

## EL MÉTODO DE FASE INTEGRAL APLICADO A PERTURBACIONES COSMOLÓGICAS INFLACIONARIAS.

**The Phase-Integral Method Applied to Inflationary Cosmological Perturbations.**

CLARA I. ROJAS C.  
Departamento de Física Aplicada.  
IVIC/Mérida. Mérida, Venezuela  
clararoj@gmail.com

**Fecha de Recepción:** 11/08/2007, **Fecha de Revisión:** 13/11/2008, **Fecha de Aceptación:** 25/11/2008

### Resumen

Se ha implementado el método de fase integral desarrollado por Fröman y Fröman para calcular el espectro de potencias en el modelo de inflación de ley de potencias. La fórmula de fase integral para el espectro de potencias escalar se obtiene explícitamente hasta noveno orden de aproximación. Se muestra que el método de fase integral predice el espectro de potencias escalar con un error menor que 0.0015%.

**Palabras clave:** Espectros de potencias, método de fase integral, perturbaciones cosmológicas inflacionarias.

### Abstract

It has been implemented the phase-integral approximation devised by Fröman and Fröman for deriving the scalar power spectrum in the power-law inflationary model. The phase-integral formula for the scalar power spectrum is explicitly obtained up to the ninth order of the phase-integral approximation. It is showed that the phase-integral approximation predicts the scalar power spectrum with an error lower than 0.0015%.

**Key words:** Inflationary cosmological perturbations, phase-integral method, power spectrum.

## 1. Introducción

Los nuevos resultados de los tres años de observación reportados por el WMAP favorecen la teoría del universo inflacionario (Spergel *et al.*, 2007). Los datos son consistentes con un universo plano y con un espectro para las perturbaciones primordiales casi invariante de escala. En este artículo se presenta la aproximación de fase integral (Fröman & Fröman, 1965, 1996, 2002) como un nuevo método para calcular el espectro de potencias escalar en el modelo de inflación de ley de potencias. Por lo general, no es posible encontrar soluciones exactas de las ecuaciones que gobiernan la evolución de las perturbaciones escalares para cualquier modelo de inflación. En consecuencia, los métodos de aproximación resultan muy útiles. El método de aproximación utilizado tradicionalmente para resolver las ecuaciones de las perturbaciones escalares es la aproximación slow-roll (Stewart & Lyth, 1993), aunque, recientemente, algunos autores han analizado este problema utilizando métodos semiclásicos, tales como: el método WKB con la modificación introducida por Langer (Langer, 1937; Martin & Schwarz, 2003; Casadio, *et al.*, 2005) y el método de aproximación uniforme (Habib, Heitmann, Jungman, & Molina-París, 2002; Habib, *et al.*, 2004). El artículo está estructurado de la siguiente manera. En la sección 2 se presentan las ecuaciones de movimiento para el campo escalar. En la sección 3 se presenta la ecuación de las perturbaciones escalares, así como las ecuaciones para el espectro de potencias y el índice espectral escalar. En la sección 4 se hace una revisión del método de fase integral y las fórmulas de conexión. En la sección 5 se describe el modelo de inflación de ley de potencias y se utiliza el método de fase integral para calcular tanto el espectro de potencias como el índice espectral escalar. En la sección 6 se discuten los resultados obtenidos. Finalmente, en la sección 7, se presentan las conclusiones de este trabajo.

## 2. Ecuaciones de movimiento

Cuando la inflación es producida por un campo escalar homogéneo, la ecuación dinámica para el inflatón  $\phi$  está dada por la ecuación

$$\ddot{\phi}(t) + 3H\dot{\phi}(t) + \frac{\partial V(\phi)}{\partial \phi} = 0, \quad (1)$$

donde el punto significa derivada respecto al tiempo  $t$ . La evolución del parámetro de Hubble  $H(t) = \dot{a}(t) = a(t)$ , donde  $a(t)$  es el factor de escala, está dada por la ecuación de Friedmann

$$H^2 = \frac{1}{3M_{\text{Pl}}^2} \left[ \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + V(\phi) \right], \quad (2)$$

donde  $M_{\text{Pl}} = m_{\text{pl}}/\sqrt{8\pi}$  es la masa de Planck reducida. Una vez que se resuelven las ecuaciones de movimiento el siguiente paso es construir la ecuación de las perturbaciones escalares.

## 3. Ecuación de las perturbaciones

Las perturbaciones escalares  $u_k$  en un universo dominado por un campo escalar  $\phi$  satisfacen la ecuación diferencial (Mukhanov, Feldman, & Brandenberger, 1992)

$$u_k'' + \left( k^2 - \frac{z_S''}{z_S} \right) u_k = 0, \quad (3)$$

donde la prima indica derivada con respecto al tiempo conforme  $\eta = \int dt/a$  y  $z_S = a\phi'/H$  con  $H = a'/a$ . Las soluciones de la Ec. 3 exhiben el siguiente comportamiento asintótico

$$u_k \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2k}} e^{-ik\eta}, \quad -k\eta \rightarrow \infty, \quad (4)$$

para escalas de longitud menores que el horizonte de Hubble y

$$u_k \rightarrow A_k z_S, \quad -k\eta \rightarrow 0, \quad (5)$$

para escalas mayores que el horizonte de Hubble. Una vez que se resuelve la Ec. 3 para diferentes valores del momento  $k$ , se puede calcular el espectro de potencias para las perturbaciones escalares a través de la relación

$$P_S(k) = \lim_{-k\eta \rightarrow 0} \frac{k^3}{2\pi^2} \left| \frac{u_k(\eta)}{z_S(\eta)} \right|^2. \quad (6)$$

El índice espectral para las perturbaciones escalares está definido por (Liddle & Lyth, 2000)

$$n_S(k) = 1 + \frac{d \ln P_S(k)}{d \ln k}. \quad (7)$$

#### 4. El método de fase integral

El método de fase integral es un método semiclásico que se utiliza para encontrar la solución aproximada de toda ecuación diferencial de la forma

$$\frac{d^2 u_k(z)}{dz^2} + R(z)u_k(z) = 0, \quad (8)$$

la cual se puede escribir como

$$\frac{d^2 u_k(z)}{dz^2} + \frac{R(z)}{\lambda} u_k(z) = 0, \quad (9)$$

donde  $\lambda$  es un parámetro pequeño que al final se hará igual a la unidad para obtener la solución de la ecuación diferencial original (Ec.8). La solución de fase integral de la ecuación diferencial (Ec. 9) se encuentra insertando la expansión

$$u_k(z) = \exp \left[ \frac{i}{\lambda} \int^z \sum_{\nu=0}^{\infty} y_{\nu}(z) \lambda^{\nu} dz \right], \quad (10)$$

en la Ec. 9 (Fröman & Fröman, 1965), de donde se obtiene que

$$\left[ \sum_{\nu=0}^{\infty} y_{\nu}(z) \lambda^{\nu} \right]^2 - i \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{dy_{\nu}(z)}{dz} \lambda^{\nu+1} - Q^2(z) = 0. \quad (11)$$

