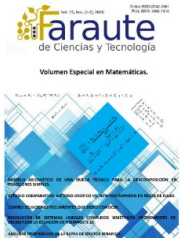
FARAUTE, Vol. 15, Nro. (1-2): 6-18, 2020.

Online ISNN 2542-3061
Print ISNN 1698-7418



Modelo axiomático de una nueva técnica para la descomposición en fracciones simples

Franzyuri F. Hernández F.[1a], **Esteban M. Flores R.**[1b]

[1] *Departamento de Matemáticas, Facultad Experimental de Ciencias y Tecnología, Universidad de Carabobo. Venezuela.*
[a] *Centro Multidisciplinario de Visualización y Cómputo Científico (CEMVICC), Universidad de Carabobo. Venezuela.*
ORCID iD: 0000-0002-2748-8005[a] 0000-0002-1807-9496[b]
Correo electrónico del autor para correspondencia: fhernan@uc.edu.ve[a]
Correo electrónico del coautor: eflores@uc.edu.ve[b]

Recibido: ***01/07/2025****, Revisado:* ***10/08/2025****, Aceptado:* ***10/09/2025****.*

Resumen

La *descomposición en fracciones simples* constituye una herramienta fundamental en el análisis matemático, con aplicaciones críticas en cálculo integral, transformadas de Laplace y ecuaciones diferenciales. Su relevancia se extiende a disciplinas como la Teoría de Control, las Matemáticas Discretas y el análisis de Series Telescópicas. No obstante, los métodos tradicionales —que dependen de la resolución de sistemas de ecuaciones lineales mediante igualación de coeficientes— enfrentan limitaciones significativas en eficiencia computacional, especialmente al manejar denominadores de alto grado, raíces múltiples o factores irreducibles. Este artículo introduce un modelo axiomático innovador para la descomposición en fracciones simples, el cual elimina la necesidad de resolver sistemas de ecuaciones. La técnica propuesta se fundamenta en: a) un principio algebraico basado en sustituciones estratégicas, que permite obtener los coeficientes de la descomposición mediante inspección directa, b) un marco teórico riguroso, respaldado por propiedades de polinomios y divisibilidad, que garantiza la generalidad del método y c) un algoritmo optimizado para casos complejos (ej. raíces repetidas o denominadores de orden superior), reduciendo la carga computacional.

Palabras Clave: Descomposición en fracciones simples, modelo axiomático, técnica alternativa.

Axiomatic model of a new technique for decomposition into simple fractions

Abstract

Simple fraction decomposition is a fundamental tool in mathematical analysis, with critical applications in integral calculus, Laplace transforms, and differential equations. Its relevance extends to disciplines such as Control Theory, Discrete Mathematics, and Telescoping Series analysis. However, traditional methods—which rely on solving systems of linear equations by equating coefficients—face significant limitations in computational efficiency, especially when dealing with high-degree denominators, multiple roots, or irreducible factors. This paper introduces an innovative axiomatic model for simple fraction decomposition, which eliminates the need to solve systems of equations. The proposed technique is based on: a) an algebraic principle based on strategic substitutions, which allows obtaining the coefficients of the decomposition by direct inspection; b) a rigorous theoretical framework, supported by polynomial and divisibility properties, which guarantees the generality of the method; and c) an algorithm optimized for complex cases (e.g., repeated roots or higher-order denominators), reducing the computational burden.

Keywords: Alternative technique, axiomatic model, decomposition into simple fractions.

1. Introducción

La *descomposición en fracciones simples* (en adelante, DFS) es una herramienta fundamental en el análisis matemático, esencial para simplificar integrales, resolver ecuaciones diferenciales y estudiar funciones racionales en ingeniería y ciencias aplicadas. Sin embargo, los métodos tradicionales utilizados para realizar dicha descomposición como, por ejemplo, el método de coeficientes indeterminados (en adelante, MCI), basados en sistemas de ecuaciones lineales, pueden volverse una tarea muy engorrosa [8], ser tediosos y propensos a errores en casos con denominadores de alto grado o raíces múltiples [6] y [12]. En este contexto, surge la necesidad de explorar técnicas alternativas que optimicen el proceso, eliminando la dependencia de sistemas de ecuaciones y agilizando los cálculos sin sacrificar precisión [3]. Este artículo propone un enfoque innovador para el desarrollo del proceso de DFS y a través de un modelo axiomático, se demuestra cómo esta metodología no solo simplifica procedimientos algebraicos, sino que también mejora las posibilidades de resolución en áreas como: el cálculo integral, el control de sistemas y el procesamiento de señales; ofreciendo una perspectiva más eficiente y una propuesta creativamente seductora para estudiantes, investigadores y profesionales (ver [3] y [4]).

2. Bases Teóricas para la DFS

Esta sección presenta el marco teórico fundamental que sustenta la investigación, estructurado a partir de contribuciones clave en el análisis matemático de fracciones simples. El desarrollo conceptual se basa principalmente en los trabajos de: [2] para el tratamiento axiomático de descomposiciones racionales, [7] en lo concerniente a optimización de procesos algebraicos, y [6, 12] respecto a métodos computacionales alternativos. Complementariamente, se incorporan los fundamentos analíticos de [11] sobre aplicaciones en ecuaciones diferenciales, el enfoque clásico de [9] para casos especiales con polinomios de alto grado, y los recientes avances metodológicos documentados por [3, 4]. Esta selección bibliográfica responde a su concisión conceptual y relevancia directa con los objetivos del presente estudio.

Descomposición en Fracciones Simples

Definición 1 (Función Polinómica) *Son funciones de la forma* $P(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2 + \cdots + c_nx^n$ *donde* $c_0, c_1, \ldots, c_n$ *son números reales llamados coeficientes del polinomio;* $n \in \mathbb{N}$ *es un número natural que, si* $c_n \neq 0$*, se llama grado del polinomio. Las funciones polinómicas tienen como dominio natural de definición la totalidad de* $\mathbb{R}$*. Mientras la suma, el producto y la composición de funciones polinómicas es también una función polinómica, el cociente de funciones polinómica da lugar a las llamadas funciones racionales, ver [11].*

Definición 2 (Función Racional) *Es una función de la forma:*

$$R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} \tag{1}$$

donde P (el numerador) y Q (el denominador) son polinomios y Q no es el polinomio constante igual a 0*. La función R tiene como dominio natural de definición el conjunto* $\{x \in \mathbb{R} : Q(x) \neq 0\}$*. Obsérvese que las funciones polinómicas son también funciones racionales (con denominador constante igual a* 1*). Sumas, productos y cocientes de funciones racionales son también funciones racionales; y la composición de dos funciones racionales es también una función racional [11].*

Definición 3 (Fracción Propia) *Se dice que una función racional* $R(x) = P(x)/Q(x)$ *es una fracción (o función) propia, si el grado del polinomio* $P(x)$ *es menor que el grado del polinomio* $Q(x)$*. En caso contrario, la fracción (o función) se llama impropia, ver [2].*

