

Resolución de sistemas lineales complejos simétricos provenientes de discretizar la ecuación de Helmholtz 1D

Carlos E. Cadenas R.^{1a}, Ángel Padilla¹

¹Departamento de Matemáticas, Facultad Experimental de Ciencias y Tecnología, Universidad de Carabobo. Venezuela.

^aCentro Multidisciplinario de Visualización y Cómputo Científico (CEMVICC), Universidad de Carabobo. Venezuela.

ORCID iD: 0000-0003-3828-2560^a

Correo electrónico del autor para correspondencia: ccadenas@uc.edu.ve^a

Recibido: 10/07/2025, Revisado: 20/08/2025, Aceptado: 15/09/2025.

Resumen

En este trabajo se considera dar soluciones a sistemas de ecuaciones lineales complejos simétricos no-hermitianos provenientes de discretizar la ecuación de *Helmholtz* 1D por el método de elementos finitos *Local Discontinuous Galerkin* (LDG). Se da una descripción del problema modelo y se presenta la metodología clásica de LDG para obtener un sistema de dos ecuaciones en diferencia. Para dar solución de manera rápida y eficaz a estos sistemas se propone una metodología en la que se comparan dos métodos tipo *Krylov* para sistemas de ecuaciones complejos simétricos. Finalmente se exponen los resultados de las pruebas numéricas realizadas.

Palabras Clave: Ecuación de Helmholtz, *Galerkin discontinuo local*, método COCR, método QMR, subespacios de Krylov.

Solution of symmetric complex linear systems from discretizing the equation of Helmholtz 1D

Abstract

In this work, it is considered to give solutions to symmetric complex linear systems of non-Hermitian equations from discretizing the Helmholtz 1D equation by the Local Discontinuous Galerkin (LDG) finite element method. We have a description of the model problem and we present the LDG classic methodology to obtain a system of two difference equations. To provide a quick and effective solution to these systems, a methodology is proposed in which two Krylov-type methods are compared for complex symmetric equation systems. Finally, the results of the numerical tests carried out are exposed.

Keywords: COCR method, Helmholtz equation, Krylov subspaces, *local discontinuous Galerkin*, QMR method.

1. Introducción

La ecuación de *Helmholtz* es un modelo matemático que describe el comportamiento de ondas elásticas, electromagnéticas y acústicas, la cual puede ser obtenida en muchas otras áreas de las Ciencias Básicas e Ingeniería. Sin embargo, resulta habitual que en la mayoría de los casos (2D, 3D con frontera irregular y/o no acotada) no se puedan obtener soluciones analíticas de este tipo de problemas. Debido a esto, en la práctica, resulta necesario usar métodos numéricos para dar aproximaciones numéricas de la solución. También es sabido que la solución exacta y la calidad de las aproximaciones numéricas dependen de un parámetro denominado número de onda k .

Hoy en día, existen muchos métodos que ayudan a estimar la solución a estos problemas. Estos métodos son: Diferencias Finitas, Elementos Finitos, Elementos de Contorno, Volúmenes Finitos, Elementos Finitos Galerkin Discontinuo, Elementos Espectrales, métodos sin mallas, métodos miméticos, entre otros.

La finalidad de este trabajo, es el estudio del método COCR (*Conjugate A-Orthogonal Conjugate Residual*, [42]), que es una extensión del método CR (*Conjugate Residual*, [40]) para sistemas lineales complejos simétricos. Se busca aproximar la solución numérica del sistema lineal resultante, luego de discretizar la ecuación de *Helmholtz* 1D por el método LDG (*Local Discontinuous Galerkin*, [17, 18, 20]) que es un caso particular dentro de los métodos de DG (*Discontinuous Galerkin*, [2, 3, 6, 41, 44]). Además, se utiliza el método QMR (*Quasi Minimal Residual*) para comparar los resultados de convergencia y tiempo de ejecución ya que son más eficientes que los métodos tipo gradiente conjugado, [7, 29] y los métodos iterativos evaluados en los números reales para resolver sistemas lineales simétricos complejos, [4, 21].

Es de destacar que el método COCR ha sido utilizado para resolver ecuaciones de propagación de ondas acústicas y electromagnéticas cuando se utilizan diversos métodos, como lo son: diferencias finitas, elementos finitos y en muchos casos se combinan con métodos de descomposición de dominios [5, 23, 27, 30–33, 36–38, 43]. Sin embargo los autores desconocen de su utilización a los sistemas simétricos complejos obtenidos con el método LDG.

2. Planteamiento del Problema

El estudio de dispersión de ondas acústicas en una dimensión conlleva al estudio y formulación de un problema de contorno basado en una ecuación diferencial ordinaria la cual es conocida como la ecuación de *Helmholtz*:

$$p'' + k^2 p = 0 \quad (1)$$

donde p es la presión de la onda acústica y k es el número de onda.

El caso que nos compete se refiere a una onda de presión (incidente) que choca con una pared infinita o plano. Dicha presión viene dada por la ecuación: $\hat{p}_{inc}(x, t) = e^{ikt} e^{-iwt} = p_{inc}(x) e^{-iwt}$, donde k es el número de onda y w la frecuencia. Por ser este un problema de dispersión de ondas en dominios exteriores, es necesario imponer una condición de contorno en el infinito del tipo Sommerfeld, vea [22]. A este efecto el plano modela una pared rígida localizada en $x = 0$. Después de descomponer la presión como: $p(x) = p_{inc}(x) + p_{sc}(x)$, el problema con valores en la frontera que satisface la presión de dispersión $p_{sc}(x)$ se reduce a:

$$\begin{cases} p_{sc}'' + k^2 p_{sc} = 0, & 0 < x < 1, \\ p_{sc}'(0) = ik \\ \frac{dp_{sc}}{dx}(1) - ik p_{sc}(1) = 0. \end{cases} \quad (2)$$

La segunda y tercera ecuación de (2) son la condición de pared rígida, y la ya mencionada *Condición de Sommerfeld*. La solución al problema con valores en la frontera descrito por (2), es la onda estacionaria $p_{sc}(x) = e^{ikx}$. La utilización de este enfoque unidimensional es común para comparar métodos y sus prestaciones. Entre algunos de ellos que se pueden mencionar se encuentran [9–12, 16]. También se han utilizado otros métodos de elementos finitos del tipo Galerkin Discontinuo para resolver la ecuación de *Helmholtz*, como lo son: [1, 24–26, 34].