Si el coeficiente de cada potencia de  $\lambda$  en (Ec. 11) se hace igual a cero, se obtiene la relación de recurrencia

$$y_0 = \pm R^{1/2}(z), \quad (12)$$

$$\frac{dy_{\nu-1}}{dz} = -i \sum_{\mu=0}^{\nu} y_{\mu} y_{\nu-\mu}, \quad (\nu = 1, 2, \dots), \quad (13)$$

donde las funciones  $y_1, y_2, y_3, y_4, \dots$  se pueden determinar sucesivamente. En 1966, Fröman (Fröman, 1966) usando la fórmula de recurrencia (Ec. 13) demostró que en la serie (Ec. 10) la suma de los términos impares se puede expresar en función de la suma de los términos pares, además obtuvo una solución formal de la Ec. 8 que contiene sólo los términos pares. Para valores impares de  $\nu$  ( $= 2N + 1$ ) Fröman notó que la fórmula de recurrencia (Ec. 13) se puede escribir como

$$\frac{dy_{2N}}{dz} = -2i \sum_{n=0}^N y_{2n} y_{2N+1-2n}, \quad (N = 0, 1, 2, \dots). \quad (14)$$

Si se multiplican por  $\lambda^{2N}$  ambos lados de la Ec. 14 y se suma sobre todos los valores posibles de  $N$ , se obtiene que

$$\sum_{N=0}^{\infty} \frac{dy_{2N}}{dz} \lambda^{2N} = -\frac{2i}{\lambda} \sum_{N=0}^{\infty} \sum_{n=0}^N y_{2n} y_{2N+1-2n} \lambda^{2N+1}. \quad (15)$$

El lado derecho de la Ec. 15 se puede escribir como el producto de dos series, de este modo se obtiene que

$$\sum_{N=0}^{\infty} \frac{dy_{2N}}{dz} \lambda^{2N} = -\frac{2i}{\lambda} \left( \sum_{n=0}^{\infty} y_{2n} \lambda^{2n} \right) \times \left( \sum_{n=0}^{\infty} y_{2n+1} \lambda^{2n+1} \right), \quad (16)$$

por consiguiente

$$\frac{i}{\lambda} \sum_{n=0}^{\infty} y_{2n+1} \lambda^{2n+1} = -\frac{1}{2} \frac{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{dy_{2n}}{dz} \lambda^{2n}}{\sum_{n=0}^{\infty} y_{2n} \lambda^{2n}} = \frac{d}{dz} \ln \left[ \left( \sum_{n=0}^{\infty} y_{2n} \lambda^{2n} \right)^{-1/2} \right], \quad (17)$$

así

$$\exp \left( \frac{i}{\lambda} \sum_{n=0}^{\infty} y_{2n+1} \lambda^{2n+1} \right) = c \times \left( \sum_{n=0}^{\infty} y_{2n} \lambda^{2n} \right)^{-1/2}, \quad (18)$$

donde c es una constante. La Ec. 18 hace posible eliminar la suma de los términos impares que aparecen en la solución formal (Ec. 10) la cual ahora se puede escribir, excepto por un factor constante, como

$$u_k(z) = \frac{\exp \left( \frac{i}{\lambda} \int^z \sum_{n=0}^{\infty} y_{2n} \lambda^{2n} dz \right)}{\left( \frac{1}{\lambda} \sum_{n=0}^{\infty} y_{2n} \lambda^{2n} \right)^{1/2}}. \quad (19)$$

Truncando la suma de los términos de orden par  $y_{2n} \lambda^{2n}$  en  $n=N$  y recordando el signo doble  $\pm$ , Fröman obtuvo dos soluciones aproximadas de orden  $2N+1$ .

#### 4.1. Aproximación de fase integral de orden arbitrario, generada a partir de una función base $Q(z)$ no especificada

Las dos soluciones (Ec. 19) de la ecuación diferencial (Ec. 8) se pueden presentar en la forma

$$u_k = q^{-1/2}(z) \exp [\pm i\omega(z)], \quad (20)$$

donde

$$\omega(z) = \int^z q(z) dz, \quad (21)$$

las cuales tienen un Wronskiano constante igual a  $-2i$ . Insertando (Ec. 20) en la ecuación diferencial (Ec. 8), se obtiene que  $q(z)$  satisface la ecuación diferencial

$$q^{-3/2} \frac{d^2}{dz^2} q^{-1/2} - \frac{R(z)}{q^2} - 1 = 0, \quad (22)$$

que de ahora en adelante será llamada la ecuación original  $q$ . Se supone que se ha determinado la función base  $Q(z)$  la cual es una solución aproximada de la Ec. 22, esto se logra si la cantidad  $\varepsilon_0$  definida por el lado izquierdo de (Ec. 22) con  $q(z)$  reemplazado por  $Q(z)$

$$\varepsilon_0 = Q^{-3/2}(z) \frac{d^2}{dz^2} Q^{-1/2}(z) - \frac{R(z)}{Q^2(z)} - 1, \quad (23)$$

es pequeña comparada con la unidad. Esta pequeñez se toma en cuenta explícitamente considerando que  $\varepsilon_0$  es proporcional a  $\lambda^2$ , donde nuevamente  $\lambda$  es un parámetro pequeño. Para ello se designa  $Q(z)$  proporcional a  $1/\lambda$  y  $R(z) - Q^2(z)$  independiente de  $\lambda$ ; es decir, se reemplaza  $R(z)$  por  $Q^2(z)/\lambda^2 + [R(z) - Q^2(z)]$ . En lugar de la ecuación diferencial original (Ec. 8) se considera la ecuación diferencial auxiliar

$$\frac{d^2 u_k}{dz^2} + \left\{ \frac{Q^2(z)}{\lambda^2} + [R(z) - Q^2(z)] \right\} u_k = 0, \quad (24)$$

donde se ha introducido el parámetro  $\lambda$ , que al final será puesto igual a la unidad. Cuando  $\lambda = 1$ , la ecuación diferencial (24) se reduce a la Ec. 8. Insertando (20) dentro de la ecuación diferencial auxiliar (24), se obtiene que la función  $q(z)$  satisface la ecuación diferencial

$$q^{1/2} \frac{d^2}{dz^2} q^{-1/2} - q^2 + \frac{Q^2(z)}{\lambda^2} + R(z) - Q^2(z) = 0, \quad (25)$$

la cual será llamada la ecuación auxiliar  $q$  que se reduce a la ecuación diferencial original  $q$  (Ec. 22) cuando se coloca  $\lambda = 1$ . Reemplazando la derivada respecto a  $z$  por la derivada con respecto a la variable  $\xi = \int^z Q(z) dz$ , se obtiene que

$$1 - \left[ \frac{q\lambda}{Q(z)} \right]^2 + \varepsilon_0 \lambda^2 + \left[ \frac{q\lambda}{Q(z)} \right]^{1/2} \times \frac{d^2}{d\xi^2} \left[ \frac{q\lambda}{Q(z)} \right]^{-1/2} \lambda^2 = 0. \quad (26)$$

