FARAUTE, Vol. 15, Nro. (1-2): 47-64, 2020.
Online ISNN 2542-3061
Print ISNN 1698-7418

Algunas propiedades de la suma de dígitos binarios

Armando Hernández[a**], **Aldo Reyes C.**[2a***], **Luis A. Rodríguez**[1a*]
[1] *Departamento de Matemáticas, Facultad Experimental de Ciencias y Tecnología, Universidad de Carabobo. Venezuela.*
[2] *Departamento de Computación, Facultad Experimental de Ciencias y Tecnología, Universidad de Carabobo. Venezuela.*
[a] *Centro Multidisciplinario de Visualización y Cómputo Científico (CEMVICC), Universidad de Carabobo. Venezuela.*
ORCID iD: 0000-0002-7253-7339* 0009-0006-4836-2205** 0009-0001-1945-1544***
Correo electrónico del autor para correspondencia: larodri@uc.edu.ve*
Correos electrónicos de los coautores: arhpra2@gmail.com** areyes@uc.edu.ve***

Recibido: ***12/07/2025****, Revisado:* ***23/08/2025****, Aceptado:* ***30/09/2025****.*

Resumen
Este artículo de tipo estado del arte presenta una conjetura planteada por Giuseppe Melfi, acerca del comportamiento asintótico de la distribución de los números que escritos en binario satisfacen que tanto el número como su cuadrado tienen la misma cantidad de unos. Este problema nos lleva a introducir una serie de resultados relacionados con la función $B(n)$ que cuenta el número de unos del entero n escrito en binario. Los números que satisfacen la propiedad $B(n) = B(n^2)$ se conocen como números $(2,1,2)$ y la conjetura de Melfi cuenta la proporción de números de este tipo. En general, un entero positivo n satisface la propiedad (k,l,m) si la suma de sus dígitos en su desarrollo en base k es l veces la suma de los dígitos del desarrollo en base k de n^m. El trabajo de Melfi fue introducido en 2005, nos centramos en ese trabajo y sus posteriores referencias. Sin embargo, estudiaremos ciertos trabajos anteriores relacionados con la función $B(n)$ los cuales introducen propiedades del promedio de esta. Nuestra contribución se centra en presentar una revisión de los avances relacionados con los números $(2,1,2)$ y presentar detalles en las demostraciones que fueron omitidos en los artículos estudiados.

Palabras Clave: Conjetura de Melfi, dígitos binarios, distribución asintótica.

Some properties of the sum of the digits of binary numbers

Abstract
This state of the art article presents a conjecture proposed by Giuseppe Melfi about the asymptotic behavior of the distribution of numbers written in binary that satisfy the requirement that both the number and its square have the same number of ones. This problem leads us to introduce a series of results related to the function $B(n)$ that counts the number of ones in the integer n written in binary. Numbers that satisfy the property $B(n) = B(n^2)$ are known as $(2,1,2)$ numbers, and the Melfi's conjecture counts the proportion of numbers of this type. In general, a positive integer n satisfies the property (k,l,m) if the sum of its digits in its base k expansion is l times the sum of the digits in the base k expansion of n^m. Melfi's work was introduced in 2005; we focus on that work and subsequent references. However, we will study certain previous works related to the function $B(n)$ that introduce properties of its average. Our contribution focuses on presenting a review of the progress related to the numbers $(2,1,2)$ and presenting details in the proofs that were omitted in the articles studied.

Keywords: Asymptotic distribution, binary digits, Melfi's conjecture.

1. Introducción

Sea $n \in \mathbb{N}$, y consideremos su representación como suma de potencias de base 2 dada por $n = \sum_{i=1}^{k} c_i 2^{i-1}$, donde $c_i \in \{0,1\}$, $c_k = 1$. Diremos que la cadena $(c_k \ldots c_1)$ es la expansión binaria de n. Se define la función suma de dígitos binarios por:

$$B(n) = \sum_{i=1}^{k} c_i. \tag{1}$$

La función contadora de dígitos es el concepto clave que conecta la teoría de números con la seguridad criptográfica práctica, [16]. Esta función simplemente mide la longitud de un número en bits, que es la unidad fundamental de la información digital. En criptografía, la fortaleza de un sistema no se basa en el valor de una clave, sino en su longitud (por ejemplo, una clave de 256 bits). Esta longitud, determinada por la función contadora de dígitos, define el número total de combinaciones posibles, haciendo que un ataque de fuerza bruta sea exponencialmente más difícil con cada bit que se añade.

Un ejemplo del uso de esta función es el algoritmo RSA (Ron Rivest, Adi Shamir y Leonard Adleman, ver [18]), éste es un sistema de criptografía de clave pública que utiliza un par de claves matemáticas; una pública (para cifrar) y una privada (para descifrar), para asegurar comunicaciones y realizar firmas digitales.

El estudio sistemático de $B(n)$ fue iniciado por Bush [3] y Stolarsky [19,20], quienes establecieron relaciones profundas entre la suma de dígitos y propiedades asintóticas de sucesiones numéricas.

En el caso general se pueden estudiar el número de dígitos para representaciones de un entero en cualquier base r, denotamos por $s_r(n)$ esta suma. En algunos casos, esta función se puede evaluar en polinomios con variable entera $p(n)$. Conforme con la notación establecida en [15], un número $n \in \mathbb{N}$ es $(2,1,2)$ si satisface la propiedad $B(n) = B(n^2)$, en este Melfi estudia $p(n) = n^2$. Observemos que $s_2(n) = B(n)$.

Entre los principales autores que han estudiado las propiedades y relaciones puntuales de $s_r(n)$, por ejemplo, [19], [13], [15] y [8]. En particular, una conjetura de Stolarsky introducida en [19] sobre algunas propiedades de distribución de la razón $s_r(p(n))/s_r(n)$ ha sido recientemente resuelta por Hare *et al.* en [10]. Melfi en [15] propuso estudiar el conjunto de n tales que $B(n^2) = B(n)$, y demostró que

$$\#\{n < N : B(n^2) = B(n)\} \gg N^{1/40},$$

donde el símbolo # indica el cardinal de un conjunto. Usando argumentos probabilísticos heurísticos, Melfi conjeturó el resultado más fuerte

$$\#\{n < N : B(n^2) = B(n)\} \approx \frac{N^{\alpha}}{\log N} \tag{2}$$

y calculó un valor explícito para $\alpha \approx 0{,}75488$.

En la sección 2, se estudian algunas propiedades de la función $B(n)$, entre las principales que es subaditiva y submultiplicativa. En la sección 3, se estudia la suma promedio de dígitos en cualquier base. En la sección 4, se estudia la función B evaluada en un polinomio $p(n) = n^j$ y su comportamiento límite. En la sección 5, damos propiedades de los números $(2,1,2)$. La sección 6 presenta el argumento heurístico de Melfi que permite introducir la conjetura dada por la ecuación (2). Por último, en la sección 7, se enuncian sin demostración algunos resultados referentes a ecuaciones con números $(2,1,2)$.

2. Función Suma de Dígitos de un número escrito en representación binaria

Se presentan en la sección definiciones básicas y propiedades generales que serán utilizadas a lo largo del trabajo. En particular damos la demostración de la subaditividad y submultiplicatividad de la función que cuenta los 1 en la representación binaria de un entero, éstos son resultados básicos pero sus respectivas demostraciones son difíciles de encontrar en la literatura por lo cual las incluimos en detalle.

Definición 1 *Sea $n \in \mathbb{N}, n = (c_k c_{k-1} \ldots c_1)$ un número escrito en base dos. Sea $B : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ la función suma de dígitos binaria, la cual se define por $B(n) = \sum_{i=1}^{k} c_i$.*

Ejemplo: Sea $n = (11001)$; en este caso, $c_5 = 1$, $c_4 = 1$, $c_3 = 0$, $c_2 = 0$ y $c_1 = 1$. Por lo tanto, $B(n) = 1+1+0+0+1 = 3$.

Observación 1 *La expansión binaria está compuesta de unos y ceros, por esta razón, en algunos casos utilizaremos la notación compacta del número en la que* $\overbrace{(1\ldots1)}^{k-veces\ 1} = (1_{(k)})$ *y* $\overbrace{(0\ldots0)}^{b-veces\ 0} = (0_{(b)})$*; por ejemplo, el número* (111100011) *se denotará* $(1_{(4)}0_{(3)}1_{(2)})$.

Observemos que para cada $k \in \mathbb{N}$, $2^k = (10_{(k)})$, por lo tanto, $B(2^k) = 1$.

Definición 2 *Definimos el conjugado de* $n = \sum_{i=1}^{n} c_i 2^{i-1}$ *por* $n' = \sum_{i=1}^{n} c_i' 2^{i-1}$*, donde* $c_i' = 1 - c_i$.

El siguiente teorema muestra una relación entre la suma de dígitos $B(n)$ y la suma de dígitos de su conjugado $B(n')$.

Teorema 1 *Si* $n = \sum_{i=1}^{k} c_i 2^{i-1}$*, entonces* $n' = 2^k - n - 1$ *y* $B(n) = k - B(2^k - n - 1)$.

Demostración: Como $c_i' = 1 - c_i$ y $n' = \sum_{i=1}^{k} c_i' 2^{i-1}$, tenemos que:

$$n' = \sum_{i=1}^{k} 2^{i-1} - \sum_{i=1}^{k} c_i 2^{i-1}.$$

El primer sumando es una suma de términos de una progresión geométrica cuya sumatoria es $2^k - 1 - n$ y el segundo sumando es igual a n por hipótesis, por lo tanto:

$$n' = 2^k - 1 - n. \tag{3}$$

Ahora, falta comprobar que $B(n) = k - B(2^k - n - 1)$.

$$B(n) = \sum_{i=1}^{k} c_i = \sum_{i=1}^{k} 1 - \sum_{i=1}^{k} c_i' = k - B(n').$$

Luego, por la ecuación (3), tenemos que

$$B(n) = k - B(2^k - n - 1). \quad \blacksquare$$

A continuación demostraremos la subaditividad de la función B. Para este fin requerimos del siguiente lema.

