

Cuatro ecuaciones recurrentes que debes conocer

Luis A. Rodríguez

*Departamento de Matemáticas, Facultad Experimental de Ciencias y Tecnología, Universidad de Carabobo. Venezuela.
Centro Multidisciplinario de Visualización y Cómputo Científico (CEMVICC), Universidad de Carabobo. Venezuela.*

ORCID iD: 0000-0002-7253-7339

larodri@uc.edu.ve

Recibido: 7/07/2025, Revisado: 18/08/2025, Aceptado: 13/09/2025.

Resumen

Este artículo divulgativo presenta cuatro problemas conocidos: una aproximación griega a la raíz cuadrada de dos, la sucesión de Fibonacci, el problema de la ruina y las Torres de Hanói. Su formulación matemática conduce al estudio de una ecuación de recurrencia. Se introduce una revisión del método de resolución de ecuaciones de recurrencia lineal de segundo orden basado en el estudio del núcleo del operador de retardo lineal y, posteriormente, se aplica este método en la resolución de estas cuatro ecuaciones.

Palabras Clave: Aproximación a raíz cuadrada de dos, ecuaciones recurrentes, operador de retardo, problema de la ruina, sucesión de Fibonacci, torres de Hanói.

Four difference equations you should know

Abstract

This informative article presents four well-known problems: a Greek approximation to the square root of two, the Fibonacci sequence, the ruin problem, and the Towers of Hanói. Its mathematical formulation leads to the study of a recurrence equation. A review of the method for solving second-order linear recurrence equations based on the study of the kernel of the linear delay operator is introduced, and this method is then applied to the solution of these four equations.

Keywords: Approximation to square root two, Fibonacci sequence, recurrent equations, ruin problem, shift operator, towers of Hanoi.

1. Introducción

En este artículo se aborda el tema de las “Relaciones de recurrencia”, este es un tópico de suma importancia en la enseñanza de la teoría de la computación, en particular en cursos de matemáticas discretas y en el análisis de algoritmo [1]. Relaciones recurrentes (RR) aparecen en matemáticas históricamente en distinto períodos, como queda de manifiesto en los cuatro ejemplos estudiados: una aproximación de los griegos a la raíz de dos (380 a 385 a. C.) ver [7], la sucesión de Fibonacci (en el Liber Abacci en 1202) ver [3], el problema de la ruina (en 1657) ver [5] y las torres de Hanói (en 1883) ver [3].

Generalmente, una relación recurrente, ecuación en recurrencia o recurrencia es una sucesión $\{f_n\}$ que satisface

$$f_n = H(f_{n-1}, \dots, f_{n-k})$$

cuando H es una función lineal la recurrencia es lineal en otro caso no lineal. Los primeros $k - 1$ valores se conocen como condiciones iniciales. Resolver una relación de recurrencia significa expresar f_n en forma cerrada en función de n y (en caso de necesidad) de las condiciones iniciales. Se describe brevemente algunas de las técnicas de resolución para el caso lineal homogéneo y no homogéneo¹,

$$y_n = a_1 f_{n-1} + \dots + a_k f_{n-k} + g(n).$$

Una de las primeras formas de resolución de RR lineales es el método de sustitución. Este método requiere intuir la forma de la solución según las condiciones iniciales. A partir de la introducción de la técnica de demostración por inducción completa, este método de tipo empírico se puede formalizar al garantizar que la solución obtenida para el entero n es verdadera para todo $n \geq n_0$. ([4], pág. 19). Para aplicar este método se requieren amplios conocimientos, ingenio y experiencia.

El método de iteración consiste en expandir la recurrencia, paso a paso, aplicándola a sí misma. Así, la RR se convierte en suma (a veces producto) de términos que dependen solo de n y las condiciones iniciales. Posteriormente, se utilizan técnicas para evaluar sumas, [4], [6] para obtener la solución. A menudo

¹Cuando $g(n) \equiv 0$ la ecuación es homogénea en otro caso no homogénea.

se obtienen sumas de términos de series aritméticas o geométricas y se deben conocer las fórmulas correspondientes.