3. Aplicación del Método Local Galerkin Discontinuos (LDG)

En el caso que nos compete se considerará la ecuación de *Helmholtz* homogénea en 1D:

$$u'' + k^2 u = 0 \quad \text{en } \Omega. \quad (3)$$

Para resolver la ecuación (3) por el método *LDG* ([3] y [19]), primero es necesario expresar dicha ecuación como un sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden. Para ello, se utiliza la variable auxiliar $q = u'$, obteniéndose el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} q - u' = 0, & \text{en } \Omega; \\ q' + k^2 u = 0 & \text{en } \Omega. \end{cases} \quad (4)$$

Luego, este sistema es transformado en otro sistema equivalente, pero elemento a elemento. Por ello, es necesario hacer una discretización del dominio e introducir condiciones de frontera entre elementos.

Sean Ω^h particiones regulares de Ω en subdominios Ω_i (es decir, $\bar{\Omega} = \bigcup \bar{\Omega}_i$ con $\Omega_i \cap \Omega_j = \emptyset$ para $i \neq j$), $\hat{\Omega} = \bigcup \Omega_i$ y $\Gamma = \bigcup (\bar{\Omega}_i \cap \bar{\Omega}_j)$, luego la formulación del problema (4) quedaría:

$$\begin{cases} q - u' = 0, & \text{en } \bar{\Omega}; \\ q' + k^2 u = 0 & \text{en } \bar{\Omega} \\ [[u]] = 0, & \text{en } \Gamma \\ [[q]] = 0, & \text{en } \Gamma \end{cases} \quad (5)$$

donde el operador de salto $[[\cdot]]$ es definido sobre los nodos frontera x_j , usando los valores a la derecha y a la izquierda que denotaremos por $+$ y $-$ respectivamente, por lo que $[[u]] \equiv u^+ - u^-$ y $[[q]] \equiv q^+ - q^-$.

Usando el procedimiento clásico del *LDG* en el intervalo (x_j, x_{j+1}) , para la primera ecuación del sistema (5) obtenemos:

$$\int_{x_j}^{x_{j+1}} (q - u') v dx = 0$$

e integrando por partes

$$\int_{x_j}^{x_{j+1}} q v dx + \int_{x_j}^{x_{j+1}} u v' dx - \hat{u}_{j+1} v(x_{j+1}^-) + \hat{u}(x_j^+) v(x_j^+) = 0. \quad (6)$$

Similarmente para la segunda ecuación del sistema (5) e integrando por partes obtenemos:

$$\int_{x_j}^{x_{j+1}} (q' + k^2 u) \tau dx = 0$$

$$\int_{x_j}^{x_{j+1}} q \tau' dx - k^2 \int_{x_j}^{x_{j+1}} u \tau dx + \hat{q}_j \tau(x_j^+) - \hat{q}_{j+1} \tau(x_{j+1}^-) = 0 \quad (7)$$

donde los flujos en (6) y (7) son definidos en función de los operadores promedio y salto:

$$\begin{aligned} \{|u_j|\} &= \frac{1}{2}(U_j^+ + U_j^-) \quad (\text{promedio}) \\ [[u_j]] &= U_j^+ - U_j^- \quad (\text{salto}) \\ \{|q_j|\} &= \frac{1}{2}(Q_j^+ + Q_j^-) \quad (\text{promedio}) \\ [[q_j]] &= Q_j^+ - Q_j^- \quad (\text{salto}) \end{aligned}$$

así, los flujos \hat{u}_j y \hat{q}_j vienen dados por:

$$\begin{aligned} \hat{u}_j &= \{|u_j|\} - C_{12} [[u_j]] + C_{22} [[q_j]] \\ \hat{q}_j &= \{|q_j|\} - C_{11} [[u_j]] + C_{12} [[q_j]]. \end{aligned}$$

Para el método *LDG* $C_{22} = 0$, por lo tanto, solo se tienen a C_{11} y C_{12} como parámetros del método. De esta manera, los flujos quedan expresados como:

$$\begin{aligned} \hat{u}_j &= \frac{1}{2}(U_j^+ + U_j^-) - C_{12}(U_j^+ - U_j^-) \\ \hat{q}_j &= \frac{1}{2}(Q_j^+ + Q_j^-) - C_{11}(U_j^+ - U_j^-) + C_{12}(Q_j^+ - Q_j^-) \end{aligned}$$

con los valores discretos

$$U_j^+ \equiv \lim_{x \rightarrow x_j^+} u(x), \quad U_j^- \equiv \lim_{x \rightarrow x_j^-} u(x),$$

$$Q_j^+ \equiv \lim_{x \rightarrow x_j^+} q(x) \quad \text{y} \quad Q_j^- \equiv \lim_{x \rightarrow x_j^-} q(x).$$

3.1 Ecuaciones en Diferencia usando Aproximación Lineal

En esta sección, presentamos el procedimiento clásico para obtener las ecuaciones en diferencia expresadas en la variable principal U cuando se usan funciones de prueba y bases lineales para u , q , v y τ en el sistema (6) y (7), véase [13, 15].

Primero, sean las aproximaciones $u_h = \varphi_j U_j^+ + \varphi_{j+1} U_{j+1}^-$ y $q_h = \varphi_j Q_j^+ + \varphi_{j+1} Q_{j+1}^-$ de u y q respectivamente, con las funciones bases lineales φ_j y φ_{j+1} definidas en (x_j, x_{j+1}) . Si usamos las funciones de prueba $\tau_j = \varphi_j$ y $\tau_j = \varphi_{j+1}$ en (6) y $v_j = \tau_j$ y $v_j = \varphi_{j+1}$ en (7) en conjunto con las aproximaciones u_h y q_h , obtenemos las siguientes ecuaciones:

$$\left(\frac{1}{2} - C_{12}\right) U_j^- + C_{12} U_j^+ - \frac{1}{2} U_{j+1}^- + \frac{h}{3} Q_j^+ + \frac{h}{6} Q_{j+1}^- = 0 \quad (8)$$

$$\frac{1}{2} U_j^+ + C_{12} U_{j+1}^- - \left(\frac{1}{2} + C_{12}\right) U_{j+1}^+ + \frac{h}{6} Q_j^+ + \frac{h}{3} Q_{j+1}^- = 0 \quad (9)$$

y

$$- C_{11}U_j^- + \left(C_{11} - k^2\frac{h}{3}\right)U_j^+ - k^2\frac{h}{6}U_{j+1}^- + \left(\frac{1}{2} + C_{12}\right)Q_j^- - C_{12}Q_j^+ + \frac{1}{2}Q_{j+1}^- = 0 \quad (10)$$

$$- k^2\frac{h}{6}U_j^+ + \left(C_{11} - k^2\frac{h}{3}\right)U_{j+1}^- - C_{11}U_{j+1}^+ + \frac{1}{2}Q_j^+ - C_{12}Q_{j+1}^- - \left(\frac{1}{2} - C_{12}\right)Q_{j+1}^+ = 0 \quad (11)$$

respectivamente, donde $h = x_{j+1} - x_j$.