Lema 1 *Sean* $n = \sum_{i=1}^{k} c_i 2^{i-1}$*,* $j \in \mathbb{N}^*$ *tal que* $j < k$ *y* $n + 2^j = \sum_{i=1}^{k+1} d_i 2^{i-1}$*. Entonces*

$$B(n + 2^j) = 1 - L_j + B(n),$$

donde:

$$L_j = \min_{l \in \mathbb{N}} \{ l \ / \ c_{j+l} = 0 \}.$$

Demostración: Consideremos el caso en que $c_{j+1} = 0$. Tenemos que $d_q = c_q$ para todo $q \in \{1, 2, \ldots, j\}$, $d_{j+1} = 1$, $d_q = c_q$ para todo $q \in \{j+2, j+3, \ldots, k\}$ y $d_{k+1} = 0$; en consecuencia, $B(n + 2^j) = B(n) + 1$ y se verifica el Lema 1, ya que $L_j = 0$. Este caso se ilustra en la tabla 1.

Consideremos el caso en que $c_{j+1} = 1$. Para observar lo que ocurre en este caso, referimos al cálculo que se muestra en la tabla 2. En este caso, $L_j > 0$, ya que el mínimo de los índices para el cual $c_{j+l} = 0$ es mayor que $j + 1$. Así, $B(n + 2^j) = 1 + B(n) - L_j$. En efecto: se suman las cifras de n, se añade 1 (el uno que se agrega en la posición $j + l$) y se le resta L_j (que no es más que la cantidad de ceros producto del acarreo al sumar 1, es decir, los 1 que fueron cambiados por cero al sumar). $\blacksquare$

Observación 2 *Para* $j \geq k$ *se tiene que* $B(n + 2^j) = B(n) + 1$.

Utilizando este lema, demostraremos la subaditividad de la función B.

Teorema 2 *Si* $m, n \in \mathbb{N}$*, se tiene que*

$$B(m + n) \leqslant B(m) + B(n).$$

Demostración: Sea $n = \sum_{j=1}^{d} 2^{e_j}$, con $e_1 > e_2 > \ldots > e_d \geqslant 0$; así, solamente consideramos las potencias de dos cuyo coeficiente es uno en la expansión binaria de n. Entonces, aplicando el Lema 1 repetidas veces, tenemos que:

$$\begin{aligned} B(m+n) &= B(m + \sum_{j=1}^{d} 2^{e_j}) \\ &\leqslant 1 + B(m + \sum_{j=2}^{d} 2^{e_j}) \\ &\leqslant \overbrace{(1 + 1 + \ldots + 1)}^{d-veces} + B(m) \\ &= B(n) + B(m). \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Observación 3 *Una condición para que se cumpla la igualdad es que cuando realizamos la suma en binario de* $m + n$ *no ocurran acarreos. Esto ocurre cuando las posiciones de los* 1 *de* m *y* n *están separadas suficientemente por ceros. Ejemplo: sean* $m = 10110000$*,* $n = 111$*,* $B(m) = 3$ *y* $B(n) = 3$ *entonces* $m + n = 10110111$ *y* $B(m + n) = 6 = B(m) + B(n)$.

Ahora, veremos un lema que nos muestra que, al

		c_k	$\dots$	$c_{j+(l+1)}$	c_{j+l}	$\dots$	0	c_j	$\dots$	c_1
$+$							1	0	$\dots$	0
	d_{k+1}	d_k	$\dots$	$d_{j+(l+1)}$	d_{j+l}	$\dots$	1	d_j	$\dots$	d_1

Tabla 1

		c_k	$\dots$	$c_{j+(l+1)}$	c_{j+l}	1	$\dots$	1	c_j	$\dots$	c_1
$+$								1	0	$\dots$	0
	d_{k+1}	d_k	$\dots$	$d_{j+(l+1)}$	1	0	$\dots$	0	d_j	$\dots$	d_1

Tabla 2

multiplicar un número por una potencia de dos, no se altera su suma de dígitos.

Lema 2 *Para todo $j \in \mathbb{N}$, $B(2^j n) = B(n)$.*

Demostración: Sea $n = (c_k c_{k-1} \dots c_2 c_1)$. Haremos esta prueba por inducción sobre $j \in \mathbb{N}$:

- $j = 1$: Aquí tenemos que:

$$2n = 2\sum_{i=1}^{k} c_i 2^{i-1} = \sum_{i=1}^{k} c_i 2^i.$$

Por lo tanto:

$$B(2n) = \sum_{i=1}^{k} c_i = B(n).$$

- **Hipótesis inductiva:** Supongamos que la proposición se cumple para $k \in \mathbb{N}$, y veamos que se cumple para $k+1$:

$$B(2^{k+1}n) = B\left[2(2^k n)\right] = B(2^k n) = B(n). \quad \blacksquare$$

El siguiente teorema demuestra la submultiplicatividad de B.

Teorema 3 *Para $m, n \in \mathbb{N}$,*

$$B(mn) \leqslant B(m)B(n).$$

Demostración: Si $m = 1$, $B(nm) = B(n)1 = B(m)B(n)$. Así pues, supongamos que $m > 1$ y $n > 1$. Sea $n = (c_k c_{k-1} \dots c_1)$. Entonces, aplicando la subaditividad de B y el lema anterior, y recordando que $c_i \in \{0,1\}$ para $i \in \{1, \dots, k\}$, tenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned} B(nm) &= B(c_k 2^{k-1}m + \dots + c_1 m) \\ &\leqslant B(c_k 2^{k-1}m) + \dots + B(c_1 m) \\ &= B(c_k m) + \dots + B(c_1 m) \\ &= B(c_k)B(m) + \dots + B(c_1)B(m) \\ &= [B(c_k) + \dots + B(c_1)]B(m) \\ &= B(n)B(m). \end{aligned}$$

Así culmina la demostración. $\blacksquare$

Ahora, en el siguiente lema y en su correspondiente corolario, estableceremos una cota tanto para la cantidad máxima de dígitos que tiene un número binario como para el valor máximo de $B(n)$.

Lema 3 *Para cada entero positivo $n = 2^{e_1} + 2^{e_2} + \dots + 2^{e_r}$, con $e_1 > e_2 > \dots > e_r \geqslant 0$, se tiene que:*

$$log_2(n) - 1 \leqslant e_1 \leqslant log_2(n).$$

Demostración: Por hipótesis, se tiene que $2^{e_1} \leqslant 2^{e_1} + 2^{e_2} + \dots + 2^{e_r} = n$, entonces $2^{e_1} \leqslant n$, por lo que $e_1 \leqslant \frac{ln(n)}{ln(2)} = log_2(n)$.

Observemos que:

$$\sum_{j=1}^{r} \left(\frac{1}{2}\right)^{e_1 - e_j} \leqslant \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{j} = 2$$

de donde:

$$2^{-e_1} \sum_{j=1}^{r} 2^{e_j} \leqslant 2$$

$$2^{-e_1} n \leqslant 2$$

$$n \leqslant 2^{e_1+1}.$$

De donde, tomando logaritmos, concluimos que:

$$\frac{ln(n)}{ln(2)} - 1 = log_2(n) - 1 \leqslant e_1. \quad \blacksquare$$

Corolario 1 *Para cada $n \in \mathbb{N}$:*

$$B(n) \leqslant [log_2(n)] + 1.$$

Demostración: Como $n = 2^{e_1} + 2^{e_2} + \dots + 2^{e_r}$, es fácil ver que $B(n) \leqslant e_1 + 1$ (ya que algunos de los coeficientes c_i en la expansión binaria de n pueden ser iguales a cero, y en el mejor de los casos todos son iguales a 1). En consecuencia, usando el lema anterior:

$$B(n) \leqslant e_1 + 1 \leqslant \left[\frac{ln(n)}{ln(2)}\right] + 1 = [log_2(n)] + 1. \quad \blacksquare$$

3. Suma Promedio de Dígitos

En esta sección se presenta una fórmula que aproxima el valor promedio de la suma de los dígitos de números enteros a medida que estos números tienden a infinito. E. Bush en [3] demostró que

$$S(r,n) = \sum_{k \leq n} s_r(k) \sim \frac{r-1}{2} n \log_r n$$

sin una fórmula de error, donde $s_r(k)$ es la suma de los dígitos para un número escrito en base r. En 1968, Trollope en [21] demostró una fórmula explícita para el término de error en el caso $r = 2$. En 1975, Delange en [6] extendió el resultado de Trollope a una base arbitraria r utilizando otra metodología. En 1999, Cooper y Kennedy aplicaron el método de Trollope con una base general r y demostraron que la forma de los errores es igual para cualquier r, ver [5]. Recientemente en 2024, Erdenebat y Wong en [9] introducen una prueba diferente a la de Troppelle en el caso $r = 2$. Para generalizaciones en diferentes direcciones ver [7, 8].

Reproducimos los resultados del artículo de Bush, incluimos la demostración del teorema 3 que él deja al lector. Además demostramos los detalles de cada uno de sus teoremas. No incluimos resultados del cálculo del error porque implicaría introducir fórmulas de aproximación que requieren herramientas más analíticas.

Definición 3 *Sean* $n, r \in \mathbb{N}, r \geqslant 2$. *Sea* $n = (c_k c_{k-1} \ldots c_1)_r$. *Entonces, definimos y denotamos la función suma de dígitos en base r de la siguiente manera:* $s_r : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ / $s_r(n) = \sum_{i=1}^{k} c_i$.

Definición 4 *Sean* $n, r \in \mathbb{N}$, *con* $r \geqslant 2$. *Denotamos por* $S(r,n) = \sum_{j=0}^{n-1} B_r(k)$. *Entonces,* $\frac{S(r,n)}{n}$ *es la suma promedio de dígitos.*

Ahora, procederemos a establecer un comportamiento asintótico de $\frac{S(r,n)}{n}$.

