

CONSIDERACIONES PRÁCTICAS EN EL DISEÑO ALGEBRAICO DE CONTROLADORES.

Considering Practical Limitations in the Algebraic Design of Controllers.

PEDRO A. TEPPA G.¹ y JOSÉ R. PÉREZ C.²

¹Departamento de Procesos y Sistemas, Universidad Simón Bolívar, Apartado Postal 89000, Caracas-1080, Venezuela.

² Coordinación de Ingeniería de Sistemas, Universidad Simón Bolívar.

¹pteppa@usb.ve

Fecha de Recepción: 30/01/2008, **Fecha de Revisión:** 07/02/2008, **Fecha de Aceptación:** 20/11/2008

Resumen

La parametrización de Youla-Kucera es usada en la determinación de la familia de controladores que estabiliza internamente un sistema de control para luego mediante el empleo de técnicas de conformación del lazo resolver el problema de desempeño robusto para plantas de fase mínima. La metodología propuesta permite considerar aspectos prácticos del diseño de sistemas de control tales como el seguimiento, el rechazo a perturbaciones, la limitación del esfuerzo de control, la supresión del ruido y la robustez.

Palabras clave: Conformación del lazo, desempeño robusto, diseño algebraico, parametrización de Youla – Kucera .

Abstract

The Youla-Kucera parameterization is used to find the family of controllers for which a feedback control system is internally stable. Then, by employing loopshaping techniques, the robust performance problem is solved for minimum phase plants. The proposed methodology allows considering practical aspects in the design of feedback control systems such as tracking, disturbance rejection, input constraints, noise suppression and plant uncertainty.

Key words: Loop-shaping, robust performance, algebraic design, Youla - Kucera parameterization.

1. Introducción.

Uno de los aspectos de la teoría moderna de control es el empleo creciente del álgebra (Tannenbaum, 1981; Francis & Vidyasagar, 1983; Desoer & Gustafson, 1984; Skelton & Iwasaki, 1995). El formalismo algebraico ofrece varias herramientas para el diseño de sistemas de control, una de ellas es la denominada técnica de *factorización*. Su objetivo es la obtención de una parametrización sencilla de todos los controladores que estabilizan una planta dada.

Esta factorización es mejor conocida en la literatura especializada como parametrización de Youla o de Youla-Kucera, dado que (Youla *et al.*, 1974, 1976) resolvieron el problema de parametrización en el contexto de los sistemas en tiempo continuo y (Kucera, 1979) en el de los sistemas en tiempo discreto. Un inconveniente de la formulación original de la técnica de parametrización es su robustez (Doyle *et al.*, 1990; Zhou, 1998; Goodwin *et al.*, 2001). Si la ley de control se calcula sobre la base de un solo modelo, será muy probable que la aplicación de ésta, sobre el sistema real, no reproduzca el comportamiento observado preliminarmente sobre el modelo. La razón de esta discrepancia es atribuida a que por motivos de simplicidad, el modelo matemático que sirvió en la concepción del controlador, descartó fenómenos como: las variaciones de ciertos parámetros, las dinámicas rápidas, entre otros. Una forma de evitar tal discrepancia consiste en calcular la ley de control, para una familia de modelos a la que supondremos pertenece el sistema real. Dicha familia estará constituida por un modelo nominal y por variaciones alrededor del mismo, denominadas incertidumbres. A tal familia se le llama modelo incierto. De esta manera, si el controlador se concibe de forma de satisfacer los objetivos impuestos a los diferentes modelos pertenecientes a la familia, se tendrá la garantía que el sistema real los cumplirá de igual forma. Otra debilidad de la técnica de parametrización está asociada a que en algunas oportunidades, las señales de control que genera, exhiben niveles de magnitud elevados (Takaba, 1999; Reinelt & Canale, 2001), sin

embargo, es bien conocido que una limitación práctica de los sistemas de control es que los actuadores tienen restricciones de amplitud.

El diseño de sistemas de control es una tarea de Ingeniería que no debe reducirse exclusivamente a un ejercicio de álgebra. La actividad de diseño involucra varios aspectos adicionales que deben tenerse presentes: ubicación de sensores, restricciones en los actuadores, robustez, etc. Debe poseerse cierta intuición sobre qué tipos de objetivos de desempeño son irreales e incluso perjudiciales para el sistema. La teoría algebraica de análisis y síntesis de sistemas de control es un instrumento útil y muy elegante, para la parte matemática del diseño del controlador, no obstante, debe enriquecerse incorporando elementos prácticos asociados al sistema de control. El objetivo de este trabajo es mostrar como integrar las consideraciones prácticas con los aspectos algebraicos de la parametrización de Youla-Kucera. Se propone una metodología que permite evaluar contenidos como: seguimiento, rechazo a perturbaciones, supresión del ruido, deficiencias del modelo y limitación de los actuadores. Partiendo de la parametrización de Youla-Kucera se determinan todos los controladores estabilizantes de una planta de fase mínima, posteriormente; utilizando técnicas de conformación del lazo (Morari & Zafiriou, 1989; Doyle *et al.*, 1990; Mc Farlane & Glover, 1990; Zhou, 1998), se calcula un valor del parámetro que resuelve el problema de desempeño robusto (Doyle *et al.*, 1990; Zhou, 1998). La metodología sistematiza el diseño y permite comprender las limitaciones fundamentales que existen en todo lazo de control y por lo tanto, los compromisos que en algunas oportunidades deben aceptarse. El artículo esta organizado de la manera siguiente. En la sección 2 se consideran algunas nociones de base: lazo de control, lazo bien planteado, estabilidad entrada-salida, estabilidad interna y seguimiento asintótico. La sección 3 discute limitaciones fundamentales dentro del lazo de control. En la sección 4 se trata el diseño algebraico de controladores. La sección 5 describe de manera general los tópicos de incertidumbre y robustez.

La sección 6 estudia en detalle la metodología de diseño propuesta. Finalmente, la sección 7 ilustra la metodología a través de un ejemplo numérico.

2. Nociones de Base

El lazo de realimentación de un sistema de control típico se muestra en la Fig. 1. Para el mismo, el problema general de control es: *La salida y deberá seguir una forma preespecificada de r , aún en la presencia de la perturbación d , el ruido del sensor n y variaciones (incertidumbre) de la planta. También es deseable limitar el tamaño de u .*

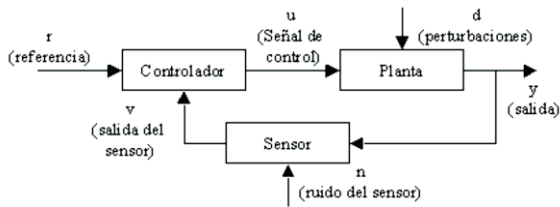


Fig. 1. Lazo de control elemental.

