



Faraute

de Ciencias y Tecnología

Volumen Especial en Matemáticas.

$$X_{k+1} = X_k - [J_{X_k} F]^{-1} F(X_k).$$

$$f_0 = 1, f_1 = 1 \text{ y } f_j = f_{j-1} + f_{j-2}.$$

$$B(n^2) = B(n).$$

$$\begin{cases} q - u' = 0, & \text{en } \Omega; \\ q' + k^2 u = 0, & \text{en } \Gamma; \\ [u] = 0, & \text{en } \Gamma; \\ [q] = 0, & \text{en } \Gamma. \end{cases}$$

$$\frac{r(x)}{Q(x)} = \frac{N_1 + N_2 + \dots + N_k}{(ax + b)^m} \text{ ó } \frac{A_1 x + A_2}{(px^2 + qx + r)^n}$$

$$A_i \in \mathbb{R}, m, n \in \mathbb{Z}^+ \text{ y } q^2 - 4pr < 0.$$

MODELO AXIOMÁTICO DE UNA NUEVA TÉCNICA PARA LA DESCOMPOSICIÓN EN FRACCIONES SIMPLES.

ESTUDIO COMPARATIVO: MÉTODO GRÁFICO VS. NEWTON-RAPHSON EN REDES DE FLUJO.

CUATRO ECUACIONES RECURRENTE QUE DEBES CONOCER.

RESOLUCIÓN DE SISTEMAS LINEALES COMPLEJOS SIMÉTRICOS PROVENIENTES DE DISCRETIZAR LA ECUACIÓN DE HELMHOLTZ 1D.

ALGUNAS PROPIEDADES DE LA SUMA DE DÍGITOS BINARIOS.



PUBLICACIÓN SEMESTRAL

La revista FARAUTE de Ciencias y Tecnología es una publicación periódica y arbitrada de la Facultad Experimental de Ciencias y Tecnología de la Universidad de Carabobo, cuyo objetivo es divulgar los resultados de las investigaciones científicas y tecnológicas de la comunidad científica. Se publica un volumen anual en dos números.

Comité Editorial

Editor Jefe

Dr. José Gregorio Rodríguez-Quintal

Departamento de Biología, Facultad Experimental de Ciencias y Tecnología, Universidad de Carabobo, Venezuela.

Editor Invitado-Volumen Especial en Matemáticas

Dr. Franzyuri Fernando Hernández Fajardo

Departamento de Matemáticas, Facultad Experimental de Ciencias y Tecnología, Universidad de Carabobo, Venezuela.

Junta Editorial

Dr. José Gregorio Marcano
Decano-Facultad Experimental de Ciencias y Tecnología,
Universidad de Carabobo, Venezuela.

Dra. Mariela Contreras
Departamento de Biología, Facultad Experimental de
Ciencias y Tecnología, Universidad de Carabobo,
Venezuela.

Dr. Luis Rodríguez
Departamento de Matemáticas, Facultad Experimental de
Ciencias y Tecnología, Universidad de Carabobo,
Venezuela.

Dr. Pedro Linares
Departamento de Computación, Facultad Experimental de
Ciencias y Tecnología, Universidad de Carabobo,
Venezuela.

Dr. Henry Labrador
Departamento de Química, Facultad Experimental de
Ciencias y Tecnología, Universidad de Carabobo,
Venezuela.

Dr. Reimer Romero
Departamento de Física, Facultad Experimental de
Ciencias y Tecnología, Universidad de Carabobo,
Venezuela.

Editor Fundador

Dr. Oscar Valbuena

Departamento de Biología, Facultad Experimental de Ciencias y Tecnología, Universidad de Carabobo, Venezuela.

Comité Asesor

Dr. José Rodríguez

Dra. Silvia Pérez

Dra. Sonia Ardito

Facultad Experimental de Ciencias y Tecnología, Universidad de Carabobo, Venezuela.

ENVÍO DE ARTÍCULOS Y CORRESPONDENCIA: farautecienciauc@gmail.com

Acreditada en REVENCYT bajo el código RVF008 y en el Directorio Latindex con el número de folio 17789

La revista no se hace responsable ni solidaria de los juicios emitidos por los autores de los artículos publicados en la misma.



UNIVERSIDAD DE CARABOBO

FACULTAD EXPERIMENTAL DE CIENCIAS Y TECNOLOGÍA

Vol. 15, Nro. (1-2), 2020.

CONTENIDO

Editorial
Franzyuri Fernando Hernández Fajardo
.....03

Modelo axiomático de una nueva técnica para la descomposición en fracciones simples.
Axiomatic model of a new technique for decomposition into simple fractions.
Franzyuri F. Hernández F., Esteban M. Flores R.
.....06

Estudio comparativo: método gráfico vs. Newton-Raphson en redes de flujo.
Comparative study: graphical method vs. Newton-Raphson in flow networks.
Enrique V. Flores C., Antoinette C. Freitas G., Arquímedes González R.
.....19

Cuatro ecuaciones recurrentes que debes conocer.
Four difference equations you should know.
Luis A. Rodríguez
.....29

Resolución de sistemas lineales complejos simétricos provenientes de discretizar la ecuación de Helmholtz 1D.
Solution of symmetric complex linear systems from discretizing the equation of Helmholtz 1D.
Carlos E. Cadenas R., Ángel Padilla
.....36

Algunas propiedades de la suma de dígitos binarios.
Some properties of the sum of the digits of binary numbers.
Armando Hernández, Aldo Reyes C., Luis A. Rodríguez
.....47

Editorial

Cinco Sabores Matemáticos: Una Degustación Teórica y Aplicada.