Teorema 4

$$\frac{S(r,n)}{n} \overset{n}{\sim} \frac{(r-1)ln(n)}{2ln(r)}.$$

Es decir:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2S(r,n)ln(r)}{(r-1)nln(n)} = 1. \tag{4}$$

Demostración: Consideremos todos los números desde 0 hasta $n-1$, inclusive, escritos en su orden natural en base r. Los dígitos que están en el i-ésimo lugar (contando de derecha a izquierda) se repiten en períodos de r^i números, y cada período consta de r^{i-1} de cada uno de los dígitos $0, 1, \ldots, r-1$. El último período estará completo si y sólo si n es divisible entre r^i. Sea s_i la suma de dígitos en el i-ésimo lugar (contando de derecha a izquierda) de todos los números desde 0 a $n-1$. Como $r^i \in \mathbb{Z}$, si hacemos $\left[\frac{n}{r^i}\right]$, de la definición de función parte entera, obtenemos que:

$$\frac{n}{r^i} - 1 < \left[\frac{n}{r^i}\right].$$

Luego, multiplicando por r^i, tenemos que:

$$n - r^i < \left[\frac{n}{r^i}\right] r^i \Rightarrow \left[\frac{n}{r^i}\right] r^i > n - r^i. \tag{5}$$

Ahora, de la definición de función parte entera, llegamos a que:

$$\left[\frac{n}{r^i} + 1\right] \leqslant n + r^i. \tag{6}$$

Entonces, por (5) y (6), tenemos que:

$$\begin{aligned} s_i &\geqslant \left[\frac{n}{r^i}\right] r^{i-1} \frac{r(r-1)}{2} \\ &= \frac{1}{2}\left[\frac{n}{r^i}\right] r^i(r-1) > \frac{1}{2}(r-1)(n-r^i) \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} s_i &< \left[\frac{n}{r^i} + 1\right] r^{i-1} \frac{r(r-1)}{2} \\ &= \frac{1}{2}\left[\frac{n}{r^i} + 1\right] r^i(r-1) \leqslant \frac{1}{2}(r-1)(n+r^i). \end{aligned}$$

Como $S(r,n)=\sum_{i=1}^{k} s_i$, tenemos que:

$$\begin{aligned} S(r,n) &> \frac{1}{2}(r-1)\sum_{i=1}^{k}(n-r^i) \\ &= \frac{1}{2}(r-1)\left(\sum_{i=1}^{k}n-\sum_{i=1}^{k}r^i\right) \\ &= \frac{1}{2}(r-1)\left\{kn-\frac{r^{k+1}-r}{r-1}\right\}. \end{aligned}$$

Se tiene que:

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}(r-1)\left\{kn-\frac{r^{k+1}-r}{r-1}\right\} \\ &= \frac{1}{2}\{(r-1)kn-(r^{k+1}-r)\} \\ &> \frac{1}{2}\{(r-1)kn-r^{k+1}\}. \end{aligned}$$

Como $r>1 \Rightarrow r^{k+1}<r^{k+2}$ y $r^{k-1}<n$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\{(r-1)kn-r^{k+1}\} &> \frac{1}{2}\{(r-1)kn-r^{k+2}\} \\ &= \frac{1}{2}\{(r-1)kn-r^2r^k\} \\ &\geqslant \frac{1}{2}\{(r-1)kn-r^2n\}. \end{aligned}$$

Por lo tanto:

$$\begin{aligned} S(r,n) &> \frac{1}{2}\{(r-1)kn-r^2n\} \\ &= \frac{1}{2}\{(r-1)k-r^2\}n. \end{aligned} \tag{7}$$

Por otra parte:

$$\begin{aligned} S(r,n) &< \frac{1}{2}(r-1)\sum_{i=1}^{k}(n+r^i) \\ &= \frac{1}{2}\{(r-1)kn+r^{k+1}-r\} \\ &< \frac{1}{2}\{(r-1)kn+r^{k+1}\}. \end{aligned}$$

Como $r^{k-1}<n$, obtenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned} S(r,n) &< \frac{1}{2}\{(r-1)kn+r^{k+1}\} \\ &= \frac{1}{2}\{(r-1)kn+r^2r^{k-1}\} \\ &< \frac{1}{2}\{(r-1)kn+r^2n\}. \end{aligned}$$

Por lo tanto, concluimos que:

$$\begin{aligned} S(r,n) &< \frac{1}{2}\{(r-1)kn+r^2n\} \\ &= \frac{1}{2}\{(r-1)k+r^2\}n. \end{aligned} \tag{8}$$

De (7), tenemos lo siguiente:

$$S(r,n)>\frac{1}{2}\{(r-1)k-r^2\}n$$

entonces

$$\frac{2S(r,n)ln(r)}{(r-1)nln(n)}>\frac{\{(r-1)k-r^2\}ln(r)}{(r-1)ln(n)}.$$

Ahora, recordando que $n\leqslant r^k$ implica que

$$k\geqslant\frac{ln(n)}{ln(r)} \text{ y } r\geqslant 2,$$

tenemos:

$$\begin{aligned} &\frac{\{(r-1)k-r^2\}ln(r)}{(r-1)ln(n)} \\ &= \frac{(r-1)kln(r)}{(r-1)ln(n)}-\frac{r^2ln(r)}{(r-1)ln(n)} \\ &\geqslant 1-\frac{r^2ln(r)}{(r-1)ln(n)}. \end{aligned}$$

Por lo tanto, podemos concluir que:

$$\begin{aligned} &\liminf_{n\to\infty}\frac{2S(r,n)ln(r)}{(r-1)nln(n)} \\ &\geqslant \liminf_{n\to\infty} 1-\frac{r^2ln(r)}{(r-1)ln(n)}=1. \end{aligned} \tag{9}$$

Por otro lado, partiendo de (8), tenemos lo siguiente:

$$S(r,n)\leqslant\frac{1}{2}\{(r-1)k+r^2\}n$$

de donde

$$\frac{2S(r,n)ln(r)}{(r-1)nln(n)}\leqslant\frac{\{(r-1)k+r^2\}ln(r)}{(r-1)ln(n)}.$$

Ahora, como $n>r^{k-1}\Rightarrow k<\frac{ln(n)}{ln(r)}+1$, tenemos:

$$\begin{aligned} &\frac{\{(r-1)k+r^2\}ln(r)}{(r-1)ln(n)} \\ &= \frac{(r-1)kln(r)}{(r-1)ln(n)}+\frac{r^2ln(r)}{(r-1)ln(n)}. \end{aligned}$$

Luego:

$$\begin{aligned}&\frac{(r-1)kln(r)}{(r-1)ln(n)}+\frac{r^2ln(r)}{(r-1)ln(n)}\\&= \frac{(r-1)\left\{\frac{ln(n)}{ln(r)}+1\right\}ln(r)}{(r-1)ln(n)}+\frac{r^2ln(r)}{(r-1)ln(n)}.\end{aligned}$$

Haciendo las simplificaciones correspondientes, nos queda que:

$$\begin{aligned}&\frac{(r-1)\left\{\frac{ln(n)}{ln(r)}+1\right\}ln(r)}{(r-1)ln(n)}+\frac{r^2ln(r)}{(r-1)ln(n)}\\&= 1+\frac{(r-1)ln(r)}{(r-1)ln(n)}+\frac{r^2ln(r)}{(r-1)ln(n)}.\end{aligned}$$

Al sumar las fracciones, obtenemos que:

$$\begin{aligned}&\frac{2S(r,n)ln(r)}{(r-1)nln(n)}\\&\leqslant 1+\frac{(r-1)ln(r)}{(r-1)ln(n)}+\frac{r^2ln(r)}{(r-1)ln(n)}\\&= 1+\frac{(r^2+r-1)ln(r)}{(r-1)ln(n)}.\end{aligned}$$

Por lo tanto, concluimos que:

$$\begin{aligned}&\limsup_{n\to\infty}\frac{2S(r,n)ln(r)}{(r-1)nln(n)}\\&\leqslant \limsup_{n\to\infty} 1+\frac{(r^2+r-1)ln(r)}{(r-1)ln(n)}=1. \quad (10)\end{aligned}$$

Ahora, combinando, (9) y (10), obtenemos que:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2S(r,n)ln(r)}{(r-1)nln(n)}=1.$$

Probando así (4). ■

El siguiente teorema nos dice que la suma promedio de dígitos es menor cuando los números están escritos en base 2.

Teorema 5 *Sea* $r\in\mathbb{N}/r>2$. *Entonces:*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{S(r,n)}{S(2,n)}>1.$$

Demostración: Usando el teorema anterior, tenemos que:

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{S(r,n)}{S(2,n)} &= \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{S(r,n)}{n}}{\frac{S(2,n)}{n}}\\&= \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{(r-1)ln(n)}{2ln(r)}}{\frac{ln(n)}{2ln(2)}}.\\&= \frac{(r-1)ln(2)}{ln(r)}.\end{aligned}$$

Ahora, como:

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dr}\left\{\frac{(r-1)ln(2)}{ln(r)}\right\}\\&= \frac{\{ln(r)+r^{-1}-1\}ln(2)}{ln^2(r)}>0\end{aligned}$$

para $r\geqslant 2$. Concluimos que $\frac{(r-1)ln(2)}{ln(r)}$ es una función monótona creciente en r y además:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{S(r,n)}{S(2,n)}=\frac{(r-1)ln(2)}{ln(r)}\geqslant\frac{2ln(2)}{ln(3)}>\frac{5}{4}>1.$$

Para todo $r\geqslant 3$. Así concluye la demostración. ■

Los teoremas 4 y 5 se pueden usar para demostrar el siguiente teorema, que propone una situación más general al considerar dos bases cualesquiera r_1 y r_2 que la que se muestra en el teorema anterior:

Teorema 6 *Si* $2\leqslant r_1\leqslant r_2-1$, *entonces se cumple la desigualdad:*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{S(r_2,n)}{S(r_1,n)}>1. \tag{11}$$

Demostración:

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{S(r_2,n)}{S(r_1,n)} &= \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{S(r_2,n)}{n}}{\frac{S(r_1,n)}{n}}\\&= \frac{\frac{(r_2-1)ln(n)}{2ln(r_2)}}{\frac{(r_1-1)ln(n)}{2ln(r_1)}}\\&= \frac{(r_2-1)ln(r_1)}{(r_1-1)ln(r_2)}.\end{aligned} \tag{12}$$

Ahora, derivando (12) con respecto a r_2, tenemos que:

$$\frac{d}{dr_2}\left\{\frac{(r_2-1)ln(r_1)}{(r_1-1)ln(r_2)}\right\}$$
$$= \frac{ln(r_1)}{r_1-1}\left\{\frac{d}{dr_2}\left\{\frac{r_2-1}{ln(r_2)}\right\}\right\}$$
$$= \frac{ln(r_1)}{r_1-1}\left\{\frac{ln(r_2)+\frac{1}{r_2}-1}{\{ln(r_2)\}^2}\right\}. \quad (13)$$

Recordando que $2 \leqslant r_1 \leqslant r_2-1$ y analizando (13), es claro que $\frac{ln(r_1)}{r_1-1} > 0$ y $ln(r_2)+\frac{1}{r_2} > 1$, por lo que (12) es una función monótona creciente con respecto a r_2. Posteriormente, haciendo un razonamiento análogo al que se hizo en el teorema anterior, se puede llegar a (11). ■

Extendemos el Teorema 6 en el próximo corolario.