Asumiendo que los componentes del lazo de control son lineales, el mismo puede representarse esquemáticamente como se indica en la Fig. 2.

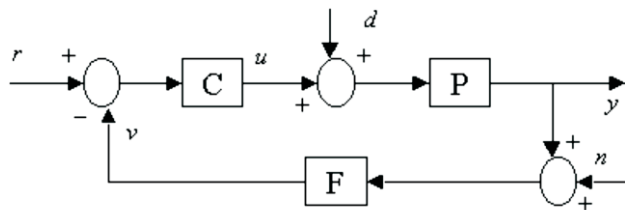


Fig. 2. Lazo de control con componentes lineales.

Con $P = P(s)$ una función de transferencia estrictamente propia y $C = C(s)$, $F = F(s)$ funciones de transferencia propias donde s es la variable compleja de Laplace. Estas condiciones sobre las funciones de transferencia de los elementos que componen el lazo, garantizan que el mismo este bien planteado (Doyle *et al.*, 1990; Goodwin *et al.*, 2001). Este último concepto está asociado a que la interconexión tiene sentido, dicho de otra forma, a que el lazo a través de todas sus funciones de transferencia es físicamente

realizable. Las relaciones entrada salida del lazo de control de la Fig. 2 se pueden expresar en forma compacta como

$$\begin{bmatrix} y \\ u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{CP}{1+CP} & \frac{P}{1+CP} & -\frac{CP}{1+CP} \\ \frac{C}{1+CP} & -\frac{CP}{1+CP} & -\frac{C}{1+CP} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r \\ d \\ n \end{bmatrix} \quad (1)$$

Por comodidad se ha omitido la dependencia de s y se asume, sin pérdida de generalidad, $F=1$. En la Ec. 1 se definen las siguientes funciones de transferencia

$$S \triangleq \frac{1}{1+CP} \quad (2)$$

$$T \triangleq \frac{CP}{1+CP} \quad (3)$$

$$S_u \triangleq \frac{C}{1+CP} \quad (4)$$

donde S , T y S_u son las funciones de sensibilidad, sensibilidad complementaria y sensibilidad de control, respectivamente (Zhou, 1998; Goodwin *et al.*, 2001). Las mismas están relacionadas algebraicamente mediante las expresiones

$$S + T = 1, \quad (5)$$

$$S_u = CS = \frac{T}{P} \quad (6)$$

La estabilidad a lazo cerrado del sistema de control de la Fig. 2 se garantiza a través de la estabilidad BIBO (Goodwin *et al.*, 2001).

Definición 1 *Un sistema H se dice que es BIBO estable si cada entrada acotada produce una salida acotada. Esto es,*

$$|u(t)| \leq u_m < \infty \xrightarrow{H} |y(t)| \leq y_m < \infty, \quad \forall t. \quad (7)$$

Sin embargo, para excluir la posibilidad de alguna señal no acotada en cualquier punto del lazo de control, se hace necesaria la estabilidad interna (Doyle *et al.*, 1990; Zhou, 1998).

Definición 2 *El sistema realimentado de la Fig. 2 es internamente estable si las 6 funciones de transferencia de la Ec. 1 son BIBO estables*

Teorema 1 *El sistema de control realimentado de la Fig. 2 es internamente estable si y solo si los ceros del polinomio característico $N_p N_C + M_p M_C$ están en Real $\{s\} < 0$. Donde $\tilde{P} = N_p | M_p$ y $C = N_C | M_C$ son fracciones comprimadas.*

Demostración *Es inmediata a partir de la definición de estabilidad interna y de (1).*

En la Fig. 2, el error de seguimiento se define como $e(t) \hat{=} r(t) - y(t)$. Uno de los objetivos típicos de desempeño de un sistema de control es el mantenimiento del error de estado estacionario

$$e_{ss} \hat{=} \lim_{t \rightarrow \infty} e(t), \quad (8)$$

dentro de cotas específicas. Si el límite de la Ec. 8 existe, puede aplicarse el teorema del valor final (Doyle *et al.*, 1990) haciendo

$$e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} s e(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{1}{1 + L(s)} r(s). \quad (9)$$

donde $L(s) = C(s)P(s)$ es la función de transferencia a lazo abierto. Considérese que $L(s)$ tiene la forma

$$L(s) = \frac{N_L(s)}{s^l \tilde{M}_L(s)}. \quad (10)$$

con $l \geq 0$ y $\tilde{M}_L(0) \neq N_L(0) \neq 0$. Sea entonces la señal de referencia

$$r(t) = t^{k-1}, \quad t > 0 \leftrightarrow r(s) = \frac{1}{s^k}, \quad k \geq 1. \quad (11)$$

Definición 3 *La planta P de la Fig. 2 se dice ser de tipo k si $e_{ss} = 0$ para $r(s) = 1/s^k$.*

Utilizando la Ec. 9 no es difícil demostrar que el error de estado estacionario será nulo si y solo si los ceros de la Ec. 2 incluyen todos los polos inestables de

3. Compromisos dentro del Lazo

En esta sección se van a estudiar algunos aspectos prácticos, así como sus interacciones, que aparecen en los sistemas de control, esto obliga a asumir ciertos compromisos dentro del lazo de realimentación. De las ecuaciones (1-4) se tiene

$$y = T(r - n) + PSd, \quad (12)$$

$$u = S_u(r - n) - Td, \quad (13)$$

y de la definición de error de seguimiento

$$e = S(r - Pd) + Tn. \quad (14)$$

3.1. Rechazo a Perturbaciones y Seguimiento

De la Ec. 12 resulta que si se requiere disminuir el efecto de la perturbación d en la salida y es necesario que la función de sensibilidad S sea pequeña en la banda de frecuencias donde d posee su mayor contenido energético. A su vez, de la Ec. 14 es evidente que para garantizar el seguimiento de señales de referencia r se debe disminuir S en las bandas donde las señales r y d son significativas ($|T(j\omega)| \approx 1$). El rechazo a perturbaciones y el seguimiento imponen una cota inferior en el ancho de banda a lazo cerrado B_{CL} expresa como

$$B_{CL} \geq B_d \cup B_r. \quad (15)$$

con B_d y B_r las bandas de frecuencia,

respectivamente, donde la perturbación y la señal de referencia poseen componentes de energía significativos.