Para obtener una solución formal de la Ec. 26 se hace la identificación

$$\frac{q\lambda}{Q(z)} = \sum_{n=0}^{\infty} Y_{2n} \lambda^{2n}, \quad (27)$$

donde se considera que  $Y_0$  es diferente de cero y  $Y_{2n}$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ) es independiente de  $\lambda$ . Insertando la expansión (Ec. 27) en (Ec. 26) se obtiene que

$$1 - \left( \sum_{n=0}^{\infty} Y_{2n} \lambda^{2n} \right)^2 + \varepsilon_0 \lambda^2 + \left( \sum_{n=0}^{\infty} Y_{2n} \lambda^{2n} \right)^{1/2} \times \frac{d^2}{d\xi^2} \left( \sum_{n=0}^{\infty} Y_{2n} \lambda^{2n} \right)^{-1/2} = 0. \quad (28)$$

Utilizando un programa de manipulación simbólica, se igualan a cero los coeficientes de las potencias sucesivas de  $\lambda$  y se obtiene que los

primeros  $Y_{2n}$  son

$$Y_0 = \pm 1, \quad (29)$$

$$Y_2 = \frac{1}{2} \varepsilon_0, \quad (30)$$

$$Y_4 = -\frac{1}{8} (\varepsilon_0^2 + \varepsilon_2), \quad (31)$$

$$Y_6 = \frac{1}{32} (2\varepsilon_0^3 + 5\varepsilon_1^2 + 6\varepsilon_0\varepsilon_2 + \varepsilon_4), \quad (32)$$

$$Y_8 = -\frac{1}{128} (5\varepsilon_0^4 + 30\varepsilon_0^2\varepsilon_2 + 50\varepsilon_0\varepsilon_1^2 + 10\varepsilon_0\varepsilon_4 + 28\varepsilon_1\varepsilon_3 + 19\varepsilon_2^2 + \varepsilon_6), \quad (33)$$

con

$$\varepsilon_\nu = \frac{d^\nu \varepsilon_0}{d\xi^\nu}. \quad (34)$$

En 1966, Fröman (Fröman, 1966) obtuvo las expresiones hasta  $Y_4$  a través de la fórmula de recurrencia (Ec. 28). Posteriormente, en 1972, Campbell (Campbell, 1972) derivó hasta el término  $Y_{20}$ . Truncando la serie (Ec. 27) con  $\lambda = 1$  se obtiene que

$$q(z) = \sum_{n=0}^N Y_{2n} Q(z). \quad (35)$$

Sustituyendo la Ec. 35 en la Ec. 21 se tiene

$$\omega(z) = \sum_{n=0}^N \omega_{2n}(z), \quad (36)$$

donde

$$\omega_{2n}(z) = \int^z Y_{2n} Q(z) dz. \quad (37)$$

Insertando las Ecs. 35 y 36 en la Ec. 20 se obtiene la aproximación de fase integral de orden  $2N + 1$  generada a partir de la función base no especificada  $Q(z)$ , como la solución aproximada a la ecuación diferencial original (Ec. 8). La

función base  $Q(z)$  no está especificada y su elección depende del problema que se considere. Sin embargo, en muchos casos, se puede elegir  $Q^2(z) = R(z)$  y la aproximación de fase integral a primer orden se reduce a la aproximación WKB. Cuando se utiliza la aproximación a primer orden, es conveniente elegir un cero de  $Q^2(z)$  como el límite de integración inferior en la definición (Ec. 37). Sin embargo, para órdenes superiores, cuando  $2N + 1 > 1$  esto no es posible porque la función  $q(z)$  tiene singularidades es los ceros de  $Q^2(z)$ . Es conveniente expresar  $\omega_{2n}(z)$  para  $N > 0$  por medio de una integral de contorno sobre una superficie de Riemann de dos hojas sobre la cual  $q(z)$  es univaluada (Fröman, 1966). Se define

$$\omega_{2n}(z) = \frac{1}{2} \int_{\Gamma_{z_{\text{ret}}}} Y_{2n}(z) Q(z) dz, \quad (38)$$

donde  $z_{\text{ret}}$  es el cero de  $Q^2(z)$  y  $\Gamma_{z_{\text{ret}}}$  es un contorno de integración que comienza en el punto correspondiente a  $z$  sobre una hoja de Riemann adyacente al plano complejo, que encierra el punto  $z_{\text{ret}}$  en el sentido positivo o negativo y termina en el punto  $z$ .

Si la función  $Q(z)$  ha sido bien elegida, la cantidad  $\mu$  definida por

$$\mu = \mu(z, z_0) = \left| \int_{z_0}^z \epsilon(z) q(z) dz \right|, \quad (39)$$

debe ser mucho menor que uno. La función  $\epsilon(z)$  está dada por el lado izquierdo de la Ec. 22. Es importante destacar que la integral  $\mu$  es una medida de la calidad de la aproximación de fase integral (Fröman & Fröman, 2002).

## 4.2. Fórmulas de conexión

Se considera que la función  $Q^2(z)$  es real sobre el eje real. Bajo esta restricción se llamará punto de retorno al cero de  $Q^2(z)$ . Se desea conocer la fórmula de conexión a ambos lados de un punto de

retorno aislado  $z_{\text{ret}}$ , es decir, un punto de retorno que está lejos de otros puntos de retorno. Se utilizarán los términos “región clásicamente permitida” y “región clásicamente prohibida” para hacer referencia a las regiones sobre el eje real donde  $Q^2(z) > 0$  y  $Q^2(z) < 0$ , respectivamente.

