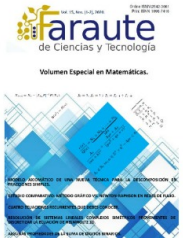
FARAUTE, Vol. 15, Nro. (1-2): 19-28, 2020.

Online ISNN 2542-3061
Print ISNN 1698-7418



Estudio comparativo: método gráfico vs. Newton-Raphson en redes de flujo

Enrique V. Flores C.[1a], **Antoinette C. Freites G.**[1b], **Arquímedes González R.**[1c]

[1] *Departamento de Térmica y Energética, Escuela de Ingeníeria Mecánica, Facultad de Ingeniería, Universidad de Carabobo. Venezuela.*

[a] *Instituto de Matemática y Cálculo Aplicado (IMYCA), Facultad de Ingeniería, Universidad de Carabobo. Venezuela.*

ORCID iD: 0000-0002-7605-3286[a] 0009-0003-1984-2881[b] 0009-0001-1828-5038[c]

Correo electrónico del autor para correspondencia: evflores@uc.edu.ve[a]

Correos electrónicos de los coautores: antoi.freites@gmail.com[b] arquimedesggrr@gmail.com[c]

Recibido: ***5/07/2025****, Revisado:* ***15/08/2025****, Aceptado:* ***11/09/2025****.*

Resumen

En este trabajo se presenta la comparativa del empleo del método gráfico con el empleo del método de Newton-Raphson para calcular los caudales que atraviesan las tuberías en tres casos distintos de redes a través de las cuales fluye agua. Se toman tres casos de la bibliografía considerando distintas cantidades de tuberías en cada caso. Se determinan los errores relativos de los caudales determinados, y se calcula la suma de los cuadrados de los errores relativos en cada caso estudiado. Se determina que tanto el método gráfico como el método de Newton-Raphson ofrecen buenas aproximaciones a los resultados reportados en la bibliografía, que las magnitudes de los errores relativos calculados pueden diferir significativamente según el método empleado, y que el método que tuvo un mejor desempeño en los casos estudiados es el método gráfico, ofreciendo en la mayoría de los caudales calculados un error relativo menor al 1 % y teniendo el menor valor de la suma de los cuadrados de los errores relativos en dos de los tres casos estudiados.

Palabras Clave: Errores relativos, método gráfico, método de Newton-Raphson, redes de flujo de fluidos.

Comparative study: graphical method vs. Newton-Raphson in flow networks

Abstract

This paper presents a comparison of the graphic method with the Newton-Raphson method for calculating the flow rates through pipes in three different cases of networks through which water flows. Three cases from the literature are taken, considering different numbers of pipes in each case. The relative errors of the determined flow rates are calculated, and the sum of the squares of the relative errors is calculated for each case studied. It is determined that both the graphical method and the Newton-Raphson method provide good approximations to the results reported in the literature, that the magnitudes of the calculated relative errors can differ significantly depending on the method employed, and that the method that performed better in the studied cases is the graphical method, offering in most of the calculated flows a relative error of less than 1 % and having the lowest value of the sum of the squares of the relative errors in two of the three cases studied.

Keywords: Fluid flow networks, graphical method, Newton-Raphson method, relative errors.

1. Introducción

Tal como se indica en [22], los sistemas de conducción de fluidos en plantas industriales por lo general comprenden innumerables tuberías, muchas de ellas entre si formando redes. Destacan entre estas las redes en forma de malla, cuyas tuberías forman circuitos y están intercomunicadas; donde no es posible a priori establecer el sentido de flujo en todas las tuberías que conforman la red.

En [14] se señala que el análisis de una red de flujo, se pueden considerarse como elementos constitutivos esenciales los indicados a continuación: Resistencias (tuberías y accesorios), Fuentes/Sumideros (Tanques) y Turbomáquinas (Bombas o compresores encargados de mover fluidos). Se indica, además, que resolver una red de flujo consiste en establecer el caudal que circula en cada uno de los tramos de tubería que conforma la red de flujo. En [4] , [9] , [14], [17] se afirma que la resolución de la red se basa en el cumplimiento de la ecuación de continuidad (ley de conservación de la masa) en todo el sistema, y del cumplimento del balance de energía (primera ley de la termodinámica) en cada tramo de la red; requiriendo el planteamiento de un sistema de ecuaciones cuyo carácter en general es no lineal, el cual pudiera ameritar para su resolución el empleo de métodos numéricos; y que si el tamaño de dicho sistema es grande, pudiese requerir el apoyo de un computador.