Se presenta un volumen especial de la revista **FARAUTE** de la Facultad Experimental de Ciencias y Tecnología de la Universidad de Carabobo, destinado a la divulgación de contribuciones recientes en disciplinas matemáticas. Este número reúne cinco artículos de investigación que abarcan las áreas de álgebra, análisis y métodos numéricos, los cuales reflejan la diversidad de la producción investigativa de la institución. Los trabajos incluidos son resultado de colaboraciones entre grupos de investigación y tienen como objetivo apoyar la difusión de conocimiento científico de alta calidad.

Todos los manuscritos que componen este volumen fueron sometidos a un riguroso proceso de evaluación bajo la modalidad de doble ciego, con al menos dos revisores especialistas por artículo. Este procedimiento garantiza la originalidad, solidez y claridad de las contribuciones, asegurando así el estándar de excelencia que caracteriza a la revista **FARAUTE**.

A continuación, se presenta un resumen conciso del contenido de este volumen especial:

El artículo *“Modelo axiomático de una nueva técnica para la descomposición en fracciones simples”*, por Franzyuri Hernández y Esteban Flores, aborda una de las operaciones más fundamentales del álgebra y el análisis matemático. Si bien la descomposición en fracciones simples es una herramienta indispensable en campos como el cálculo integral, las transformadas de Laplace y la teoría de control, los métodos convencionales —basados en la igualación de coeficientes que deriva en sistemas de ecuaciones lineales— adolecen de una creciente ineficiencia computacional al enfrentarse a denominadores de alto grado, raíces múltiples o factores cuadráticos irreducibles.

Frente a esta limitación, los autores presentan una contribución paradigmática: un modelo axiomático innovador que redefine el enfoque tradicional. La técnica propuesta se sustenta en tres pilares fundamentales:

1. Un principio algebraico basado en sustituciones estratégicas que, en lugar de requerir la solución de un sistema de ecuaciones, permite la determinación directa y expedita de los coeficientes mediante un proceso de inspección sistemática.
2. La construcción de un marco teórico riguroso que, a partir de axiomas y teoremas sobre polinomios y divisibilidad, no solo valida el método sino que también garantiza su generalidad y corrección para cualquier caso válido.
3. El diseño de un algoritmo optimizado explícitamente para manejar de manera eficiente los escenarios más complejos, como raíces repetidas o polinomios de alto orden, reduciendo significativamente la carga operacional y el potencial de error.

Este trabajo trasciende la mera presentación de un “truco” algebraico; establece los cimientos formales de una metodología superior, ofreciendo a estudiantes y profesionales que se desarrollen en el campo de las matemáticas una herramienta más poderosa, elegante y computacionalmente eficiente para una operación matemática ubicua.

En *“Estudio comparativo: método gráfico vs. Newton-Raphson en redes de flujo”*, Enrique Flores, Antoinette Freitas y Arquímedes González abordan un problema central de la ingeniería mecánica. Este artículo presenta un análisis comparativo riguroso entre el método gráfico y el método de Newton-Raphson para la resolución de redes de flujo de fluidos, específicamente para el cálculo de caudales en tuberías. El estudio se basa en tres casos de estudio de complejidad creciente, tomados de la literatura técnica, que difieren en el número de tuberías y nodos que componen la red.

Para cada caso, se calcularon los caudales mediante ambos métodos y se evaluó su precisión en comparación con los valores de referencia reportados. La métrica de evaluación consistió en el cálculo de los errores relativos individuales de cada caudal y, de manera global, en la suma de los cuadrados de los errores relativos para cada red.

Los resultados demuestran que, si bien ambos métodos proporcionan aproximaciones satisfactorias, existen diferencias significativas en su desempeño. Se observó que la magnitud del error relativo varía considerablemente dependiendo del método empleado y de la tubería específica analizada. Contrario a lo que podría esperarse de un método numérico de segundo orden como Newton-Raphson, el método gráfico mostró un desempeño general superior en los casos estudiados. Este método consiguió errores relativos inferiores al 1% en la mayoría de los caudales calculados y registró el menor valor de la suma de errores cuadráticos en dos de los tres casos, lo que sugiere una robustez notable para este tipo de problemas de ingeniería.

Luis Rodríguez, en su trabajo *“Cuatro ecuaciones recurrentes que debes conocer”*, trasciende el mero listado sugerido por el título para presentar una revisión metodológica unificada y elegante. El artículo propone y aplica un marco de resolución basado en el análisis del núcleo (kernel) del operador lineal de retardo para abordar ecuaciones en diferencias lineales de segundo orden. La potencia y generalidad de este método abstracto son demostradas de manera pedagógica a través de la resolución de cuatro problemas clásicos y aparentemente disímiles: el problema de la ruina del jugador, la sucesión de Fibonacci, una aproximación griega a $\sqrt{2}$ y el conocido problema de las torres de Hanói. El autor demuestra de manera convincente cómo la formulación matemática de cada uno de estos problemas conduce al estudio de una estructura común subyacente, la cual es elucidada eficientemente mediante este enfoque operacional. Este trabajo no solo ofrece soluciones, sino que proporciona a estudiantes e investigadores una herramienta teórica poderosa y unificadora para el campo de las ecuaciones en diferencias.

La contribución de Carlos Cadenas y Ángel Padilla, *“Resolución de sistemas lineales complejos simétricos provenientes de discretizar la ecuación de Helmholtz 1D”*, se sitúa en el corazón del análisis numérico aplicado a problemas de propagación de ondas. Los autores abordan el desafío computacional de resolver eficientemente los sistemas lineales complejos simétricos no-hermitianos que surgen de la discretización de la ecuación de Helmholtz 1D mediante el método de elementos finitos discontinuo local Galerkin (LDG).