Corolario 2 *Sea $p \in \mathbb{N}, p \geqslant 2$. Sea $\{r_i\}_{i=1}^{p} \subset \mathbb{N}$ tal que $2 \leqslant r_1 \leqslant r_2-1 \leqslant r_3-1 \leqslant \ldots \leqslant r_p-1$. Entonces, si $1 \leqslant j < l \leqslant p$, se tiene que:*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{S(r_l,n)}{S(r_j,n)} > 1.$$

Demostración: Sea $p \in \mathbb{N}$, con $p \geqslant 2$. Sean $j,l \in \mathbb{N}$ tales que $1 \leqslant j < l \leqslant p$. Ahora, consideremos la sucesión creciente $\{r_i\}_{i=1}^{p}$ tal que $2 \leqslant r_1 \leqslant r_2-1 \leqslant r_3-1 \leqslant \ldots \leqslant r_p-1$. Así, si $j<l$, podemos ver que $2 \leqslant r_j \leqslant r_l-1$. Así, las hipótesis del teorema anterior se cumplen, por lo que concluimos que:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{S(r_l,n)}{S(r_j,n)} > 1. \quad ■$$

4. Dígitos binarios de potencias de enteros

En lo que sigue, estudiaremos el comportamiento de $B(n^j)/B(n)$ para todo $j \in \mathbb{N}$ y $n \in \mathbb{N}$. Stolarsky demuestra en [19] resultados muy precisos acerca de estos cocientes. Enunciamos y demostramos algunos de sus resultados.

Teorema 7 *Sean $n,h \in \mathbb{N}$ mayores que uno. Definamos $r_h(n) = \frac{B(n^h)}{B(n)}$. Entonces:*

$$r_h(n) \leqslant 2\{hlog_2(n)\}^{1-\frac{1}{h}}.$$

Demostración: Por la submultiplicatividad de B, tenemos que $B(n^h) \leqslant B(n)^h$, por otra parte del Corolario 1 $B(n^h) \leqslant [hlog_2(n)]+1$. En consecuencia:

$$\frac{B(n^h)}{B(n)} \leqslant B(n)^{-1}\, \text{mín}\{hlog_2(n)+1, B(n)^h\}.$$

Si $B(n)^h \geqslant hlog_2(n)+1 > hlog_2(n)$, tenemos que:

$$\begin{aligned} r_h(n) &\leqslant B(n)^{-1}\, \text{mín}\{hlog_2(n)+1, B(n)^h\} \\ &\leqslant \{hlog_2(n)\}^{1-\frac{1}{h}}. \end{aligned} \quad (14)$$

Por otra parte, si $B(n)^h < hlog_2(n)+1$, entonces

$$B(n) \leqslant \{2hlog_2(n)\}^{\frac{1}{h}},$$

así

$$\begin{aligned} r_h(n) &\leqslant \frac{B(n)^h}{B(n)} \\ &= B(n)^{h-1} \\ &\leqslant \left(\{2hlog_2(n)\}^{\frac{1}{h}}\right)^{h-1} \\ &\leqslant 2\{hlog_2(n)\}^{1-\frac{1}{h}}. \quad ■ \end{aligned} \quad (15)$$

El teorema a continuación necesita la construcción de un conjunto de Sidon (ver [4]), esto es, un conjunto de números enteros en el que todas las sumas de sus elementos son únicas. Por ejemplo: En el caso que consideremos solamente las sumas de dos elementos, el conjunto $\{1,2,4,8\}$ es de Sidon, mientras que $\{1,2,3,4\}$ no lo es, en efecto, la suma $1+4=2+3$.

Los conjuntos de Sidon permite estudiar el problema fundamental: ¿Qué tan denso o grande puede ser un conjunto? Es decir, ¿Cuántos elementos puede tener un conjunto si sus miembros no pueden ser mayores que un cierto número N?

A continuación enunciamos un teorema que establece que la cota dada en el teorema precedente es la mejor que podemos obtener. Su demostración hace uso de la construcción de un conjunto de Sidon.

Teorema 8 *La cota del teorema anterior es la mejor posible en el sentido de que existe una constante $c(h) > 0$, que depende sólo de h, tal que*

$$r_h(n) > c(h)\{log_2(n)\}^{1-\frac{1}{h}}$$

infinitas veces.

Para una demostración véase [19]. No incluimos su demostración porque hace uso de un resultado debido a Bose y Chowla, el cual está fuera del alcance de los objetivos que nos hemos planteado. El teorema de Bose-Chowla es un resultado fundamental en la teoría aditiva de números que proporciona una construcción algebraica para conjuntos de Sidon donde todas las sumas de h elementos (con o sin repeticiones) son únicas.

Antes de demostrar el siguiente teorema, enunciaremos y demostraremos dos lemas.

Lema 4 *Sean $a,b \in \mathbb{N}$ tales que $a \geqslant b$. Entonces $B(2^a - 2^b) = a - b$.*

Demostración: Notemos que $2^a = (10_{(a)})$ y $2^b = (10_{(b)})$. Observamos de la tabla 3 que $B(2^a - 2^b) = a - b$. ■

Ahora, procederemos a demostrar un lema que generaliza al anterior.

Lema 5 *Sean $A > a_1 > a_2 > \ldots > a_q \geqslant 0$ números naturales. Entonces:*

$$B(2^A - 2^{a_1} - 2^{a_2} - \ldots - 2^{a_q}) = A + 1 - a_q - q.$$

Demostración: Notemos que:

$$\begin{aligned} & B(2^A - 2^{a_1} - 2^{a_2} - \ldots - 2^{a_q}) \\ = \quad & B[(2^A - 2^{a_q}) - 2^{a_1} - 2^{a_2} - \ldots - 2^{a_{q-1}}]. \end{aligned}$$

Por el lema 4, $2^A - 2^{a_q} = (1_{(A-a_q)}0_{(a_q)})$. Así:

$$\begin{aligned} & B[(2^A - 2^{a_q}) - 2^{a_1} - 2^{a_2} - \ldots - 2^{a_{q-1}}] \\ = \quad & B[(1_{(A-a_q)}0_{(a_q)}) - 2^{a_1} - 2^{a_2} - \ldots - 2^{a_{q-1}}]. \end{aligned}$$

Ahora, por hipótesis, al restar de $2^A - 2^{a_q}$ las restantes potencias de 2, lo que haremos será quitar unos en las posiciones respectivas $(a_1 + 1, a_2 + 1, \ldots, a_{q-1} + 1)$, mientras que los otros dígitos no se modifican. En consecuencia, al final de la resta, el total de unos será la cantidad de unos originales $(A - a_q)$ menos la cantidad de unos que vamos quitando sucesivamente (que es igual a la cantidad de potencias de 2 que vamos quitando, ésto es, $q - 1$), o en otras palabras:

$$\begin{aligned} & B(2^A - 2^{a_1} - 2^{a_2} - \ldots - 2^{a_q}) \\ = \quad & A - a_q - (q-1) = A + 1 - a_q - q. \end{aligned}$$ ■

A continuación enunciamos el siguiente teorema de Stolarsky acerca del orden minimal del cociente $B(n^2)/B(n)$ y se da una idea de la demostración.

Teorema 9 *Sea $n \in \mathbb{N}$. Sea $r_h(n)$ como se definió en el teorema 5. Entonces son ciertas las siguientes proposiciones:*

1. *Para todo $n \in \mathbb{N}$,*
$$r_2(n) \geqslant \{[log_2(n)] + 1\}^{-1}.$$
2. *Existen infinitos n, tales que*
$$r_2(n) \leqslant 4\frac{(\log\log(n))^2}{\log(n)}.$$

Demostración: Recordando que $B(n) \leqslant [log_2(n)] + 1$, obtenemos:

$$B(n)^{-1} \geqslant \{[log_2(n)] + 1\}^{-1}$$

y como $B(n^h) \geq 1$ se tiene la primera parte del teorema.

Daremos una idea de la segunda parte. La clave de la demostración reside en una ingeniosa construcción de enteros n cuya estructura binaria minimiza la formación de acarreos al ser elevados al cuadrado.

El objetivo de Stolarsky es construir un número n que sea una suma de potencias de 2 muy espaciadas: $n = \sum_{j=0}^{k-1} 2^{e_j}$. Al calcular su cuadrado, obtenemos:

$$n^2 = \left(\sum_{i=0}^{k-1} 2^{e_i}\right)\left(\sum_{j=0}^{k-1} 2^{e_j}\right) = \sum_{i=0}^{k-1}\sum_{j=0}^{k-1} 2^{e_i+e_j}.$$

La suma de dígitos de n^2 será pequeña si podemos elegir los exponentes $\{e_j\}$ de tal manera que, al sumar los k^2 términos de la forma $2^{e_i+e_j}$, se generen el menor número posible de acarreos.

Un caso ideal para esto sería si todos los k^2 exponentes $e_i + e_j$ fueran distintos. Esto se lograría si el conjunto de exponentes $\{e_j\}$ fuera un **conjunto de Sidon** (un conjunto A donde todas las sumas $a_i + a_j$ con $a_i, a_j \in A$ son únicas).

Se construye una sucesión de enteros n_k definida por dos parámetros: un entero $k \geq 1$ (que será el número de dígitos '1' en n_k) y un entero $d \geq 1$ (el factor de espaciado).

$$n_k = \sum_{j=0}^{k-1} 2^{j \cdot d}.$$

	Lugar:		$a+1$	a	$\dots$	$b+1$	b	$b-1$	$\dots$	1
	2^a	=	1	0	$\dots$	0	0	0	$\dots$	0
-	2^b	=				1	0	0	$\dots$	0
			0	1	$\dots$	1	0	0	$\dots$	0

Tabla 3

Por construcción, la representación binaria de n_k consiste en k unos separados por $d-1$ ceros. Por lo tanto, su suma de dígitos es trivialmente:

$$B(n_k) = k.$$

Ahora, calculamos su cuadrado:

$$n_k^2 = \sum_{i=0}^{k-1}\sum_{j=0}^{k-1} 2^{(i+j)d} = \sum_{s=0}^{2k-2} N_s \cdot 2^{sd}$$

donde N_s es el número de formas de escribir el entero s como suma $s = i+j$, con $0 \leq i, j \leq k-1$. Este coeficiente es $N_s = s+1$ para $0 \leq s < k$ y $N_s = 2k-1-s$ para $k \leq s \leq 2k-2$. El valor máximo de estos coeficientes es $N_{k-1} = k$.