Definición 4 (DFS) *Si* $R(x)$ *es una función impropia, entonces usando el algoritmo de la división,* $R(x)$ *puede expresarse en la forma:*

$$R(x) = c(x) + \frac{r(x)}{Q(x)} \tag{2}$$

donde $c(x), r(x)$ *y* $Q(x)$ *son polinomios en x, y además el grado del numerador* $r(x)$*, es menor que el grado del denominador* $Q(x)$*. Esto significa que (al menos teóricamente), toda fracción impropia puede expresarse de un modo único en forma de una suma de un polinomio y de una fracción propia. Por esta razón, en lo siguiente solo se*

considerarán las fracciones propias. Teóricamente, es posible escribir cualquier fracción racional propia $r(x)/Q(x)$ como una suma de expresiones racionales cuyos denominadores son potencias de polinomios de grado no mayor que dos. Concretamente, si $r(x)/Q(x)$ es una fracción propia, entonces del Álgebra se tiene que:

$$\frac{r(x)}{Q(x)} = \underbrace{N_1 + N_2 + \cdots + N_k}_{\text{DFS}} \tag{3}$$

donde, cada N_i $(i = 1,\ldots,k)$ tiene una de las dos formas siguientes:

$$\frac{A_1}{(ax+b)^m} \text{ ó } \frac{A_2x+A_3}{(px^2+qx+r)^n} \tag{4}$$

donde los $A_i \in \mathbb{R}$ $(i = 1,2,3)$ son coeficientes a determinar.

La suma del lado derecho de (3) se conoce como DFS de $r(x)/Q(x)$ y cada N_i $(i = 1,\ldots,k)$ es una fracción simple (o más sencilla) en relación a $r(x)/Q(x)$ (ver [2], [3], [4]).

Para obtener la descomposición (3) primero se debe expresar el denominador, $Q(x)$, como un producto de factores de la forma $(ax+b)$ o expresiones cuadráticas irreducibles de la forma (px^2+qx+r). Después se agrupan los factores repetidos de manera que $Q(x)$ quede expresado como un producto de factores distintos de la forma $(ax+b)^m$ ó $(px^2+qx+r)^n$; donde $m,n \in \mathbb{Z}^+$ y $q^2-4pr<0$ (es irreducible).

Después se aplican las siguientes reglas:

1. Por cada uno de los factores $(ax+b)^m$ $(m \geq 1)$ la descomposición (3) contiene una suma de m fracciones parciales de la forma:

   $$\frac{A_1}{ax+b} + \frac{A_2}{(ax+b)^2} + \cdots + \frac{A_m}{(ax+b)^m}$$

   donde cada A_i $(i = \overline{1:m})$ es un número real a determinar.

2. Por cada uno de los factores de la forma $(px^2+qx+r)^n$ $(n \geq 1$ y $q^2-4pr<0)$ la descomposición (3) contiene una suma de fracciones parciales de la forma:

   $$\frac{A_1x+B_1}{px^2+qx+r} + \cdots + \frac{A_nx+B_n}{(px^2+qx+r)^n}$$

   donde cada A_i y B_i $(i = \overline{1:n})$ son números reales a determinar.

Tomando en cuenta la factorización de $Q(x)$ y las reglas dadas en los incisos (1) y (2) se estudian los siguientes cuatro casos (ver [13], [9], [10]):

- Factores lineales no repetidos:

  $$\frac{A_1}{a_1x+b_1} + \frac{A_2}{a_2x+b_2} + \cdots + \frac{A_n}{a_nx+b_n}$$

- Factores lineales repetidos:

  $$\frac{A_1}{ax+b} + \frac{A_2}{(ax+b)^2} + \cdots + \frac{A_n}{(ax+b)^n}$$

- Factores cuadráticos no repetidos:

  $$\frac{A_1x+B_1}{p_1x^2+q_1x+r_1} + \cdots + \frac{A_nx+B_n}{p_nx^2+q_nx+r_n}$$

- Factores cuadráticos repetidos:

  $$\frac{A_1x+B_1}{px^2+qx+r} + \cdots + \frac{A_nx+B_n}{(px^2+qx+r)^n}$$

En ese sentido; en la literatura especializada existe una variedad de técnicas para calcular los coeficientes A_i y B_i $(i = \overline{1:n})$ como, por ejemplo, las técnicas tradicionales: MCI y MHO que según [6, 12] son métodos tediosos y fuentes de complicadas identidades algebraicas [1] las cuales confunden a los estudiantes (noveles) de un primer curso de cálculo integral, sobre todo a aquellos con limitaciones en el dominio de los procedimientos algebraicos básicos.

Siguiendo la idea de las técnicas para calcular los coeficientes A_i y B_i que aparecen en los distintos numeradores de las fracciones simples (o parciales), en esta investigación fue concebida una técnica alternativa con visión algebraica para calcular dichos valores donde su principal atractivo es no requerir de sistemas de ecuaciones durante el proceso de cálculo.

3. Dos Métodos Clásicos para la DFS

Los métodos para desarrollar una *descomposición en fracciones simples*, que se muestran a continuación, recurren al uso de sistemas de ecuaciones.

Método de Coeficientes Indeterminados

Definición 5 (DFI) *Consiste en descomponer un polinomio, $Q(x)$, como producto de factores de grado uno y de factores de grado dos irreducibles:*

$$Q(x) = (x-a_1)^{\alpha_1} \cdots (x-a_n)^{\alpha_n}$$

$$(x^2+b_1x+c_1)^{\beta_1} \cdots (x^2+b_mx+c_m)^{\beta_m}. \qquad (5)$$

En la descomposición (5) cada a_j es una raíz real de orden α_j del polinomio Q, y los factores cuadráticos del tipo $(x^2+b_jx+c_j)^{\beta_j}$ corresponden a raíces complejas conjugadas de orden β_j. Tales factores cuadráticos son irreducibles, es decir, su discriminante es negativo o, lo que es igual, $x^2+b_jx+c_j>0$ para toda $x\in\mathbb{R}$ (ver [11]).

Definición 6 (MCI) *Se Escribe el cociente $P(x)/Q(x)$ como suma de fracciones de la siguiente forma:*

- *Por cada raíz real a_j de orden α_j se escriben α_j fracciones cuyos numeradores son constantes A_{k_j} los cuales hay que determinar, y los denominadores son de la forma $(x-a_j)^{k_j}$ donde k_j toma valores de 1 hasta α_j.*
- *Por cada factor cuadrático irreducible $(x^2+b_jx+c_j)^{\beta_j}$ se escriben β_j fracciones cuyos numeradores son de la forma $B_{k_j}x+C_{k_j}$ siendo B_{k_j} y C_{k_j} constantes los cuales se deben determinar, y los denominadores son de la forma $(x^2+b_jx+c_j)^{k_j}$ donde k_j toma valores de 1 hasta β_j.*
- *La descomposición queda de la forma:*

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \sum_{j=1}^{n}\left[\sum_{k_j=1}^{\alpha_j}\frac{A_{k_j}}{(x-a_j)^{k_j}}\right]+$$

$$\sum_{j=1}^{m}\left[\sum_{k_j=1}^{\beta_j}\frac{B_{k_j}x+C_{k_j}}{(x^2+b_jx+c_j)^{k_j}}\right], \qquad (6)$$

  donde habrá que calcular tantos coeficientes como el grado del polinomio Q.
- *Finalmente, se reducen todas las fracciones a común denominador [será $Q(x)$], y se iguala a $P(x)$ el numerador resultante. Esto producirá un sistema de ecuaciones lineales cuyas incógnitas son los coeficientes A_j, B_j y C_j, cuya resolución dará el valor de todos ellos [11].*