Tras presentar de manera concisa el problema modelo y la formulación LDG clásica que deriva en un sistema acoplado de ecuaciones en diferencias, el trabajo se centra en la etapa crítica de la solución algebraica. La investigación propone y realiza un análisis comparativo de dos métodos de subespacios de Krylov específicamente diseñados para explotar la estructura compleja simétrica del sistema. Este estudio comparativo evalúa el desempeño de estos solucionadores iterativos en términos de convergencia y eficiencia computacional, con el objetivo de identificar la metodología óptima para este tipo de problemas. El artículo culmina presentando los resultados de exhaustivas pruebas numéricas que validan el enfoque propuesto y demuestran la superioridad de una de las estrategias iterativas para alcanzar una solución precisa de manera rápida y efectiva.

Finalmente, Armando Hernández, Aldo Reyes y Luis Rodríguez cierran el volumen con *“Algunas propiedades de la suma de dígitos binarios”*. Este estudio se enmarca en la intersección entre la teoría de números, la combinatoria y la informática teórica. Los autores profundizan en el análisis de la función suma de dígitos, explorando y demostrando nuevas propiedades, identidades o cotas relacionadas con este objeto matemático, cuya relevancia trasciende lo teórico al tener implicaciones en criptografía y teoría de la computación.

Agradecimientos

Como Editor Invitado, agradezco a los autores por sus contribuciones y por haber seleccionado esta publicación para difundir sus resultados. Se reconoce la labor de los revisores anónimos, cuyas evaluaciones y observaciones fueron determinantes para elevar la calidad de los manuscritos y asegurar el rigor académico del volumen. Asimismo, se extiende el agradecimiento al Dr. José Gregorio Marcano Chívico, Decano de la Facultad Experimental de Ciencias y Tecnología, al Editor Jefe de FARAUTE y al equipo editorial por el apoyo logístico y el profesionalismo demostrado durante el proceso de edición y publicación.

Se espera que este volumen especial sirva como material de referencia para la comunidad académica y como incentivo para colaboraciones investigativas futuras en el ámbito matemático.

“Larga vida y prosperidad”.

Atentamente,

Dr. Franzyuri Fernando Hernández Fajardo
Editor Invitado
Profesor Titular – Departamento de Matemáticas
Facultad Experimental de Ciencias y Tecnología
Universidad de Carabobo, Venezuela.



Modelo axiomático de una nueva técnica para la descomposición en fracciones simples

Franzyuri F. Hernández F.^{1a}, Esteban M. Flores R.^{1b}

¹Departamento de Matemáticas, Facultad Experimental de Ciencias y Tecnología, Universidad de Carabobo, Venezuela.

^aCentro Multidisciplinario de Visualización y Cómputo Científico (CEMVICC), Universidad de Carabobo, Venezuela.

ORCID iD: 0000-0002-2748-8005^a 0000-0002-1807-9496^b

Correo electrónico del autor para correspondencia: fhernan@uc.edu.ve^a

Correo electrónico del coautor: eflores@uc.edu.ve^b

Recibido: **01/07/2025**, Revisado: **10/08/2025**, Aceptado: **10/09/2025**.

Resumen

La *descomposición en fracciones simples* constituye una herramienta fundamental en el análisis matemático, con aplicaciones críticas en cálculo integral, transformadas de Laplace y ecuaciones diferenciales. Su relevancia se extiende a disciplinas como la Teoría de Control, las Matemáticas Discretas y el análisis de Series Telescópicas. No obstante, los métodos tradicionales —que dependen de la resolución de sistemas de ecuaciones lineales mediante igualación de coeficientes— enfrentan limitaciones significativas en eficiencia computacional, especialmente al manejar denominadores de alto grado, raíces múltiples o factores irreducibles. Este artículo introduce un modelo axiomático innovador para la descomposición en fracciones simples, el cual elimina la necesidad de resolver sistemas de ecuaciones. La técnica propuesta se fundamenta en: a) un principio algebraico basado en sustituciones estratégicas, que permite obtener los coeficientes de la descomposición mediante inspección directa, b) un marco teórico riguroso, respaldado por propiedades de polinomios y divisibilidad, que garantiza la generalidad del método y c) un algoritmo optimizado para casos complejos (ej. raíces repetidas o denominadores de orden superior), reduciendo la carga computacional.

Palabras Clave: Descomposición en fracciones simples, modelo axiomático, técnica alternativa.

Axiomatic model of a new technique for decomposition into simple fractions

Abstract

Simple fraction decomposition is a fundamental tool in mathematical analysis, with critical applications in integral calculus, Laplace transforms, and differential equations. Its relevance extends to disciplines such as Control Theory, Discrete Mathematics, and Telescoping Series analysis. However, traditional methods—which rely on solving systems of linear equations by equating coefficients—face significant limitations in computational efficiency, especially when dealing with high-degree denominators, multiple roots, or irreducible factors. This paper introduces an innovative axiomatic model for simple fraction decomposition, which eliminates the need to solve systems of equations. The proposed technique is based on: a) an algebraic principle based on strategic substitutions, which allows obtaining the coefficients of the decomposition by direct inspection; b) a rigorous theoretical framework, supported by polynomial and divisibility properties, which guarantees the generality of the method; and c) an algorithm optimized for complex cases (e.g., repeated roots or higher-order denominators), reducing the computational burden.

Keywords: Alternative technique, axiomatic model, decomposition into simple fractions.