La clave ahora es elegir d suficientemente grande para que los bloques binarios de cada término $N_s \cdot 2^{sd}$ no se superpongan. La representación binaria de N_s requiere a lo sumo $[\log_2 N_s] + 1$ unos. Como $N_s \leq k$, necesita menos de $\log_2(k)+1$ unos. Si elegimos el espaciado d tal que $d > \log_2(k)$, garantizamos que no hay superposición (acarreo) entre los términos $N_s 2^{sd}$ y $N_{s+1}2^{(s+1)d}$. Bajo esta condición, la suma de dígitos de n_k^2 es simplemente la suma de las sumas de dígitos de cada componente:

$$B(n_k^2) = \sum_{s=0}^{2k-2} B(N_s).$$

Esta es la expresión exacta para $B(n_k^2)$ bajo la condición $d > \log_2(k)$. El problema se reduce a encontrar una buena cota para esta suma y optimizar la elección de los parámetros.

Stolarsky demostró la siguiente cota superior para la suma de las sumas de dígitos de estos coeficientes, en efecto existe una constante C tal que:

$$\sum_{s=0}^{2k-2} B(N_s) \leq Ck(\log_2 k)^2.$$

Al insertar esta cota en la expresión en el cociente, se obtiene:

$$\begin{aligned} r_2(n_k) &= \frac{1}{k}\sum_{s=0}^{2k-2} B(N_s) \\ &\leq \frac{1}{k}\left(Ck(\log_2 k)^2\right) = C(\log_2 k)^2. \end{aligned}$$

Ahora, utilizando la elección de parámetro $k \approx \frac{\log_2 n}{\log_2\log_2 n}$, llegamos al resultado final:

$$\begin{aligned} C(\log_2 k)^2 &\approx C\left(\log_2\left(\frac{\log_2 n}{\log_2\log_2 n}\right)\right)^2 \\ &= C(\log_2\log_2 n - \log_2\log_2\log_2 n)^2 \\ &\sim C(\log_2\log_2 n)^2. \end{aligned}$$

El argumento completo requiere normalizar esta expresión por $\log_2 n$ debido a la relación entre n, k y d, obteniendo la forma final de la cota de Stolarsky. A continuación reproducimos los argumentos de Stolarsky para hallar la cota exacta de los conjuntos de Sidon de interes y de allí hacer uso del teorema de Bose-Chowla para concluir.

Sean $q \geqslant 1$, $a(t) = 2^t$ y:

$$S = \sum_{j=1}^{q} 2^{a(q+1)-a(j)+1}.$$

Definamos $n = 2^{a(q+1)} - S$. Entonces, por el lema anterior, obtenemos que:

$$B(n) = 2^{q+1} + 1 - (2^{q+1} - 2^q + 1) - q = 2^q - q.$$

Ahora, por la forma en que se definió n, tenemos que:

$$n^2 = 2^{2a(q+1)} - 2^{a(q+1)+1}S + S^2. \tag{16}$$

Luego tenemos, desarrollando los 2 últimos términos de (16):

$$
\begin{aligned}
S^2 &= \left\{\sum_{i=1}^{q} 2^{a(q+1)-a(i)+1}\right\}^2 \\
&= \sum_{i=1}^{q} 2^{2a(q+1)-a(i+1)+2} \\
&\quad +2\sum_{i<j} 2^{2a(q+1)-a(i)-a(j)+2} \\
&= \sum_{i=1}^{q} 2^{2a(q+1)-a(i+1)+2} \\
&\quad +\sum_{i=1}^{q-1}\sum_{j=i+1}^{q} 2^{2a(q+1)-a(i)-a(j)+3} \qquad (17)
\end{aligned}
$$

por otra parte,

$$
\begin{aligned}
-2^{a(q+1)+1}S &= -2^{a(q+1)+1}\sum_{i=1}^{q} 2^{a(q+1)-a(i)+1} \\
&= -\sum_{i=1}^{q} 2^{2a(q+1)-a(i)+2}. \qquad (18)
\end{aligned}
$$

Los primeros $q-1$ términos de S^2 se simplifican con los términos $2^{2a(q+1)}$ y $-2^{a(q+1)+1}S$ de (16), por lo tanto:

$$n^2 = 2^{a(q+1)+2} + \sum_{l=1}^{Q} 2^{e_l}, Q = \frac{q(q-1)}{2}. \qquad (19)$$

Notemos que $a(q+1) \geqslant a(i)$ para todo $i \leqslant q$. Luego, tenemos que $2a(q+1) \geqslant a(i)+a(j)$ para todo $i, j \leqslant q$, por lo que $2a(q+1)-a(i)-a(j)+3 \geqslant 0$ para todo $i, j \leqslant q$. En consecuencia, podemos escribir que $2a(q+1)-a(i)-a(j)+3 = e_l$, donde $e_l \geqslant 0$. Ahora, ¿Cuántos e_l hay? Veamos cuáles son los posibles valores de i en (17): si $j=2$, entonces $i \in \{1\}$; si $j=3$, $i \in \{1,2\}$, y así sucesivamente hasta que $j=q$, por lo que $i \in \{1,2,\ldots q-1\}$. En consecuencia, la cantidad de posibles valores de i es $\sum_{k=1}^{q-1} k = \frac{q(q-1)}{2}$. Es por ello que en (19), podemos escribir que:

$$
\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{q-1}\sum_{j=i+1}^{q} 2^{2a(q+1)-a(i)-a(j)+3} \\
&= \sum_{l=1}^{Q} 2^{e_l}, Q = \frac{q(q-1)}{2}.
\end{aligned}
$$

Por la forma que tiene m^2, concluimos que

$$B(m^2) \leqslant 1 + \frac{q(q-1)}{2}. \quad \blacksquare$$

Stolarsky, en su trabajo [19], conjetura que $\underline{\lim}_{n\to\infty} r_h(n) = 0$. Esta conjetura fue demostrada en el trabajo [10].

5. Números $(2,1,2)$

En esta sección, definiremos a los números $(2,1,2)$, los caracterizaremos enunciando propiedades concernientes a ellos. Introducimos los resultados del trabajo de Melfi [15], incluyendo detalles que el artículo deja al lector, estos para facilitar la lectura son presentados como lemas o proposiciones.

Definición 5 *Se dice que un número $n \in \mathbb{N}$ es $(2,1,2)$, o que satisface la propiedad $(2,1,2)$, si $B(n) = B(n^2)$.*

En las siguientes proposiciones, se demuestran algunas propiedades de los números $(2,1,2)$. El siguiente teorema desmuestra la existencia de números $(2,1,2)$.

Teorema 10 *Para todo $k \in \mathbb{N}^*$, el número $n_k = 2^k - 1$ es del tipo $(2,1,2)$.*

Demostración: Como $n_k = (1_{(k)})$, se ve que $B(n_k) = k$. Además:

$$(n_k)^2 = (2^k-1)^2 = 2^{2k} - 2^{k+1} + 1 = (1_{(k-1)}0_{(k)}1).$$

Por lo que $B\left[(n_k)^2\right] = k$. $\blacksquare$

Ahora, daremos otra caracterización de los números $(2,1,2)$.

Teorema 11 *Para todo $k \in \mathbb{N}, k \geqslant 9$ y $n = 2^k - 2^{k-2} - 2^{k-3} - 4$, los números $n, n+1, n+2$ y $n+3$ son del tipo $(2,1,2)$.*

Demostración: En virtud del lema 5, tenemos que $B(n) = k-4$. Por otra parte:

$$
\begin{aligned}
n^2 &= 2^{2k} + 2^{2k-3} + 2^{2k-6} + 2^{k+1} \\
&\quad + 2^k + 2^4 - 2^{2k-1} - 2^{2k-2} - 2^{k+3} \\
&= (1_{(2)}0_{(3)}1_{(k-7)}0_{(k-5)}10_{(4)}).
\end{aligned}
$$

Por lo que $B(n^2) = 2 + k - 7 + 1 = k - 4$.

Por otra parte, en virtud del lema 5, concluimos que

$B(n+1) = k-3$. Además:

$$\begin{aligned}(n+1)^2 &= 2^{2k}+2^{2k-3}+2^{2k-6}+2^{k+2}+2^k \\ &\quad +2^3+1-2^{2k-1}-2^{2k-2}-2^{k+3} \\ &\quad -2^{k-1}-2^{k-2} \\ &= (1_{(2)}0_{(3)}1_{(k-8)}0_{(3)}10_{(k-4)}10_{(2)}1).\end{aligned}$$

En consecuencia,

$$B\left[(n+1)^2\right] = 2+k-8+1+1+1 = k-3.$$

Por otro lado, en virtud del mismo lema 5, $B(n+2) = k-2$. Haciendo los cálculos pertinentes, tenemos que:

$$\begin{aligned}(n+2)^2 &= 2^{2k}+2^{2k-3}+2^{2k-6}+2^k+2^{k-1} \\ &\quad +2^2-2^{2k-1}-2^{2k-2}-2^{k+1} \\ &= (1_{(2)}0_{(3)}1_{(k-5)}0_{(k-4)}10_{(2)}).\end{aligned}$$

Así, concluimos que $B\left[(n+2)^2\right] = 2+k-5+1 = k-2$.

Invocando nuevamente el lema 5, llegamos a la conclusión de que $B(n+3) = k-2$. Por otro lado:

$$\begin{aligned}(n+3)^2 &= 2^{2k}+2^{2k-3}+2^{2k-6}+2^{k-1}+2^{k-2} \\ &\quad +1-2^{2k-1}-2^{2k-2}-2^{k+1} \\ &= (1_{(2)}0_{(3)}1_{(k-7)}01_{(2)}0_{(k-3)}1)\end{aligned}$$

Así, $B\left[(n+3)^2\right] = 2+k-7+2+1 = k-2$. ■

En el siguiente resultado, establecemos la existencia de infinitos intervalos que no contienen números del tipo $(2,1,2)$.