En [6] se señala como métodos numéricos iterativos comúnmente usados para la resolución del sistema de ecuaciones previamente nombrado al método de Hardy-Cross, el método de Newton-Raphson, el método Lineal, y el método del gradiente; estableciéndose para cada uno de estos métodos sus ventajas y desventajas. En [18] se indican software que pueden ser empleados para la resolución de redes que transportan agua tales como KYPIPE2, que emplea el método lineal; EPANET, que emplea el método del gradiente y WaterCAD que emplea el método del gradiente. En [1] y [21] se afirma que el software Pipe Flow Expert emplea el método de Newton-Raphson. En [8] se muestra que en una actividad didáctica propuesta a los estudiantes cursantes de una asignatura donde se imparten métodos de resolución de redes de flujo los software utilizados por dichos estudiantes en la actividad son PipeFlow Expert, EPANET y WaterCad; y en [7] y [8] se indica a su vez que el software mayormente utilizado en la Universidad de Carabobo es Pipe Flow Expert.

La bibliografía existente muestra, además de los métodos iterativos previamente citados, métodos gráficos para la resolución de redes. En [17] se señala que las metodologías gráficas son simples expresiones gráficas de procedimientos analíticos de resolución de redes que tienen como ventaja permitir una visualización física de los aspectos hidráulicos de los sistemas de tuberías; indicando a su vez que dichas metodologías se basan en el trazado de las curvas de operación hidráulica de los elementos constitutivos de la red; y la combinación de estas para la obtención de los caudales que atraviesan cada tramo de la red. En [15] se muestra un método denominado Método Descriptivo basado en el trazado de curvas características de tramos de una red de tuberías para el cálculo del caudal que atraviesa cada tramo. En [14] se muestra un método gráfico basado en el concepto denominado Sistema Equivalente.

En [11] se presenta un software que en particular permite el análisis de redes de flujo, mediante la aplicación de métodos gráficos, desarrollado para funcionar en plataformas computacionales bajo el sistema operativo Windows, presentando dificultades en su instalación y funcionamiento en versiones distintas para la que fueron desarrollados. En [20] se muestra el desarrollo de una herramienta computacional multiplataforma para la simulación de la dinámica del flujo transitorio en procesos de vaciado y llenado de tanques en redes de flujo; sin la capacidad de resolver redes de flujo. En [8] se muestra el uso de algunos software para la resolución de al menos una red de flujo; indicándose en un bajo porcentaje de casos la resolución de la misma red empleando métodos gráficos, y sin realizar comparativa de los resultados obtenidos usando el software con los obtenidos usando el método gráfico. Es de destacar que el software más empleado en [8] fue Pipe Flow Expert; y que la resolución con el método gráfico se hizo sin el apoyo de graficador computarizado alguno. En [1] se realiza el análisis de una red de distribución de agua estudiando similitudes y disparidades en los resultados obtenidos mediante la aplicación del método de Hardy Cross y el método de Newton Raphson, observándose diferencias en los resultados arrojados por cada método atribuidas al enfoque particular de cada método.

En el presente trabajo se muestra una comparativa de los resultados obtenidos mediante el uso del método gráfico descrito en [14] y mediante el uso del método de Newton-Raphson en la resolución de redes de flujo de fluidos. Se persigue determinar si existen diferencias significativas entre los resultados obtenidos, e indicar si uno de estos dos métodos se constituye como el mas exacto en casos de estudio reportados en la bibliografía relacionado con el tema.

2. Bases teóricas

En esta sección se presenta un breve resumen de la teoría que sustenta al presente trabajo. Se inicia con la presentación de los conceptos relacionados con el método gráfico para la resolución de redes de flujo, tomando como referencia lo plasmado en [14].

Conceptos asociados a las redes de flujo de fluidos

La ley de conservación de la masa para un proceso de flujo incompresible y de régimen permanente en un tramo de tubería establece que el caudal Q_i que entra a la tubería es igual al caudal Q_o que sale de la tubería; esto es:

$$Q_i = Q_o = Q.$$

Para flujo incompresible y régimen permanente en un punto denominado nodo, en el que confluyen $M+N$ tuberías, donde Q_i representa un caudal de entrada al nodo y Q_0 representa un caudal de salida del nodo, se tiene:

$$\sum_{i=1}^{M} Q_i = \sum_{i=1}^{N} Q_o. \tag{1}$$

Sea P la presión, V la magnitud de la velocidad promedio, y z la altura en un punto del tramo de tubería. Sea γ el peso específico de un fluido a la temperatura del mismo, y sea g la aceleración de gravedad. Se define como disponibilidad H a:

$$H = \frac{P}{\gamma} + z + \frac{V^2}{2g}. \tag{2}$$

Considere un proceso de flujo incompresible y régimen permanente a temperatura constante en un tramo de tubería donde no existe transferencia de calor ni se efectua ningún tipo de trabajo. Considere la sección de entrada 1 y la sección de salida 2 de dicho tramo. La ley de conservacion de la energía para este proceso establece que:

$$H_2 = H_1 – hf_{12}. \tag{3}$$

El término hf_{12} representa la pérdida por fricción en el tramo de tubería, el cual se puede calcular mediante diversas ecuaciones; entre estas, se tiene la ecuación de Darcy – Weisbach:

$$hf_{12} = f\frac{L}{D}\frac{V^2}{2g}$$

siendo f el factor de fricción, L la longitud del tramo, D el diámetro hidráulico de la tubería, y el término $\frac{V^2}{2g}$ tiene el mismo signficado que en (2). Valores de hf_{12} para tuberías nuevas de acero comercial catalogado con la cédula 40 se encuentran tabulados para distintos diámetros de tubería y para distintos caudales en [12] cuando el fluido es agua a 15 °C.