1. Introducción

La *descomposición en fracciones simples* (en adelante, DFS) es una herramienta fundamental en el análisis matemático, esencial para simplificar integrales, resolver ecuaciones diferenciales y estudiar funciones racionales en ingeniería y ciencias aplicadas. Sin embargo, los métodos tradicionales utilizados para realizar dicha descomposición como, por ejemplo, el método de coeficientes indeterminados (en adelante, MCI), basados en sistemas de ecuaciones lineales, pueden volverse una tarea muy engorrosa [8], ser tediosos y propensos a errores en casos con denominadores de alto grado o raíces múltiples [6] y [12]. En este contexto, surge la necesidad de explorar técnicas alternativas que optimicen el proceso, eliminando la dependencia de sistemas de ecuaciones y agilizando los cálculos sin sacrificar precisión [3]. Este artículo propone un enfoque innovador para el desarrollo del proceso de DFS y a través de un modelo axiomático, se demuestra cómo esta metodología no solo simplifica procedimientos algebraicos, sino que también mejora las posibilidades de resolución en áreas como: el cálculo integral, el control de sistemas y el procesamiento de señales; ofreciendo una perspectiva más eficiente y una propuesta creativamente seductora para estudiantes, investigadores y profesionales (ver [3] y [4]).

2. Bases Teóricas para la DFS

Esta sección presenta el marco teórico fundamental que sustenta la investigación, estructurado a partir de contribuciones clave en el análisis matemático de fracciones simples. El desarrollo conceptual se basa principalmente en los trabajos de: [2] para el tratamiento axiomático de descomposiciones racionales, [7] en lo concerniente a optimización de procesos algebraicos, y [6, 12] respecto a métodos computacionales alternativos. Complementariamente, se incorporan los fundamentos analíticos de [11] sobre aplicaciones en ecuaciones diferenciales, el enfoque clásico de [9] para casos especiales con polinomios de alto grado, y los recientes avances metodológicos documentados por [3, 4]. Esta selección bibliográfica responde a su concisión conceptual y relevancia directa con los objetivos del presente estudio.

Descomposición en Fracciones Simples

Definición 1 (Función Polinómica) Son funciones de la forma $P(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2 + \dots + c_nx^n$ donde c_0, c_1, \dots, c_n son números reales llamados coeficientes del polinomio; $n \in \mathbb{N}$ es un número natural que, si $c_n \neq 0$, se llama grado del polinomio. Las funciones polinómicas tienen como dominio natural de definición la totalidad de \mathbb{R} . Mientras la suma, el producto y la composición de funciones polinómicas es también una función polinómica, el cociente de funciones polinómicas da lugar a las llamadas funciones racionales, ver [11].

Definición 2 (Función Racional) Es una función de la forma:

$$R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} \quad (1)$$

donde P (el numerador) y Q (el denominador) son polinomios y Q no es el polinomio constante igual a 0. La función R tiene como dominio natural de definición el conjunto $\{x \in \mathbb{R} : Q(x) \neq 0\}$. Obsérvese que las funciones polinómicas son también funciones racionales (con denominador constante igual a 1). Sumas, productos y cocientes de funciones racionales son también funciones racionales; y la composición de dos funciones racionales es también una función racional [11].

Definición 3 (Fracción Propia) Se dice que una función racional $R(x) = P(x)/Q(x)$ es una fracción (o función) propia, si el grado del polinomio $P(x)$ es menor que el grado del polinomio $Q(x)$. En caso contrario, la fracción (o función) se llama impropia, ver [2].

Definición 4 (DFS) Si $R(x)$ es una función impropia, entonces usando el algoritmo de la división, $R(x)$ puede expresarse en la forma:

$$R(x) = c(x) + \frac{r(x)}{Q(x)} \quad (2)$$

donde $c(x)$, $r(x)$ y $Q(x)$ son polinomios en x , y además el grado del numerador $r(x)$, es menor que el grado del denominador $Q(x)$. Esto significa que (al menos teóricamente), toda fracción impropia puede expresarse de un modo único en forma de una suma de un polinomio y de una fracción propia. Por esta razón, en lo siguiente solo se

considerarán las fracciones propias. Teóricamente, es posible escribir cualquier fracción racional propia $r(x)/Q(x)$ como una suma de expresiones racionales cuyos denominadores son potencias de polinomios de grado no mayor que dos. Concretamente, si $r(x)/Q(x)$ es una fracción propia, entonces del Álgebra se tiene que:

$$\frac{r(x)}{Q(x)} = \underbrace{N_1 + N_2 + \dots + N_k}_{\text{DFS}} \quad (3)$$

donde, cada N_i ($i = 1, \dots, k$) tiene una de las dos formas siguientes:

$$\frac{A_1}{(ax+b)^m} \text{ ó } \frac{A_2x+A_3}{(px^2+qx+r)^n} \quad (4)$$

donde los $A_i \in \mathbb{R}$ ($i = 1, 2, 3$) son coeficientes a determinar.

La suma del lado derecho de (3) se conoce como DFS de $r(x)/Q(x)$ y cada N_i ($i = 1, \dots, k$) es una fracción simple (o más sencilla) en relación a $r(x)/Q(x)$ (ver [2], [3], [4]).

Para obtener la descomposición (3) primero se debe expresar el denominador, $Q(x)$, como un producto de factores de la forma $(ax+b)$ o expresiones cuadráticas irreducibles de la forma (px^2+qx+r) . Después se agrupan los factores repetidos de manera que $Q(x)$ quede expresado como un producto de factores distintos de la forma $(ax+b)^m$ ó $(px^2+qx+r)^n$; donde $m, n \in \mathbb{Z}^+$ y $q^2 - 4pr < 0$ (es irreducible).

Después se aplican las siguientes reglas:

1. Por cada uno de los factores $(ax+b)^m$ ($m \geq 1$) la descomposición (3) contiene una suma de m fracciones parciales de la forma:

$$\frac{A_1}{ax+b} + \frac{A_2}{(ax+b)^2} + \dots + \frac{A_m}{(ax+b)^m}$$

donde cada A_i ($i = \overline{1:m}$) es un número real a determinar.