La fórmula de conexión para trazar (sobre el eje real) una solución aproximada a través de un punto de retorno  $z_{\text{ret}}$  desde la región clásicamente permitida a la región clásicamente prohibida es (Fröman, 1970)

$$\begin{aligned} & |q^{-1/2}(\eta)| \cos \left[ |\omega(\eta)| + \frac{\pi}{4} \right] \\ & \longrightarrow |q^{-1/2}(\eta)| \exp [|\omega(\eta)|], \end{aligned} \quad (40)$$

y desde la región clásicamente prohibida a la región clásicamente permitida es (Fröman, 1970)

$$\begin{aligned} & |q^{-1/2}(\eta)| \exp [-|\omega(\eta)|] \\ & \longrightarrow 2 |q^{-1/2}(\eta)| \cos \left[ |\omega(\eta)| - \frac{\pi}{4} \right]. \end{aligned} \quad (41)$$

Es importante enfatizar el carácter unidireccional de las fórmulas de conexión (Ecs. 40 y 41), lo cual significa que el trazo de la solución siempre debe hacerse en la dirección de las flechas que se indican en las Ecs. 40 y 41.

## 5. Inflación de ley de potencias

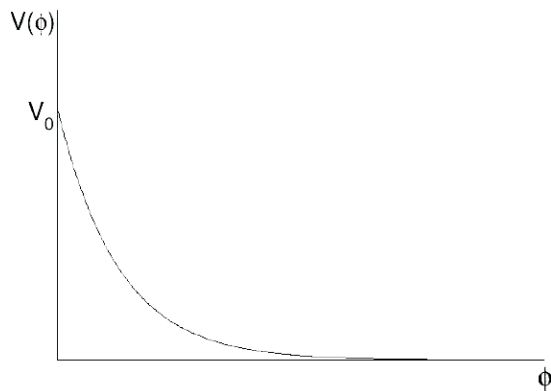
### 5.1. El modelo

La inflación de ley de potencias es un modelo muy simple que resuelve tanto el problema de la planitud como el problema del horizonte; pero que no es aceptada físicamente, debido a que carece de una manera natural para que la inflación termine. Como este modelo puede ser discutido analíticamente (Abbott, 1984; Lucchin & Matarrese, 1985; Martin, 1998; Schwarz, 1998), permite probar otras aproximaciones que son necesarias en inflación en el caso de modelos que no exhiben solución analítica exacta. La inflación de ley de potencias se presenta cuando el potencial del inflatón toma la forma exponencial

(Liddle & Lyth, 2000)

$$V(\phi) = V_0 \exp\left(-\sqrt{\frac{2}{p}} \frac{\phi}{M_{Pl}}\right), \quad (42)$$

donde  $V_0$  y  $p$  son constantes. La forma del potencial se muestra en la Fig. 1.



**Fig. 1.** Esquema del potencial del inflatón  $V(\phi)$  correspondiente al modelo de inflación de ley de potencias.

### 5.2. Ecuaciones de movimiento

Con el potencial del inflatón dado por la Ec. 42 se resuelven las ecuaciones de movimiento (Ec. 1) y (Ec. 2) para encontrar el parámetro de Hubble  $H$  y el campo escalar  $\phi$ . En el caso del modelo de inflación de ley de potencias estas ecuaciones tienen solución analítica exacta. Haciendo los cálculos respectivos se encuentra que

$$H = \sqrt{\frac{pV_0}{(3p-1)M_{Pl}^2}} \exp\left(-\frac{1}{\sqrt{2p}} \frac{\phi}{M_{Pl}}\right) \quad (43)$$

$$\phi = \sqrt{2p} M_{Pl} \ln \left[ \sqrt{\frac{V_0}{p(3p-1)}} \frac{t}{M_{Pl}} \right] \quad (44)$$

La deducción de las expresiones para  $H$  y  $\phi$  (Ecs. 43 y 44) es necesaria dado que ello permite determinar el factor de escala durante la inflación, el cual está dado por

$$a = a_0 t^p, \quad (45)$$

donde se debe cumplir la condición  $p > 1$  para que la expresión (Ec. 45) satisfaga la condición de inflación  $\ddot{a} > 0$ .

### 5.3. Ecuación de las perturbaciones

La construcción de la ecuación de las perturbaciones escalares es fundamental para determinar el espectro de potencias durante la inflación de ley de potencias. Dicha ecuación al igual que las condiciones asintóticas (Ec.4) y (Ec.5) está escrita en el tiempo conforme  $\eta$ , por lo tanto, el factor de escala  $a$  y  $z_s$  se deben escribir en función de esta variable. Usando  $dt = a d\eta$ , se encuentra que

$$a(\eta) = l_0 \eta^{\frac{1}{2}-\nu}, \quad (46)$$

donde  $\nu = \frac{3}{2} + \frac{1}{p-1}$

$$z_s(\eta) = 2^{1/2} l_0 M_{Pl} \sqrt{\frac{3-2\nu}{1-2\nu}} \eta^{\frac{1}{2}-\nu}. \quad (47)$$

Sustituyendo  $a(\eta)$  y  $z_s(\eta)$  en la Ec. 3 se construye la ecuación que gobierna las perturbaciones escalares en el modelo de inflación de ley de potencias, la cual está dada por

$$\frac{d^2 u_k}{d\eta^2} + \left[ k^2 - \frac{(\nu^2 - \frac{1}{4})}{\eta^2} \right] u_k = 0, \quad (48)$$

donde  $u_k$  debe satisfacer las condiciones asintóticas (Ec. 4 y 5). La Ec. 48 es una ecuación diferencial de Bessel y tiene solución analítica exacta, por lo tanto en el modelo de inflación de ley de potencias se puede comparar el resultado obtenido a través de la aproximación de fase integral con el resultado analítico exacto.

#### 5.3.1. Solución analítica

La solución analítica exacta que satisface las

condiciones de borde (Ec. 4 y 5) es una función de Hankel de primera especie de orden  $\nu$  (Abramowitz & Stegun, 1965)

$$u_k^{\text{ex}} = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{i(\nu+\frac{1}{2})\frac{\pi}{2}} \sqrt{-\eta} H_\nu^{(1)}(-k\eta). \quad (49)$$

Para calcular el espectro de potencias se necesita el límite de la solución (Ec. 49) cuando  $-\kappa\eta \rightarrow 0$  (Abramowitz & Stegun, 1965)

$$u_k^{\text{ex}} \rightarrow e^{i(\nu-\frac{1}{2})\frac{\pi}{2}} 2^{\nu-\frac{3}{2}} \frac{\Gamma(\nu)}{\Gamma(\frac{3}{2})} \frac{1}{\sqrt{2k}} (-k\eta)^{\frac{1}{2}-\nu}. \quad (50)$$