3.2. Supresión del Ruido

De la Ec. 12 se observa que si se desea disminuir el efecto del ruido n en la salida y , la función de sensibilidad complementaria $|T(j\omega)|$ debe ser pequeña en la región donde $|n(j\omega)|$ es importante. Dado que el ruido del sensor es típicamente un problema de alta frecuencia, este fenómeno impone una cota superior en el ancho de banda a lazo cerrado

$$B_{CL} \leq B_n, \quad (16)$$

con B_n la banda de frecuencias donde el ruido del sensor es más influyente.

3.3. Limitación de los Actuadores

En la práctica, los actuadores poseen límites de saturación en su amplitud. Por tal razón debe evitarse que la señal de control u alcance niveles de magnitud que superen la capacidad de los actuadores. Estos picos en el esfuerzo de control aparecen por cambios rápidos en la señal de referencia como se aprecia en la Ec. 13 (un cambio rápido en la perturbación es usualmente filtrado por la planta). Dado que $S_u = T/P$ se desprende que si el ancho de banda a lazo cerrado (T) es mucho mayor que el ancho de banda a lazo abierto (P) entonces la función de transferencia de la sensibilidad de control incrementará los componentes de alta frecuencia de la señal de referencia. Por tanto, para evitar la saturación de los actuadores será necesario colocar una cota superior en el ancho de banda a lazo cerrado. Esto es,

$$B_{CL} \leq B_u, \quad (17)$$

con B_u la banda de frecuencias que garantiza el comportamiento adecuado de los actuadores.

3.4. Deficiencias del Modelo

Los modelos matemáticos generalmente son satisfactorios a baja frecuencia, deteriorándose su capacidad con el incremento de la misma. Por tal razón este fenómeno impone una cota superior en el ancho de banda a lazo cerrado. Más adelante, en la sección 5 se analizará en detalle el tópico de robustez dentro de la metodología de diseño propuesta.

Del análisis efectuado se concluye que los problemas de seguimiento y rechazo a perturbaciones requieren una disminución en S mientras que la supresión del ruido necesita una disminución en T . Por la relación $S+T=1$ es imposible alcanzar todos los requerimientos en forma simultánea. No obstante, en la práctica, d, r son señales de baja frecuencia y el ruido del sensor n es una señal de alta frecuencia. Por lo que pueden satisfacerse todos los requerimientos manteniendo pequeñas a S en las bajas frecuencias y a T en las altas frecuencias.

4. Diseño Algebraico

En el diagrama de la Fig. 2 se supone que la planta P es estable, o equivalentemente pertenece al conjunto

$$\mathfrak{S} = \left\{ \begin{array}{l} \text{Familia de funciones} \\ \text{racionales propias y estables} \end{array} \right\}. \quad (18)$$

Problema 1 Dada $P \in \mathfrak{S}$ Determine C en la Fig. 2 tal que el sistema realimentado sea:

- a) internamente estable
- b) posea algunas propiedades adicionales (seguimiento, robustez, entre otras)

La solución adoptada por Youla y Kucera para resolver el problema 1 es la siguiente:

- i. Parametrizar todos los controladores para los que (a) se cumple.
- ii. Determinar si existe un valor del parámetro en (i) que verifica (b).

La parametrización de los controladores

estabilizantes (i) se enuncia en el Teorema 2.

Teorema 2 *Supóngase $P \in \mathfrak{S}$. El sistema de control realimentado de la Fig. 2 es internamente estable si y solo si el controlador C pertenece a la familia \subset_Q dada por*

$$\subset_Q = \left\{ C : C = \frac{Q}{1 - PQ}, Q \in \mathfrak{S} \right\}. \quad (19)$$

Demostración

(\Rightarrow) La estabilidad interna implica la estabilidad BIBO de las seis funciones de transferencia en la Ec. 1. En particular,

$$\frac{r(s)}{u(s)} = \frac{r(s)}{e(s)} \frac{e(s)}{u(s)} = S(s)C(s) = \frac{C(s)}{1 + P(s)C(s)}$$

Haciendo $r(s)/u(s) = Q(s)$ se desprende que Q pertenecerá al conjunto \mathfrak{S} y

$$C = \frac{Q(s)}{1 - P(s)Q(s)}$$

(\Leftarrow) Sustituyendo Ec. 19 en Ec. 1 resulta

$$\begin{bmatrix} y \\ u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} PQ & P(1 - PQ) & -PQ \\ Q & -PQ & -Q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r \\ d \\ n \end{bmatrix}. \quad (20)$$

No es difícil comprobar que para $P, Q \in \mathfrak{S}$ las seis funciones de transferencia en Ec. 1 pertenecen a la familia \mathfrak{S} .

En el ejemplo que sigue se va a mostrar como se procede generalmente para efectuar la síntesis del controlador a través de la parametrización de Youla-Kucera. Aunque algunos autores han tratado de sistematizar el procedimiento (Goodwin *et al.*, 2001), por lo general, el diseño consiste en postular una forma de la función racional Q y luego, a través de la resolución de un conjunto de ecuaciones lineales, imponer algunas de las condiciones que se consideraron en la sección 2.

Ejemplo 1 Considere una planta $P \in \mathfrak{S}$ dada por la función de transferencia

$$P(s) = \frac{2}{s^2 + 2s + 4}. \quad (21)$$

Se requiere diseñar un controlador C tal que: (i) Proporcione estabilidad interna y (ii) Siga una rampa en la señal de referencia. Se debe determinar $Q(s) \in \mathfrak{S}$ que garantice el cumplimiento de (i) y (ii). Un método que siempre funciona (Doyle *et al.*, 1990; Goodwin *et al.*, 2001) consiste en hacer Q un polinomio en $(s + 1)^{-1}$ con suficientes parámetros de diseño. Para seguir una rampa, la función de sensibilidad debe tener dos ceros en el origen (ver sección 2). Por tal razón se plantea un polinomio en $(s + 1)^{-1}$ con dos parámetros de diseño x_1 y x_2 .

$$Q(s) = x_1 + x_2 \frac{1}{(s + 1)} = \frac{x_1 s + (x_1 + x_2)}{(s + 1)}. \quad (22)$$