Conceptos asociados al método gráfico para resolver redes de flujo de fluidos

La curva de comportamiento de un fluido que atraviesa un tramo de tubería está formada por los pares (Q, hf_{12}) para un determinado fluido y un determinado tramo de tubería. La representación gráfica de esta curva se hace en el plano $Q-H$ tal como se muestra en la figura 1.

Dadas dos tuberías que transportan el mismo fluido y que se acoplan en serie, el arreglo en serie de estas dos tuberías transportan el mismo caudal. La curva de comportamiento de este arreglo en serie se determina sumando las pérdidas de ambas tuberías a caudal constante (ver figura 2). Esto es válido para n tuberías acopladas en serie.

Dadas dos tuberías que transportan el mismo fluido y que se acoplan en paralelo, cada tubería del arreglo en paralelo tienen la misma pérdida por fricción. La curva de comportamiento de este arreglo en paralelo se

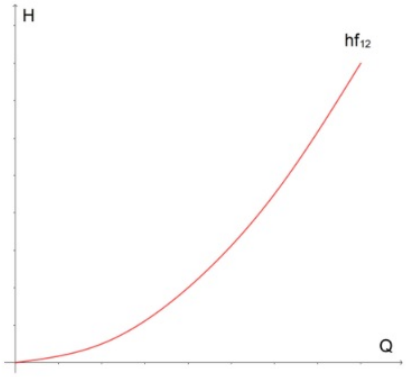


Figura 1. Curva de Comportamiento. Fuente: propia.

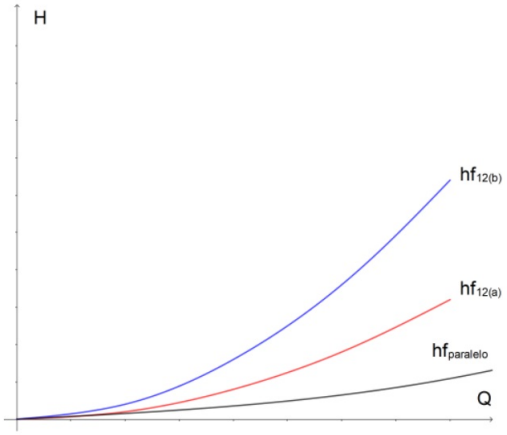


Figura 3. Curva de Comportamiento arreglo en paralelo. Fuente: propia.

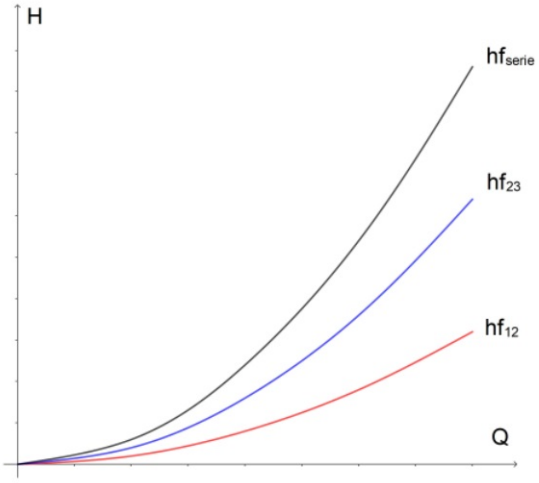


Figura 2. Curva de Comportamiento arreglo en serie. Fuente: propia.

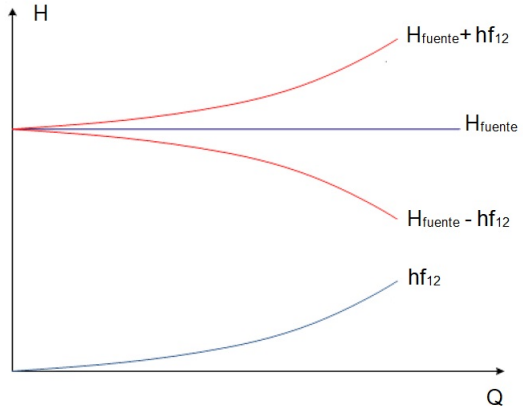


Figura 4. Curva de Comportamiento acople fuente o sumidero - tuberia. Fuente: propia.

determina sumando los caudales de ambas tuberías a disponibilidad constante (ver figura 3). Esto es válido para n tuberías acopladas en paralelo.

Una fuente o sumidero es un reservorio de disponibilidad constante para cualquier caudal que se considere. El acople de una fuente o sumidero a una tubería produce una curva de comportamiento con pendiente positiva o curva de comportamiento con pendiente negativa en el plano $Q-H$ dependiendo de la relación que exista entre la disponibilidad de la fuente o sumidero y la disponibilidad del extremo de la tubería no acoplada a la fuente o sumidero. El conjunto de pares (Q,H) se obtiene mediante la aplicacion de la ecuacion (3) entre la fuente o sumidero y el extremo de la tuberia. (ver figura 4).