Ahora, resolviendo el sistema de ecuaciones formado por (8) y (9), se obtiene:

$$hQ_j^+ = (4C_{12} - 2)U_j^- - (4C_{12} - 1)U_j^+ + (2C_{12} + 2)U_{j+1}^- - (2C_{12} + 1)U_{j+1}^+ \quad (12)$$

$$hQ_{j+1}^- = (1 - 2C_{12})U_j^- - (2C_{12} - 2)U_j^+ + (4C_{12} + 1)U_{j+1}^- - (4C_{12} + 2)U_{j+1}^+ \quad (13)$$

Sustituyendo (12) y (13) (con las traslaciones adecuadas) en (10) y (11), se obtiene el sistema de ecuaciones en diferencia

$$AU_{j-1}^- + BU_{j-1}^+ + CU_j^- + DU_j^+ + EU_{j+1}^- + BU_{j+1}^+ = 0; \quad (14)$$

$$HU_{j-1}^- + EU_{j-1}^+ + GU_j^- + CU_j^+ + HU_{j+1}^- + AU_{j+1}^+ = 0; \quad (15)$$

donde, $A = 1 - 4C_{12}^2$,

$$B = 4C_{12}^2 - 2C_{12} - 2,$$

$$C = -(16C_{12}^2 + 2 + 2C_{11}h),$$

$$D = 16C_{12}^2 + 4C_{12} + 4 + 2C_{11}h - \frac{2}{3}k^2h^2,$$

$$E = 1 - 4C_{12}^2 - \frac{1}{3}k^2h^2;$$

$$G = 16C_{12}^2 - 4C_{12} + 4 + 2C_{11}h - \frac{2}{3}k^2h^2 \quad y$$

$$H = 4C_{12}^2 + 2C_{12} - 2.$$

Con este par de ecuaciones, (14) y (15), y al utilizar las condiciones de contorno se genera el sistema de ecuaciones lineales simétricos no hermitiano a resolver para el caso que se utilice el método de LDG con funciones de forma lineales.

3.2 Ecuaciones en Diferencia usando Aproximaciones Cuadráticas

En esta sección, presentamos un procedimiento similar al de la sección (3.1) para obtener una ecuación en diferencia expresada solo en la variable principal U cuando se usan funciones de prueba y base cuadráticas para u , q , v y τ en el sistema formado por (6) y (7). La diferencia con la sección (3.1) radica en que

aparecen incorporados nuevos valores (es decir, $U_{j+\frac{1}{2}}$ y $Q_{j+\frac{1}{2}}$ en la discretización, por lo que es necesario eliminarlos.

Primero, utilizando las funciones de base cuadrática φ_j , $\varphi_{j+\frac{1}{2}}$ y φ_{j+1} y las aproximaciones $u_h = \varphi_j U_j^+ + \varphi_{j+\frac{1}{2}} U_{j+\frac{1}{2}} + \varphi_{j+1} U_{j+1}^-$ y $q_h = \varphi_j Q_j^+ + \varphi_{j+\frac{1}{2}} Q_{j+\frac{1}{2}} + \varphi_{j+1} Q_{j+1}^-$ de u y q respectivamente. Usando las funciones de prueba $v_j = \varphi_j$, $v_j = \varphi_{j+\frac{1}{2}}$ y $v_j = \varphi_{j+1}$ dadas, en (6), se obtienen las siguientes ecuaciones:

$$\left(\frac{1}{2} - C_{12}\right)U_j^- + C_{12}U_j^+ - \frac{2}{3}U_{j+\frac{1}{2}} + \frac{1}{6}U_{j+1}^- + \frac{2h}{15}Q_j^+ + \frac{h}{15}Q_{j+\frac{1}{2}} - \frac{h}{30}Q_{j+1}^- = 0 \quad (16)$$

$$\frac{2}{3}U_j^+ - \frac{2}{3}U_{j+1}^- + \frac{h}{15}Q_j^+ + \frac{8h}{15}Q_{j+\frac{1}{2}} + \frac{h}{15}Q_{j+1}^- = 0 \quad (17)$$

$$-\frac{1}{6}U_j^+ + U_{j+\frac{1}{2}} + C_{12}U_{j+1}^- - \left(\frac{1}{2} + C_{12}\right)U_{j+1}^+ - \frac{h}{30}Q_j^+ + \frac{h}{15}Q_{j+\frac{1}{2}} + \frac{2h}{15}Q_{j+1}^- = 0. \quad (18)$$

Luego, sustituyendo $\tau_j = \varphi_j$, $\tau_j = \varphi_{j+\frac{1}{2}}$ y $\tau_j = \varphi_{j+1}$ en la ecuación (7), obtenemos:

$$-C_{11}U_j^- + \left(C_{11} - \frac{2k^2h}{15}\right)U_j^+ - \frac{k^2h}{15}U_{j+\frac{1}{2}} + \frac{2k^2h}{30}U_{j+1}^- + \left(\frac{1}{2} + C_{12}\right)Q_j^- - C_{12}Q_j^+ - \frac{2}{3}Q_{j+\frac{1}{2}} + \frac{1}{6}Q_{j+1}^- = 0 \quad (19)$$

$$-\frac{k^2h}{15}U_j^+ - \frac{8k^2h}{15}U_{j+\frac{1}{2}} - \frac{k^2h}{15}U_{j+1}^- + \frac{2}{3}Q_j^+ - \frac{2}{3}Q_{j+1}^- = 0 \quad (20)$$

$$\frac{k^2h}{30}U_j^+ - \frac{k^2h}{15}U_{j+\frac{1}{2}} + \left(C_{11} - \frac{2k^2h}{15}\right)U_{j+1}^- - C_{11}U_{j+1}^+ - \frac{1}{6}Q_j^+ + \frac{2}{3}Q_{j+\frac{1}{2}} - C_{12}Q_{j+1}^- + \left(C_{12} - \frac{1}{2}\right)Q_{j+1}^+ = 0. \quad (21)$$