La función de sensibilidad viene dada por

$$\begin{aligned} S(s) &= 1 - P(s)Q(s) \\ &= \frac{s^3 + s^2 + (6 - 2x_1)s + (4 - 2x_1 - 2x_2)}{(s + 1)(s^2 + 2s + 4)}. \end{aligned} \quad (23)$$

la misma tendrá dos ceros en $s = 0$ si y sólo si

$$\begin{cases} 6 - 2x_1 = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 3 \\ x_2 = -1 \end{cases}. \quad (24)$$

lo que resulta en un parámetro Q igual a

$$Q(s) = \frac{3s + 2}{(s + 1)}. \quad (25)$$

y las funciones de sensibilidad iguales a

$$S(s) = \frac{s^2 (s + 3)}{s^3 + 3s^2 + 6s + 4}, \quad (26a)$$

$$T(s) = \frac{6s + 4}{s^3 + 3s^2 + 6s + 4}, S_u(s) = \frac{6s + 4}{2s + 2}. \quad (26b)$$

Por la Ec. 19 el controlador viene dado por

$$C(s) = -\frac{5s^2 + 21s + 18}{s^2}. \quad (27)$$

Las respuestas al escalón y a la rampa del sistema realimentado se presentan en las Fig. 3 y 4 respectivamente. En ambas se ha incluido la señal de control.

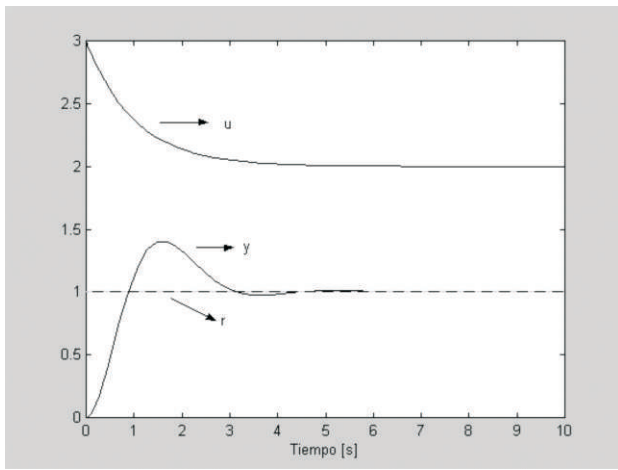


Fig. 3. Respuesta al escalón y señal de control del sistema del ejemplo 1

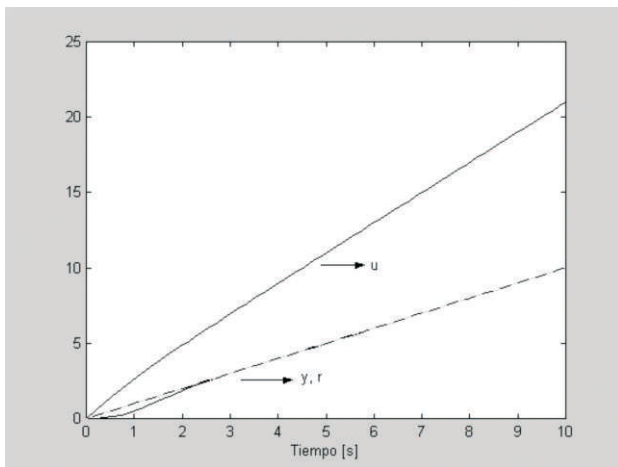


Fig. 4. Respuesta a la rampa y señal de control del sistema del ejemplo 1

5. Incertidumbre y robustez

Un modelo matemático no es más que una aproximación del comportamiento del sistema

para unas condiciones de operación particulares. Por tal razón debe tenerse presente, cómo los errores de modelaje pueden afectar de manera adversa el desempeño de un sistema de control. En ese sentido es fundamental el tema de incertidumbre de la planta. La noción de estabilidad robusta (estabilidad en el caso de incertidumbre de la planta) y finalmente el tópico de desempeño robusto (desempeño en el contexto de incertidumbre de la planta).

La incertidumbre se suele expresar a través de cotas en la respuesta en frecuencia del sistema. Las formas más comunes de representar este tipo de incertidumbres son la aditiva y la multiplicativa (Zhou,1998). Para el caso de la incertidumbre aditiva se considera una descripción incierta de la planta dada por

$$\tilde{P}(s) = P(s) + \Delta_a(s), \quad (28)$$

donde $\tilde{P}(s)$ representa la planta real, $P(s)$ la planta nominal y $\Delta_a(s)$ la incertidumbre aditiva. Esta última es tal que

$$|\Delta_a(jw)| \leq |W_a(jw)|, \quad \forall w. \quad (29)$$

Con $W_a(s)$ una función cuya magnitud acota la de $\Delta_a(s)$ sobre el eje jw y debe seleccionarse de manera que

$$|\tilde{P}(jw) - P(jw)| \leq |W_a(jw)|, \quad \forall w. \quad (30)$$

Tal ecuación representa un círculo en el plano complejo con centro $P(jw)$ y radio $|W_a(jw)|$ como se ilustra en la Fig. 5.

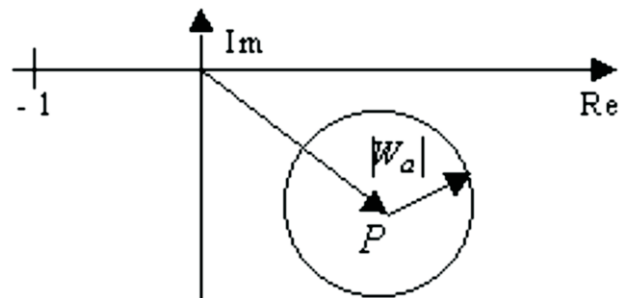


Fig. 5. Incertidumbre aditiva

Para la incertidumbre multiplicativa la planta incierta $P(s)$ se expresa mediante

$$\tilde{P}(s) - P(s) = P(s)\Delta_m(s). \quad (31)$$

donde la incertidumbre multiplicativa $\Delta_m(s)$ verifica la desigualdad

$$|\Delta_m(jw)| \leq |W_m(jw)|, \quad \forall w. \quad (32)$$

Gráficamente se representa como indica la Fig. 6. Con las descripciones aditiva y multiplicativa de la incertidumbre se calcula el mismo error de modelaje. Esto es,

$$\begin{aligned} \tilde{P}(s) &= P(s) + \Delta_a(s) = P(s)[1 + \Delta_m(s)] \\ &= P(s) + P(s)\Delta_m(s) \end{aligned}$$

Sin embargo, la aditiva lo hace en forma absoluta y la multiplicativa en forma relativa

$$\Delta_a = P\Delta_m, \quad (33)$$

$$\Delta_m = \frac{\Delta_a}{P} = \frac{\tilde{P} - P}{P}. \quad (34)$$

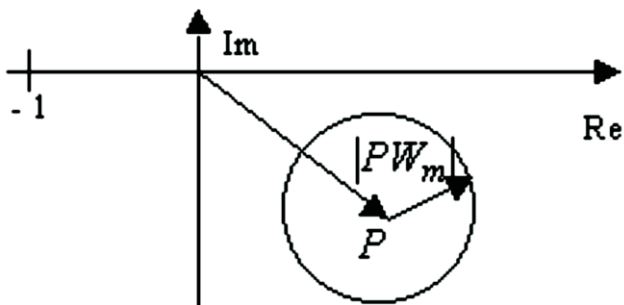


Fig. 6. Incertidumbre multiplicativa.