Métodos generales para la solución de una ecuación en recurrencia, consisten principalmente en: funciones generatrices, asociación de polinomio característico, operadores aniquiladores. El estudio general de RR empezó en 1718 con Abraham DeMoivre, este resolvió la relación de recurrencia de Fibonacci utilizando la función generadora. Leonhard Euler amplió la técnica en su estudio de las particiones de números enteros en 1748. Posteriormente, las funciones generadoras se desarrollaron aún más al combinarse con la teoría de la probabilidad, y surgió la función generadora de momentos, presentada por Pierre-Simon de Laplace en 1812, ver [2], [3].

En este trabajo, se presenta un método general para la resolución de ecuaciones recurrentes lineales de segundo orden homogéneas y no homogéneas al relacionar su solución con la determinación del núcleo de un operador. Este operador se define como un polinomio de segundo grado evaluado en el operador de retardo. Este método cae dentro del marco de operadores aniquiladores, este método utiliza elementos del álgebra lineal. La ventaja desde un punto de vista didáctico de este enfoque, es autocontenido y riguroso.

En la sección 2, introducimos algunos preliminares teóricos, en particular resolvemos la ecuación recurrente lineal de segundo orden homogénea. En el caso no homogéneo la inversión de operadores de la forma $I - \lambda T$ permite la construcción de una solución particular. La solución general se obtiene al sumar esta solución particular con la solución homogénea.

En la Sección 3, aplicamos este método a diversas ecuaciones en diferencias asociadas con problemas conocidos, incluyendo:

- Una aproximación griega a la raíz cuadrada de dos.
- La sucesión de Fibonacci.
- El problema de la ruina.
- El problema de las Torres de Hanói.

2. Preliminares teóricos

Introducimos algunas definiciones necesarias para abordar la temática.

Definición 1 Sea $\mathcal{L} = \{f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}\} = \{\{f_n\}_{n=1}^{\infty}\}$ el espacio vectorial de todas las sucesiones reales, dotado de las operaciones usuales de suma y multiplicación por escalar.

Definición 2 Definimos el operador de retardo $T : \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L}$ mediante $T(f_n) = f_{n+1}$.

Equivalentemente, si representamos la sucesión como $f = (f_1, f_2, f_3, \dots)$, entonces:

$$T(f_1, f_2, f_3, \dots) = (f_2, f_3, f_4, \dots).$$

Observación 1 El operador T es lineal, es decir, para cualesquiera $f, g \in \mathcal{L}$ y $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$T(f + g) = T(f) + T(g)$$

$$T(\lambda f) = \lambda T(f).$$

2.1 Ecuación recurrente lineal de primer orden no homogénea

Una ecuación recurrente lineal de primer orden no homogénea se define por

$$f_{n+1} = \lambda f_n + b$$

para $\lambda, b \in \mathbb{R}$, $\lambda \neq 0$. Observemos que si definimos $T(x) = \lambda x + b$ la solución se encuentra al resolver el problema de punto fijo $x = T(x)$ la cual en este caso es $x = \frac{b}{1-\lambda}$, ver Figura 1.

Para esta ecuación no es difícil demostrar utilizando el principio de inducción que

$$f_n = \lambda^n f_0 + b \sum_{j=0}^{n-1} \lambda^j$$

y como $\sum_{j=0}^{n-1} \lambda^j = (1 - \lambda^n)/(1 - \lambda)$ se tiene que la solución de la ecuación esta dada por

$$f_n = \lambda^n f_0 + b \frac{1 - \lambda^n}{1 - \lambda}$$

como se observa gráficamente en la Figura 1, las composiciones sucesivas convergen al punto fijo, para $|\lambda| < 1$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n = \frac{b}{1 - \lambda}.$$

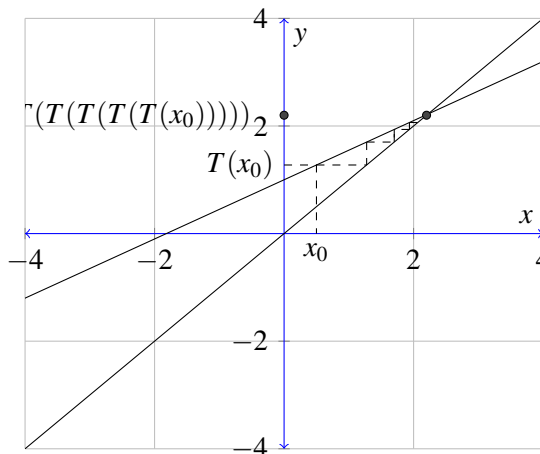


Figura 1. Representación gráfica de la ecuación de punto fijo. Fuente: propia.