El sistema equivalente consiste en un único acople de una fuente o sumidero a una tubería que representa a un conjunto de acoples de fuente o sumidero con sus respectivas tuberías que confluyen en un punto común de empalme. Para determinar el sistema equivalente, se asignan distintos valores de disponibilidad comunes a los acoples de fuente o sumidero con sus respectivas tuberías, y se realiza la suma algebraica de los caudales que atraviesan cada tubería. El conjunto de pares formados por los resultados de la sumas algebraicas de caudales calculados y la disponibilidad correspondiente a dicha suma, representan la curva de comportamiento del sistema equivalente. La figura 5 muestra la construccion de la curva del sistema equivalente que representa el flujo desde un punto común de empalme hacia dos fuentes.

El punto de intersección entre dos curvas de compor-

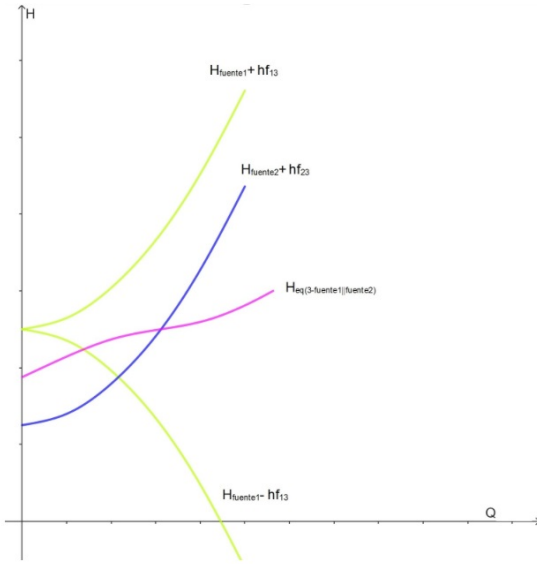


Figura 5. Curva de Comportamiento de un sistema equivalente. Fuente: propia.

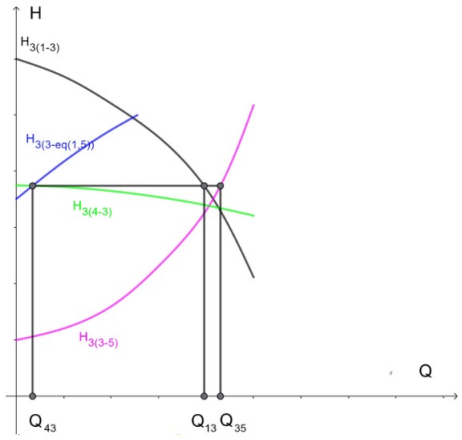


Figura 6. Cálculo de caudales usando el método gráfico. Fuente: propia.

tamiento de sistema equivalentes únicos que confluyen en un punto común, donde uno de los sistemas equivalentes tiene una curva de comportamiento de pendiente positiva, y el otro sistema equivalente tiene una curva de comportamiento de pendiente negativa, se denomina punto de trabajo. A partir del punto de trabajo, es posible determinar los caudales que atraviesan cada tramo de tubería que conformó a su vez cada sistema equivalente. El método gráfico para resolver redes de flujo consiste en la determinación de caudales a partir del punto de trabajo que surge de la intersección de las curvas de sistemas equivalentes con pendientes distintas. Los caudales calculados deben satisfacer la ecuación (1) en cada nodo de la red, y deben satisfacer la ecuación (3) en cada tramo. La figura 6 muestra el cálculo de los caudales que atraviesan los tramos de una red a través del método gráfico.

Trazador cúbico (Spline cúbico). Geogebra

En [16] se establece que dados $N+1$ puntos (x_0,y_0), (x_1,y_1),...,(x_n,y_n) cuyas abscisas están ordenadas de manera creciente en el intervalo $[x_0,x_n]$ definen una función $S(x)$ denominada trazador cúbico para dichos puntos si existen N polinomios cúbicos $S_k(x)$ que pueden ser escritos en términos de coeficientes $s_{k,0}$, $s_{k,1}$, $s_{k,2}$ y $s_{k,3}$ como:

$$S(x) = S_k(x) = s_{k,0} + s_{k,1}(x-x_k) + s_{k,2}(x-x_k)^2 + s_{k,3}(x-x_k)^3$$

para $x \in [x_k, x_{k+1}]$ y $k = 0,1,\ldots,N-1$ que verifican las siguientes propiedades:

I. $S(x_k) = y_k$ para $k = 0,1,\ldots,N$.

II. $S_k(x_{k+1}) = S_{k+1}(x_{k+1})$ para $k = 0,1,\ldots,N-2$.

III. $S'_k(x_{k+1}) = S'_{k+1}(x_{k+1})$ para $k = 0,1,\ldots,N-2$.

IV. $S''_k(x_{k+1}) = S''_{k+1}(x_{k+1})$ para $k = 0,1,\ldots,N-2$.

$S(x)$ es un polinomio cúbico a trozos que interpola los datos, que tiene primera y segunda derivada continua. Un trazador cúbico es también conocido como spline cúbico.