A partir de las expresiones (Ec. 6, 47 y 50) se encuentra el espectro de potencias escalar

$$P_S^{\text{ex}}(k) = \frac{1}{l_0^2 M_{\text{Pl}}^2} g_\nu^{\text{ex}} k^{3-2\nu}, \quad (51)$$

donde  $g_\nu^{\text{ex}}$  viene dado por

$$g_\nu^{\text{ex}} = \left( \frac{1-2\nu}{3-2\nu} \right) \left[ \frac{2^{\nu-2} \Gamma(\nu)}{2\pi \Gamma(\frac{3}{2})} \right]^2, \quad (52)$$

el índice espectral escalar es constante y está dado por

$$n_S^{\text{ex}} = 3 - \frac{2p}{p-1}. \quad (53)$$

### 5.3.2. Solución aproximada

Se utiliza el método de fase integral hasta noveno orden (Rojas & Villalba, 2007; Villalba & Rojas, 2007). Para el modelo de inflación de ley de potencias se debe resolver una ecuación diferencial del tipo

$$\frac{d^2 u_k}{d\eta^2} + R(\eta) u_k = 0, \quad (54)$$

donde

$$R(\eta) = k^2 - \frac{(\nu^2 - \frac{1}{4})}{\eta^2}. \quad (55)$$

Introduciendo el cambio de variable  $z = k\eta$ , la Ec. 54 toma la forma

$$\frac{d^2 u_k}{dz^2} + R(z) u_k = 0, \quad (56)$$

con

$$R(z) = 1 + \frac{(\frac{1}{4} - \nu^2)}{z^2}, \quad (57)$$

Para resolver la Ec. 56 con el método de fase integral se debe elegir la función base  $Q(z)$ . Si se elige el cuadrado de la función base como  $Q^2(z) = R(z)$ , la cantidad  $\mu$  definida por (Ec. 39) tiene una singularidad en el origen, que es donde la condición asintótica (Ec. 5) debe ser impuesta. Para garantizar que la aproximación de fase integral sea válida en el origen se elige el cuadrado de la función base  $Q(z)$  como

$$Q^2(z) = 1 - \frac{\nu^2}{z^2}, \quad (58)$$

Finalmente, la ecuación de los modos  $k$  de las perturbaciones escalares que se resuelve es la siguiente

$$\frac{d^2 u_k}{dz^2} + Q^2(z) u_k = 0. \quad (59)$$

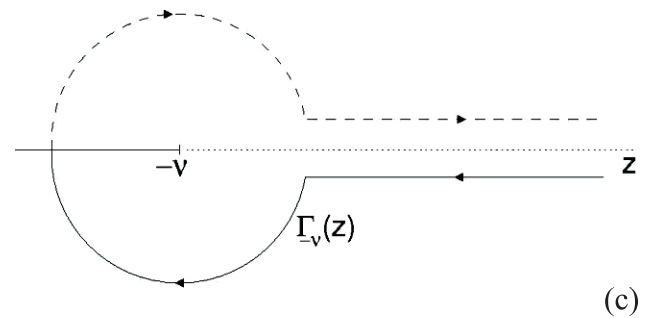
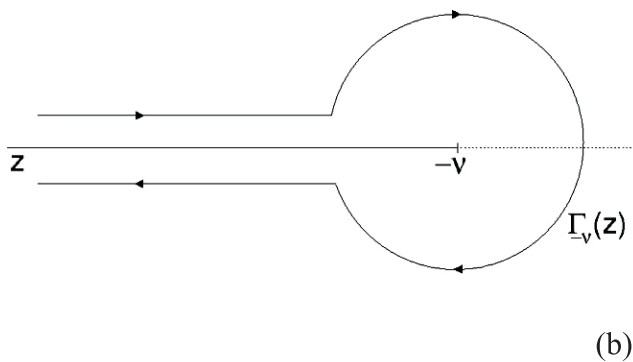
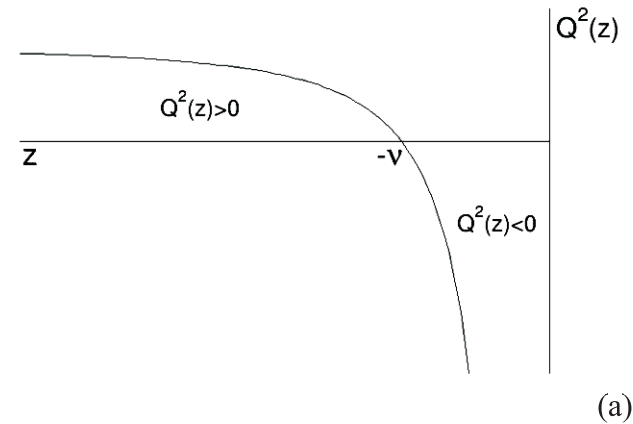
Cabe resaltar que el cuadrado de la función base  $Q^2(z)$  tiene dos puntos de retornos  $z_{\text{ret}} = \pm \nu = \pm 1,61 M_{\text{Pl}}^1$  para  $p = 10$ . Como físicamente interesa el límite  $-z \rightarrow 0$  se trabaja con el punto de retorno negativo  $-\nu$ , el cual representa al horizonte. Se tienen dos zonas donde se debe definir la solución: a) a la izquierda del punto de retorno  $-z < -\nu$  que corresponde a escalas menores que el horizonte, se encuentra la región clásicamente permitida  $Q^2(z) > 0$  y la solución oscila; b) a la

derecha del punto de retorno  $-v < -z < 0$ , que corresponde a escalas mayores que el horizonte, se encuentra la región clásicamente prohibida  $Q^2(z) < 0$  y la solución decae/crece exponencialmente. En la Fig. 2(a) se muestran las dos zonas donde se debe definir la solución.

La ecuación de los modos  $k$  de las perturbaciones escalares (Ec. 59) tratada con la aproximación de fase integral tiene las siguientes soluciones. Para  $-z < -v$

$$u_k^{pi}(z) = d_1 |q^{-1/2}(z)| \cos \left[ |\omega(z)| - \frac{\pi}{4} \right] + d_2 |q^{-1/2}(z)| \cos \left[ |\omega(z)| + \frac{\pi}{4} \right], \quad (60)$$

donde el superíndice “pi” significa fase integral. Para  $-v < -z < 0$



**Fig. 2.** (a) Comportamiento de la función  $Q^2(z)$  para  $v$  es negativo. (b) Contorno de integración  $\Gamma_{-v}(z)$  cuando  $-z < -v$ . (c) Contorno de integración  $\Gamma_{-v}(z)$  cuando  $-v < -z < 0$ . La parte que se encuentra en la segunda hoja de Riemann se indica con la línea a trazos.