2.2 Ecuación recurrente lineal de segundo orden

Considere una ecuación recurrente lineal de segundo orden definida por:

$$af_{n+1} + bf_n + cf_{n-1} = 0, \quad n \geq 2$$

para hallar su solución introducimos algunas definiciones previas.

Esta ecuación puede reescribirse en términos del operador T como:

$$(aT^2 + bT + cI)f_{n-1} = 0$$

donde $T^2 = T \circ T$ es la composición de T consigo mismo e I es el operador identidad.

Definición 3 El núcleo del operador $aT^2 + bT + cI$ es el conjunto:

$$N(aT^2 + bT + cI) = \{f \in \mathcal{L} : (aT^2 + bT + cI)f = 0\}$$

que corresponde exactamente al conjunto de soluciones de la ecuación recurrente.

El polinomio característico asociado a la ecuación es $P(\lambda) = a\lambda^2 + b\lambda + c$.

Supongamos que $P(\lambda)$ tiene raíces reales λ_1 y λ_2 (que pueden ser iguales). Entonces podemos factorizar el operador como:

$$aT^2 + bT + cI = a(T - \lambda_1 I)(T - \lambda_2 I).$$

Teorema 1 (Kreider [9]) Sean L_1, \dots, L_k operadores lineales en \mathcal{S} tales que, $L_i \circ L_j = L_j \circ L_i$, para todo $i, j = 1, \dots, k$ y $L = L_1 \circ \dots \circ L_k$ entonces si $f \in N_{L_i}$ para algún $i = 1, \dots, k$ entonces $f \in N_L$.

Demostración: Se tiene conmutando sucesivamente los operadores que,

$$\begin{aligned} L(f) &= L_1 \circ \dots \circ L_{i-1} \circ L_i \circ \dots \circ L_k(f) \\ &= L_1 \circ \dots \circ L_{i-1} \circ L_{i+1} \circ \dots \circ L_k \circ L_i(f) = 0. \end{aligned}$$

Observación 2 El teorema anterior permite un abordar el estudio para ecuaciones recurrentes de cualquier orden. Es válido para el operador derivada lo que permite el estudio de ecuaciones diferenciales lineales. Además, implica que $\bigoplus_{i=1}^k N_{L_i} = N_L$, donde el símbolo \bigoplus indica suma directa de subespacios, esto significa suma de subespacios cuyo elemento común es el vector cero.

Como una consecuencia del teorema anterior nos basta estudiar por separado los núcleos de los operadores $T - \lambda I$, estos corresponden a ecuaciones recurrentes lineales de primer orden con $b = 0$ como las que estudiamos en la sección 2.1. Consideremos el caso con raíces distintas.

Teorema 2 Si $\lambda_1 \neq \lambda_2$, entonces:

$$\begin{aligned} N(aT^2 + bT + cI) \\ = \{f \in \mathcal{L} : f_{n+1} = A\lambda_1^n + B\lambda_2^n, A, B \in \mathbb{R}\} \end{aligned}$$

Demostración: Dado que los operadores conmutan ($(T - \lambda_1 I)(T - \lambda_2 I) = (T - \lambda_2 I)(T - \lambda_1 I)$), tenemos:

$$\begin{aligned} N(aT^2 + bT + cI) \\ = N((T - \lambda_1 I)(T - \lambda_2 I)) \\ = N(T - \lambda_1 I) + N(T - \lambda_2 I). \end{aligned}$$

La suma es directa cuando $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Por lo tanto, cualquier solución es combinación lineal de las soluciones básicas λ_1^n y λ_2^n . El siguiente teorema estudia el caso de raíces repetidas.