Problema 2 Dada la familia de plantas \mathcal{P}_a caracterizada por la planta nominal $P(s)$ y una cota en la incertidumbre aditiva $W_a(s)$. Encontrar condiciones de forma que el controlador $C(s)$ estabilice todas las plantas $P(s) \in \mathcal{P}_a$

Comentario 1 como la planta P pertenece a \mathcal{P}_a el controlador $C(s)$ deberá estabilizar el sistema realimentado nominal. Esto es una condición

necesaria para la estabilidad robusta.

Teorema 3 Es condición necesaria y suficiente para la estabilidad de la familia \mathcal{P}_a que ningún modelo a lazo cerrado tenga sus polos en el semiplano derecho del plano complejo \mathcal{C}_+ esto es:

$$\begin{aligned} \forall s \in \mathcal{C}_+, 1 + C(s)\tilde{P}(s) \\ = 1 + C(s)P(s) + C(s)\Delta_a(s) \neq 0 \end{aligned} \quad (36)$$

$$\Leftrightarrow \forall s \in \mathcal{C}_+, 1 + C(s)P(s) \neq C(s)\Delta_a(s) \quad (37)$$

$$\Leftrightarrow \forall s = jw, |1 + C(s)P(s)| \geq |C(s)W_a(s)| \quad (38)$$

$$\Leftrightarrow \forall s = jw, |W_a(s)C(s)S(s)| \leq 1 \quad (39)$$

Comentario 2 La estabilidad robusta para el caso de incertidumbres multiplicativas toma la forma de

$$\|W_m(s)T(s)\|_\infty \leq 1. \quad (40)$$

Además de la estabilidad robusta también es importante considerar el desempeño a lazo cerrado del sistema de control. El desempeño será definido en términos de la peor cota en la energía del error de seguimiento. A ese fin, se supone que la señal de referencia r pertenece a la familia R definida por el conjunto

$$R = \left\{ r : r(s) = W_r(s)r_o(s), \|r_o(t)\|_2 \leq 1 \right\} \quad (41)$$

donde W_r es un filtro (generalmente pasa bajo) que define la clase de señales admitidas y r_o es una señal sinusoidal de amplitud ≤ 1 . Recordando que para el sistema de la Fig. 2 el error de seguimiento es $e(t) = r(t) - y(t)$ se deduce que la peor cota en la energía del error de seguimiento (Doyle et al., 1990) (todas las posibles r en R) es

$$\begin{aligned} \sup_{r \in R} \|e(t)\|_2 \\ = \sup_w |W_r(jw)(1 + P(jw)C(jw))^{-1}| \\ = \|W_r(s)(1 + P(s)C(s))^{-1}\|_\infty. \end{aligned} \quad (42)$$

Si se requiere una cota γ en la energía del error, entonces el controlador debe diseñarse de manera que

$$\left\| W_r(s)(1 + P(s)C(s))^{-1} \right\|_{\infty} \leq \gamma \quad (43)$$

para toda $P \in \mathcal{D}_a$. Esta última es la condición de desempeño robusto. No es difícil demostrar que al aplicar (43) $\forall P \in \mathcal{D}_a$ se puede expresar la condición de desempeño robusto como

$$|W_1(jw)S(jw)| + |W_2(jw)T(jw)| \leq 1, \forall w \quad (44)$$

Con S y T dadas en las Ecs. 2 y 3 respectivamente y $W_1 = \gamma^{-1}W_r$ y $W_2 = W_m$. La Ec. 44 tiene una interpretación gráfica bastante sencilla (Doyle *et al.*, 1990). Para cada frecuencia w , se construyen en el plano complejo dos círculos. Uno con centro en -1 y radio $|W_1(jw)|$ y el otro con centro en $L(jw) = P(jw)C(jw)$ y radio $|W_2(jw)L(jw)|$. La condición (44) se satisface si los círculos son disjuntos (Fig.7).

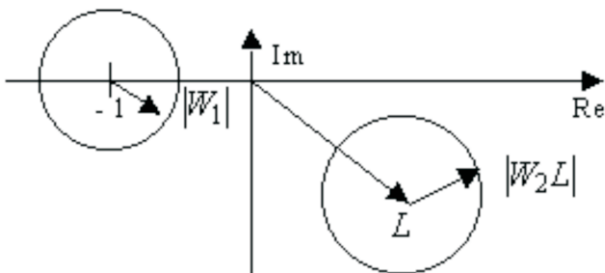


Fig. 7. Interpretación gráfica de la condición de desempeño robusto

6. Metodología Propuesta

La metodología de diseño que se va a presentar permite incorporar aspectos prácticos, tales como: el seguimiento, el rechazo a perturbaciones, la limitación del esfuerzo de control, la supresión del ruido y la robustez en el diseño algebraico de controladores. A ese fin, la condición de desempeño robusto que se definió en la sección precedente, la cual constituye un compromiso entre el desempeño del sistema

(seguimiento, rechazo a perturbaciones, limitación de actuadores y supresión del ruido) y la robustez (deficiencias del modelo), se intenta satisfacer a través de técnicas de conformación del lazo, mediante la determinación de una función de transferencia Q , esto último, significa que el controlador que se implemente a través de Ec.19 también estabilizará internamente el sistema de control.