Con estas seis ecuaciones ((16) a la (21)) se pueden eliminar los valores $U_{j+\frac{1}{2}}$ y $Q_{j+\frac{1}{2}}$. Por lo tanto, el sistema resultante puede escribirse en la forma dada por las ecuaciones (14) y (15), donde,

$$A = 18(k^2h^2 - 20)(4C_{12}^2 - 1)$$

$$B = 12(2C_{12} + 1)(3(1 - C_{12})k^2h^2 + 20(3C_{12} - 1))$$

$$C = -24(18C_{12}^2 + C_{11}h + 1)k^2h^2$$

$$+ 240(12C_{12}^2 + C_{11}h + 2)$$

$$D = -k^4h^4 + (24(2C_{12} + 1)(9C_{12} - 1)$$

$$+ 8(3C_{11}h + 19))k^2h^2 - 240(12C_{12}^2 + 2C_{12} + C_{11}h + 3)$$

$$E = k^4h^4 + 2(36C_{12}^2 - 19)k^2h^2 + 360(1 - 4C_{12}^2)$$

$$G = -3k^4h^4 + (24(2C_{12} - 1)(9C_{12} + 1)$$

$$+ 8(3C_{11}h + 19))k^2h^2 - 240(12C_{12}^2 - 2C_{12} + C_{11}h + 3)$$

$$H = 12(2C_{12} - 1)(-3(1 + C_{12})k^2h^2 + 20(3C_{12} + 1)).$$

También, es fácil concluir que aunque se aplique el método LDG de mayor orden se puede obtener esta estructura.

4. Métodos utilizados para resolver los sistemas lineales

4.1 Métodos basados en Subespacios de Krylov

Los métodos iterativos tipo *Krylov*, [35], utilizados para la resolución de grandes sistemas lineales se obtienen para adaptarse, en principio, a dos requerimientos básicos, esto es, minimizar una cierta norma del vector residuo sobre un subespacio de *Krylov* generado por la matriz del sistema y que se traduce en una convergencia suave sin grandes fluctuaciones y ofrecer un bajo costo computacional por iteración sin exigir alta disponibilidad de almacenaje. Los métodos basados en los subespacios de *Krylov*, se han desarrollado para la resolución de grandes sistemas de ecuaciones lineales:

$$Ax = b \quad (22)$$

donde la matriz A es no singular y de tipo *sparse*. Estos métodos se basan en un proceso de proyección sobre un subespacio de *Krylov* que es generado por vectores de la forma $p(A)v$. Esto es, se aproxima $A^{-1}b$ por $p(A)v$ donde $p(A)$ es un polinomio matricial elegido adecuadamente.

4.1.1 Sistemas Lineales Complejos Simétricos

Consideramos sistemas lineales grandes tipo *sparse*:

$$Ax = b, \quad A \in \mathbb{C}^{n \times n} \quad \text{con} \quad x, b \in \mathbb{C}^n$$

donde A es compleja simétrica pero no-hermitiana, es decir, $A = A^T = A^H$

4.1.2 Subespacios de Krylov

Sea $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ y $0 \neq b \in \mathbb{C}^n$. Entonces, llamaremos al subespacio

$$K_k(A, b) = (b, Ab, A^2b, \dots, A^{k-1}b) \quad (23)$$

subespacio de *Krylov* de orden k asociado a A y b .

4.2 Método COCR

Sea x_n la n -ésima aproximación de la solución al utilizar un método iterativo. Entonces, el n -ésimo

vector residual $r_n = b - Ax_n$ y la dirección de búsqueda p_n para el método *COCR* vienen dadas por las siguientes fórmulas recurrentes:

$$r_0 = b - Ax_0, \quad p_0 = r_0 \quad (24)$$

$$r_n = r_{n-1} - \alpha_{n-1}Ap_{n-1} \quad (25)$$

$$p_n = r_n - \beta_{n-1}p_{n-1}, \quad \text{para } n = 1, 2, \dots \quad (26)$$

Para determinar luego los escalares α_{n-1} y β_{n-1} en las recurrencias (25) y (26), se tienen las siguientes condiciones de ortogonalidad:

$$r_n \perp W \quad \text{y} \quad Ap_n \perp W. \quad (27)$$

Como vemos en (27), es necesario elegir un subespacio W para determinar estos parámetros, por lo tanto, si haciendo el cambio $W = \bar{A}K_n(\bar{A}, \bar{r}_0)$ y eligiendo las condiciones de ortogonalidad para el método *COCR*:

$$r_n \perp \bar{A}K_n(\bar{A}, \bar{r}_0) \quad \text{y} \quad Ap_n \perp \bar{A}K_n(\bar{A}, \bar{r}_0) \quad (28)$$

se presenta el proceso para determinar los escalares α_{n-1} y β_{n-1} usando las recurrencias (25) y (26) junto a las condiciones de ortogonalidad dadas en (28).

Para determinar α_{n-1} , a partir de (25) se sigue que el producto interno entre $\bar{A}^n \bar{r}_0$ y r_n es calculado de la siguiente manera:

$$(\bar{A}^n \bar{r}_0, r_n) = (\bar{A}^n \bar{r}_0, r_{n-1}) - \alpha_{n-1}(\bar{A}^n \bar{r}_0, Ap_{n-1}).$$

Ya que $\bar{A}^n \bar{r}_0 \in \bar{A}K_n(\bar{A}, \bar{r}_0)$, entonces $(\bar{A}^n \bar{r}_0, r_n) = 0$ por la condición (28). Luego, despejando α_{n-1} , nos queda:

$$\alpha_{n-1} = \frac{(\bar{A}^n \bar{r}_0, r_{n-1})}{(\bar{A}^n \bar{r}_0, Ap_{n-1})}. \quad (29)$$

Ahora, para determinar β_{n-1} a partir de (26) se sigue que el producto interno entre $\bar{A}^n \bar{r}_0$ y Ap_n nos queda de la siguiente manera:

$$(\bar{A}^n \bar{r}_0, Ap_n) = (\bar{A}^n \bar{r}_0, Ar_n) + \beta_{n-1}(\bar{A}^n \bar{r}_0, Ap_{n-1}).$$