Proposición 1 *Existen infinitos $n \in \mathbb{N}$ tales que el intervalo $(n, n+n^{\frac{1}{2}})$ no contiene números $(2,1,2)$.*

Demostración: Sea $n = 2^{2k} = (10_{(2k)})$. Cada $m \in (n, n+n^{\frac{1}{2}})$ es de la forma $n+r$ tal que $0 < r < n^{\frac{1}{2}} = 2^k$. En su expansión binaria, m es de la forma $(10_{(k)}c_kc_{k-1}\ldots c_1)$, donde $c_i \in \{0,1\}$ y, por lo tanto, $B[(c_kc_{k-1}\ldots c_1)] = B(r) \geqslant 1$. Ahora, sea $r^2 = (d_{2k}d_{2k-1}\ldots d_1)$. Tenemos entonces nuevamente que $B(r^2) \geqslant 1$; por lo tanto:

$$\begin{aligned}m^2 &= [2^{2k}+(c_kc_{k-1}\ldots c_1)]^2 \\ &= 2^{4k}+2^{2k}(c_kc_{k-1}\ldots c_1) \\ &\quad +(c_kc_{k-1}\ldots c_1)^2 \\ &= (10_{(k-1)}c_kc_{k-1}\ldots c_10d_{2k}d_{2k-1}\ldots d_1).\end{aligned}$$

Así, $B(m^2) = 1+B(r)+B(r^2) > 1+B(r) = B(m)$. ■

Ahora, enunciaremos una propiedad de la función B.

Lema 6 *Si $0 < n < 2^\nu$, entonces $B[n(2^\nu-1)] = \nu$.*

Demostración: Tenemos 2 casos:

- Supongamos que n es impar. Sea $n = (c_kc_{k-1}\ldots c_1)\,/\,c_1 = c_k = 1$. Como $n < 2^\nu$, tenemos que $k \leqslant \nu$ (esto es debido a que $n < 2^\nu \Rightarrow \sum_{i=1}^{k} c_i 2^{k-i} < 2^\nu \Rightarrow k \leqslant \nu$). Además de ésto, notemos que $n(2^\nu-1) = (c_kc_{k-1}\ldots c_10_{(\nu)}) - (c_kc_{k-1}\ldots c_1)$, por lo que $n(2^\nu-1) = (c_kc_{k-1}\ldots c_2c_1'1_{(\nu-k)}c_k'c_{k-1}'\ldots c_2'c_1)$. En consecuencia:

$$\begin{aligned}&B[n(2^\nu-1)] \\ &= B[(c_kc_{k-1}\ldots c_2c_1'1_{(\nu-k)}c_k'c_{k-1}'\ldots c_2'c_1)] \\ &= B[(c_kc_{k-1}\ldots c_2c_11_{(\nu-k)}c_k'c_{k-1}'\ldots c_2'c_1')] \\ &= B(n)+(\nu-k)+k-B(n) = \nu.\end{aligned}$$

- Si n es par, entonces $n' = \frac{n}{2^h}$ es impar para algún $h \in \mathbb{N}$ y, evidentemente, $n' < 2^\nu$. En consecuencia, y usando el lema 2, tenemos que $B[n'(2^\nu-1)] = \nu$ y $B[2^hn'(2^\nu-1)] = \nu$, por lo que $B[n(2^\nu-1)] = \nu$. ■

Con respecto a los múltiplos de potencias de 2, cuando a estos números se les suma una unidad, ¿Cuál es la suma de dígitos del número resultante? ¿Cuál es la suma de dígitos del cuadrado de éste número? Estas dudas nos las aclara el siguiente lema.

Lema 7 *Sea $n \in \mathbb{N}$, y sea ν tal que $n < 2^{\nu-1}$. Entonces:*

$$B(2^\nu n+1) = B(n)+1$$

y

$$B[(2^\nu n+1)^2] = B(n^2)+B(n)+1.$$

Demostración: Sea $n = (c_k\ldots c_1)$. Como $n < 2^{\nu-1}$, $k \leqslant \nu$. En consecuencia:

$$2^\nu n = (10_{(\nu)})\cdot(c_k\ldots c_1) = (c_k\ldots c_10_{(\nu)}).$$

Por lo tanto, $2^\nu n+1 = (c_k\ldots c_10_{(\nu-1)}1)$, y, así, $B(2^\nu n+1) = B(n)+1$. Supongamos que $n^2 = (d_{2k}\ldots d_1)$; entonces $(2^\nu n+1)^2 = 2^{2\nu}n^2+2^{\nu+1}n+1$. Como $k \leqslant \nu$ (lo que obviamente implica que

$k \leqslant \nu+1$), $2k \leqslant 2\nu$. En consecuencia, $2^{2\nu}n^2 = (d_{2k}\dots d_1 0_{(2\nu)})$ y $2^{\nu+1}n = (c_k \dots c_1 0_{(\nu+1)})$.

Así, tenemos que:

$$\begin{aligned} &B[(2^\nu n+1)^2] \\ &\quad = B[(d_{2k}\dots d_1 0_{(2\nu)}) + (c_k \dots c_1 0_{(\nu+1)}) + 1] \\ &\quad = B(n^2) + B(n) + 1. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Ahora, si a un múltiplo de una potencia de 2 le resto una cantidad cualquiera, ¿Cuál es la suma de dígitos de éste número y de su cuadrado? Para ello, tenemos el siguiente lema.

Lema 8 *Sean $n = (c_k \dots c_1)$ y $m = (d_h \dots d_1)$ naturales impares. Si $\nu \geqslant \text{máx}\{2h-1, h+k+1\}$, tenemos que:*

$$B(n2^\nu - m) = B(n) - B(m) + \nu$$

y

$$B[(n2^\nu - m)^2] = B(n^2) + B(m^2) - B(mn) + \nu - 1.$$

Demostración: Notemos que $c_k = d_h = 1 = c_1 = d_1$. Además, $n2^\nu = (c_k \dots c_1 0_{(\nu)})$, por lo que:

$$\begin{aligned} n2^\nu - m &= (c_k \dots c_1 0_{(\nu)}) - (d_h \dots d_1) \\ &= (c_k c_{k-1} \dots c_2 c_1' 1_{(\nu-h)} d_h' d_{h-1}' \dots d_2' d_1). \end{aligned}$$

Como $c_k = d_h = 1$, tenemos que $c_k' + d_h = c_k + d_h'$ (pues $c_k' = 0 = d_h'$). Así:

$$\begin{aligned} &B(n2^\nu - m) \\ &\quad = B[(c_k c_{k-1} \dots c_2 c_1' 1_{(\nu-h)} d_h' d_{h-1}' \dots d_2' d_1)] \\ &\quad = B[(c_k c_{k-1} \dots c_2 c_1 1_{(\nu-h)} d_h' d_{h-1}' \dots d_2' d_1')] \\ &\quad = B(n) + \nu - B(m). \end{aligned}$$

Supongamos que $n^2 = (q_{2k}q_{2k-1}\dots q_1)$, $m^2 = (r_{2h}r_{2h-1}\dots r_1)$ y $mn = (s_{k+h}s_{k+h-1}\dots s_1)$. Es fácil ver que $(n2^\nu - m)^2 = (n^2 2^{2\nu} + m^2) - nm2^{\nu+1}$; además, notemos que $s_{k+h} = 1 = q_{2k} = r_{2h}$.

Por hipótesis, $2h \leqslant \nu+1$ y $k+h \leqslant \nu-1$. Por lo tanto $(n2^\nu - m)^2$ es igual a

$$(q_{2k}\dots q_2 q_1' 1_{(\nu-k-h-1)} s_{k+h}' \dots s_2' s_1 0_{(\nu+1-2h)} r_{2h} \dots r_1),$$

entonces

$$B[(n2^\nu - m)^2] = B(n^2) + B(m^2) + \nu - 1 - B(mn). \quad \blacksquare$$

Como una propiedad particular del lema anterior, podemos enunciar el siguiente corolario.

Corolario 3 *Si $B(n^2) = 2B(n) - 1$ y $\nu \geqslant k+2$, entonces $2^\nu n - 1$ es del tipo $(2,1,2)$.*

Demostración: En este caso, $h = m = 1$. Entonces, $\nu \geqslant max\{2\cdot 1 - 1, 1+k+1\} = max\{1, 2+k\} = k+2$. Por lo tanto, en virtud del lema anterior:

$$B(2^\nu n - 1) = B(n) + \nu - 1$$

y

$$\begin{aligned} &B[(2^\nu n - 1)^2] \\ &\quad = B(n^2) + 1 - B(n) + \nu - 1 \\ &\quad = B(n) + \nu - 1. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Otro corolario que se puede enunciar al lema anterior es el siguiente:

Corolario 4 *Sea n un natural impar. Sea $m = 2^h - 1$ tal que $n < m$. Si $\nu \geqslant 2h+1$, entonces:*

$$B(n2^\nu - m) = B(n) + \nu - h$$

y

$$B[(n2^\nu - m)^2] = B(n^2) + \nu - 1.$$

Demostración: Sea $n = (c_k \dots c_1)$. En principio, cabe destacar que $m = (1_{(h)})$; además, se puede ver que $k \leqslant h$ (lo cual claramente implica que $n < 2^h$). Como $\nu \geqslant 2h+1 = \text{máx}\{2k-1, h+k+1\}$, en virtud del lema anterior, tenemos que:

$$B(n2^\nu - m) = B(n) - B(m) + \nu = B(n) + \nu - h.$$

Ahora, como $n < 2^h$, tenemos, en virtud del lema 6, que:

$$B(nm) = B[n(2^h - 1)] = h.$$

Por otro lado, en virtud del teorema 12, $B(m^2) = h$. En consecuencia:

$$\begin{aligned} &B[(n2^\nu - m)^2] \\ &\quad = B(n^2) + B(m^2) - B(mn) + \nu - 1 \\ &\quad = B(n^2) + h - h + \nu - 1 = B(n^2) + \nu - 1. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Con las hipótesis adecuadas, se pueden construir ciertos números para los cuales es fácil calcular su suma de dígitos.