En [13] se emplea el spline cúbico para el trazado de la curva de comportamiento de una bomba centrifuga de tipo axial, y para el trazado de la curva de comportamiento de un arreglo de bombas centrifugas acopladas en paralelo, concluyéndose que el spline cúbico trazado en cada caso correlaciona los datos eficientemente y efectivamente sin importar que tan aleatorio parezca el conjunto de puntos dado; pudiéndose identificar a partir del spline cúbico trazado las zonas donde no se recomienda la operación de las

bombas dadas y con esto evitar excesivo consumo de potencia y/o daño a las bombas.

En el marco del empleo del método gráfico para la resolución de redes de flujo, para la representación gráfica de una curva de comportamiento de un determinado fluido que atraviesa una tubería en el plano $Q-H$ pueden emplearse distintos polinomios de interpolación. En los casos de estudio correspondientes a este trabajo, se emplea el spline cúbico para el trazado de dichas curvas. Dicho trazado se hace con el apoyo del software Geogebra. En [2] se indica que Geogebra es un software libre de matemática dinámica, que se encuentra disponible en múltiples plataformas. GeoGebra permite el trazado dinámico de construcciones geométricas, así como la representación gráfica, el tratamiento algebraico y el cálculo de funciones reales de variable real. En [19] se señala que Geogebra se considera un Software de Geometría Dinámica, en virtud que está orientado al análisis de problemas geométricos combinando álgebra y geometría, vinculando descripciones y vistas algebraicas con geométricas. En [3] se muestra que es posible el trazado de un spline cúbico mediante el uso de Geogebra. Geogebra también puede usarse para las sumas algebraicas que se hacen en forma gráfica para la determinación de los sistemas equivalentes que permiten la determinación del punto de operación y el posterior cálculo de caudales.

Método de Newton Raphson para la solución de sistemas de ecuaciones no lineales. Pipe Flow Expert

En [16] se establece que el método de Newton- Raphson para sistemas de ecuaciones no lineales es una generalización del método de Newton-Raphson para una ecuación no lineal de una variable. Si se considera el sistema de n ecuaciones no lineales con n incógnitas x_1,x_2,...,x_n:

$$F(x_1,x_2,\ldots,x_n) = F(X) =$$

$$(f_1(X), f_2(X),\ldots,f_n(X) = (0,0,\ldots,0).$$

Considerando $J_{X_k}F$ como la matriz jacobiana de F en el punto X_k, la aproximación X_{k+1} a la solución del sistema de ecuaciones dado se obtiene mediante el proceso iterativo de punto fijo definido por:

$$X_{k+1} = X_k - [J_{X_k}F]^{-1}F(X_k).$$

En [21] se indica que el método de solución que emplea el software Pipe Flow Expert para resolver el sistema de ecuaciones no lineales que surgen de modelar la red de flujo a resolver es el método de Newton-Raphson, determinando caudales en cada tramo y presiones en cada nodo de dicha red. En [5] se señala que Pipe Flow Expert permite el diseño de sistemas hidráulicos y permite, además de otros parámetros, el cálculo de caudales que atraviesa el fluido en cada tramo de tubería que conforma dicho sistema. En los casos de estudio correspondientes a este trabajo, se emplea Pipe Flow Expert para el cálculo de caudales a través del uso del método de Newton Raphson.

3. Metodología empleada y resultados obtenidos

Se sigue la metodología llevada a cabo en [5] que consiste en resolver tres (03) redes de flujo distintas cuyos resultados están reportados en [23], primeramente empleando el método gráfico con el apoyo de la herramienta computacional multiplataforma Geogebra; y posteriormente el cálculo de la solución de la red mediante el método de Newton-Raphson empleando el software Pipe Flow Expert. La representación gráfica de las curvas de comportamiento de los tramos corresponde a un spline cúbico que se realiza empleando el comando spline provisto por Geogebra y descrito en [10]. Se calcula el error relativo respecto del valor reportado en la bibliografía para cada caudal, se realiza la suma de los cuadrados de los errores tanto para el método gráfico como para el método de Newton-Raphson, y se hace la comparativa de estos resultados. A partir de los resultados obtenidos se establece si un método en particular se constituye como el más exacto en las tres redes resueltas.