Luego, por la condición (28), $(\bar{A}^n \bar{r}_0, Ap_n) = 0$; así:

$$\beta_{n-1} = \frac{(\bar{A}^n \bar{r}_0, Ar_n)}{(\bar{A}^n \bar{r}_0, Ap_{n-1})} = -\alpha_{n-1} \frac{(\bar{A}^n \bar{r}_0, Ap_n)}{(\bar{A}^n \bar{r}_0, r_{n-1})}. \quad (30)$$

Ahora, notemos que de las recurrencias (24), (25) y (26), los vectores $\bar{A}r_{n-1}$ y $\bar{A}p_{n-1}$ pueden ser reescritos como:

$$\bar{A}\bar{r}_{n-1} = \bar{c}_{n-1}\bar{A}^n\bar{r}_0 + \bar{A}\bar{z}_1, \quad \bar{A}\bar{z}_1 \in \bar{A}K_n(\bar{A}, \bar{r}_0) \quad (31)$$

$$\bar{A}\bar{p}_{n-1} = \bar{c}_{n-1}\bar{A}^n\bar{r}_0 + \bar{A}\bar{z}_2, \quad \bar{A}\bar{z}_2 \in \bar{A}K_n(\bar{A}, \bar{r}_0) \quad (32)$$

donde $\bar{c}_{n-1} = (-1)^{n-1} \prod_{i=0}^{n-2} \alpha_i$.

Entonces, a partir de (31), (32) y de la condición (28), podemos reescribir el escalar α_{n-1} como:

$$\begin{aligned} \alpha_{n-1} &= \frac{(\bar{A}\bar{r}_{n-1}, r_{n-1}) - (\bar{A}\bar{z}_1, r_{n-1})}{(\bar{A}\bar{p}_{n-1}, Ap_{n-1}) - (\bar{A}\bar{z}_2, Ap_{n-1})} \\ &= \frac{(\bar{A}\bar{r}_{n-1}, r_{n-1})}{(\bar{A}\bar{p}_{n-1}, Ap_{n-1})}. \end{aligned} \quad (33)$$

Similarmente, tenemos que la fórmula para β_{n-1} en (30) viene dada por:

$$\beta_{n-1} = -\alpha_{n-1} \frac{(\bar{A}\bar{p}_{n-1} - \bar{A}\bar{z}_2, r_n)}{(\bar{A}\bar{r}_{n-1} - \bar{A}\bar{z}_1, r_{n-1})}.$$

Como $\bar{A}\bar{z}_1$ y $\bar{A}\bar{z}_2$ son \bar{A} -ortogonal, entonces $\bar{A}\bar{z}_1$ y $\bar{A}\bar{z}_2$ son \bar{A} -ortogonal con r_j , esto es, $(\bar{A}\bar{z}_1, Ar_j) = 0$ y $(\bar{A}\bar{z}_2, Ar_j) = 0$ para $j = 0, 1, \dots, n$ por lo tanto:

$$\beta_{n-1} = -\alpha_{n-1} \frac{(\bar{A}\bar{p}_{n-1}, r_n)}{(\bar{A}\bar{r}_{n-1}, r_{n-1})}. \quad (34)$$

Ahora, de (25) podemos ver que:

$$-\alpha_{n-1}Ap_{n-1} = r_n - r_{n-1}. \quad (35)$$

Sustituyendo (35) en (34), obtenemos:

$$\beta_{n-1} = \frac{(\bar{A}\bar{r}_n, r_n - r_{n-1})}{(\bar{A}\bar{r}_{n-1}, r_{n-1})}$$

pero $(\bar{A}\bar{r}_{n-1}, r_{n-1}) = 0$ por (28), por lo tanto, la fórmula para el escalar β_{n-1} nos queda de la siguiente forma:

$$\beta_{n-1} = \frac{(\bar{A}\bar{r}_n, r_n)}{(\bar{A}\bar{r}_{n-1}, r_{n-1})}. \quad (36)$$

Finalmente, de la relación (25) y sabiendo que $r_n = b_n - Ax_n$, la n -ésima aproximación de la solución x_n en el método viene dada por:

$$x_n = x_{n-1} + \beta_{n-1}p_{n-1}. \quad (37)$$

4.3 Biortogonalización de Lanczos

El algoritmo propuesto por Lanczos para matrices no simétricas construye, un par de bases biortogonales v_1, \dots, v_m y w_1, \dots, w_m para los subespacios:

$$K_m(A, v_1) = \text{span}\{v_1, Av_1, \dots, A^{m-1}v_1\}$$

y

$$K_m(A^T, w_1) = \text{span}\{w_1, A^T w_1, \dots, (A^T)^{m-1}w_1\}$$

respectivamente.

La idea es obtener dos matrices V_m y W_m formadas por los vectores v_1, \dots, v_m y w_1, \dots, w_m respectivamente, de manera que se tridiagonalice la matriz A , esto es:

$$W_m^T AV_m = T_m.$$

Además, como las bases son biortogonales, se satisface que:

$$W_m^T V_m = I_m.$$

4.4 Método QMR

El método QMR (*Quasi Minimal Residual*) es similar al método GMRES, [39], y fue propuesto por Freund y Nachtigal, [28].

A partir del algoritmo de Lanczos se puede demostrar que:

$$AV_m = V_{m+1}\bar{T}_m \quad (38)$$

donde \bar{T}_m es una matriz diagonal $(m+1) \times m$

$$\bar{T}_m = \begin{pmatrix} T_m \\ \delta_{m+1} e_m^T \end{pmatrix}.$$

Si v_1 está definido como un múltiplo de r_0 , es decir, $v_1 = \beta r_0$, el vector residual está dado por:

$$\begin{aligned} b - Ax &= b - A(x_0 + V_m y) \\ &= r_0 - AV_m y \\ &= \beta v_1 - V_{m+1} \bar{T}_m y \\ &= V_{m+1} (\beta e_1 - \bar{T}_m y). \end{aligned}$$

La norma del vector residual es por lo tanto,

$$\|b - Ax\| = \|V_{m+1}(\beta e_1 - \bar{T}_m y)\|_2.$$

Si los vectores columna de V_{m+1} fueran ortonormales, entonces se podría tener que $\|b - Ax\| = \|\beta e_1 - \bar{T}_m y\|_2$, como en GMRES. Por consiguiente, una solución de mínimos cuadrados puede ser obtenida del subespacio de *Krylov* minimizando $\|\beta e_1 - \bar{T}_m y\|_2$ sobre y . En el algoritmo de *Lanczos*, los v_i no son ortogonales, sin embargo, es aún razonable la idea de minimizar la función

$$J(y) = \|\beta e_1 - \bar{T}_m y\|_2 \quad (39)$$

sobre y y calcular la solución aproximada correspondiente $x_0 + V_m y$.