Teorema 3 Si $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$, entonces:

$$\begin{aligned} N(aT^2 + bT + cI) \\ = \{f \in \mathcal{L} : f_{n+1} = (A\lambda^n + Bn\lambda^n), A, B \in \mathbb{R}\}. \end{aligned}$$

Demostración: Cuando hay una raíz doble, el operador se factoriza como $a(T - \lambda I)^2$. Además de la solución λ^n , se puede verificar que $n\lambda^n$ también es

solución. Estas dos soluciones son linealmente independientes y generan el espacio de soluciones.

De esta forma hemos encontrado como se expresan las soluciones a este tipo de ecuación recurrente.

2.3 Ecuación recurrente lineal de segundo orden no homogénea

Consideramos la ecuación recurrente con término no lineal

$$af_{n+1} + bf_n + cf_{n-1} = g_n,$$

escrita en términos del operador de retardo, así la ecuación anterior es equivalente a

$$(aT^2 + bT + cI)(f)_{n-1} = g_n$$

esto significa que g_n pertenece a la imagen del operador $(aT^2 + bT + cI)$ por lo tanto una preimagen de g_n , es decir, una solución particular de la recurrencia se obtiene al factorizar

$$(aT^2 + bT + cI) = a(T - \lambda_1 I) \circ (T - \lambda_2 I)$$

e invertir cada factor del operador

$$f_{n-1}^P = (T - \lambda_1 I)^{-1} \circ (T - \lambda_2 I)^{-1}((1/a)g_n).$$

Observación 3 La inversión de operadores de la forma $(T - \lambda I)$ puede realizarse mediante series de potencias bajo ciertas condiciones. Note que

$$T - \lambda I = -\lambda \left(I - \frac{1}{\lambda} T \right),$$

y formalmente,

$$(T - \lambda I)^{-1} = -\frac{1}{\lambda} \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{1}{\lambda} T \right)^j,$$

siempre que la serie converja. Lo que permite en algunos casos tener una expresión explícita de $\{f_n^P\}$.

Sea f una solución de la ecuación

$$af_{n+1} + bf_n + cf_{n-1} = g_n$$

entonces $(aT^2 + bT + cI)(f - f^P) = 0$, implica que $f - f^P \in N(aT^2 + bT + cI)$ concluimos que la solución general para la ecuación en recurrencia esta dada por $f_n^H + f_n^P$.

2.4 Estabilidad de las Soluciones

Estudiamos condiciones para que las soluciones de ecuaciones recurrentes tengan un comportamiento estable en el infinito.

Definición 4 Una solución $\{f_n\}$ de la ecuación recurrente se dice estable si $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n = 0$.

Teorema 4 Para la ecuación recurrente $af_{n+1} + bf_n + cf_{n-1} = 0$:

1. Si $|\lambda_1| < 1$ y $|\lambda_2| < 1$, todas las soluciones son estables.
2. Si $|\lambda_1| > 1$ o $|\lambda_2| > 1$, existen soluciones no acotadas.
3. Si $|\lambda_1| = 1$ o $|\lambda_2| = 1$, las soluciones pueden ser acotadas pero no necesariamente convergentes.

En algunos casos las ecuaciones en recurrencia están asociadas al cálculo del cardinal de un conjunto finito, por lo tanto el comportamiento en infinito deja de tener sentido. Aunque las series pueden ser usadas formalmente para obtener los cardinales de ciertos conjuntos.

3. Aplicaciones

A continuación se presenta la aplicación de la metodología descrita anteriormente a los problemas concretos cuya resolución queremos mostrar.

3.1 Aproximación Pitagórica a raíz de dos

Los antiguos griegos desarrollaron un ingenioso método para aproximar números inconmensurables, un concepto que, en el lenguaje matemático moderno, nos conduce a las recurrencias lineales. Para el caso específico de la raíz cuadrada de dos, propusieron las siguientes relaciones de recurrencia:

