulate matter (PM_{2,5}) on the US–Mexico border in El Paso (Texas) and Ciudad Juárez (Chihuahua)," *Environmental Modelling & Software*, vol. 20, no. 5, pp. 547–559, May 2005.
- [39] O. Amador-Muñoz, R. Villalobos-Pietrini, J. Miranda, and L. E. Vera-Avila, "Organic compounds of PM_{2,5} in Mexico Valley: Spatial and temporal patterns, behavior and sources," *Science of The Total Environment*, vol. 409, no. 8, pp. 1453–1465, 2011.
- [40] D. López-Veneroni, "The stable carbon isotope composition of PM_{2,5} and PM₁₀ in Mexico City Metropolitan Area air," *Atmospheric Environment*, vol. 43, no. 29, pp. 4491–4502, 2009.
- [41] A. C. Just, R. O. Wright, J. Schwartz, B. A. Coull, A. A. Baccarelli, M. M. Tellez-Rojo, E. Moody, Y. Wang, A. Lyapustin, and I. Kloog, "Using High-Resolution Satellite Aerosol Optical Depth To Estimate Daily PM_{2,5} Geographical Distribution in Mexico City," *Environmental Science & Technology*, vol. 49, no. 14, pp. 8576–8584, 2015.
- [42] Gobierno de la Ciudad de México, "Calidad del aire. Partículas suspendidas," Secretaría del Medio Ambiente. Dirección General de Calidad del Aire, México, Reporte técnico, 2019.
- [43] O. Morales, "Modelos mecánicos de la dinámica fractal del mercado petrolero," Tesis doctoral, Instituto Politécnico Nacional-Escuela Superior de Ingeniería Macánica y Eléctrica, Ciudad de México, México, 2004.
- [44] O. Morales, A. Balankin, and L. M. Hernández, "Metodología de predicción de precios del petróleo basada en dinámica fractal," *Científica*, vol. 9, pp. 3–11, 2005.
- [45] F. Family and T. Vicsek, "Scaling of the active zone in the Eden process on percolation networks and the ballistic deposition model," *Journal of Physics A: Mathematical and General*, vol. 18, pp. L75–L81, 1985.
- [46] T. Vicsek and F. Family, "Dynamic Scaling for

- Aggregation of Clusters,” *Physical Review Letters*, vol. 52, pp. 1669–1672, 1984.
- [47] T. Vicsek, *Fractal Growth Phenomena*. Singapur: World Scientific Publishing Company, 1992.
- [48] F. Family and T. Vicsek, *Dynamics of Fractal Surfaces*. Singapur: World Scientific Publishing Company, 1991.
- [49] V. Evagelopoulos, S. Zoras, A. Triantafyllou, and T. Albanis, “PM₁₀ -PM_{2,5} time series and fractal analysis,” *Global NEST Journal*, vol. 8, no. 3, pp. 234–240, 2006.
- [50] D. H. Meadows, J. Randers, and D. L. Meadows, *Limits to Growth: The 30-Year Update White River Junction*. Vermont, USA: Chelsea Green Publishing, 2004.