$$u_k^{pi}(z) = \frac{d_1}{2} |q^{-1/2}(z)| \exp[-|\omega(z)|] + d_2 |q^{-1/2}(z)| \exp[|\omega(z)|]. \quad (61)$$

Usando la Ec. 35 hasta noveno orden ( $2N + 1 = 9 \rightarrow N = 4$ ),  $q(z)$  se expande de la siguiente forma

$$q(z) = \sum_{n=0}^4 Y_{2n} Q(z) = (Y_0 + Y_2 + Y_4 + Y_6 + Y_8) Q(z). \quad (62)$$

Se debe calcular  $Y_2, Y_4, Y_6$  y  $Y_8$  a partir de las Ecs. 30 - 33, para ello se determinan primero  $\epsilon_0 - \epsilon_6$ , a partir de las Ecs. 23 y 34, los cuales están dados por

$$\epsilon_0 = \frac{z^2}{(z^2 - v^2)^3} \left( \frac{z^2}{4} + v^2 \right), \quad (63)$$

$$\epsilon_1 = -\frac{z^2}{(z^2 - v^2)^{\frac{9}{2}}} \left( \frac{z^4}{2} + 5v^2 z^2 + 2v^4 \right), \quad (64)$$

$$\epsilon_2 = \frac{z^2}{(z^2 - v^2)^6} \left( \frac{3z^6}{2} + 28v^2 z^4 + 34v^4 z^2 + 4v^6 \right), \quad (65)$$

$$\varepsilon_3 = -\frac{z^2}{(z^2 - \nu^2)^{\frac{15}{2}}} (6z^8 + 180\nu^2z^6 + 440\nu^4z^4 + 176\nu^6z^2 + 8\nu^8), \quad (66)$$

$$\varepsilon_4 = \frac{z^2}{(z^2 - \nu^2)^9} (30z^{10} + 1320\nu^2z^8 + 5400\nu^4z^6 + 4576\nu^6z^4 + 808\nu^8z^2 + 16\nu^{10}), \quad (67)$$

$$\varepsilon_5 = -\frac{z^2}{(z^2 - \nu^2)^{\frac{21}{2}}} (180z^{12} + 10920\nu^2z^{10} + 67200\nu^4z^8 + 98112\nu^6z^6 + 38768\nu^8z^4 + 3488\nu^{10}z^2 + 32\nu^{12}), \quad (68)$$

$$\varepsilon_6 = \frac{z^2}{(z^2 - \nu^2)^{12}} (1260z^{14} + 100800\nu^2z^{12} + 870240\nu^4z^{10} + 1947456\nu^6z^8 + 1366416\nu^8z^6 + 291904\nu^{10}z^4 + 14560\nu^{12}z^2 + 64\nu^{14}). \quad (69)$$

Insertando las Ecs. 63 - 69 en las Ecs. 30 - 33, se obtiene que

$$Y_2 = \frac{z^2}{(z^2 - \nu^2)^3} \left( \frac{z^2}{8} + \frac{\nu^2}{2} \right), \quad (70)$$

$$Y_4 = -\frac{z^2}{(z^2 - \nu^2)^6} \left( \frac{25z^6}{128} + \frac{57\nu^2z^4}{16} + \frac{35\nu^4z^2}{8} + \frac{\nu^6}{2} \right), \quad (71)$$

$$Y_6 = \frac{z^2}{(z^2 - \nu^2)^9} \left( \frac{1073z^{10}}{1024} + \frac{11171\nu^2z^8}{256} + \right.$$

$$\left. + \frac{11511\nu^4z^6}{64} + \frac{611\nu^6z^4}{4} + \frac{213\nu^8z^2}{8} + \frac{\nu^{10}}{2} \right), \quad (72)$$

$$Y_8 = -\frac{z^2}{(z^2 - \nu^2)^{12}} \left( \frac{375733z^{14}}{32768} + \frac{1752101\nu^2z^{12}}{2048} + \frac{7572705\nu^4z^{10}}{1024} + \frac{4252813\nu^6z^8}{256} + \frac{1491943\nu^8z^6}{128} + \frac{39561\nu^{10}z^4}{16} + \frac{967\nu^{12}z^2}{8} + \frac{\nu^{14}}{2} \right) \quad (73)$$

Una vez calculados los  $Y_{2n}$  hasta  $N=4$ , se tiene una expresión completa para  $q(z)$  hasta noveno orden. El siguiente paso es calcular  $\omega(z)$ . Los contornos de integración que se observan en la Fig. 2(b) y 2(c) se usan para calcular esta integral a partir del segundo orden de aproximación, así

$$\begin{aligned} \omega(z) &= \omega_0(z) + \sum_{n=1}^4 \omega_{2n}(z), \\ &= \int_{-\nu}^{-k\eta} Q(z)dz + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^4 \int_{\Gamma_{-\nu}} Y_{2n}Q(z)dz. \end{aligned} \quad (74)$$

Las expresiones para  $\omega_{2n}(z)$  hasta  $N=4$  son

$$\omega_0 = \sqrt{(-k\eta)^2 - \nu^2} - \nu \arccos \frac{\nu}{-k\eta}, \quad \text{para } -k\eta < -\nu, \quad (75)$$

$$\begin{aligned} i\omega_0 &= -\sqrt{\nu^2 - (-k\eta)^2} + \\ &+ \nu \ln \left| \frac{\nu + \sqrt{\nu^2 - (-k\eta)^2}}{-k\eta} \right|, \\ &\text{para } -\nu < -k\eta < 0, \end{aligned} \quad (76)$$

$$\left. \begin{matrix} \omega_2 \\ i\omega_2 \end{matrix} \right\} = \mp \frac{1}{24 [\pm(-k\eta)^2 \mp \nu^2]^{3/2}} \times [2\nu^2 + 3(-k\eta)^2], \quad (77)$$

$$\left. \begin{matrix} \omega_4 \\ i\omega_4 \end{matrix} \right\} = \frac{1}{5760 [\pm(-k\eta)^2 \mp \nu^2]^{9/2}} \times [375(-k\eta)^6 + 3654\nu^2(-k\eta)^4 + 1512\nu^4(-k\eta)^2 - 16\nu^6], \quad (78)$$

$$\left. \begin{matrix} \omega_6 \\ i\omega_6 \end{matrix} \right\} = \mp \frac{1}{322560 [\pm(-k\eta)^2 \mp \nu^2]^{15/2}} \times [67599(-k\eta)^{10} + 1914210\nu^2(-k\eta)^8 + 4744640\nu^4(-k\eta)^6 + 1891200\nu^6(-k\eta)^4 + 78720\nu^8(-k\eta)^2 + 256\nu^{10}], \quad (79)$$

$$\left. \begin{matrix} \omega_8 \\ i\omega_8 \end{matrix} \right\} = \frac{1}{3440640 [\pm(-k\eta)^2 \mp \nu^2]^{21/2}} \times [5635995(-k\eta)^{14} + 318291750\nu^2(-k\eta)^{12} + 1965889800\nu^4(-k\eta)^{10} + 2884531440\nu^6(-k\eta)^8 + 1135145088\nu^8(-k\eta)^6 + 99783936\nu^{10}(-k\eta)^4 + 881664\nu^{12}(-k\eta)^2 - 2048\nu^{14}], \quad (80)$$

donde las expresiones superiores e inferiores en el lado izquierdo y los signos superiores e inferiores en el lado derecho de Ec. 77 - Ec. 80 corresponden a  $-k\eta < -\nu$  y  $-\nu < -k\eta < 0$ , respectivamente.