2. Por cada uno de los factores de la forma $(px^2+qx+r)^n$ ($n \geq 1$ y $q^2 - 4pr < 0$) la descomposición (3) contiene una suma de fracciones parciales de la forma:

$$\frac{A_1x+B_1}{px^2+qx+r} + \dots + \frac{A_nx+B_n}{(px^2+qx+r)^n}$$

donde cada A_i y B_i ($i = \overline{1:n}$) son números reales a determinar.

Tomando en cuenta la factorización de $Q(x)$ y las reglas dadas en los incisos (1) y (2) se estudian los siguientes cuatro casos (ver [13], [9], [10]):

- Factores lineales no repetidos:

$$\frac{A_1}{a_1x+b_1} + \frac{A_2}{a_2x+b_2} + \dots + \frac{A_n}{a_nx+b_n}$$

- Factores lineales repetidos:

$$\frac{A_1}{ax+b} + \frac{A_2}{(ax+b)^2} + \dots + \frac{A_n}{(ax+b)^n}$$

- Factores cuadráticos no repetidos:

$$\frac{A_1x+B_1}{p_1x^2+q_1x+r_1} + \dots + \frac{A_nx+B_n}{p_nx^2+q_nx+r_n}$$

- Factores cuadráticos repetidos:

$$\frac{A_1x+B_1}{px^2+qx+r} + \dots + \frac{A_nx+B_n}{(px^2+qx+r)^n}$$

En ese sentido; en la literatura especializada existe una variedad de técnicas para calcular los coeficientes A_i y B_i ($i = \overline{1:n}$) como, por ejemplo, las técnicas tradicionales: MCI y MHO que según [6, 12] son métodos tediosos y fuentes de complicadas identidades algebraicas [1] las cuales confunden a los estudiantes (noveles) de un primer curso de cálculo integral, sobre todo a aquellos con limitaciones en el dominio de los procedimientos algebraicos básicos.

Siguiendo la idea de las técnicas para calcular los coeficientes A_i y B_i que aparecen en los distintos numeradores de las fracciones simples (o parciales), en esta investigación fue concebida una técnica alternativa con visión algebraica para calcular dichos valores donde su principal atractivo es no requerir de sistemas de ecuaciones durante el proceso de cálculo.

3. Dos Métodos Clásicos para la DFS

Los métodos para desarrollar una *descomposición en fracciones simples*, que se muestran a continuación, recurren al uso de sistemas de ecuaciones.

Método de Coeficientes Indeterminados

Definición 5 (DFI) Consiste en descomponer un polinomio, $Q(x)$, como producto de factores de grado uno y de factores de grado dos irreducibles:

$$Q(x) = (x - a_1)^{\alpha_1} \dots (x - a_n)^{\alpha_n} (x^2 + b_1x + c_1)^{\beta_1} \dots (x^2 + b_mx + c_m)^{\beta_m}. \quad (5)$$

En la descomposición (5) cada a_j es una raíz real de orden α_j del polinomio Q , y los factores cuadráticos del tipo $(x^2 + b_jx + c_j)^{\beta_j}$ corresponden a raíces complejas conjugadas de orden β_j . Tales factores cuadráticos son irreducibles, es decir, su discriminante es negativo o, lo que es igual, $x^2 + b_jx + c_j > 0$ para toda $x \in \mathbb{R}$ (ver [11]).

Definición 6 (MCI) Se Escribe el cociente $P(x)/Q(x)$ como suma de fracciones de la siguiente forma:

- Por cada raíz real a_j de orden α_j se escriben α_j fracciones cuyos numeradores son constantes A_{k_j} los cuales hay que determinar, y los denominadores son de la forma $(x - a_j)^{k_j}$ donde k_j toma valores de 1 hasta α_j .
- Por cada factor cuadrático irreducible $(x^2 + b_jx + c_j)^{\beta_j}$ se escriben β_j fracciones cuyos numeradores son de la forma $B_{k_j}x + C_{k_j}$ siendo B_{k_j} y C_{k_j} constantes los cuales se deben determinar, y los denominadores son de la forma $(x^2 + b_jx + c_j)^{k_j}$ donde k_j toma valores de 1 hasta β_j .
- La descomposición queda de la forma:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \sum_{j=1}^n \left[\sum_{k_j=1}^{\alpha_j} \frac{A_{k_j}}{(x - a_j)^{k_j}} \right] + \sum_{j=1}^m \left[\sum_{k_j=1}^{\beta_j} \frac{B_{k_j}x + C_{k_j}}{(x^2 + b_jx + c_j)^{k_j}} \right], \quad (6)$$

donde habrá que calcular tantos coeficientes como el grado del polinomio Q .

- Finalmente, se reducen todas las fracciones a común denominador [será $Q(x)$], y se iguala a $P(x)$ el numerador resultante. Esto producirá un sistema de ecuaciones lineales

cuyas incógnitas son los coeficientes A_j, B_j y C_j , cuya resolución dará el valor de todos ellos [11].

Método de Hermite-Ostrogradsky

Definición 7 (MHO) Se Escribe el cociente $P(x)/Q(x)$ de la siguiente forma:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{x - a_1} + \dots + \frac{A_n}{x - a_n} + \frac{B_1x + C_1}{x^2 + b_1x + c_1} + \dots + \frac{B_mx + C_m}{x^2 + b_mx + c_m} + \frac{d}{dx} \left[\frac{F(x)}{\varphi(x)} \right]. \quad (7)$$

Con

$$\varphi(x) = (x - a_1)^{\alpha_1 - 1} \dots (x - a_n)^{\alpha_n - 1} (x^2 + b_1x + c_1)^{\beta_1 - 1} \dots (x^2 + b_mx + c_m)^{\beta_m - 1}.$$

Los $A_1, \dots, A_n, B_1, \dots, B_m, C_1, \dots, C_m$ son coeficientes a determinar y, en la fracción que aparece con una derivada, $F(x)$ es un polinomio genérico de grado uno menos que el denominador. En resumen, se trata de escribir $P(x)/Q(x)$ como suma de fracciones simples, una por cada factor de $Q(x)$, más la derivada de un cociente, el cual tiene por denominador $Q(x)$ con sus factores disminuidos en una unidad y de numerador un polinomio genérico, $F(x)$, con coeficientes indeterminados de grado uno menos que el denominador. Es importante notar la necesidad de calcular tantos coeficientes como el grado del polinomio Q .