Casos de estudio

Caso de estudio 1: Se considera una red compuesta por tres fuentes conectadas en un único nodo a

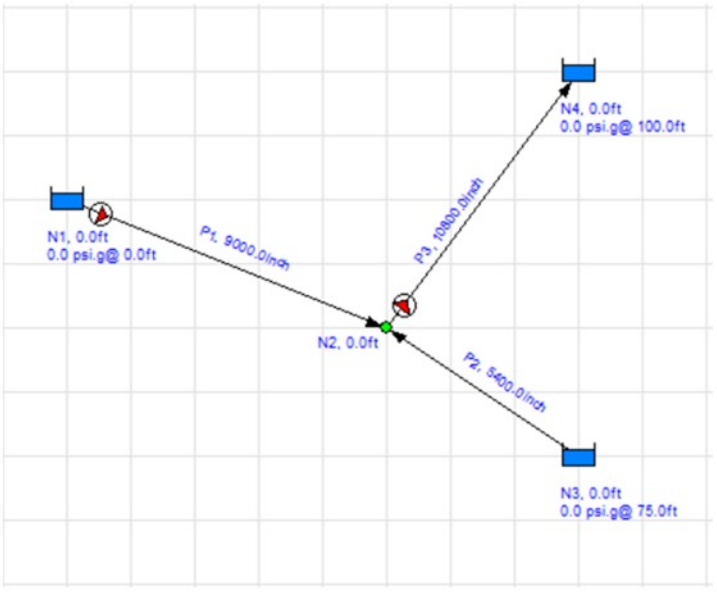


Figura 7. Caso de estudio 1. Fuente: propia.

través de tuberías de las cuales se da la información correspondiente a diámetros y longitudes. Esta red corresponde al problema 2.4. enunciado en [23]. Su esquema representado en el software Pipe Flow Expert se muestra en la figura 7.

Caso de estudio 2: Se considera una red compuesta por cuatro fuentes conectadas en un único nodo a través de tuberías de las cuales se da la información correspondiente a diámetros y longitudes. Esta red corresponde al problema 1.2. enunciado en [23]. Su esquema representado en el software Pipe Flow Expert se muestra en la figura 8.

Caso de estudio 3: Se considera una red compuesta por cuatro fuentes; dos de estas conectadas en un primer nodo a través de tuberías; las dos restantes conectadas en un segundo nodo a través de tuberías; y el primer nodo conectado al segundo nodo por una única tubería; lo que hace que la red este constituida por cinco tuberías. Para todas las tuberías se da la información correspondiente a pérdidas por fricción en cada tubería. Esta red corresponde al problema 4.16. enunciado en [23]. Su esquema representado en el software Pipe Flow Expert se muestra en la figura 9.

Las Tablas 1, 2 y 3 muestran los resultados obtenidos en cada caso. Los valores Q_i representan las magnitudes de los caudales calculados. La columna RB representa el valor reportado en la bibliografía para el caudal calculado, la columna R1 representa el resultado obtenido mediante el empleo del método de Newton Raphson, la columna R2 representa el resultado obtenido mediante el empleo del método gráfico, la columna ER1 representa el error relativo en tanto por ciento obtenido con el empleo del método de Newton Raphson, y la columna ER2 representa el error relativo en tanto por ciento obtenido con el empleo del método Gráfico.

Tabla 1: Resultados obtenidos en el caso 1.

Caudal	RB	R1	R2	ER1	ER2
Q_1	79.00	79.21	79.17	0.27	0.22
Q_2	6.33	6.54	6.84	3.32	8.13
Q_3	85.33	85.76	86.02	0.50	0.81

Tabla 2: Resultados obtenidos en el caso 2.

Caudal	RB	R1	R2	ER1	ER2
Q_1	37.67	37.85	37.57	0.48	0.27
Q_2	48.33	48.61	48.39	0.58	0.13
Q_3	62.67	63.29	62.96	0.99	0.46
Q_4	73.33	74.05	73.78	0.98	0.61

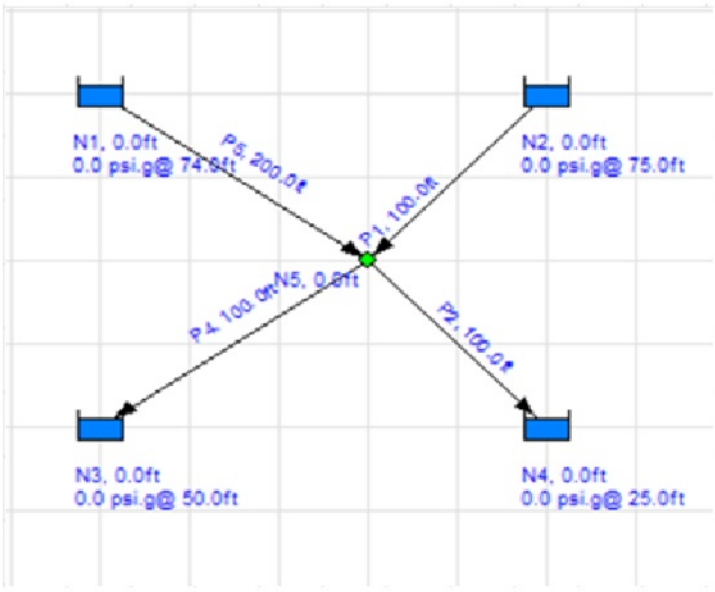


Figura 8. Caso de estudio 2. Fuente: propia.