Luego de calcular  $\omega(\eta)$  a partir de las Ecs. 60 y 61, se obtiene la solución para la ecuación de las perturbaciones escalares (Ec. 48) con el método de fase integral hasta noveno orden. Las constantes  $c_1$  y  $c_2$  se determinan con el comportamiento asintótico de  $u_k$ .

Para ello se busca el límite cuando  $-k\eta \rightarrow \infty$  de la solución al lado izquierdo del punto de retorno (Ec. 60). Haciendo los cálculos respectivos se encuentra

$$u_k^{\text{pi}} \rightarrow \frac{d_1}{\sqrt{k}} \cos\left(-z - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) + \frac{d_2}{\sqrt{k}} \cos\left(-z - \frac{\nu\pi}{2} + \frac{\pi}{4}\right). \quad (81)$$

Si se elige  $d_2 = -i d_1$ , se obtiene el comportamiento asintótico deseado (Ec. 4) con

$d_1 =$  y  $d_2 =$  . Para calcular el espectro de potencias se necesita el límite cuando  $-k\eta \rightarrow 0$  de la parte creciente de la solución al lado derecho del punto de retorno (Ec. 61), así en este límite

$$u_k^{\text{pi}}(\eta) \rightarrow e^{i(\nu-\frac{1}{2})\frac{\pi}{2}} f_\nu^{\text{pi}} \frac{1}{\sqrt{k}} (-k\eta)^{\frac{1}{2}-\nu}, \quad (82)$$

donde

$$f_\nu^{\text{pi}} = (2\nu)^{\nu-\frac{1}{2}} \exp\left(-\nu + \frac{1}{12\nu} - \frac{1}{360\nu^3} + \frac{1}{1260\nu^5} - \frac{1}{1680\nu^7}\right). \quad (83)$$

Utilizando la solución (Ec. 82) se calcula el espectro de potencias escalar a partir de la Ec. 6

$$P_S^{\text{pi}}(k) = \frac{1}{l_0^2 M_{Pl}^2} g_\nu^{\text{pi}} k^{3-2\nu}, \quad (84)$$

donde

$$g_\nu^{\text{pi}} = \left(\frac{1-2\nu}{3-2\nu}\right) \left(\frac{f_\nu^{\text{pi}}}{2\pi}\right)^2, \quad (85)$$

y el índice espectral escalar es idéntico al exacto (Ec. 53)

$$n_S^{pi} = 3 - \frac{2p}{p-1} \quad (86)$$

La Ec. 83 indica el orden de la aproximación. Si se mantiene el primer término del desarrollo que está entre paréntesis en  $f_v^{pi}$ , se tiene la aproximación de fase integral a primer orden, que coincide con la aproximación WKB usando la modificación introducida por Langer (Martin & Schwarz, 2003; Casadio *et al.*, 2005). Si se mantienen los dos primeros términos, se tiene la aproximación de fase integral a tercer orden. Es importante notar que el resultado para los índices espectrales no depende del orden de aproximación que se use.

## 6. Resultados

En esta sección se compara la solución analítica exacta para las perturbaciones escalares  $u_k$  y el espectro de potencias escalar con el resultado obtenido usando la aproximación de fase integral a noveno orden. En las Fig. 3, 4 y 5 se compara la solución analítica exacta de  $Re(u_k)$ ,  $Im(u_k)$  y  $|u_k|$  con la aproximación de fase integral a noveno orden para el modelo de inflación de ley de potencias con  $p = 10$ . Las gráficas se hacen respecto al número de e-folds  $N = \ln a(\eta)$ . Se observa que las soluciones con la aproximación de fase integral divergen alrededor del cero de  $q(\eta)$ . En la Fig. 6 se compara el resultado analítico exacto del espectro de potencias escalar para diferentes valores de  $k$  con la aproximación de fase integral a noveno orden.

La precisión de la aproximación de fase integral se cuantifica a través del error relativo:

$$\text{error rel. } P_S(k) = \frac{[P_S^{pi}(k) - P_S^{ex}(k)]}{P_S^{ex}(k)} \times 100 \quad (87)$$

el cual, para la aproximación de fase integral a noveno orden es menor que 0.0015%.

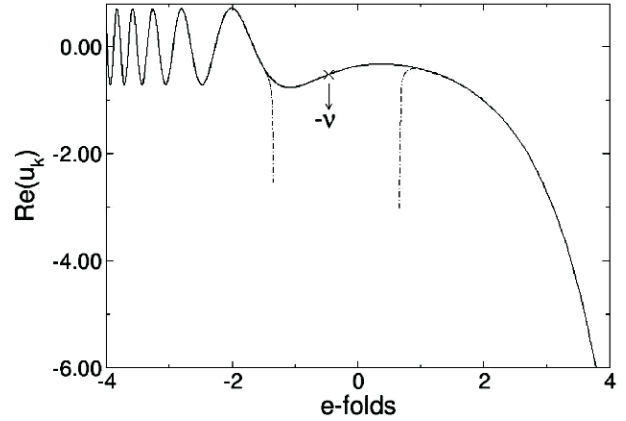


Fig. 3.  $Re(u_k)$  para el modelo de inflación de ley de potencias con  $p = 10$  para el modo  $k = 1.369 h \text{ Mpc}^{-1}$ . Línea sólida: solución analítica; línea punto-rama: aproximación de fase integral a 9no orden.