Se reducen todas las fracciones a común denominador [será $Q(x)$], y se iguala a $P(x)$ el numerador resultante. Esto producirá un sistema de ecuaciones lineales cuyas incógnitas son los coeficientes A_j, B_j y C_j más los coeficientes de $F(x)$, naturalmente, primero se requiere efectuar la derivada antes de reducir a común denominador. Finalmente, la solución del sistema dará el valor de todos los coeficientes [11].

4. Axiomatización de la Nueva Técnica

Proposición 1 Al realizar la DFS de la expresión:

$$\frac{1}{(x + b_2)(x + b_1)^k} \tag{8}$$

donde $b_1, b_2 \in \mathbb{R}$ y $k \in \mathbb{N}$ ($k \geq 1$). El resultado es de la forma:

$$\sum_{i=1}^k \frac{\alpha_i}{(x + b_1)^{k-i+1}} + \frac{\alpha_0}{x + b_2}$$

y los α_i ($\forall i = \overline{0:k}$) no son obtenidos a partir de sistemas de ecuaciones.

Demostración: Se comenzará la DFS con $k = 1$.

$$\frac{1}{(x + b_2)(x + b_1)}.$$

En este caso, se hace:

$$\frac{1}{x + b_1} - \frac{1}{x + b_2} = \frac{b_2 - b_1}{(x + b_1)(x + b_2)}.$$

De lo anterior, al multiplicar ambos miembros por la expresión $1/(b_2 - b_1)$, se tiene:

$$\frac{1}{(x + b_2)(x + b_1)} = \frac{1}{b_2 - b_1} \left(\frac{1}{x + b_1} - \frac{1}{x + b_2} \right).$$

Luego; la descomposición para $k = 1$ es:

$$\frac{1}{(x + b_2)(x + b_1)} = \frac{1}{b_2 - b_1} \left(\frac{1}{x + b_1} \right) - \frac{1}{b_2 - b_1} \left(\frac{1}{x + b_2} \right). \tag{9}$$

En este primer caso, se tiene:

$$\alpha_0 = \frac{1}{b_2 - b_1} \quad \text{y} \quad \alpha_1 = \frac{-1}{b_2 - b_1}.$$

Se observa que los coeficientes α_0 y α_1 son obtenidos sin usar sistemas de ecuaciones.

Ahora, se construirá la descomposición para $k = 2$.

$$\frac{1}{(x + b_2)(x + b_1)^2}.$$

Sacando como factor $1/(x + b_1)$, se obtiene:

$$\frac{1}{(x + b_2)(x + b_1)^2} = \frac{1}{x + b_1} \frac{1}{(x + b_2)(x + b_1)}.$$

Al usar la descomposición (9), en la expresión anterior, se tiene:

$$\frac{1}{(x + b_2)(x + b_1)^2} = \frac{1}{b_2 - b_1} \frac{1}{(x + b_1)^2} -$$

$$\frac{1}{b_2 - b_1} \frac{1}{(x + b_1)(x + b_2)}.$$

Usando nuevamente la descomposición (9) se tiene:

$$\frac{1}{(x + b_2)(x + b_1)^2} = \frac{1}{b_2 - b_1} \frac{1}{(x + b_1)^2} - \frac{1}{b_2 - b_1} \left[\frac{1}{b_2 - b_1} \left(\frac{1}{x + b_1} \right) - \frac{1}{b_2 - b_1} \left(\frac{1}{x + b_2} \right) \right].$$

Finalmente, la descomposición para $k = 2$ es:

$$\frac{1}{(x + b_2)(x + b_1)^2} = \frac{1}{b_2 - b_1} \frac{1}{(x + b_1)^2} -$$

$$\frac{1}{(b_2 - b_1)^2} \frac{1}{x + b_1} + \frac{1}{(b_2 - b_1)^2} \frac{1}{x + b_2}. \tag{10}$$

Veamos la descomposición para $k = 3$.

$$\frac{1}{(x + b_2)(x + b_1)^3}.$$

Lo anterior puede escribirse como:

$$\frac{1}{(x + b_2)(x + b_1)^3} = \frac{1}{x + b_1} \frac{1}{(x + b_2)(x + b_1)^2}.$$

Al usar la descomposición (10) y aplicar la propiedad distributiva se tiene:

$$\frac{1}{(x + b_2)(x + b_1)^3} = \frac{1}{b_2 - b_1} \frac{1}{(x + b_1)^3} - \frac{1}{(b_2 - b_1)^2} \frac{1}{(x + b_1)^2} + \frac{1}{(b_2 - b_1)^2} \frac{1}{(x + b_1)(x + b_2)}.$$

Usando la descomposición (9), se tiene:

$$\frac{1}{(x + b_2)(x + b_1)^3} = \frac{1}{b_2 - b_1} \frac{1}{(x + b_1)^3} -$$

$$\frac{1}{(b_2 - b_1)^2} \frac{1}{(x + b_1)^2} +$$

$$\frac{1}{(b_2 - b_1)^2} \left[\frac{1}{b_2 - b_1} \left(\frac{1}{x + b_1} \right) - \frac{1}{b_2 - b_1} \left(\frac{1}{x + b_2} \right) \right].$$