De esta manera la aproximación QMR del subespacio de *Krylov* de dimensión m es obtenida como $x_0 + V_m y_m$, donde y_m minimiza la función (34).

5. Pruebas Numéricas

Esta sección está dedicada a la aplicación de los algoritmos desarrollados anteriormente e implementados en MATLAB. Concretamente, se ha prestado especial atención a sistemas resultantes de la discretización del problema de *Helmholtz* 1D. El objetivo que se persigue es comprobar la efectividad de los algoritmos, y realizar un estudio comparativo entre ellos.

En las diferentes pruebas, realizadas con un computador portátil modelo *HP CORE I7 Pavilion Dv6*, se ha fijado un valor de tolerancia igual a 10^{-15} en todos los casos. Los resultados son expuestos mediante curvas de convergencia, en las que se representa el número de iteraciones y/o tiempo de CPU respecto a la norma del residual necesarios para alcanzar la tolerancia predeterminada.

El caso que nos compete se refiere a una onda de presión (incidente) que choca con un plano. La ecuación de la presión viene dada por: $\hat{p}_{inc}(x, t) = e^{ikt} e^{-iwt} = p_{inc}(x) e^{-iwt}$, donde k es el número de onda y w la frecuencia. A este efecto, el plano modela una pared rígida localizada en $x = 0$ (ver 2).

A continuación, se muestran los casos estudiados:

5.1 Ejemplo 1

Se aplicó el método LDG al problema planteado en (2) con los siguientes parámetros: número de onda $k = 100$, grado del polinomio $p = 5, \beta = 0$, $C_{12} = 1/2$ y número de intervalos $N = 20$. Luego de discretizar, el método genera una matriz compleja simétrica de orden 126×126 . En la figura a continuación podemos observar las curvas solución que representan la solución exacta (rojo) y la aproximada (azul) del método LDG:

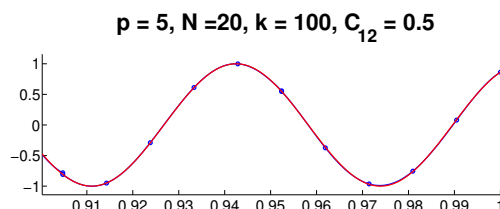


Figura 1. Solución para LDG con $k = 100$, $p = 5$, $C_{12} = 1/2$, $\beta = 0$ y $N = 20$.

Ahora aplicamos los métodos QMR y COCR a la matriz resultante luego de la discretización para obtener los siguientes resultados:

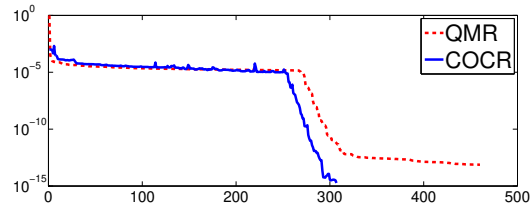


Figura 2. Curvas de convergencia para los métodos QMR y COCR.

En la siguiente tabla se muestran los resultados obtenidos por ambos métodos:

Método	Iteraciones	Tiempo
COCR	308	0,15819117
QMR	458	0,36488808

Tabla 1. Ejemplo 1: número de iteraciones, tiempo de CPU en segundos para los métodos QMR y COCR.

5.2 Ejemplo 2

Similarmente, se aplicó el método LDG al problema planteado en (2) con los siguientes parámetros: número de onda $k = 200$, grado del polinomio

$p = 8, \beta = 0, C_{12} = 0$ y número de intervalos $N = 30$. Luego de discretizar, el método genera una matriz compleja simétrica de orden 279×279 . En la figura a continuación podemos observar las curvas solución que representan la solución exacta (rojo) y la aproximada (azul) del método LDG:

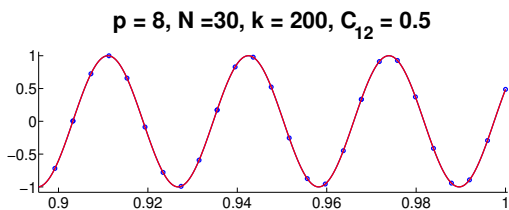


Figura 3. Solución para LDG con $k = 200, p = 8, C_{12} = 0, \beta = 0$ y $N = 30$.

Ahora aplicamos los métodos QMR y COCR a la matriz resultante luego de la discretización para obtener los siguientes resultados:

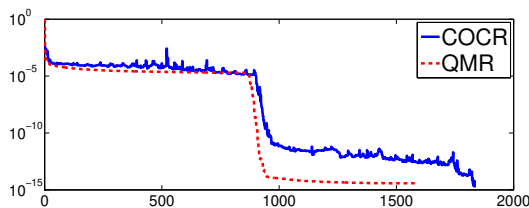


Figura 4. Curvas de convergencia para los métodos QMR y COCR.

En la siguiente tabla se muestran los resultados obtenidos por ambos métodos:

Método	Iteraciones	Tiempo
COCR	1835	1,3941741
QMR	1492	1,6948232

Tabla 2. Ejemplo 2: número de iteraciones, tiempo de CPU en segundos para los métodos QMR y COCR.

5.3 Ejemplo 3

De nuevo se aplicó el método LDG al problema planteado en (2) ahora con los siguientes parámetros: número de onda $k = 1000$, grado del polinomio $p = 12, \beta = 0, C_{12} = 1/2$ y número de intervalos $N = 35$. Luego de discretizar, el método genera una matriz compleja simétrica de orden 468×468 . En la figura a continuación podemos observar las curvas

solución que representan la solución exacta (rojo) y la aproximada (azul) del método LDG:

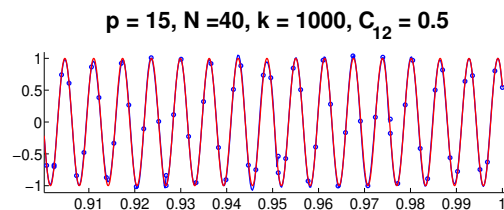


Figura 5. Solución para LDG con $k = 1000, p = 15, C_{12} = 1/2, \beta = 0$ y $N = 40$.