Método de Hermite-Ostrogradsky

Definición 7 (MHO) *Se Escribe el cociente $P(x)/Q(x)$ de la siguiente forma:*

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{x-a_1}+\cdots+\frac{A_n}{x-a_n}+$$

$$\frac{B_1x+C_1}{x^2+b_1x+c_1}+\cdots+\frac{B_mx+C_m}{x^2+b_mx+c_m}+$$

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{F(x)}{\varphi(x)}\right]. \qquad (7)$$

Con

$$\varphi(x) = (x-a_1)^{\alpha_1-1}\cdots(x-a_n)^{\alpha_n-1}$$

$$(x^2+b_1x+c_1)^{\beta_1-1}\cdots(x^2+b_mx+c_m)^{\beta_m-1}.$$

Los $A_1,\ldots,A_n,B_1,\ldots,B_m,C_1,\ldots,C_m$ son coeficientes a determinar y, en la fracción que aparece con una derivada, $F(x)$ es un polinomio genérico de grado uno menos que el denominador. En resumen, se trata de escribir $P(x)/Q(x)$ como suma de fracciones simples, una por cada factor de $Q(x)$, más la derivada de un cociente, el cual tiene por denominador $Q(x)$ con sus factores disminuidos en una unidad y de numerador un polinomio genérico, $F(x)$, con coeficientes indeterminados de grado uno menos que el denominador. Es importante notar la necesidad de calcular tantos coeficientes como el grado del polinomio Q.

Se reducen todas las fracciones a común denominador [será $Q(x)$], y se iguala a $P(x)$ el numerador resultante. Esto producirá un sistema de ecuaciones lineales cuyas incógnitas son los coeficientes A_j, B_j y C_j más los coeficientes de $F(x)$, naturalmente, primero se requiere efectuar la derivada antes de reducir a común denominador. Finalmente, la solución del sistema dará el valor de todos los coeficientes [11].

4. Axiomatización de la Nueva Técnica

Proposición 1 *Al realizar la DFS de la expresión:*

$$\frac{1}{(x+b_2)(x+b_1)^k} \tag{8}$$

donde $b_1, b_2 \in \mathbb{R}$ *y* $k \in \mathbb{N}$ $(k \geq 1)$. *El resultado es de la forma:*

$$\sum_{i=1}^{k} \frac{\alpha_i}{(x+b_1)^{k-i+1}} + \frac{\alpha_0}{x+b_2}$$

y los α_i $(\forall i = \overline{0:k})$ *no son obtenidos a partir de sistemas de ecuaciones.*

Demostración: Se comenzará la DFS con $k = 1$.

$$\frac{1}{(x+b_2)(x+b_1)}.$$

En este caso, se hace:

$$\frac{1}{x+b_1} - \frac{1}{x+b_2} = \frac{b_2-b_1}{(x+b_1)(x+b_2)}.$$

De lo anterior, al multiplicar ambos miembros por la expresión $1/(b_2-b_1)$, se tiene:

$$\frac{1}{(x+b_2)(x+b_1)} = \frac{1}{b_2-b_1}\left(\frac{1}{x+b_1} - \frac{1}{x+b_2}\right).$$

Luego; la descomposición para $k = 1$ es:

$$\frac{1}{(x+b_2)(x+b_1)} = \frac{1}{b_2-b_1}\left(\frac{1}{x+b_1}\right) -$$

$$\frac{1}{b_2-b_1}\left(\frac{1}{x+b_2}\right). \tag{9}$$

En este primer caso, se tiene:

$$\alpha_0 = \frac{1}{b_2-b_1} \quad \text{y} \quad \alpha_1 = \frac{-1}{b_2-b_1}.$$

Se observa que los coeficientes α_0 y α_1 son obtenidos sin usar sistemas de ecuaciones.

Ahora, se construirá la descomposición para $k = 2$.

$$\frac{1}{(x+b_2)(x+b_1)^2}.$$

Sacando como factor $1/(x+b_1)$, se obtiene:

$$\frac{1}{(x+b_2)(x+b_1)^2} = \frac{1}{x+b_1}\frac{1}{(x+b_2)(x+b_1)}.$$

Al usar la descomposición (9), en la expresión anterior, se tiene:

$$\frac{1}{(x+b_2)(x+b_1)^2} = \frac{1}{b_2-b_1}\frac{1}{(x+b_1)^2} -$$

$$\frac{1}{b_2-b_1}\frac{1}{(x+b_1)(x+b_2)}.$$

Usando nuevamente la descomposición (9) se tiene:

$$\frac{1}{(x+b_2)(x+b_1)^2} = \frac{1}{b_2-b_1}\frac{1}{(x+b_1)^2} -$$
$$\frac{1}{b_2-b_1}\left[\frac{1}{b_2-b_1}\left(\frac{1}{x+b_1}\right) - \frac{1}{b_2-b_1}\left(\frac{1}{x+b_2}\right)\right].$$

Finalmente, la descomposición para $k = 2$ es:

$$\frac{1}{(x+b_2)(x+b_1)^2} = \frac{1}{b_2-b_1}\frac{1}{(x+b_1)^2} -$$

$$\frac{1}{(b_2-b_1)^2}\frac{1}{x+b_1} + \frac{1}{(b_2-b_1)^2}\frac{1}{x+b_2}. \tag{10}$$

Veamos la descomposición para $k = 3$.

$$\frac{1}{(x+b_2)(x+b_1)^3}.$$

Lo anterior puede escribirse como:

$$\frac{1}{(x+b_2)(x+b_1)^3} = \frac{1}{x+b_1}\frac{1}{(x+b_2)(x+b_1)^2}.$$

Al usar la descomposición (10) y aplicar la propiedad distributiva se tiene:

$$\frac{1}{(x+b_2)(x+b_1)^3} = \frac{1}{b_2-b_1}\frac{1}{(x+b_1)^3} -$$
$$\frac{1}{(b_2-b_1)^2}\frac{1}{(x+b_1)^2} + \frac{1}{(b_2-b_1)^2}\frac{1}{(x+b_1)(x+b_2)}.$$

Usando la descomposición (9), se tiene:

$$\frac{1}{(x+b_2)(x+b_1)^3} = \frac{1}{b_2-b_1}\frac{1}{(x+b_1)^3} -$$

$$\frac{1}{(b_2-b_1)^2}\frac{1}{(x+b_1)^2} +$$

$$\frac{1}{(b_2-b_1)^2}\left[\frac{1}{b_2-b_1}\left(\frac{1}{x+b_1}\right)-\frac{1}{b_2-b_1}\left(\frac{1}{x+b_2}\right)\right].$$