En lo que sigue se desarrolla una metodología de diseño basada en el empleo de la parametrización de Youla-Kucera y la relación precedente de desempeño robusto. A ese fin se formula el problema siguiente

Problema 3 Dada una planta $P \in \mathfrak{S}$ de fase mínima con peso de desempeño W_1 y peso de robustez W_2 . Determine un controlador (Ec. 19) que satisfaga la condición de desempeño robusto (Ec. 44)

A continuación se desarrolla la solución del Problema 3 y de esta manera se construye la metodología. Utilizando las expresiones $S = 1 - PQ$ y $T = PQ$ La Ec. 44 se transforma en

$$\begin{aligned} &|W_1(jw)(1 - P(jw)Q(jw))| \\ &+ |W_2(jw)P(jw)Q(jw)| \leq 1, \forall w \end{aligned} \quad (45)$$

Para determinar $Q(s)$ que satisfaga Ec. 45 se hace $Q(jw) \approx P(jw)^{-1}$ cuando $|W_1(jw)|$ es grande y $|W_2(jw)|$ pequeño y $Q(jw) \approx 0$ cuando $|W_1(jw)|$ es pequeño y $|W_2(jw)|$ grande. Evidentemente, si $|W_1(jw)|$ y $|W_2(jw)|$ son grandes simultáneamente será imposible alcanzar el desempeño robusto. En la práctica, W_1 es grande a bajas frecuencias (para garantizar seguimiento y rechazo a perturbaciones) y W_2 es grande en altas frecuencias (para garantizar supresión del ruido y robustez por deficiencias del modelo). Para determinar $Q \in \mathfrak{S}$ se expresa el parámetro Q utilizando la formulación de (Goodwin *et al.*, 2001) como

$$Q(s) = F_Q(s)P(s)^{-1}, \quad (46)$$

con $F_Q(s)$ una función de transferencia propia y estable cuyos objetivos son asegurar que el parámetro Q sea propio y establecer un compromiso entre desempeño y robustez. Se escoge como

$$F_Q(s) = \frac{A(s)}{(\tau s + 1)^{n_q}} \quad (47)$$

El polinomio $A(s) = 1 + a_1s + \dots + a_n s^n$ define el número de ceros de la función de sensibilidad en el origen, esto es, define el tipo del sistema (ver sección 2) y por consiguiente su capacidad de seguimiento o rechazo de señales polinómicas (escalón, rampa, parábola). Sea $(\tau s + 1)^{n_q} = 1 + b_1s + \dots + b_{n_q} s^{n_q}$, en el caso de una señal tipo escalón se selecciona $A(s) = 1$ ($a_1 = \dots = a_n = 0$) para una rampa $A(s) = 1 + b_1s$ y finalmente para una parábola $A(s) = 1 + b_1s + b_2s^2$. La función racional Q es propia si $n_q \geq [\psi(P) + \partial(A)]$ donde $\psi(P)$ corresponde al grado relativo de P (número de polos – número de ceros) $\partial(A)$ y al grado del polinomio $A(s)$. Utilizando Ec. 46 la condición Ec. 45 se reescribe $\forall w$ como

$$|W_1(jw)(1 - F_Q(jw))| + |W_2(jw)F_Q(jw)| \leq 1 \quad (48)$$

Para cumplir con la Ec. 48 el filtro $F_Q(s)$ debe verificar las condiciones siguientes

- i. $F_Q(jw) \approx 1, w \leq w_1$
- ii. $F_Q(jw) \approx 0, w \geq w_2$

con W_1 (W_1 filtro pasa bajo) y w_2 el ancho de banda del filtro de robustez W_2^{-1} (W_2 filtro pasa alto). La variable τ acerca el polo de $F_Q(s)$ a la frecuencia w_2 , aumentando la velocidad de respuesta pero incrementando también la banda frecuencial donde se pueden presentar efectos adversos por las señales de ruido y deficiencias del modelo.

7. Ejemplo Numérico

Se considera nuevamente la planta tratada en el Ejemplo 1 utilizando pesos de desempeño y

robustez dados por

$$W_1(s) = \frac{1}{s+1}, W_2(s) = \frac{s(1+0.1s)}{10}$$

Las frecuencias de corte de los filtros se determinan con facilidad como $w_1 = 1$ rad/s y $w_2 = 10$ rad/s Sustituyendo lo anterior en la Ec. 48 resulta la condición de diseño

$$\Phi(w) \hat{=} |\Phi_1(jw)| + |\Phi_2(jw)| \\ = \left| \frac{(1 - F_Q(jw))}{jw+1} \right| + \left| \frac{jw(1 + j0.1w)F_Q(jw)}{10} \right| < 1 \quad \forall w \quad (50)$$

Se va a calcular $F_Q(s)$ en Ec. 47 de manera de satisfacer Ec. 50 y seguir las señales de referencia constantes con un error de estado estacionario nulo. El valor de τ se seleccionará de forma de disminuir el esfuerzo de control sin deteriorar la robustez y los problemas en alta frecuencia originadas por el ruido del sensor. Para que el error de estado estacionario sea cero, el numerador de $F_Q(s)$ se elige como $A(s) = 1$. Adicionalmente, la función racional $F_Q(s)$ será propia si se hace $n_q \geq 2$. La Tabla 1 muestra los principales resultados calculados para $\tau = \{0.13 \ 0.18 \ 0.31\}$ y $n_q = 2$. La Fig. 8 ilustra que la condición de desempeño robusto (50) se satisface para los diferentes valores de la variable τ considerados. Evidenciándose resultados más conservadores para mayores valores de τ . Las Fig. 9, 10 y 11 presentan las gráficas de las funciones de sensibilidad y sensibilidad complementaria para $\tau = 0.13$, $\tau = 0.18$ y $\tau = 0.31$ respectivamente. De las mismas se desprende que el rechazo a perturbaciones es satisfactorio en las bajas frecuencias. Si la banda frecuencial de las perturbaciones se incrementa, la sensibilidad de control amplificará significativamente la señal de control. El análisis para el problema de seguimiento es similar al del rechazo a perturbaciones. Por otra parte, el decaimiento de la función de sensibilidad complementaria indica que el fenómeno de ruido del sensor no será perjudicial, al igual que fija un límite a los inconvenientes que pueda causar la deficiencia en el modelo. Al disminuir τ se hace evidente el incremento del ancho de banda a lazo cerrado.

Esto se traduce en un aumento en la función de sensibilidad de control y por consiguiente en el riesgo de problemas de saturación de actuadores por picos excesivos en la señal de control.