Luego, la descomposición para $k = 3$ viene dada por:

$$\begin{aligned} \frac{1}{(x + b_2)(x + b_1)^3} &= \frac{1}{b_2 - b_1} \frac{1}{(x + b_1)^3} - \\ &\frac{1}{(b_2 - b_1)^2} \frac{1}{(x + b_1)^2} + \frac{1}{(b_2 - b_1)^3} \frac{1}{x + b_1} - \\ &\frac{1}{(b_2 - b_1)^3} \frac{1}{x + b_2}. \end{aligned} \tag{11}$$

Si se repite el mismo procedimiento es posible arribar a la expresión para la descomposición del caso general:

$$\begin{aligned} \frac{1}{(x + b_2)(x + b_1)^k} &= \sum_{i=1}^k \frac{(-1)^{i+1}}{(b_2 - b_1)^i} \frac{1}{(x + b_1)^{k-i+1}} + \\ &\frac{(-1)^k}{(b_2 - b_1)^k} \frac{1}{x + b_2}. \quad \blacksquare \end{aligned} \tag{12}$$

Este proceso con enfoque inductivo es suficiente para probar la proposición 1, donde los coeficientes vienen dados por:

$$\alpha_i = \frac{(-1)^{i+1}}{(b_2 - b_1)^i} \quad (i = \overline{1 : k})$$

y

$$\alpha_0 = \frac{(-1)^k}{(b_2 - b_1)^k}.$$

En la construcción de la prueba, se observa claramente que ninguno de los coeficientes de la DFS fue obtenido a partir de sistemas de ecuaciones. Para más detalles en el desarrollo de los cálculos ver [3].

Proposición 2 Al realizar la DFS de la expresión:

$$\frac{1}{(x + b_2)(x^2 + d_1x + e_1)^k} \tag{13}$$

donde $b_2, d_1, e_1 \in \mathbb{R}$ y $k \in \mathbb{N}$ ($k \geq 1$). El resultado es de la forma:

$$\frac{\alpha_0}{x + b_2} + \sum_{i=1}^k \frac{\beta_i x + \gamma_i}{(x + b_1)^{k-i+1}}$$

y los β_i, γ_i ($\forall i = 1, \dots, k$) y α_0 no son obtenidos a partir de sistemas de ecuaciones.

Demostración: Se iniciará la DFS con $k = 1$:

$$\frac{1}{(x + b_2)(x^2 + d_1x + e_1)}.$$

Haciendo la siguiente diferencia, se tiene:

$$\frac{1}{x + b_2} - \frac{x + d_1 - b_2}{x^2 + d_1x + e_1} = \frac{b_2^2 - d_1b_2 + e_1}{(x + b_2)(x^2 + d_1x + e_1)}.$$

De lo anterior, se tiene que:

$$\frac{1}{(x + b_2)(x^2 + d_1x + e_1)} = \frac{1}{b_2^2 - d_1b_2 + e_1}$$

$$\left(\frac{1}{x + b_2} - \frac{x + d_1 - b_2}{x^2 + d_1x + e_1} \right).$$

Luego, la DFS para $k = 1$ es:

$$\begin{aligned} \frac{1}{(x + b_2)(x^2 + d_1x + e_1)} &= \\ &\frac{1}{b_2^2 - d_1b_2 + e_1} \left(\frac{1}{x + b_2} \right) - \end{aligned}$$

$$\frac{1}{b_2^2 - d_1b_2 + e_1} \left(\frac{x + d_1 - b_2}{x^2 + d_1x + e_1} \right). \tag{14}$$

En este primer caso, se obtienen los coeficientes:

$$\begin{aligned} \alpha_0 &= \frac{1}{b_2^2 - d_1b_2 + e_1}, \quad \beta_1 = -\frac{1}{b_2^2 - d_1b_2 + e_1} \quad y \\ \gamma_1 &= -\frac{d_1 - b_2}{b_2^2 - d_1b_2 + e_1}. \end{aligned}$$

Como se pudo observar, los coeficientes α_0, β_1 y γ_1 fueron obtenidos sin usar sistemas de ecuaciones. Si se repite este procedimiento y se usa la fórmula (14) se obtiene la construcción de la DFS para el caso general:

$$\begin{aligned} \frac{1}{(x + b_2)(x^2 + d_1x + e_1)^k} &= \frac{1}{(b_2^2 - d_1b_2 + e_1)^k} \frac{1}{x + b_2} - \\ &\sum_{i=1}^k \frac{1}{(b_2^2 - d_1b_2 + e_1)^{k-i+1}} \frac{x + d_1 - b_2}{(x^2 + d_1x + e_1)^i}. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Donde los coeficientes que vienen dados por las siguientes expresiones:

$$\alpha_0 = \frac{1}{(b_2^2 - d_1b_2 + e_1)^k};$$

$$\beta_i = -\frac{1}{(b_2^2 - d_1 b_2 + e_1)^{k-i+1}} \text{ y}$$

$$\gamma_i = -\frac{d_1 - b_2}{(b_2^2 - d_1 b_2 + e_1)^{k-i+1}}$$

no fueron obtenidos a partir de sistemas de ecuaciones, para más detalles ver [3]. De esta manera se demuestra la proposición 2.