Ahora aplicamos los métodos QMR y COCR a la matriz resultante luego de la discretización para obtener los siguientes resultados:

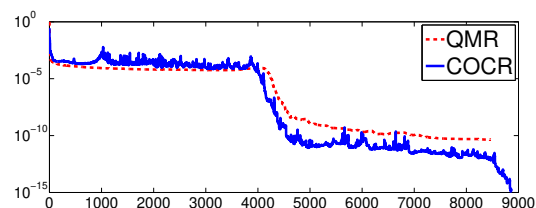


Figura 6. Curvas de convergencia para los métodos QMR y COCR.

En la siguiente tabla se muestran los resultados obtenidos por ambos métodos:

Método	Iteraciones	Tiempo
COCR	4448	5,35502259
QMR	4353	6,34001232

Tabla 3. Ejemplo 3: número de iteraciones, tiempo de CPU en segundos para los métodos QMR y COCR.

6. Conclusiones

En este trabajo se ha estudiado la resolución de sistemas de ecuaciones lineales complejos simétricos resultantes de discretizar la ecuación de Helmholtz 1D a través del método de elementos finitos LDG (*Local Discontinuous Galerkin*). Para resolver el sistema generado se utilizaron dos métodos iterativos basados en subespacios de Krylov, QMR y COCR. Se mostró a detalle la derivación de los métodos, así como algunas propiedades de ortogonalidad.

Una vez implementados y validados los algoritmos se procedió a resolver el sistema de ecuaciones resultan-

te de la discretización del problema modelo (2) por medio del LDG, tomando una tolerancia de 10^{-15} para todos los ejemplos. Al comparar la curvas de convergencia, como se puede observar en las figuras (2), (4) y (6) y en las tablas de comparación (1), (2) y (3), nótese que el método COCR es mas eficiente en cuanto a tiempo de convergencia que el método QMR. En el ejemplo 1, el método COCR supera ampliamente al método QMR en cuanto a tiempo e iteraciones para llegar a la tolerancia establecida. Para las pruebas realizadas con $k < 500$ y $p < 12$ en cuanto a iteraciones el método QMR superó al método COCR en dos de los ejemplos, pero en tiempo de convergencia el método COCR resultó ser muy eficiente superándolo por amplio margen como se puede observar en la tablas gráficas. De acuerdo a los resultados de las pruebas numericas, queda decir que el método COCR es una elección formidable para resolver sistemas de ecuaciones lineales complejos simétricos provenientes de la discretización de la ecuación de *Helmholtz* en 1D utilizando el método LDG.

Queda recomendar el estudio de nuevas técnicas de preconditionamiento para matrices simétricas, además de hacer mas comparaciones con otros métodos como *transpose-free* QMR (TFQMR), CGNR, CGNE, entre otros. También se cree conveniente extender este estudio para el caso bidimensional, ([8, 14]).

7. Agradecimientos

El autor agradece a los árbitros la lectura minuciosa del documento, lo que mejoró considerablemente la presentación del trabajo.

Referencias

- [1] Alvarez, G., Loula, A., do Carmo, E. and Rochinha, F. (2006). A discontinuous finite element formulation for Helmholtz equation. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. 195(33-36), 4018-4035.
- [2] Arnold, D., Brezzi, F., Cockburn, B. and Marini, D. (2000). Discontinuous Galerkin methods for elliptic problems. In *Discontinuous Galerkin methods: theory, computation and applications*. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg. 89-101.
- [3] Arnold, D., Brezzi, F., Cockburn, B. and Marini, L. (2002). Unified analysis of discontinuous Galerkin methods for elliptic problems. *SIAM journal on numerical analysis*. 39(5), 1749-1779.
- [4] Axelsson, O. and Kucherov, A. (2000). Real valued iterative methods for solving complex symmetric linear systems. *Numerical linear algebra with applications*. 7(4), 197-218.
- [5] Barucq, H., Bendali, A., Diaz, J. and Tordeux, S. (2024). Revisiting the plane-wave ultra-weak variational formulation. *hal-04591459*.
- [6] Brezzi, F., Manzini, G., Marini, D., Pietra, P. and Russo, A. (2000). Discontinuous Galerkin approximations for elliptic problems. *Numerical Methods for Partial Differential Equations: An International Journal*. 16(4), 365-378.
- [7] Bunse-Gerstner, A. and Stöver, R. (1999). On a conjugate gradient-type method for solving complex symmetric linear systems. *Linear Algebra and its Applications*. 287(1-3), 105-123.
- [8] Cadenas, C. (2007). Galerkin continuo y discontinuo para la resolución de problemas de acústica con condiciones de contorno artificiales. *Universitat Politècnica de Catalunya*.
- [9] Cadenas, C. and Villamizar, V. (2003). Application of least squares finite element method to acoustic scattering and comparison with other numerical techniques. In *Proceedings of the International Conference on Numerical Analysis and Computational Mathematics (NaCoM-2003)*. Cambridge, UK.
- [10] Cadenas, C. (2003). Formulación y aplicación del método de elementos finitos mínimos cuadrados a un problema de dispersión de onda y comparación con otros métodos numéricos. Universidad de Carabobo, Venezuela.
- [11] Cadenas, C. and Villamizar, V. (2004). Comparison of least squares fem, mixed Galerkin fem and an implicit fdm applied to acoustic scattering. *Applied Numerical Analysis and Computational Mathematics*, 1(1), 128-139.