- $a_{n+1} = a_n + b_n$,
- $b_{n+1} = 2a_n + b_n$,

donde $n \geq 0$, $a_0 = 1$, $b_0 = 1$. Este sistema permite generar una sucesión de valores que se aproximan cada vez más al valor real de la raíz de dos,

$$a_{n+2} = 2a_{n+1} + a_n$$

con $a_0 = 1$ y $a_1 = 1$. Al resolver esta recurrencia observamos que el polinomio asociado es $\lambda^2 - 2\lambda - 1$ el cual tiene raíces $\lambda_1 = 1 + \sqrt{2}$ y $\lambda_2 = 1 - \sqrt{2}$ de donde la solución se expresa

$$a_n = C_1(1 + \sqrt{2})^n + C_2(1 - \sqrt{2})^n$$

al sustituir las condiciones iniciales $a_0 = 1$ y $a_1 = 1$ se tiene que $C_1 = C_2 = 1/2$ así

$$a_n = \frac{1}{2} \left[(1 + \sqrt{2})^n + (1 - \sqrt{2})^n \right]$$

al dividir la recursión $a_{n+1} = a_n + b_n$ entre a_n se obtiene

$$\frac{b_n}{a_n} = \frac{a_{n+1}}{a_n} - 1 = \frac{(1 + \sqrt{2})^{n+1} + (1 - \sqrt{2})^{n+1}}{(1 + \sqrt{2})^n + (1 - \sqrt{2})^n} - 1$$

y cuando n va a infinito la expresión converge a $(1 + \sqrt{2}) - 1 = \sqrt{2}$, la solución es estable.

Si calculamos los cuatro primeros términos de la sucesión de racionales $b_1/a_1 = 2$, $b_2/a_2 = 4/3 \approx 1,33$, $b_3/a_3 = 10/7 \approx 1,42$. Finalmente, $b_4/a_4 = 24/17 \approx 1,4118$ que aproxima $\sqrt{2}$ con un error de 10^{-2} .

3.2 La sucesión de Fibonacci

Leonardo de Pisa, un destacado matemático italiano del siglo XIII, más conocido como Fibonacci, nos presentó un fascinante problema relacionado con la cría de conejos, lo introdujo en el Liber Abacci en 1202.

Imagina un hombre que tiene una única pareja de conejos en un espacio cerrado. La pregunta es: ¿Cuántas parejas de conejos se producirán a partir de esta pareja inicial en el transcurso de un año, sabiendo que cada nueva pareja es capaz de reproducirse al segundo mes de vida, dando a luz a otra pareja cada mes?

Este intrigante problema dio origen a lo que hoy conocemos como la sucesión de Fibonacci, un concepto fundamental en las matemáticas con aplicaciones en diversos campos.

Denotamos por f_j el número de conejos procreados por mes. Tenemos que el problema puede ser expresado matemáticamente por las ecuaciones:

$$f_0 = 1, f_1 = 1 \text{ y } f_j = f_{j-1} + f_{j-2},$$

al usar la metodología de la sección 2, el polinomio asociado es $\lambda^2 - \lambda - 1$ cuyas raíces son

$$\lambda_1 = (1 - \sqrt{5})/2, \quad (1 + \sqrt{5})/2.$$

Esto nos lleva a la solución,

$$f_j = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^{j+1} - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^{j+1} \right].$$

3.3 El problema de la ruina

Imagina a Carlos y Nelson, dos jugadores enzarzados en una serie de partidas. Carlos tiene una probabilidad p de ganar, mientras que Nelson gana con una probabilidad q . Cada juego es independiente del anterior. Por cada partida, el perdedor le paga una moneda al ganador.

Carlos inicia con un capital de A monedas y Nelson con B monedas. El juego continúa hasta que uno de los dos se queda sin dinero, es decir, ¡Se arruina! La pregunta clave aquí es: ¿Cuál es la probabilidad de que Carlos se arruine?

Este es un enigma clásico, debatido por figuras históricas como Fermat y Pascal, y resuelto de forma magistral por Montmort. Se le conoce popularmente como el problema de la ruina del jugador. Para nuestra solución, nos basaremos en la presentación del libro [2]. ¡Vamos a resolverlo!

Para $1 \leq j \leq C - 1$ con $C = A + B$, sea f_j la probabilidad de que Carlos este arruinado, su capital después de una cantidad de juegos sea 0, dado que su capital era j . La solución del problema se reduce a encontrar f_A .