Luego, la descomposición para $k=3$ viene dada por:

$$\frac{1}{(x+b_2)(x+b_1)^3}=\frac{1}{b_2-b_1}\frac{1}{(x+b_1)^3}-$$

$$\frac{1}{(b_2-b_1)^2}\frac{1}{(x+b_1)^2}+\frac{1}{(b_2-b_1)^3}\frac{1}{x+b_1}-$$

$$\frac{1}{(b_2-b_1)^3}\frac{1}{x+b_2}. \tag{11}$$

Si se repite el mismo procedimiento es posible arribar a la expresión para la descomposición del caso general:

$$\frac{1}{(x+b_2)(x+b_1)^k}=\sum_{i=1}^{k}\frac{(-1)^{i+1}}{(b_2-b_1)^i}\frac{1}{(x+b_1)^{k-i+1}}+$$

$$\frac{(-1)^k}{(b_2-b_1)^k}\frac{1}{x+b_2}. \qquad \blacksquare \tag{12}$$

Este proceso con enfoque inductivo es suficiente para probar la proposición 1, donde los coeficientes vienen dados por:

$$\alpha_i=\frac{(-\mathbf{1})^{i+1}}{(b_2-b_1)^i}\ \ (i=\overline{1:k})$$

y

$$\alpha_0=\frac{(-\mathbf{1})^k}{(b_2-b_1)^k}.$$

En la construcción de la prueba, se observa cláramente que ninguno de los coeficientes de la DFS fue obtenido a partir de sistemas de ecuaciones. Para más detalles en el desarrollo de los cálculos ver [3].

Proposición 2 *Al realizar la DFS de la expresión:*

$$\frac{1}{(x+b_2)(x^2+d_1x+e_1)^k} \tag{13}$$

donde $b_2,d_1,e_1\in\mathbb{R}$ *y* $k\in\mathbb{N}$ $(k\geq 1)$. *El resultado es de la forma:*

$$\frac{\alpha_0}{x+b_2}+\sum_{i=1}^{k}\frac{\beta_i x+\gamma_i}{(x+b_1)^{k-i+1}}$$

y los β_i,γ_i $(\forall i=1,\ldots,k)$ *y* α_0 *no son obtenidos a partir de sistemas de ecuaciones.*

Demostración: Se iniciará la DFS con $k=1$:

$$\frac{1}{(x+b_2)(x^2+d_1x+e_1)}.$$

Haciendo la siguiente diferencia, se tiene:

$$\frac{1}{x+b_2}-\frac{x+d_1-b_2}{x^2+d_1x+e_1}=\frac{{b_2}^2-d_1b_2+e_1}{(x+b_2)(x^2+d_1x+e_1)}.$$

De lo anterior, se tiene que:

$$\frac{1}{(x+b_2)(x^2+d_1x+e_1)}=\frac{1}{b_2^2-d_1b_2+e_1}$$

$$\left(\frac{1}{x+b_2}-\frac{x+d_1-b_2}{x^2+d_1x+e_1}\right).$$

Luego; la DFS para $k=1$ es:

$$\frac{1}{(x+b_2)(x^2+d_1x+e_1)}=$$

$$\frac{1}{{b_2}^2-d_1b_2+e_1}\left(\frac{1}{x+b_2}\right)-$$

$$\frac{1}{{b_2}^2-d_1b_2+e_1}\left(\frac{x+d_1-b_2}{x^2+d_1x+e_1}\right). \tag{14}$$

En este primer caso, se obtienen los coeficientes:

$$\alpha_0=\frac{1}{b_2^2-d_1b_2+e_1},\quad \beta_1=-\frac{1}{{b_2}^2-d_1b_2+e_1}\quad \text{y}$$

$$\gamma_1=-\frac{d_1-b_2}{{b_2}^2-d_1b_2+e_1}.$$

Como se pudo observar, los coeficientes α_0, β_1 y γ_1 fueron obtenidos sin usar sistemas de ecuaciones. Si se repite este procedimiento y se usa la fórmula (14) se obtiene la construcción de la DFS para el caso general:

$$\frac{1}{(x+b_2)(x^2+d_1x+e_1)^k}=\frac{1}{({b_2}^2-d_1b_2+e_1)^k}\frac{1}{x+b_2}-$$
$$\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{({b_2}^2-d_1b_2+e_1)^{k-i+1}}\frac{x+d_1-b_2}{(x^2+d_1x+e_1)^i}. \qquad \blacksquare$$

Donde los coeficientes que vienen dados por las siguientes expresiones:

$$\alpha_0=\frac{1}{({b_2}^2-d_1b_2+e_1)^k};$$

$$\beta_i = -\frac{1}{\left(b_2{}^2 - d_1 b_2 + e_1\right)^{k-i+1}} \text{ y}$$

$$\gamma_i = -\frac{d_1 - b_2}{\left(b_2{}^2 - d_1 b_2 + e_1\right)^{k-i+1}}$$

no fueron obtenidos a partir de sistemas de ecuaciones, para más detalles ver [3]. De esta manera se demuestra la proposición 2.

Lema 1 *Demostrar la siguiente igualdad:*

$$\frac{1}{(x^2+d_2x+e_2)(x^2+d_1x+e_1)} = \delta\frac{x+d_2-b}{x^2+d_2x+e_2} -$$

$$\delta\frac{x+d_1-b}{x^2+d_1x+e_1} \tag{15}$$

donde: $b, d_1, d_2, e_1, e_2 \in \mathbb{R}$, $d_1 \neq d_2$ *y*

$$\delta = \frac{1}{(d_2-d_1)(b^2-d_1b+e_1)}.$$

Demostración:

$$\frac{1}{(x^2+d_2x+e_2)(x^2+d_1x+e_1)} =$$

$$\frac{1}{(d_2-d_1)x-(e_2-e_1)}$$

$$\left(\frac{1}{x^2+d_1x+e_1} - \frac{1}{x^2+d_2x+e_2}\right).$$

Pero;

$$\frac{1}{[(d_2-d_1)x-(e_2-e_1)](x^2+d_1x+e_1)} =$$

$$\frac{1}{d_2-d_1}\left[\frac{1}{(x+b)(x^2+d_1x+e_1)}\right]$$

$$\frac{1}{[(d_2-d_1)x-(e_2-e_1)](x^2+d_1x+e_1)} = \frac{1}{d_2-d_1}$$

$$\left(\frac{1}{x+b} - \frac{x+d_1-b}{x^2+d_1x+e_1}\right)\frac{1}{b^2-d_1b+e_1}.$$

En forma análoga;

$$\frac{1}{[(d_2-d_1)x-(e_2-e_1)](x^2+d_2x+e_2)} = \frac{1}{d_2-d_1}$$

$$\left(\frac{1}{x+b} - \frac{x+d_2-b}{x^2+d_2x+e_2}\right)\frac{1}{b^2-d_2b+e_2}$$

donde $b = \frac{e_2-e_1}{d_2-d_1}$. No es difícil probar que:

$$\frac{1}{b^2-d_1b+e_1} = \frac{1}{b^2-d_2b+e_2}.$$

De esto resulta que;

$$\frac{1}{(x^2+d_2x+e_2)(x^2+d_1x+e_1)} = \frac{1}{d_2-d_1}$$

$$\left(\frac{x+d_2-b}{x^2+d_2x+e_2} - \frac{x+d_1-b}{x^2+d_1x+e_1}\right)\frac{1}{b^2-d_1b+e_1} =$$

$$\delta\frac{x+d_2-b}{x^2+d_2x+e_2} - \delta\frac{x+d_1-b}{x^2+d_1x+e_1} \quad \blacksquare \tag{16}$$

donde $\delta = \frac{1}{(d_2-d_1)(b^2-d_1b+e_1)}$. Ver [3].