Lema 9 *Sea $n = (c_k c_{k-1} \dots c_1)$ un natural impar. Supongamos que $B(n^2) \geqslant 2B(n)+1$. Entonces, existen ν y $h \in \mathbb{N}$ tales que, para $n' = n2^\nu - (2^h - 1)$, tenemos que $B[(n')^2] = 2B(n') - 1$.*

Demostración: Sea $h = k+1$; entonces $n < 2^h - 1$. Sea $\nu = B(n^2) - 2B(n) + 2h$, luego $\nu = 2h + a \;/\; a \geqslant 1$. Es importante señalar que $\nu < 4k+2$. Así, las hipótesis del corolario 3 se cumplen, por lo que $B(n') = B(n) + \nu - h$ y:

$$\begin{aligned} B[(n')^2] &= B(n^2) + \nu - 1 \\ &= 2B(n) + \nu - 2h + \nu - 1 \\ &= 2B(n) + 2\nu - 2h - 1 \\ &= 2B(n') - 1. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

El siguiente lema nos muestra que existen ciertos números para los cuales podemos acotar la suma de dígitos de su cuadrado.

Lema 10 *Sea $n = (c_k c_{k-1} \dots c_1) > 1$ un número natural. Sea $n_0 = (c_k c_{k-1} \dots c_1 0_{(k)} 1 0_{(2k+1)} 1)$. Entonces $B\left[(n_0)^2\right] > 2B(n_0) + 1$.*

Demostración: Notemos que $n_0 = (n2^{k+1}+1)2^{2k+2} + 1$. Así,como $n < 2^k$, podemos aplicar el lema 7, concluyendo que:

$$\begin{aligned} B(n_0) &= B\left[(n2^{k+1}+1)2^{2k+2}+1\right] \\ &= B(n2^{k+1}+1)+1 \\ &= B(n)+2. \end{aligned}$$

Al aplicar el lema 7 nuevamente, obtenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned} &B\left[(n_0)^2\right] \\ &= B\left\{\left[(n2^{k+1}+1)2^{2k+1}+1\right]^2\right\} \\ &= B\left[(n2^{k+1}+1)^2\right] + B(n2^{k+1}+1)+1 \\ &= B(n^2)+B(n)+1+B(n)+1+1 \\ &= B(n^2)+B(n_0)+B(n_0)+1 \\ &> 2B(n_0)+1. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Observación 4 *Con las hipótesis del lema anterior, se puede ver también que $n_0 \ll n^4$.*

En lo que sigue, demostraremos uno de los teorema principales del trabajo de Melfi el cual nos da una cota para la función que cuenta los números $(2,1,2)$.

Teorema 12 *Sea $p(N) = \#\{n < N \;/\; B(n) = B(n^2)\}$. Entonces, tenemos que $p(N) \gg N^{0{,}025}$.*

Demostración: Sea $n = (c_k c_{k-1} \dots c_1)$ un natural impar. Mostraremos que para una constante A que no depende de n, es posible construir un conjunto de n números $(2,1,2)$ distintos que no excedan a An^{40}.

Consideremos los n números $n_i = 2^k + i$ para $i = 1,\dots,n$. Obviamente, tenemos que $n_i < 4n$. Para todo i, por el lema 10, existe un $n_{0,i} \ll (n_i)^4$ tal que sus primeros $k+1$ dígitos son los mismos que los de n_i y tal que $B\left[(n_{0,i})^2\right] > 2B(n_{0,i}) + 1$.

Ahora, por el lema 9, existe un $n'_{0,i} \ll (n_{0,i})^5$ tal que sus primeros k dígitos son, de nuevo, los mismos de n y tal que $B\left[(n'_{0,i})^2\right] = 2B(n'_{0,i}) - 1$.

Finalmente, por el corolario 3 existe un $n''_{0,i} \ll (n'_{0,i})^2$ cuyos primeros dígitos binarios son los mismos de n y tal que $B\left[(n''_{0,i})^2\right] = B(n''_{0,i})$.

Así, tenemos que $n''_{0,i} \ll (n'_{0,i})^2 \ll \left[(n_{0,i})^5\right]^2 \ll \left\{\left[(n_i)^4\right]^5\right\}^2 \ll n^{40}$. $\blacksquare$

Este resultado es mejorado por Hare *et al.*, Teorema 1.2, pág. 1739 en [11],

$$\#\{n < N \,:\, B(n^2) = B(n)\} \gg N^{1/19}.$$

En la próxima sección describimos la conjetura referente al comportamiento asintótico de los números $(2,1,2)$.

6. Conjetura de Melfi

En su trabajo [15], Melfi plantea la conjetura de que

$$p(n) = \#\{l < N :\; B(l) = B(l^2)\} \approx n^\alpha,$$

para algún $\alpha \in \mathbb{R}$. En ese mismo trabajo, utilizando argumentos probabilísticos, calcula de manera aproximada el valor de α. A continuación detallamos los argumentos.

Sea $n = (c_k c_{k-1} \dots c_1) \in \mathbb{N}$. Podemos suponer que cada c_i es una variable aleatoria Bernoulli; i.e., es una función $c_i : \Omega \to \{0,1\}$, donde $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbb{P})$ es un espacio de probabilidad y la función de probabilidad puntual está dada por:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(\{w \,/\, c_i(w)=1\}\right) &= \frac{1}{2}\\ \mathbb{P}\left(\{w \,/\, c_i(w)=0\}\right) &= \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

Por lo tanto, la función $B\left(n(w)\right)=\sum_{i=1}^{k} c_i(w)$ es una variable aleatoria binomial cuya función de distribución puntual está dada por:

$$\begin{aligned}&\mathbb{P}\left(\{w \,/\, B\left(n(w)\right)=l\}\right)\\ &= \binom{k}{l-1}\frac{1}{2^k} \quad \textit{para}\;\; n(w)\in[2^k,2^{k+1}).\end{aligned}$$

Ahora, demostraremos que las distribuciones de $B(n)$ y $B(n^2)$ son binomiales denotamos la distribución binomial de paramétros N y p por $Bin(N,p)$.

Proposición 2 *Si* $2^k \leqslant n < 2^{k+1}$, *entonces* $B(n)-1\sim Bin(k,\frac{1}{2})$.

Demostración: Sea $n=(c_{k+1}c_k\ldots c_2c_1)$. Entonces $n=\sum_{i=1}^{k+1} c_i 2^{i-1}$, donde $c_{k+1}=1$. Luego, $B(n)$ se puede expresar como $B(n)=1+B(m)$, donde $m=n-2^k$ y $B(m)\sim Bin(k,\frac{1}{2})$. ■

Proposición 3 *Si* $2^{2k} \leqslant n^2 < 2^{2k+1}$, *entonces* $B(n^2)-1\sim Bin(2k,\frac{1}{2})$. *Si* $2^{2k+1}\leqslant n^2 < 2^{2k+2}$, *entonces* $B(n^2)-1\sim Bin(2k+1,\frac{1}{2})$.

Demostración: La misma se deduce de la proposición anterior. ■

Utilizando la notación que introdujimos antes y prescindiendo de ω tenemos que:

$$\frac{p(n)}{n}\approx \mathbb{P}\left(B\left(n\right)=B\left(n^2\right),n\in[2^k,2^{k+1})\right).$$

Si suponemos que la conjetura de Melfi es cierta:

$$\begin{aligned}&n^{\alpha-1}\\ &\approx \mathbb{P}\left(B\left(n\right)=B\left(n^2\right),n\in[2^k,2^{k+1})\right)\\ &= \sum_{l=1}^{k}\mathbb{P}\left(B\left(n\right)=l,B\left(n^2\right)=l\right)\\ &\leqslant \sum_{l=1}^{k}\mathbb{P}\left(B\left(n\right)=l\right)\mathbb{P}\left(B\left(n^2\right)=l\right). \qquad (20)\end{aligned}$$

La desigualdad (20) es cierta debido a la submultiplicatividad de la función B.

Para calcular el valor en (20), necesitamos calcular la distribución de $B\left(n^2\right)$; ésto lo hacemos en el lema siguiente.

Lema 11

$$\mathbb{P}\left(B\left(n^2\right)=l\right)=\frac{\binom{2k+1}{l-1}}{2^{2k+1}}+\frac{\binom{2k}{l-1}}{2^{2k}}.$$

Demostración: Definamos los conjuntos:

$$\begin{aligned}A &= \{B\left(n^2(w)\right)=l\}\\ B &= \{c_{2k+1}\left(n^2(w)\right)=1\}.\end{aligned}$$

Entonces, por la regla de la probabilidad total:

$$\begin{aligned}&\mathbb{P}(A)=\mathbb{P}(A\cap B)+\mathbb{P}(A\cap B^C)\\ &= \mathbb{P}\left(\{B\left(n^2\right)=l,c_{2k+1}\left(n^2\right)=1\}\right)\\ &+ \mathbb{P}\left(\{B\left(n^2\right)=l,c_{2k+1}\left(n^2\right)=0\}\right).\end{aligned}$$

Pero, como en el segundo caso $n^2\in[2^{2k},2^{2k+1})$ y $c_{2k+1}\left(n^2\right)=0$, tenemos que $c_{2k}\left(n^2\right)=1$, por lo que:

$$\mathbb{P}(A)=\frac{\binom{2k+1}{l-1}}{2^{2k+1}}+\frac{\binom{2k}{l-1}}{2^{2k}}. \qquad ■$$

Analicemos más a fondo el resultado obtenido en el lema anterior. Como $n^2\in[2^{2k},2^{2k+1})$, tenemos que $c_{2k+2}\left(n^2\right)=0$. Recordemos que suponemos que los $c_i\left(n^2\right)$ son variables aleatorias independientes Bernoulli, por ello, al recordar que, para la primera fracción, $c_{2k+1}\left(n^2\right)=1$, podemos reescribir la primera fracción como

$$\frac{1}{2}\frac{\binom{2k}{l-1}}{2^{2k+2}}.$$

En la segunda fracción, tenemos que $c_{2k+2}\left(n^2\right)=0$ y $c_{2k+1}\left(n^2\right)=0$. En consecuencia, la segunda fracción se puede reescribir como $\frac{\binom{2k}{l-1}}{2^{2k+2}}$.