Se puede demostrar que,

$$f_j = pf_{j+1} + (1-p)f_{j-1}, \quad 1 \leq j \leq C-1$$

con las condiciones de frontera, $f_0 = 1$ y $f_C = 0$. Por la metodología introducida en la sección 2 tenemos que el polinomio asociado tiene raíces

$$\lambda_1 = \frac{1 + \sqrt{1 - 4p(p-1)}}{2p}, \quad \lambda_2 = \frac{1 - \sqrt{1 - 4p(p-1)}}{2p},$$

así la solución es $f_j = C_1 \lambda_1^j + C_2 \lambda_2^j$.

Resolvemos el problema completamente cuando $p = 1/2$ entonces $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ así la solución es

$$f_j = C_1 + jC_2$$

donde $f_0 = 1$ implica $C_1 = 1$ y $f_C = 1$ implica $C_2 = -1/(A+B)$ de donde

$$f_A = 1 - \frac{A}{A+B}$$

si $B \rightarrow \infty$ entonces **la probabilidad de ruina es 1**, la solución es estable. Este es el caso cuando un jugador se enfrenta contra una casa de juego y su capital es infimo comparado con el que usualmente tienen estas casas.

3.4 Recurrencia de las torres de Hanói

Las Torres de Hanói es un clásico rompecabezas matemático inventado en 1883 por el matemático francés Édouard Lucas. Este juego de mesa individual consiste en una serie de discos perforados de radio creciente, apilados en uno de los tres postes fijados a un tablero.

El objetivo del juego es trasladar toda la pila a otro poste, siguiendo una regla fundamental: nunca se puede colocar un disco más grande encima de uno más pequeño.

El número mínimo de movimientos necesarios para n discos se determina al resolver la siguiente ecuación de recurrencia $f_n = 2f_{n-1} + 1$ primero la solución de la ecuación homogénea $f_n = 2f_{n-1}$ es $f_n^H = 2^n f_0$ y para $f_0 = 1$ tenemos $f_n^H = 2^n$. La ecuación homogénea es equivalente a

$$\frac{1}{2}f_n - f_{n-1} = \frac{1}{2},$$

y en forma de operador tenemos

$$\left(I - \frac{1}{2}T \right) (f_{n-1}) = -\frac{1}{2}$$

entonces $f_{n-1}^P = \left(I - \frac{1}{2}T \right)^{-1} \left(-\frac{1}{2} \right)$ pero

$$\begin{aligned} \left(I - \frac{1}{2}T \right)^{-1} \left(-\frac{1}{2} \right) &= \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2} \right)^j \left(-\frac{1}{2} \right) \\ &= -\frac{1}{2} \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2} \right)^j = -1. \end{aligned}$$

así

$$f_n = f_n^H + f_n^P = 2^n - 1.$$

Agradecimientos

Gracias a Ricardo Ríos por su minuciosa lectura, a los árbitros anónimos y al editor del volumen Franzyuri Hernández. Sus sugerencias mejoraron sustancialmente el trabajo.

Referencias

- [1] Bakoev, V. (2010) The Recurrence relations in teaching students of informatics. *Informatics in Education*, Vol. 9, No. 2, 159–170.
- [2] Chung, K. (1979) *Elementary probability theory with stochastic process*. Springer Verlag, New York.
- [3] Cull, P., Flahive, M., Robson, R. (2005) *Difference equations: from rabbits to chaos*. Springer Verlag.
- [4] Graham, R., Knuth, D., Patashnik, O. (1998). *Concrete mathematics: a foundation for computer science* (2nd ed.). Addison-Wesley Professional.
- [5] Huygens, C. (1656) *De ratiociniis in ludo aleae* (*sobre el cálculo en los juegos de azar*).
- [6] Knuth, D. (1969). *The art of computer programming. Volume 1: fundamental algorithms*. Addison-Wesley, Reading, Massachusetts.
- [7] Filep, L. (1999) Pythagorean side and diagonal number. *Acta Mathematica Academiae Paedagogicae Nyíregyháziensis*. 15, Pp. 1-7, disponible www.bgytf.hu/amap.
- [8] Irribaren, I. (2012) Los griegos y la raíz cuadrada de dos. Mes de noviembre del calendario Matemático 2012. Ediciones Polar.
- [9] Kreider, D. (1966) *An introduction to linear analysis*. Addison-Wesley.