Proposición 3 *Al realizar la DFS de la expresión:*

$$\frac{1}{(x^2+d_2x+e_2)(x^2+d_1x+e_1)^k} \tag{17}$$

donde $d_1, d_2, e_1, e_2 \in \mathbb{R}$ *y* $k \in \mathbb{N}$ $(k \geq 1)$. *Es posible obtener:*

$$\frac{1}{(x^2+d_2x+e_2)(x^2+d_1x+e_1)^k} =$$

$$\frac{\mu_0x+\rho_0}{x^2+d_2x+e_2} + \sum_{i=1}^{k}\frac{\mu_ix+\rho_i}{(x^2+d_1x+e_1)^i}$$

sin usar sistemas de ecuaciones.

Demostración: Se hará la DFS para $k = 2$:

$$\frac{1}{(x^2+d_2x+e_2)(x^2+d_1x+e_1)^2}.$$

En efecto;

$$\frac{1}{(x^2+d_2x+e_2)(x^2+d_1x+e_1)^2} = \frac{1}{x^2+d_1x+e_1}$$

$$\frac{1}{(x^2+d_2x+e_2)(x^2+d_1x+e_1)} =$$

$$\frac{1}{x^2+d_1x+e_1}\left(\delta\frac{x+d_2-b}{x^2+d_2x+e_2} - \delta\frac{x+d_1-b}{x^2+d_1x+e_1}\right) =$$

$$\delta\frac{x+d_2-b}{(x^2+d_1x+e_1)(x^2+d_2x+e_2)} -$$

$$\delta\frac{x+d_1-b}{(x^2+d_1x+e_1)^2} = \delta(x+d_2-b)$$

$$\frac{1}{(x^2+d_1x+e_1)(x^2+d_2x+e_2)}-\delta\frac{x+d_1-b}{(x^2+d_1x+e_1)^2}.$$

Usando el lema 1, en la última expresión, se tiene:

$$\frac{1}{(x^2+d_2x+e_2)(x^2+d_1x+e_1)^2}=\delta(x+d_2-b)$$

$$\left(\delta\frac{x+d_2-b}{x^2+d_2x+e_2}-\delta\frac{x+d_1-b}{x^2+d_1x+e_1}\right)-$$

$$\delta\frac{x+d_1-b}{(x^2+d_1x+e_1)^2}=\delta^2\frac{(x+d_2-b)^2}{x^2+d_2x+e_2}-$$

$$\frac{(x+d_2-b)(x+d_1-b)}{x^2+d_1x+e_1}-\delta\frac{x+d_1-b}{(x^2+d_1x+e_1)^2}=$$

$$\delta^2+\delta^2\frac{(d_2-2b)x+(d_2-b)^2-e_2}{x^2+d_2x+e_2}-$$

$$[\delta^2+\delta^2\frac{(d_2-2b)x+(d_1-b)(d_2-b)-e_1}{x^2+d_1x+e_1}]-$$

$$\delta\frac{x+d_1-b}{(x^2+d_1x+e_1)^2}.$$

Finalmente, la DFS para $k=2$ viene dada por:

$$\frac{1}{(x^2+d_2x+e_2)(x^2+d_1x+e_1)^2}=$$

$$\delta^2\frac{(d_2-2b)x+\varepsilon_1}{x^2+d_2x+e_2}-\delta^2\frac{(d_2-2b)x+\varepsilon_2}{x^2+d_1x+e_1}-$$

$$\delta\frac{x+d_1-b}{(x^2+d_1x+e_1)^2}\quad\blacksquare \tag{18}$$

donde:

$$\varepsilon_1=(d_2-b)^2-e_2;\quad \varepsilon_2=(d_1-b)(d_2-b)-e_1$$

$$y\quad \delta=\frac{1}{(d_2-d_1)(b^2-d_1b+e_1)}.$$

Este procedimiento puede repetirse k veces y así obtener la expresión que se muestra a continuación, sin usar sistemas de ecuaciones (ver [3]).

$$\frac{1}{(x^2+d_2x+e_2)(x^2+d_1x+e_1)^k}=$$

$$\frac{\mu_0x+\rho_0}{x^2+d_2x+e_2}+\sum_{i=1}^{k}\frac{\mu_ix+\rho_i}{(x^2+d_1x+e_1)^i}.\quad\blacksquare$$

Teorema 1 *La expresión:*

$$\frac{1}{(x+b_2)^n(x+b_1)^k} \tag{19}$$

donde; $b_1,b_2\in\mathbb{R}$ *y* $n,k\in\mathbb{N}$ $(n,k\geq 1)$*, puede ser DFS sin emplear sistemas de ecuaciones.*

Demostración:

Se debe probar que, se puede escribir como:

$$\frac{1}{(x+b_2)^n(x+b_1)^k}=\sum_{i=1}^{n}\frac{\alpha_i}{(x+b_2)^i}+\sum_{i=1}^{k}\frac{\beta_j}{(x+b_1)^j}$$

donde α_i $(i=\overline{1:n})$ y β_j $(j=\overline{1:k})$ se pueden obtener sin usar sistemas de ecuaciones.

En efecto, de acuerdo a la proposición 1, se tiene:

$$\frac{1}{(x+b_2)(x+b_1)^k}=\sum_{i=1}^{k}\frac{\alpha_i}{(x+b_1)^{k-i+1}}+\frac{\alpha_0}{x+b_2}$$

donde:

$$\alpha_i=\frac{(-1)^{i+1}}{(b_2-b_1)^i}\ (\text{con } i=\overline{1:k})\ \text{y}\ \alpha_0=\frac{(-1)^k}{(b_2-b_1)^k}.$$

Por lo que:

$$\frac{1}{(x+b_2)^2(x+b_1)^k}=\frac{1}{x+b_2}\frac{1}{(x+b_2)(x+b_1)^k}=$$

$$\frac{1}{x+b_2}\left[\sum_{i=1}^{k}\frac{\alpha_i}{(x+b_{\mathbf{1}})^{k-i+1}}+\frac{\alpha_{\mathbf{0}}}{x+b_{\mathbf{2}}}\right].$$

Es decir;

$$\frac{1}{(x+b_2)^2(x+b_1)^k}=$$

$$\sum_{i=1}^{k}\alpha_i\underbrace{\frac{1}{(x+b_2)(x+b_1)^{k-i+1}}}_{(\mathbf{A})}+\frac{\alpha_0}{(x+b_2)^2}.$$