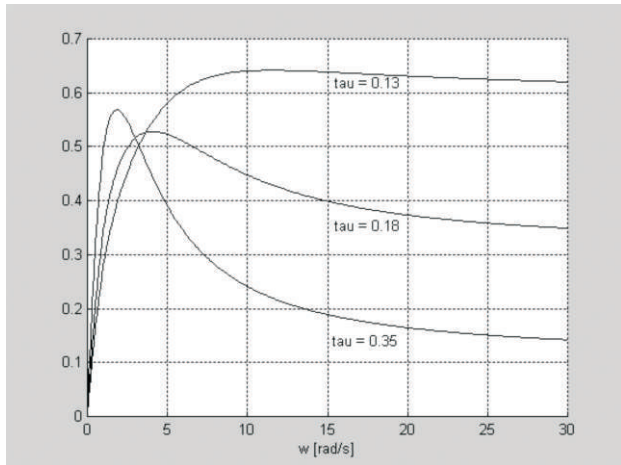


Fig. 8. Condición de desempeño robusto para $\tau = \{0.13 \ 0.18 \ 0.31\}$

Las Fig. 12 y 13 suministran la respuesta al escalón y la señal de control, respectivamente. Se hacen evidentes los compromisos entre velocidad de respuesta y esfuerzo de control.

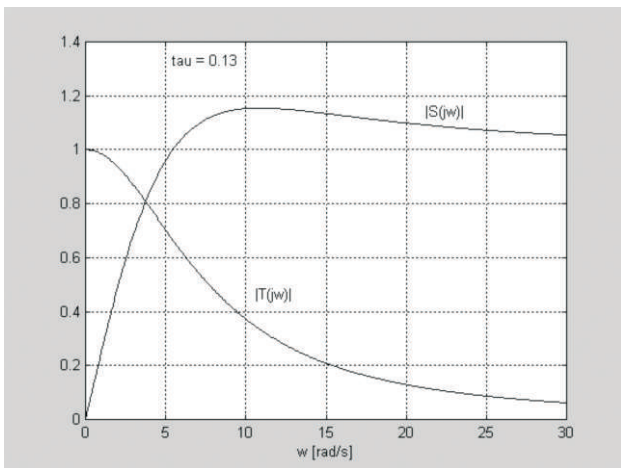


Fig. 9. Funciones S y T para $\tau = 0.13$

El desempeño robusto exige que los círculos de desempeño y robustez no se intersecten en ninguna frecuencia. Esta relación no puede presentarse gráficamente de manera conveniente para todas las frecuencias. Por tal razón, se

incluyen las Fig. 14 y 15 donde se muestran los diagramas de Nyquist del sistema nominal ($\tau = 0.31$) y de un sistema perturbado representado por la planta extrema $P_p(s) = 1/(s^2 + 2s + 2)$ conjuntamente con los círculos de desempeño y robustez para frecuencias $w = 0.35$ r/s y $w = 4$ r/s

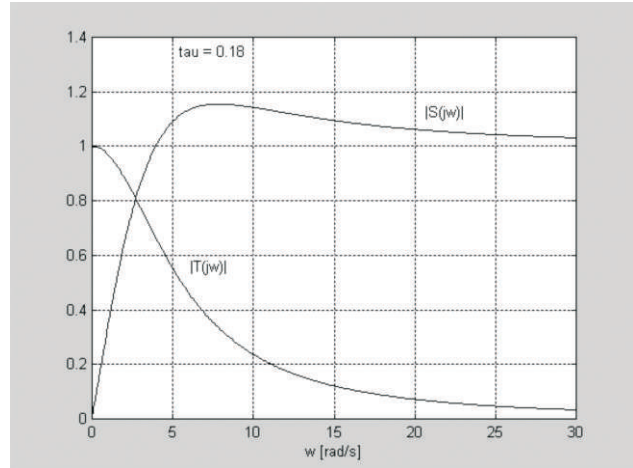


Fig. 10. Funciones S y T para $\tau = 0.18$

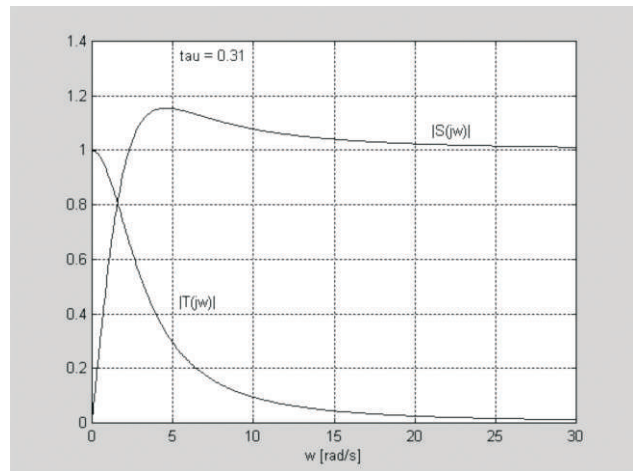


Fig. 11. Funciones S y T para $\tau = 0.31$

El desempeño robusto exige que los círculos de desempeño y robustez no se intersecten en ninguna frecuencia. Esta relación no puede presentarse gráficamente de manera conveniente para todas las frecuencias. Por tal razón, se incluyen las Fig. 14 y 15 donde se muestran los diagramas de Nyquist del sistema nominal

τ (τ^{-1})	$Q = S_u$	$S = 1 - F_Q$	$T = F_Q$	$C = P^{-1}F_Q(1 - F_Q)^{-1}$
0.13 (7.75)	$\frac{s^2 + 2s + 4}{0.034s^2 + 0.52s + 2}$	$\frac{s(0.017s + 0.26)}{0.017s^2 + 0.26s + 1}$	$\frac{1}{0.017s^2 + 0.26s + 1}$	$\frac{29.59s^2 + 59.17s + 118.34}{s(s + 15.38)}$
0.18 (5.50)	$\frac{s^2 + 2s + 4}{0.065s^2 + 0.72s + 2}$	$\frac{s(0.032s + 0.36)}{0.032s^2 + 0.36s + 1}$	$\frac{1}{0.032s^2 + 0.36s + 1}$	$\frac{15.43s^2 + 30.86s + 61.73}{s(s + 11.11)}$
0.31 (3.25)	$\frac{s^2 + 2s + 4}{0.019s^2 + 1.24s + 2}$	$\frac{s(0.097s + 0.62)}{0.097s^2 + 0.62s + 1}$	$\frac{1}{0.097s^2 + 0.62s + 1}$	$\frac{5.20s^2 + 10.41s + 20.81}{s(s + 6.22)}$

Tabla 1. Principales resultados para $\tau = \{0.13 \ 0.18 \ 0.31\}$ y seguimiento de señales de referencia constantes

($\tau = 0.31$) y de un sistema perturbado representado por la planta extrema $P_p(s) = 1/(s^2 + 2s + 2)$ conjuntamente con los círculos de

desempeño y robustez para frecuencias $w = 0.35$ r/s y $w = 4$ r/s, respectivamente ($L = CP$ y $L_p = CP_p$).