Tabla 3: Resultados obtenidos en el caso 3.

Caudal	RB	R1	R2	ER1	ER2
Q_1	121.67	121.87	122.17	0.16	0.41
Q_2	130.00	128.42	128.48	1.22	1.17
Q_3	6.33	6.55	6.31	3.48	0.33
Q_4	351.67	351.11	351.55	0.16	0.03
Q_5	221.67	222.69	222.96	0.46	0.58

Para cada caso se calcularon la suma de los cuadrados de los errores relativos en cada método. Los resultados se presentan en la Tabla 4. La columna S1 representa el resultado obtenido para el método de Newton Raphson y la columna S2 representa el resultado obtenido para el método gráfico.

Tabla 4: Suma de los cuadrados de los errores para cada método en cada caso.

Caso	S1	S2
1	11.33	66.80
2	2.51	0.68
3	13.82	1.98

Discusión de resultados

De lo reflejado en los resultados obtenidos, se observa que:

- En todos los casos estudiados, no hay igualdad absoluta en los errores relativos obtenidos en cada método empleado (Método de Newton-Raphson y Método Gráfico) para cada caudal calculado. Este resultado es similar al obtenido en [1].
- Los errores relativos para cada caudal calculado son menores al 4 % cuando se emplea el método de Newton Raphson en la resolución de cada red. Para el caso 1, dos de los tres resultados obtuvieron errores por debajo del 1 %; para el caso 2, cuatro de los cuatro caudales obtuvieron errores por debajo del 1 %; y para el caso 3, tres de los cinco resultados obtuvieron errores por debajo del 1 %.
- Los errores relativos para cada caudal calculado son menores al 8 % cuando se emplea el Método Gráfico. Para el caso 1, dos de los tres resultados obtuvieron errores por debajo del 1 %; para el caso 2, cuatro de los cuatro caudales obtuvieron errores por debajo del 1 %; y para el caso 3, cuatro de los cinco resultados obtuvieron errores por debajo del 1 %.
- En dos de los tres casos estudiados, el menor valor de suma de los cuadrados de los errores se obtienen cuando se emplea la herramienta el Método Gráfico.
- Solo en el caso 2, en la totalidad de los caudales calculados tanto el Método de Newton Raphson como con el Método Gráfico, los errores relativos son menores al 1 %. Para el caso 1 y para el caso 3 existe al menos un caudal para el cual el error relativo difiere en forma significativa entre el valor determinado con un método en comparación con el otro.

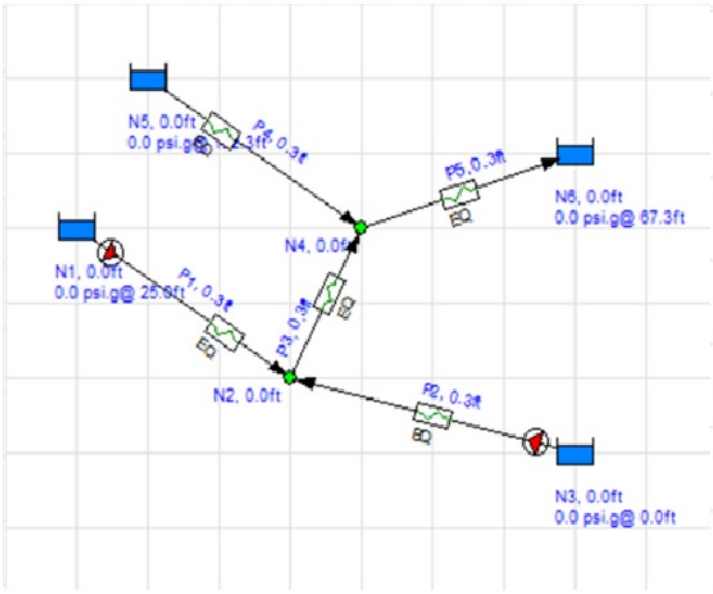


Figura 9. Caso de estudio 3. Fuente: propia.

Los resultados obtenidos muestran la efectividad del método gráfico mediante el empleo de un spline cúbico trazado con el apoyo del software Geogebra aplicado al cálculo de caudales en una red de flujo de fluidos, problema de mayor complejidad que el correspondiente al trazado de una curva de comportamiento de una bomba o de un arreglo de bombas que fue reportado en [13]. Adicionalmente, los resultados confirman la efectividad del método de Newton – Raphson implementado a través del software Pipe Flow Expert para el cálculo de caudales en una red de flujo coincidente con lo señalado en [21] y mostrándose además que los valores obtenidos a través de este método son cercanos a los reportados en la bibliografía, lo que es concordante con lo obtenido en [5].