- [12] Cadenas, C., Rojas, J. and Villamizar, V. (2006). A least squares finite element method with high degree element shape functions for one-dimensional Helmholtz equation. *Mathematics and Computers in Simulation*. 73(1-4), 76-86.
- [13] Cadenas, C., Fernández-Méndez, S. and Huerta, A. (2009). Dualidad de las aproximaciones discretas en dinámica estructural y propagación de ondas: comparación de Galerkin continuo (CG) y LDG. *Proceedings of the 8th Workshop on Numerical Methods in Applied Science and Engineering*.
- [14] Cadenas, C., Fernández-Méndez, S. and Huerta, A. (2009). Galerkin discontinuo local aplicado a problemas de ondas acústicas: condiciones de frontera absorbente locales de bajo orden. *NMA-SE 07 (6th: 2007: Vall de Núria)*. 1-16
- [15] Cadenas, C., Méndez, S. and Huerta, A. (2009). Análisis de la dispersión numérica del método LDG. In *Métodos numéricos en Ingeniería. III Congreso de Métodos Numéricos en Ingeniería*, Barcelona, 19 de junio al 2 de julio de 2009. Sociedad Española de Métodos Numéricos en Ingeniería (SEMNI). 295-295.
- [16] Cadenas, C. and Quiñonez, L. (2019). Mimetic methods to Helmholtz equation: numerical dispersion. *Divulgaciones matemáticas*. 20(1), 1-15.
- [17] Castillo, P. (2006). A review of the local discontinuous Galerkin (LDG) method applied to elliptic problems. *Applied numerical mathematics*. 56(10-11), 1307-1313.
- [18] Castillo, P., Cockburn, B., Perugia, I. and Schötzau, D. (2000). An a priori error analysis of the local discontinuous Galerkin method for elliptic problems. *SIAM Journal on Numerical Analysis*. 38(5), 1676-1706.
- [19] Cockburn, B. (2003). Discontinuous Galerkin methods. *ZAMM-Journal of Applied Mathematics and Mechanics/Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik: Applied Mathematics and Mechanics*. 83(11), 731-754.
- [20] Cockburn, B. and Shu, C. (1998). The local discontinuous Galerkin method for time-dependent convection-diffusion systems. *SIAM journal on numerical analysis*. 35(6), 2440-2463.
- [21] Day, D. and Heroux, M. (2001). Solving complex-valued linear systems via equivalent real formulations. *SIAM Journal on Scientific Computing*. 23(2), 480-498.
- [22] Engquist, B. and Majda, A. (1977). Absorbing boundary conditions for the numerical simulation of waves. *Math. Comput.* 31: 629-651.
- [23] Erath, C., Mascotto, L., Melenk, J., Perugia, I. and Rieder, A. (2022). Mortar coupling of hp-discontinuous Galerkin and boundary element methods for the Helmholtz equation. *Journal of Scientific Computing*, 92(1), 2.
- [24] Farhat, C., Wiedemann-Goiran, P. and Tezaur, R. (2004). A discontinuous Galerkin method with plane waves and Lagrange multipliers for the solution of short wave exterior Helmholtz problems on unstructured meshes. *Wave Motion*. 39(4), 307-317.
- [25] Farhat, C., Wiedemann-Goiran, P. and Tezaur, R. (2004). A discontinuous Galerkin method with plane waves and Lagrange multipliers for the solution of short wave exterior Helmholtz problems on unstructured meshes. *Wave Motion*. 39(4), 307-317.
- [26] Farhat, C., Tezaur, R. and Weidemann-Goiran, P. (2004). Higher-order extensions of a discontinuous Galerkin method for mid-frequency Helmholtz problems. *International journal for numerical methods in engineering*. 61(11), 1938-1956.
- [27] Foucart, C., Mirabito, C., Haley, P. and Lermusiaux, P. (2021, September). High-order discontinuous Galerkin methods for nonhydrostatic ocean processes with a free surface. In *OCEANS 2021: San Diego-Porto* (pp. 1-9). IEEE.
- [28] Freund, R. and Nachtigal, N. (1991). QMR: a quasi-minimal residual method for non-Hermitian linear systems. *Numerische mathematik*. 60(1), 315-339.
- [29] Freund, R. (1992). Conjugate gradient-type methods for linear systems with complex symmetric coefficient matrices. *SIAM Journal on*

- Scientific and Statistical Computing, 13(1), 425-448.
- [30] Gu, X., Huang, T., Li, L., Li, H., Sogabe, T. and Clemens, M. (2014). Quasi-minimal residual variants of the COCG and COCR methods for complex symmetric linear systems in electromagnetic simulations. *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, 62(12), 2859-2867.
- [31] Gu, X., Carpentieri, B., Huang, T. and Meng, J. (2016). Block variants of the COCG and COCR methods for solving complex symmetric linear systems with multiple right-hand sides. In *Numerical Mathematics and Advanced Applications ENUMATH 2015* (pp. 305-313). Cham: Springer International Publishing.
- [32] Leumüller, M. (2025). A hybrid discontinuous Galerkin method with impedance traces for the Helmholtz equation (*Doctoral dissertation, Technische Universität Wien*).
- [33] Liu, D., Zhou, L. and Zhang, X. (2022). On an adaptive LDG for the p-Laplace problem. *International Journal of Numerical Analysis and Modeling*, 19(2-3), 315-328.
- [34] Loula, A., Alvarez, G., do Carmo, E. and Rochinha, F. (2007). A discontinuous finite element method at element level for Helmholtz equation. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. 196(4-6), 867-878.
- [35] Molina, B. and Raydán, M. (2004). Métodos Iterativos tipo Krylov para sistemas lineales. *Editado por el Centro de Estudios Avanzados, Instituto de Investigaciones Científicas (IVIC)*. Caracas, Venezuela.
- [36] Murayama, T. and Takei, A. (2024). Convergence characteristics of domain decomposition method for full-wave electromagnetic analysis. *IEICE Transactions on Electronics*, 107(11), 465-471.
- [37] Ogino, M., Takei, A., Notsu, H., SUGIMOTO, S. and Yoshimura, S. (2013). Finite element analysis of high frequency electromagnetic fields using a domain decomposition method based on the COCR method. *Theoretical and Applied Mechanics Japan*, 61, 173-181.
- [38] Pham, H., Faucher, F. and Barucq, H. (2023). On the implementation of hybridizable discontinuous Galerkin discretization for linear anisotropic elastic wave equation: Voigt-notation and stabilization (*Doctoral dissertation, INRIA Bordeaux*).
- [39] Saad, Y. and Schultz M. (1986). GMRES: a generalized minimal residual algorithm for solving nonsymmetric linear systems. *Proc. of International Congress of Mathematics*. 7, 856-869.
- [40] Saad, Y. (2000). *Iterative methods for sparse linear systems*. second edition.
- [41] Sherwin, S., Kirby, R., Peiró, J., Taylor, R. and Zienkiewicz, O. (2006). On 2D elliptic discontinuous Galerkin methods. *International journal for numerical methods in engineering*. 65(5), 752-784.
- [42] Sogabe, T. and Zhang, S. (2007). A COCR method for solving complex symmetric linear systems. *Journal of Computational and Applied Mathematics*. 199:297-303.
- [43] Sugimoto, S., Takei, A. and Ogino, M. (2017). Finite element analysis with tens of billions of degrees of freedom in a high-frequency electromagnetic field. *Mechanical Engineering Letters*, 3, 16-00667.
- [44] Zienkiewicz, O., Taylor, R., Sherwin, S. and Peiro, J. (2003). On discontinuous Galerkin methods. *International journal for numerical methods in engineering*. 58(8), 1119-1148.