A cada término de la forma (A) se le puede aplicar la proposición 1 y así se obtiene una descomposición para cada expresión de la forma:

$$\frac{1}{(x+b_2)(x+b_1)^{k-i+1}}.$$

Este procedimiento puede repetirse en forma recursiva hasta obtener una DFS (ver [3]), sin usar sistemas de ecuaciones, para la expresión:

$$\frac{1}{(x+b_2)^n(x+b_1)^k}.\quad\blacksquare$$

Teorema 2 *La expresión:*

$$\frac{1}{(x+b_2)^n\left(x^2+d_1x+e_1\right)^k}=\sum_{i=1}^{n}\frac{\alpha_i}{(x+b_2)^i}+$$

$$\sum_{j=1}^{k}\frac{\mu_j x+\rho_j}{\left(x^2+d_1x+e_1\right)^j} \tag{20}$$

donde; $b_2,d_1,e_1\in\mathbb{R}$, $n,k\in\mathbb{N}$ $(n,k\geq 1)$, $\alpha_i,\mu_j,\rho_j\in\mathbb{R}$ $(i=\overline{1:n},\ j=\overline{1:k})$. *Puede ser DFS sin emplear sistemas de ecuaciones.*

Demostración:

La prueba se logra siguiendo las líneas de la demostración del teorema 1, pero usando la proposición 1 y 2, ver [3]. ■

Teorema 3 *La expresión:*

$$\frac{1}{\left(x^2+d_2x+e_2\right)^n\left(x^2+d_1x+e_1\right)^k}=$$

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\alpha_i x+\beta_i}{\left(x^2+d_2x+e_2\right)^i}+\sum_{j=1}^{k}\frac{\mu_j x+\rho_j}{\left(x^2+d_1x+e_1\right)^j} \tag{21}$$

con: $d_2,d_1,e_1,e_2\in\mathbb{R}$, $n,k\in\mathbb{N}$ $(n,k\geq 1)$, $\alpha_i,\beta_i,\mu_j,\rho_j\in\mathbb{R}$ $(i=\overline{1:n},\ j=\overline{1:k})$. *Puede ser DFS sin emplear sistemas de ecuaciones.*

Demostración:

Esta prueba se obtiene; siguiendo la demostración del teorema 1 y usando el resultado de la proposición 3 (para más detalles ver [3]). ■

Observación 1 *La maquinaria expuesta hasta ahora es aplicable solo al caso:*

$$\frac{1}{Q(x)}. \tag{22}$$

Donde;

$$Q(x)=(x+b_1)^{n_1}\ldots(x+b_p)^{n_p}$$

$$\left(x^2+d_1x+e_1\right)^{m_1}\ldots\left(x^2+d_sx+e_s\right)^{m_s},$$

con: $n_i\in\mathbb{N}$, $m_j\in\mathbb{N}$ *y* $x^2+d_jx+e_j$ *irreducible en* $\mathbb{R}$; *para* $i=\overline{1:p}$ *y* $j=\overline{1:s}$.

Ahora, con el apartado siguiente los autores del presente trabajo cubren el caso más general. A saber; si se quisiera descomponer en fracciones simples una expresión de la forma:

$$\frac{P(x)}{Q(x)}. \tag{23}$$

En ese sentido, para la expresión (23), se consideran los polinomios $P(x)$ *y* $Q(x)$ *con coeficientes reales. Se llamará función racional propia a la fracción* $P(x)/Q(x)$ *donde el grado del polinomio* $P(x)$ *es menor que el grado de* $Q(x)$. *Cuando* $P(x)/Q(x)$ *no es propia (impropia), de acuerdo al algoritmo de la división de Euclides siempre se podrá escribir:*

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=C(x)+\frac{R(x)}{Q(x)} \tag{24}$$

donde: $C(x)$, $R(x)$ *y* $Q(x)$ *son tales que ahora:*

$$\frac{R(x)}{Q(x)}$$

es una función racional propia.

Lema 2 *Sea* $P(x)/Q(x)$ *una función racional propia. Y sea* α *una raíz real de multiplicidad* $\beta\geq 1$ *del polinomio* $Q(x)$. *En ese sentido; se puede escribir:*

$$Q(x)=(x-\alpha)^{\beta}M(x)\ \ y\ \ M(\alpha)\neq 0, \tag{25}$$

entonces existen $A\in\mathbb{R}$ *y un polinomio* $P_1(x)$ *con coeficientes reales tales que:*

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{A}{(x-\alpha)^{\beta}}+\frac{P_1(x)}{(x-\alpha)^{\beta-1}M(x)} \tag{26}$$

donde $\frac{P_1(x)}{(x-\alpha)^{\beta-1}M(x)}$ *también es propia.*

Demostración:

Es claro que:

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{P(x)}{(x-\alpha)^{\beta}M(x)}.$$

Y no menos claro es que:

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\left[\frac{P(x)}{(x-\alpha)^{\beta}M(x)}-\frac{A}{(x-\alpha)^{\beta}}\right]+\frac{A}{(x-\alpha)^{\beta}}$$

de lo anterior, se infiere que:

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{A}{(x-\alpha)^{\beta}}+\underbrace{\frac{P(x)-AM(x)}{(x-\alpha)^{\beta}M(x)}}_{\text{(I)}} \tag{27}$$

por definición de fracción racional propia el grado de $P(x)$ es menor que el grado de $Q(x)$. Es obvio que el grado del polinomio $M(x)$ es menor que el grado de $Q(x)$ (puesto que $\beta \geq 1$) por lo que independientemente del valor que tome "A", la fracción:

$$\frac{P(x)-AM(x)}{(x-\alpha)^{\beta}M(x)}$$

es regular. Ahora, se elije "A" de forma tal que "α" sea raíz del polinomio $P(x)-AM(x)$ y, por lo tanto, que este polinomio sea divisible por $x-\alpha$, donde $\alpha \in \mathbb{R}$.

En términos simples, se elije "A" con la condición de que $P(\alpha)-AM(\alpha)=0$. De este hecho, se infiere que $A=P(\alpha)/M(\alpha)$. Para tal elección de "A" el término (I) del lado derecho en (27) se puede simplificar por $x-\alpha$, resultando que la fracción ha de ser del tipo:

$$\frac{P_1(x)}{(x-\alpha)^{\beta-1}M(x)}.$$

Como esta fracción fue obtenida con la simplificación de una fracción racional propia con coeficientes reales por el factor $x-\alpha$, donde $\alpha \in \mathbb{R}$, entonces ella misma también es una función racional propia con coeficientes reales (ver [3]). ■

Observación 2 *Si los polinomios $P(z)$ y $Q(z)$ tienen coeficientes complejos y $z=\alpha$ es una raíz compleja de multiplicidad $\beta \geq 1$ del polinomio $Q(z)$, entonces la descomposición anterior también ocurre; pero el "A" obtenido es en general un número complejo.*

Lema 3 *Sea $\frac{P(x)}{Q(x)}$ una fracción racional propia. Si el número complejo $z_1=a+ib$ con $a, b \in \mathbb{R}$ $(b \neq 0)$, es una raíz de multiplicidad $\alpha \geq 1$ del polinomio $Q(x)$, es decir:*

$$Q(x)=(x^2+px+q)^{\alpha}Q_1(x),$$

donde: $Q_1(z_1) \neq 0$ y $x^2+px+q=(x-z_1)(x-\overline{z_1})$, entonces existen números reales M, N y el polinomio $P_1(x)$ con coeficientes reales, tales que:

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^{\alpha}}+\underbrace{\frac{P_1(x)}{(x^2+px+q)^{\alpha-1}Q_1(x)}}_{\text{(I)}}$$

donde, la fracción (I) *también es propia.*

Demostración:

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{P(x)}{(x^2+px+q)^{\alpha}Q_1(x)}.$$

Es claro que:

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^{\alpha}}+$$
$$\frac{P(x)}{(x^2+px+q)^{\alpha}Q_1(x)}-\frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^{\alpha}}.$$

Lo anterior puede escribirse como:

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^{\alpha}}+\underbrace{\frac{P(x)-(Mx+N)Q_1(x)}{(x^2+px+q)^{\alpha}Q_1(x)}}_{\text{(A)}}$$

donde, el término (A) es una fracción propia.