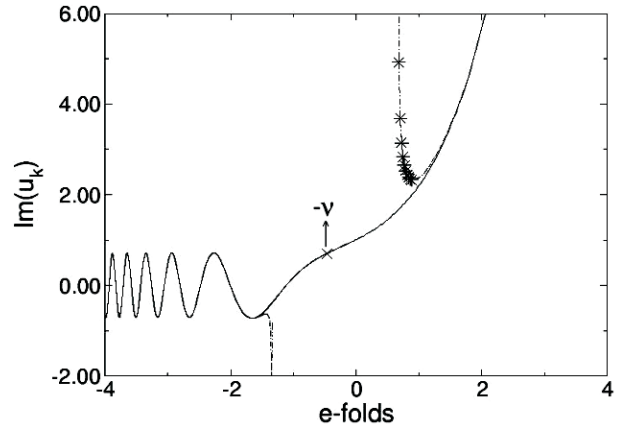
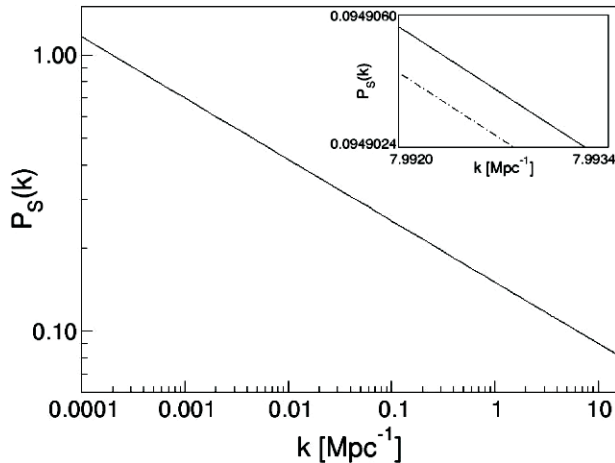


Fig. 4.  $Im(u_k)$  para el modelo de inflación de ley de potencias con  $p = 10$  para el modo  $k = 1.369 h \text{ Mpc}^{-1}$ . Línea sólida: solución analítica; línea punto-rama: aproximación de fase integral a 9no orden.



Fig. 5.  $|u_k|$  para el modelo de inflación de ley de potencias con  $p = 10$  para el modo  $k = 1.369 h \text{ Mpc}^{-1}$ . Línea sólida: solución analítica; línea punto-rama: aproximación de fase integral a 9no orden.



**Fig. 6.** Espectro de potencias escalar  $P_s(k)$  para el modelo de inflación de ley de potencias con  $p = 10$ . Línea sólida: solución analítica exacta; línea punto-rayas: aproximación de fase integral a 9no orden. El recuadro es una ampliación de la gráfica.

## 7. Conclusiones

En este artículo se propuso la aproximación de fase integral como un método novedoso para calcular el espectro de potencias escalar  $P_s(k)$  durante la inflación de ley de potencias, la cual exhibe solución analítica exacta. Con la aproximación de fase integral a noveno orden se encontró un error relativo menor que 0.0015% para  $P_s(k)$  y se obtuvo el índice espectral escalar idéntico al exacto e independiente del orden de la aproximación. En base a estos resultados se puede afirmar que la aproximación de fase integral es un método eficiente para calcular el espectro de potencias y el índice espectral escalar, es por ello que se propone para ser utilizado en la inflación caótica, la cual no tiene solución analítica exacta. Es muy importante poder contar con estas soluciones semianalíticas tomando en cuenta que los cálculos numéricos son costosos en tiempo de cómputo.

## 8. Bibliografía

Abbott, L. F. (1984). Constraints on generalized inflationary cosmologies. *Nuc. Phys. B.* 244(2): 541-548.

Abramowitz, M., & I. A. Stegun. (1965).

*Handbook of mathematical functions.* Dover, New York.

Campbell, T. (1972). Computation of a class of functions useful in the phase-integral approximation. i. results. *J. Comp. Phys.* 10: 308-315.

Casadio, T., F. Finelli, M. Luzzi, & G. Venturi. (2005). Improved wkb analysis of cosmological perturbations. *Phys. Rev. D.* 71(4): 043517.

Fröman, T., & P. O. Fröman. (1965). *Jwkb approximation. contribution to the theory.* North-Holland Publishing Company, Amsterdam.

Fröman, T. (1966). Outline of a general theory for higher order approximations of the jwkbtype. *Ark. Fys.* 32(32): 541-548.

Fröman, T. (1970). Connection formulas for certain higher order phase-integral approximations. *Ann. Phys.*, 61(2), 451-464.

Fröman, T., & P. O. Fröman. (1996). *Phaseintegral method. allowing nearlying transition points.* Springer, New York.

Fröman, T., & P. O. Fröman. (2002). *Physical problems solved by the phase-integral method.* Cambridge University Press, Cambridge.

Habib, T., K. Heitmann, G. Jungman, & C. Molina-París. (2002). The inflationary perturbation spectrum. *Phys. Rev. Lett.* 89(28): 281301.

Habib, T., A. Heinen, K. Heitmann, G. Jungman, & C. Molina-París. (2004). Characterizing inflationary perturbations: The uniform approximation. *Phys. Rev. D,* 70(8), 083507.

Langer, T. (1937). On the connection formulas and the solutions of the wave equation. *Phys. Rev.* 51(8): 669-676.

Liddle, T., & D. H. Lyth. (2000). *Cosmological inflation and large-scale structure.* Cambridge

University Press, Cambridge.

Lucchin, F. & S. Matarrese. (1985). Powerlaw inflation. *Phys. Rev. D.* 32(6): 1316- 1322.

Martin, T. (1998). Influence of cosmological transitions on the evolution of density perturbations. *Phys. Rev. D.* 57(6): 3302-3316.

Martin, T., & D. J. Schwarz. (2003). Wkb approximation for inflationary cosmological perturbations. *Phys. Rev. D.* 67(8): 083512.

Mukhanov, T., H. A. Feldman, & R. H. Brandenberger. (1992). Theory of cosmological perturbations. *Phys. Rep.* 215(5-6), 203-333.

Rojas, T., & V. M. Villalba (2007). Computation of inflationary cosmological perturbations in the power-law inflationary model using the phase-integral method. *Phys. Rev. D.* 75(6): 063518.

Schwarz, T. (1998). Predictions of inflation: the slow roll approximation vs. exact results. *arXiv:astro-ph/9805313*.

Spergel, D. N., R. Bean, O. Doré, M. R.olta, V. L. Bennett, G. Hinshaw. (2007). Wilkinson microwave anisotropy probe (wmap) three year results: implications for cosmology. *Astrophys. J.*, 170, S377.

Stewart, T., & D. H. Lyth. (1993). A more accurate analytic calculation of the spectrum of cosmological perturbations produced during inflation. *Phys. Lett. B.* 302(2-3): 171-175.

Villalba, T., & C. Rojas. (2007). Application of the phase-integral method in some inflationary scenarios. *J. Phys.: Conf. Ser.* 66, 012034.