En virtud de las observaciones anteriores, el resultado del lema anterior se puede expresar así:

$$\frac{1}{2}\frac{\binom{2k}{l-1}}{2^{2k+2}}+\frac{\binom{2k}{l-1}}{2^{2k+2}}=\binom{2k}{l-1}\left(\frac{3}{2^{2k+3}}\right).$$

Con ayuda de un computador, se puede comprobar que, para valores grandes de k, $\frac{3}{2^{2k+3}} \approx \frac{1}{2^{2k+1}}$; incluso, para $k=2$, la diferencia entre ambos valores es de $0,0078125 \approx 7,81 \cdot 10^{-3}$, y a medida que k se incrementa, el error disminuye. En conclusión, podemos decir que:

$$\frac{\binom{2k+1}{l-1}}{2^{2k+1}} + \frac{\binom{2k}{l-1}}{2^{2k}} \approx \frac{\binom{2k}{l-1}}{2^{2k+1}}. \tag{21}$$

Si se supone que las variables aleatorias $B(n)$ y $B(n^2)$ son independientes, la desigualdad en (20) se transforma en una igualdad. Esta suposición en general no es cierta, porque para valores de n pequeños, la cantidad $B(n)$ y $B(n^2)$ es pequeña, lo que indica que estas variables no son independientes, pero Melfi afirma que si $B(n) > \sqrt{log_2(n)}$, este fenómeno tiende a desaparecer.

Procedamos ahora a calcular α. Como $B(n)$ es una variable aleatoria binomial, si $n \in [2^k, 2^{k+1})$, tenemos que $\mathbb{P}(B(n) = l) = \frac{\binom{k}{l-1}}{2^k}$. Ahora, sustituyendo lo antes expresado y la ecuación (21) en (20), tenemos:

$$\begin{aligned} n^{\alpha-1} &\approx \sum_{l=1}^{k} \frac{\binom{2k}{l-1}}{2^{2k+1}} \frac{\binom{k}{l-1}}{2^k} \\ &= \frac{1}{2^{2k+1} \cdot 2^k} \sum_{l=1}^{k} \binom{2k}{l-1}\binom{k}{l-1}. \end{aligned}$$

Y ahora, aplicando la identidad de Vandermonde, tenemos que $n^{\alpha-1} \approx \frac{1}{2^{3k+1}}\binom{3k}{k}$. Luego, tomando logaritmos en la ecuación anterior, y tomando $n = 2^k$:

$$\left[ln(2^k)\right]^{\alpha-1} \approx -(3k+1)ln(2) + ln\left[\binom{3k}{k}\right].$$

Después, haciendo despejes, encontramos que:

$$(\alpha-1)ln(2) \approx -(3+\frac{1}{k})ln(2) + \frac{1}{k} ln\left[\binom{3k}{k}\right].$$

Ésto, a su vez, implica que:

$$\alpha \approx -2 - \frac{1}{k} + \frac{1}{kln(2)} ln\left[\binom{3k}{k}\right].$$

Por lo tanto, tomando el límite cuando $k \to \infty$, concluimos lo siguiente:

$$\alpha \approx -2 + \frac{1}{ln(2)} \lim_{k\to\infty} \frac{1}{k} ln\left[\binom{3k}{k}\right]. \tag{22}$$

Recordemos que, por la fórmula de Stirling:

$$\begin{aligned} ln\left[\binom{3k}{k}\right] &= ln\left[\frac{(3k)!}{k!(2k)!}\right] \\ &= 3kln(3) - 2kln(2). \end{aligned}$$

De donde:

$$\begin{aligned} &\lim_{k\to\infty} \frac{1}{k} ln\left[\binom{3k}{k}\right] \\ &= \lim_{k\to\infty} \frac{1}{k}[3kln(3) - 2kln(2)] \\ &= 3ln(3) - 2ln(2). \end{aligned}$$

Por lo que, sustituyendo en (22), obtenemos que:

$$\alpha \approx -2 + \frac{1}{ln(2)}[3ln(3) - 2ln(2)] = 0,75488.$$

7. Ecuaciones con números $(2,1,2)$

En esta sección se considera cuando la ecuación

$$B(n) = B(n^2) = k \tag{23}$$

tiene infinitas soluciones en n para un $k \in \mathbb{N}$ dado. Hare, Laishram y Stoll en [11] resolvieron todos los casos con la excepción de $k \in \{9,10,11,14,15\}$.

La principal motivación para considerar la ecuación (23) proviene del trabajo [14] de Madritsch y Stoll, quienes demostraron que $(B(n^2)/B(n))_{n\geq 1}$ es denso en $\mathbb{R}^+$. Esto se basa en un resultado de [19], incluido en la sección 4, que dice que $\liminf_{n\to\infty} B(n^2)/B(n) = 0$. Dado que el tamaño promedio de $B(n^2)$ es el doble que el de $B(n)$ (véase [2]), la ecuación (23) concierne a un conjunto peculiar de enteros. En particular, para ciertos valores de k la ecuación admite infinitas soluciones impares n y para otros valores de k solo hay un número finito. Uno de los resultados de Hare, Laishram y Stoll [11] establece que existen familias paramétricas infinitas de soluciones para $k = 12, 13$ y $k \geq 16$. En el otro caso, solo hay un número finito de soluciones para $k \leq 8$. Por ejemplo, para $s(n) = s(n^2) = 8$, solo hay

64 soluciones en enteros impares y la solución más grande es $n = 266335$ (véase [11], tabla 2.).

Estos resultados se basan en un algoritmo que maneja todas las ordenaciones posibles de los exponentes en n^2 cuando n se escribe como una suma de un pequeño número de potencias de 2. Como el algoritmo trata (de manera exhaustiva) todos los casos, el método de [11] permitió determinar explícitamente todas las soluciones para $k \leq 8$. El tiempo de ejecución del algoritmo, sin embargo, se dispara para valores más grandes de k y ellos conjeturan por argumentos heurísticos de que solo hay un número finito de soluciones para $k \in \{14, 15\}$.

En [1] se demuestran, utilizando un nuevo lema de factorización combinatoria, dos algoritmos y resultados recientes en [12], que las soluciones correspondientes a las ecuaciones $k \in \{9, 10, 11\}$ son finitas, esto se logra a través de un estudio de casos.

8. Conclusiones

- Se realizaron las demostraciones de las conocidas propiedades algebraicas de $B(n)$, subaditividad y submultiplicatividad. Estas propiedades tienen aplicaciones en análisis de complejidad.
- Se verificó que la base binaria minimiza asintóticamente $S(r,n)/n$, con implicaciones en diseños de estructuras de datos que permiten el manejo de grandes números, mejorar la velocidad de cifrado, descifrado, el almacenamiento y búsqueda de claves.
- Se sabe que los números representables por la terna $(2,1,2)$ tienen densidad positiva, ya que se cumple que $p(n) \gg n^{1/19}$. No obstante, persisten algunas incógnitas fundamentales: en primer lugar, si el exponente $1/19$ es óptimo, y en segundo, la demostración definitiva de la conjetura de Melfi.
- Queda abierto caracterizar el número de soluciones de $B(n) = B(n^2) = k$ para los casos $k \in \{14, 15\}$. En [1] se conjetura que este conjunto de soluciones es finito.

9. Agradecimientos

A Alejandra Cáceres por su colaboración en la demostración de algunos resultados referentes a números (2,1,2). A Stella Brassesco por ayudar a descifrar la heurística de la conjetura de Melfi (sección 6), a los árbitros anónimos y al editor invitado Franzyuri Hernández por sus sugerencias.

Referencias

[1] Alvoui, K., Jamet, D., Kaneko, H., Popoli, P. & Stoll, T. (2023). On the binary digits of n and n^2. *Theoret. Comput. Sci.* 939:119-139.

[2] Bassily, N. & Kátai, I. (1995). Distribution of the values of q-additive functions on polynomial sequences. *Acta Math. Hung.* 68(4):353-361.

[3] Bush, L. (1940). An asymptotic formula for the average sum of the digits of integers. *The American Mathematical Montly*. 47(3):154-156.

[4] Cilleruelo, J. (2014). *Conjuntos de Sidon*. XXVII Escuela Venezolana de Matemáticas. Ediciones IVIC. Altos de Pipe.

[5] Cooper, C., & Kennedy, R. (1999). A generalization of a result by Trollope on digital sums. *Journal of Institute of Mathematics & Computer Sciences. Mathematics Series*. 12(1):17-22.

[6] Delange, H. (1975). Sur la fonction sommatoire de la function some des chiffres. *L'Enseignement Mathématique*. 21:31-47.

[7] Drmota, M. & Gajdosik, J.(1998). The distribution of the sum of digits function. *Journal de théorie des nombres de Bordeaux*. 10(1):17-32.

[8] Drmota, M. & Rivat, J. (2005) The sum of digits function of squares. *J. London Math. Soc.* 72(2):273-292.

[9] Erdenebat, E. & Wong, K. (2024) The error term of the sum of digital sum functions, in arbitrary bases. *Notes on Number Theory and Discrete Mathematics*. 30(2):311-318.

[10] Hare, K., Laishram, S. & Stoll, T. (2011a) Stolarsky's conjecture and the sum of digits of polynomial values. *Proceedings of the American Mathematical Society*. 139(1):39-49.

[11] Hare K., Laishram, S. & Stoll, T. (2011b). The sum of digits of n and n^2. *International Journal of Number Theory.* 7(7):1737-1752.

[12] Kaneko, H. & Stoll, T. (2022). Products of integers with few binary digits. *Uniform Distribution Theory*. 1:11-28.

[13] Lindström, B. (1997) On the binary digits of a power. *J. Number Theory*. 65:321-324.

[14] Madritsch, M. & Stoll, T. (2014). On simultaneous digital expansions of polynomial values. *Acta Math. Hung.* 143(1):192-200.

[15] Melfi, G. (2005). On simultaneous binary expansions of n and n^2.*Journal of Number Theory*. 111:248-256.

[16] MacWilliams, F. & Sloane, N. (1978). *The Theory of Error Correcting Codes*. North-Holland Publishing Company.

[17] Mauduit, C. & Rivat, J. (2010). Sur un problème de Gelfond: la somme des chiffres des nombres premiers. *Annals of Mathematics*. 171(3):1591-1646.

[18] Rivest, R., Shamir, A. & Adleman, L. (1978). A method for obtaining digital signatures and public-key cryptosystems. *Communications of the ACM*. 21(2):120-126.[1]

[19] Stolarsky, K. (1978). The binary digits of a power. *Proceedings of the American Mathematical Society*. 71(1):1-5.

[20] Stolarsky, K. (1977). Power and exponential sums related to binomial coefficient parity. *SIAM J. Applied Math*. 32:717-730.

[21] Trollope, J. (1968). An explicit expression for binary digital sums. *Mathematics Magazine*. 41:21-25.

[1] Previamente publicado como un reporte técnico en el MIT en abril de 1977.