Se escogerá a "M" y "N" de tal forma que el numerador de la fracción (A) sea divisible por:

$$x^2+px+q=(x-z_1)(x-\overline{z_1}).$$

Para ello; basta elegir a "M" y "N" de forma tal que z_1 y $\overline{z_1}$ sean raíces de la expresión:

$$P(x)-(Mx+N)Q_1(x).$$

De ésto se tiene que; este polinomio es divisible por x^2+px+q y en ese sentido:

$$P(z_1)-(Mz_1+N)Q_1(z_1)=0.$$

De donde:

$$Mz_1+N=\frac{P(z_1)}{Q_1(z_1)}$$

donde, $Q_1(z_1) \neq 0$.

Sea $z_1=a+ib$ y $\frac{P(z_1)}{Q_1(z_1)}=A+iB$, entonces

$$A+iB=Mz_1+N=M(a+ib)+N.$$

De lo anterior, es posible inferir que:

$$M=\frac{B}{b} \quad \text{y} \quad N=A-\frac{a}{b}B.$$

Para estos valores de "M" y "N" el polinomio:

$$P(x)-(Mx+N)Q_1(x)$$

es divisible por la expresión x^2+px+q. Luego, simplificando el término (A) se logra obtener una fracción propia con coeficientes reales ([3]) del tipo:

$$\frac{P_1(x)}{(x^2+px+q)^{\alpha-1}Q_1(x)}.$$ ■

Observación 3 *A veces conviene dependiendo del problema, aplicar alguna de las dos opciones siguientes o incluso combinarlas:*

Opción 1 Se escribe la expresión (23) como:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = P(x)\cdot \underbrace{\frac{1}{Q(x)}}_{\text{(A)}}$$

después, se aplica la DFS con la nueva técnica al factor (A), lo siguiente es efectuar el producto de $P(x)$ por cada término de la descomposición de $\frac{1}{Q(x)}$.

Este producto está formado por términos de la forma:

$$\frac{p_i(x)}{(a_ix+b_i)^{t_i}} \quad \text{ó} \quad \frac{p_j(x)}{(c_jx^2+d_jx+e_j)^{s_j}}.$$

Si el grado del numerador, en alguna de las fracciones anteriores, es mayor o igual al grado del denominador hay que hacer la respetiva división para luego, agrupar a los términos semejantes.

Opción 2 Expresar $P(x)$ como sumas de:

$$(a_ix+b_i)^{k_i} \quad \text{y/o} \quad (c_jx^2+d_jx+e_j)^{d_j}.$$

Luego simplificar. Con esto, cada término obtenido es más sencillo de descomponer.

En general; esta última opción es la más sencilla y óptima, no obstante, a veces es conveniente combinar ambas opciones (para más detalles ver [3]).

5. Implementación de la Nueva Técnica

Problema 1 Realizar la DFS, sin la necesidad de implementar sistemas de ecuaciones, de la expresión:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{2x^4+x^3+4x^2+1}{(x^2+1)^2(x-1)}. \tag{28}$$

Solución:

Caso 1

$$Q_1(x) = (x^2+1)^2 \quad \text{y} \quad \alpha = 1.$$

De acuerdo al lema 2 es fácil ver que $A = \frac{P(1)}{Q_1(1)} = 2$.

Luego;

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{2}{x-1} + \frac{2x^4+x^3+4x^2+1-2(x^2+1)^2}{(x^2+1)^2(x-1)} =$$

$$\frac{2}{x-1} + \frac{x^3-1}{(x^2+1)^2(x-1)}.$$

Factorizando y simplificando, se tiene la DFS:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{2}{x-1} + \frac{(x-1)(x^2+x+1)}{(x^2+1)^2(x-1)} =$$

$$\frac{2}{x-1} + \frac{x^2+x+1}{(x^2+1)^2} = \frac{2}{x-1} + \frac{1}{x^2+1} + \frac{x}{x^2+1)^2}. \quad \square$$

Caso 2

$$Q_1(x) = x-1, z_1 = a+ib = i \;\Rightarrow\; a=0 \text{ y } b=1.$$

De acuerdo al lema 3, es fácil ver que:

$$A+iB = \frac{P(i)}{Q_1(i)} = \frac{2i^4+i^3+4i^2+1}{i-1} = i,$$

por lo que; $A=0$, $B=1$. De lo anterior, se tiene que:

$$M=1 \quad \text{y} \quad N=0.$$

Por lo tanto;

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{x}{(x^2+1)^2} + \frac{2x^4+x^3+4x^2+1-x(x-1)}{(x^2+1)^2(x-1)} =$$

$$\frac{x}{(x^2+1)^2} + \frac{2x^4+x^3+3x^2+x+1}{(x^2+1)^2(x-1)}.$$

Pero de acuerdo al lema 3, el polinomio $2x^4+x^3+3x^2+x+1$ es divisible por x^2+1. En efecto, al realizar esta división resulta:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{x}{(x^2+1)^2} + \underbrace{\frac{2x^2+x+1}{(x^2+1)(x-1)}}_{\text{(I)}}. \tag{29}$$

Aplicando nuevamente el lema 3, pero al término (I):

$$\frac{P^*(x)}{Q^*(x)} = \frac{2x^2+x+1}{(x^2+1)(x-1)}.$$

El nuevo $P(x)$ es $2x^2+x+1$ y $Q_1(x)$ es $x-1$.

$$z_i = a+ib = i \;\Rightarrow\; a=0 \text{ y } b=1.$$

Por el lema 3 se observa que:

$$A+iB = \frac{P(i)}{Q_1(i)} = \frac{-2+i+1}{i-1} = 1,$$

de donde; $A=1$ y $B=0$. Luego, se tiene que:

$$M=0 \quad \text{y} \quad N=1.$$

Por lo tanto;

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{1}{x^2+1} + \frac{2x^2+x+1-(x-1)}{(x^2+1)(x-1)} =$$

$$\frac{1}{x^2+1} + \frac{2x^2+2}{(x^2+1)(x-1)}.$$

Al simplificar, se tiene que:

$$\frac{P^*(x)}{Q^*(x)} = \frac{1}{x^2+1} + \frac{2}{x-1}. \tag{30}$$

Se sustituye (30) en (29) se tiene la DFS deseada:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{2}{x-1} + \frac{1}{x^2+1} + \frac{x}{(x^2+1)^2}. \quad \square$$

Problema 2 El siguiente problema fue extraído del [9] y el mismo consiste en calcular la integral:

$$\int \left[\frac{x^4+4x^3+11x^2+12x+8}{(x^2+2x+3)^2(x+1)}\right] dx. \tag{31}$$

Para calcular la integral (31) es necesario la DFS de:

$$\frac{x^4+4x^3+11x^2+12x+8}{(x^2+2x+3)^2(x+1)}.$$

El desarrollo se limitará a realizar solo la DFS y, la misma, se hará con el método sugerido por [9] (MCI y Evaluación). También, se trabajará con la técnica propuesta en este artículo y así se hará la comparación entre los métodos utilizados.