4. Conclusiones

En los casos presentados, se visualiza que las soluciones provenientes de los métodos empleados para la solución de las redes de flujo de fluidos correspondientes presentan diferencias que pudiesen ser significativas. En la mayoría de los caudales calculados en cada caso de estudio, los errores relativos calculados están por debajo del 1 %. A partir de la cantidad de caudales calculados en cada caso cuyo error relativo es superior al 1 % y a partir del cálculo de la suma de los cuadrados de los errores de cada método en cada uno de los casos de estudio, se concluye que el método que ofrece resultados más cercanos a los reportados en la bibliografía es el método gráfico.

Referencias

[1] Adekunle, A., Adekunle, I., Familusi, A., Adamu, M. (2021). Analysis of flow in water distribution network using numerical and experimental modelling. *Acta Technica Corviniensis-Bulletin of Engineering*, 14(4):25–28.

[2] Allan, C., Parra, S., Martins, A. (2017). Objetos de aprendizaje para la interpretación geométrica de métodos numéricos: uso de GeoGebra. *Revista Iberoamericana de Tecnología en Educación y Educación en Tecnología*, (20):51–56.

[3] Carrillo, T., González, M., Canchola, S. (2024). El sistema de prácticas del enfoque ontosemiótico en plataforma moodle para la enseñanza de interpolación polinomial. . *RIDE. Revista Iberoamericana para la Investigación y el Desarrollo Educativo*, 15(29).

[4] Cengel, Y., Cimbala, J. (2006). *Mecánica de fluidos*. McGraw Hill.

[5] Contreras, J., Taylor, B., Tinoco, R., Yáñez, L., Cortés, M., Hernández, J., Morales, M. (2016). Uso de pipe flow expert como una estrategia innovadora de aprendizaje en mecánica de fluidos. In *Memorias del XXXVII Encuentro Nacional de la AMIDIQ*, pages EDU106–EDU110.

[6] Dongre, A. (2016). Optimization of water distribution network - a review. *IJSTE - International Journal of Science Technology Engineering*, 2(9):269–272.

[7] Flores, E., Luque, Á., Gómez, M. (2018). Compromiso del estudiante desde una dimensión cognitiva en el uso de herramientas computacionales de simulación de procesos de flujo compresible: un caso de estudio. *Revista Ingeniería y Sociedad UC*, 13(2):110–120.

[8] Flores, E., Velásquez, J., Martino, L., Cruz, M., Gómez, M. (2016). Compromiso del estudiante desde una dimensión cognitiva en el uso de herramientas computacionales de simulación de redes de flujo: Un caso de estudio. In *Memorias de las Jornadas de Investigación y Encuentro Académico Industrial de la Facultad de Ingeniería de la Universidad Central de Venezuela*.

[9] Fox, R., Mc Donald, A. (1995). *Introducción a la mecánica de fluidos*. McGraw Hill.

[10] Geogebra (2025). Comando Spline. `https://geogebra.github.io/docs/manual/es/commands/Spline/`. Fecha de acceso: 19 de Junio de 2025.

[11] Goncalves, G., Pacheco, A. (2019). Desarrollo de una herramienta didáctica computacional para el estudio de fenómenos asociados al manejo de flujos de fluidos. Trabajo Especial de Grado para optar al título de Ingeniero Mecánico. Universidad Carabobo.

[12] Hydraulic Institute (1961). Pipe friction manual. Hydraulic Institute Publications.

[13] Kadim, M., Tilefih, R., Shakir, A. (2018). Numerical analysis for (H-Q) curve of centrifugal pumps using natural and constrained cubic spline interpolations. *Journal of Mechanical Engineering Research and Developments*, 41(3):6–8.

[14] Laya, A. (1995). *Manejo de fluidos*. Universidad de Carabobo.

[15] Luszczewski, A. (2020). *Redes industriales de tuberías*. Reverte.

[16] Mathews, J., Fink, K. (2000). *Métodos numéricos con MATLAB*. Prentice Hall.

[17] Méndez, M. (1995). *Tuberías a presión en los sistemas de abastecimiento de Agua*. Universidad Católica Andres Bello.

[18] Obura, D., Kimera, D., Khaldi, A. (2022). A hardy cross approach for hydraulic modelling of water pipe networks. *East African Journal of Engineering*, 5(1):28–56.

[19] Prado, M., Ortiz, R., García, L., Cidoncha, M. (2021). Graphical modelling with computer extended descriptive geometry (CeDG): description and comparison with CAD. *Computer-Aided Design Applications*, 18(2):272–284.

[20] Rivas, Á., Díaz, J., Flores, E., Hornebo, L. (2018). Desarrollo de una herramienta computacional para la simulación de la dinámica del flujo transitorio en procesos de vaciado y llenado de tanques. *Ingeniería Industrial. Actualidad y Nuevas Tendencias*, 6(23):45–56.

[21] Ssenozi, I., Larson, M., Persson, T. (2016). Modeling energy losses in the hydraulic system of Vombverket water treatment plant. *Journal of Water Management and Research*, 72:211–227.

[22] Valiente, A. (2002). *Problemas de flujo de fluidos*. Limusa.

[23] Velásquez, J., Aguirre, R. (2001). *Problemario de manejo de fluidos*. Universidad de Carabobo.