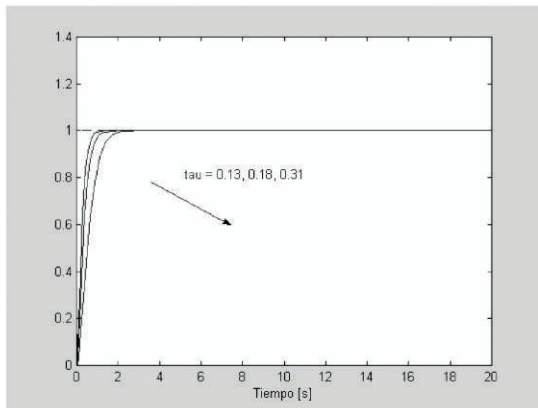


Fig. 12. Respuesta al escalón

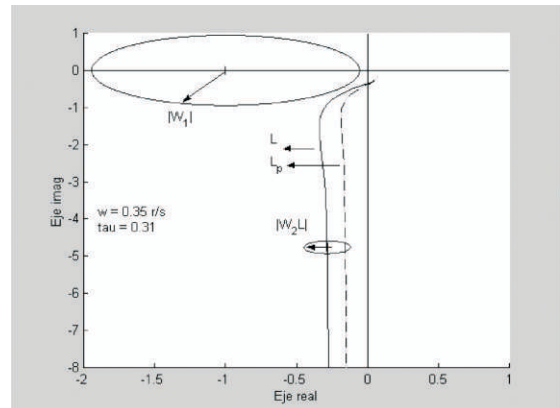


Fig. 14. Desempeño robusto para el sistema nominal y una planta extrema para $w = 0.35$ r/s

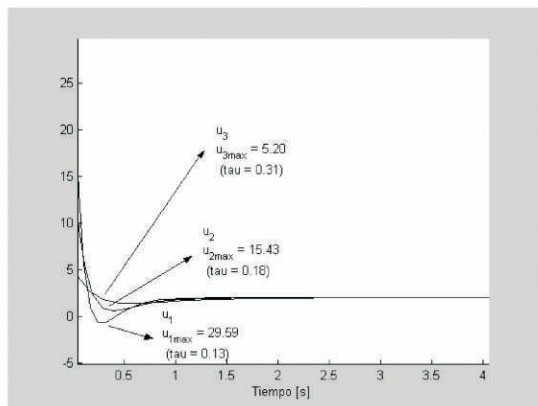


Fig. 13. Señal de control con sus valores máximos para distintos valores de τ

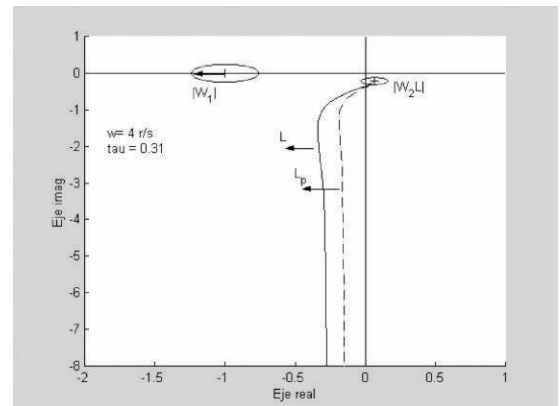


Fig. 15. Desempeño robusto para el sistema nominal y una planta extrema para $w = 4$ r/s

8. Conclusiones

Se ha propuesto una metodología que permite evaluar contenidos como: seguimiento, rechazo a perturbaciones, supresión del ruido, deficiencias del modelo, y limitación de actuadores. Partiendo de la parametrización de Youla-Kucera se determinan todos los controladores estabilizantes de una planta de fase mínima, posteriormente; utilizando técnicas de conformación del lazo, se calcula un valor del parámetro que resuelve el problema de desempeño robusto. La metodología sistematiza el diseño y permite comprender las limitaciones fundamentales que existen en todo lazo de control y por lo tanto, los compromisos que en algunas oportunidades deben aceptarse.

9. Bibliografía

- Desoer, C. & C. L. Gustafson. (1984). Algebraic Theory of Linear Multivariable Systems, *IEEE Trans. Auto. Control.* 29: 909-917.
- Doyle, J., B. Francis & A. Tannenbaum. (1990). *Feedback Control Theory*. Macmillan Publishing Co.
- Francis, B. & M. Vidyasagar. (1983). Algebraic and Topological aspects of the Regulator Problem for Lumped Linear Systems, *Automatica.* 19: 87-90.
- Goodwin, G., S. Graebe & M. Salgado. (2001). *Control System Design*, Prentice-Hall, Inc. New Jersey
- Kucera, V. (1979). *Discrete Linear Control: The polynomial Equation Approach*, Wiley. New York.
- McFarlane, D.C. & K. Glover. (1990). *Robust Controller Design using Normalized Coprime Factor Plant Description*. Springer-Verlag. New York.
- Morari, M. & E. Zafiriou. (1989). *Robust Process Control*, Prentice-Hall. New Jersey
- Reinelt, W. (1999). Maximum Output Amplitude of Linear Systems for Certain Input Constraints, *Reporte No. LiTH-ISY-R-2283* Linkopings Universitet-Sweden. Sweden
- Reinelt, W. & M. Canale. (2001) Robust Control of SISO Systems Subject to Hard Input Constraints, *Report No. LiTH-ISY-R-2349*, Linkopings Universitet-Sweden. Sweden
- Skelton, R. & T. Iwasaki. (1995). Increased Roles of Linear Algebra in Control Education, *IEEE Cont. Syst. Magazine.* 15(4): 76-90.
- Takaba, K. (1999). Anti-Windup Control Systems Design Based on Youla Parametrization, *Proceeding of the American Control Conference*. San Diego, California
- Tannenbaum, A. (1981). *Invariance and System Theory: Algebraic and Geometric aspects*. Springer-Verlag. Vol. 845. Berlin.
- Youla, D.C., J.J. Bongiorno & C. (1974). Single Loop Feedback Stabilization of Linear Plants, *Automatica.* 10: 159-173.
- Youla, D.C., H.A. Jabr & J.J. Bongiorno. (1976) Modern Wiener-Hopf Design of Optimal Controllers, *IEEE Trans. on Automatic Control.* 21: 319-338.
- Zhou, K. (1998). *Essentials of Robust Control*, Prentice Hall Inc. New Jersey