Usando el método sugerido en [9]:

$$\frac{x^4+4x^3+11x^2+12x+8}{(x^2+2x+3)^2(x+1)} =$$

$$\frac{Ax+B}{(x^2+2x+3)^2} + \frac{Cx+D}{x^2+2x+3} + \frac{E}{x+1}.$$

Lo anterior puede escribirse como:

$$\frac{x^4+4x^3+11x^2+12x+8}{(x^2+2x+3)^2(x+1)} = (x+1)$$

$$\left[\frac{Ax+B}{(x^2+2x+3)^2} + \frac{Cx+D}{x^2+2x+3}\right] + E.$$

Al sustituir por $x=-1$ se tiene que $E=1$.

Basta comparar los numeradores.

$$x^4+4x^3+11x^2+12x+8 = (Ax+B)$$

$$(x+1) + (Cx+D)(x^3+3x^2+5x+3) +$$

$$E(x^4+4x^3+10x^2+12x+9).$$

Para obtener el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} C+E=1 \\ 3C+D+4E=4 \\ A+5C+3D+10E=11 \\ A+B+3C+12E=12 \end{cases} \tag{32}$$

Al resolver el sistema (32) se obtiene la siguiente solución:

$$A=1,\ B=-1,\ C=0 \text{ y } D=0.$$

De esta forma se han encontrado los coeficientes de cada una de las fracciones más simples. $\square$

El siguiente paso sería integrar. Ese paso no se hará como ya se había comentado, el único interés es determinar los coeficientes y comparar la técnica de este artículo con el método propuesto en [9].

Usando la técnica propuesta en este artículo:

$$\frac{x^4+4x^3+11x^2+12x+8}{(x^2+2x+3)^2(x+1)} =$$

$$\frac{(x^2+2x+3)^2+(x+1)(x-1)}{(x^2+2x+3)^2(x+1)}. \tag{33}$$

Al simplificar el lado derecho de (33) se obtiene:

$$\frac{x^4+4x^3+11x^2+12x+8}{(x^2+2x+3)^2(x+1)} =$$

$$\frac{1}{x+1} + \frac{x-1}{(x^2+2x+3)^2}.$$

De donde:

$$A=1,\ B=-1,\ C=0,\ D=0 \text{ y } E=1. \quad \square$$

6. Conclusiones

La *descomposición en fracciones simples* puede ser una tarea muy engorrosa. Explorar métodos alternativos de descomposición que agilicen el proceso puede ser muy útil para que la *descomposición en fracciones simples* no parezca tan abrumadora. Comprender los conceptos básicos, aprender algunos atajos

y saber cuándo usarlos es esencial para ser competente, seguro y eficiente al resolver problemas de *descomposición en fracciones simples* [8].

La principal contribución de la técnica mostrada en este artículo radica en su eficiencia superior: ésta evita por completo la construcción y resolución de sistemas lineales, simplificando el proceso a operaciones algebraicas elementales. Esto no solo acelera los cálculos, sino que también minimiza errores comunes cometidos generalmente por estudiantes noveles al utilizar métodos tradicionales.

En ese sentido, la implementación de una técnica alternativa que evite el uso de sistemas de ecuaciones en la *descomposición en fracciones simples* resulta fundamental, ya que optimiza los procesos de cálculo, reduce errores y agiliza, por ejemplo, la simplificación de integrales complejas. Además, esta mejora metodológica no solo facilita el análisis de funciones racionales, sino que también amplía su aplicabilidad en áreas como el cálculo avanzado, las ecuaciones diferenciales y la ingeniería, contribuyendo así a un enfoque más eficiente y accesible en el estudio de las matemáticas aplicadas y teóricas.

Por otro lado, se destaca que esta nueva técnica no solo optimiza procesos computacionales, sino que también amplía las posibilidades pedagógicas en la enseñanza de matemáticas avanzadas [5], al ofrecer un camino más intuitivo y menos mecánico para la DFS, en esa dirección, dos estudios recientes (ver [3] y [4]) han demostrado que la implementación de esta nueva técnica —la cual evita el uso de sistemas de ecuaciones—, en comparación con técnicas tradicionales como: MCI y MHO, no solo fomenta actitudes más positivas en estudiantes universitarios, sino que también potencia significativamente su pensamiento algebraico. Estos hallazgos sugieren que su aplicación podría contribuir de manera efectiva a la mejora del rendimiento académico, posicionándola como una prometedora herramienta del álgebra para la enseñanza del cálculo.

Referencias

[1] Chrystal, G. (1961). *Textbook of algebra*. Dover Publications.

[2] Díaz, J. (2017). Técnicas alternativas para el cálculo de fracciones parciales. *El Cálculo y su Enseñanza. Enseñanza de las Ciencias y la Matemática*, 9:24–41.

[3] Hernández, F. (2024). *Aproximación teórica para la descomposición en fracciones simples y su efecto en el rendimiento académico inmediato. Una estrategia didáctica alternativa y la modelación matemática*. PhD thesis, Instituto Pedagógico "Rafael Alberto Escobar Lara". Universidad Pedagógica Experimental Libertador. Maracay, Venezuela.

[4] Hernández, F. (2025). *Actitudes estudiantiles hacia la descomposición en fracciones simples. Coeficientes indeterminados o Hermite-Ostrogradsky*. Master's thesis, Facultad de Ciencias de la Educación. Universidad de Carabobo. Valencia, Venezuela.

[5] Hernández, F. and Flores, E. (2024). Una técnica alternativa y la teoría APOE para la descomposición en fracciones simples. Caso: factores lineales no repetidos. *ARJÉ*, 18(35).

[6] Huang, X. (1991). A shortcut in partial fractions. *The College Mathematics Journal*, 22(5):413–415.

[7] Martínez, A. (2006). Descomposición en fracciones parciales. *Scientia et Technica*, XII(31):259–264.

[8] Newberry, A. (2011). *Investigating methods of partial fraction decomposition*. Master's thesis, The University of Texas at Austin. Austin, EUA.

[9] Piskunov, N. (1978). *Cálculo diferencial e integral*. Editorial Montaner y Simon, S.A.

[10] Purcell, E. (2007). *Cálculo*. (9na ed.). Pearson Educación.

[11] Pérez, F. (2008). *Cálculo diferencial e integral de funciones de una variable*. Universidad de Granada, Departamento de Análisis Matemático.

[12] Wang, T. (2007). Techniques on partial fractions. *American Mathematical Association of Two Year Colleges*, (33).

[13] Zill, D. (2011). *Cálculo de una variable*. (4ta ed.). Mc Graw-Hill.