Lema 1 *Demostrar la siguiente igualdad:*

$$\frac{1}{(x^2 + d_2 x + e_2)(x^2 + d_1 x + e_1)} = \delta \frac{x + d_2 - b}{x^2 + d_2 x + e_2} - \delta \frac{x + d_1 - b}{x^2 + d_1 x + e_1} \quad (15)$$

donde: $b, d_1, d_2, e_1, e_2 \in \mathbb{R}, d_1 \neq d_2$ y

$$\delta = \frac{1}{(d_2 - d_1)(b^2 - d_1 b + e_1)}.$$

Demostración:

$$\frac{1}{(x^2 + d_2 x + e_2)(x^2 + d_1 x + e_1)} = \frac{1}{(d_2 - d_1)x - (e_2 - e_1)} \left(\frac{1}{x^2 + d_1 x + e_1} - \frac{1}{x^2 + d_2 x + e_2} \right).$$

Pero;

$$\frac{1}{[(d_2 - d_1)x - (e_2 - e_1)](x^2 + d_1 x + e_1)} = \frac{1}{d_2 - d_1} \left[\frac{1}{(x + b)(x^2 + d_1 x + e_1)} \right]$$

$$\frac{1}{[(d_2 - d_1)x - (e_2 - e_1)](x^2 + d_1 x + e_1)} = \frac{1}{d_2 - d_1} \left(\frac{1}{x + b} - \frac{x + d_1 - b}{x^2 + d_1 x + e_1} \right) \frac{1}{b^2 - d_1 b + e_1}.$$

En forma análoga;

$$\frac{1}{[(d_2 - d_1)x - (e_2 - e_1)](x^2 + d_2 x + e_2)} = \frac{1}{d_2 - d_1} \left(\frac{1}{x + b} - \frac{x + d_2 - b}{x^2 + d_2 x + e_2} \right) \frac{1}{b^2 - d_2 b + e_2}$$

donde $b = \frac{e_2 - e_1}{d_2 - d_1}$. No es difícil probar que:

$$\frac{1}{b^2 - d_1 b + e_1} = \frac{1}{b^2 - d_2 b + e_2}.$$

De esto resulta que;

$$\frac{1}{(x^2 + d_2 x + e_2)(x^2 + d_1 x + e_1)} = \frac{1}{d_2 - d_1} \left(\frac{x + d_2 - b}{x^2 + d_2 x + e_2} - \frac{x + d_1 - b}{x^2 + d_1 x + e_1} \right) \frac{1}{b^2 - d_1 b + e_1} = \delta \frac{x + d_2 - b}{x^2 + d_2 x + e_2} - \delta \frac{x + d_1 - b}{x^2 + d_1 x + e_1} \quad \blacksquare \quad (16)$$

donde $\delta = \frac{1}{(d_2 - d_1)(b^2 - d_1 b + e_1)}$. Ver [3].

Proposición 3 *Al realizar la DFS de la expresión:*

$$\frac{1}{(x^2 + d_2 x + e_2)(x^2 + d_1 x + e_1)^k} \quad (17)$$

donde $d_1, d_2, e_1, e_2 \in \mathbb{R}$ y $k \in \mathbb{N} (k \geq 1)$. Es posible obtener:

$$\frac{1}{(x^2 + d_2 x + e_2)(x^2 + d_1 x + e_1)^k} = \frac{\mu_0 x + \rho_0}{x^2 + d_2 x + e_2} + \sum_{i=1}^k \frac{\mu_i x + \rho_i}{(x^2 + d_1 x + e_1)^i}$$

sin usar sistemas de ecuaciones.

Demostración: Se hará la DFS para $k = 2$:

$$\frac{1}{(x^2 + d_2 x + e_2)(x^2 + d_1 x + e_1)^2}.$$

En efecto;

$$\frac{1}{(x^2 + d_2 x + e_2)(x^2 + d_1 x + e_1)^2} = \frac{1}{x^2 + d_1 x + e_1} \frac{1}{(x^2 + d_2 x + e_2)(x^2 + d_1 x + e_1)} = \frac{1}{x^2 + d_1 x + e_1} \left(\delta \frac{x + d_2 - b}{x^2 + d_2 x + e_2} - \delta \frac{x + d_1 - b}{x^2 + d_1 x + e_1} \right) = \delta \frac{x + d_2 - b}{(x^2 + d_1 x + e_1)(x^2 + d_2 x + e_2)} - \delta \frac{x + d_1 - b}{(x^2 + d_1 x + e_1)^2} = \delta (x + d_2 - b)$$

$$\frac{1}{(x^2 + d_1x + e_1)(x^2 + d_2x + e_2)} - \delta \frac{x + d_1 - b}{(x^2 + d_1x + e_1)^2}.$$

Usando el lema 1, en la última expresión, se tiene:

$$\frac{1}{(x^2 + d_2x + e_2)(x^2 + d_1x + e_1)^2} = \delta(x + d_2 - b)$$

$$\begin{aligned} & \left(\delta \frac{x + d_2 - b}{x^2 + d_2x + e_2} - \delta \frac{x + d_1 - b}{x^2 + d_1x + e_1} \right) - \\ & \delta \frac{x + d_1 - b}{(x^2 + d_1x + e_1)^2} = \delta^2 \frac{(x + d_2 - b)^2}{x^2 + d_2x + e_2} - \\ & \frac{(x + d_2 - b)(x + d_1 - b)}{x^2 + d_1x + e_1} - \delta \frac{x + d_1 - b}{(x^2 + d_1x + e_1)^2} = \\ & \delta^2 + \delta^2 \frac{(d_2 - 2b)x + (d_2 - b)^2 - e_2}{x^2 + d_2x + e_2} - \\ & \left[\delta^2 + \delta^2 \frac{(d_2 - 2b)x + (d_1 - b)(d_2 - b) - e_1}{x^2 + d_1x + e_1} \right] - \\ & \delta \frac{x + d_1 - b}{(x^2 + d_1x + e_1)^2}. \end{aligned}$$

Finalmente, la DFS para $k = 2$ viene dada por:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{(x^2 + d_2x + e_2)(x^2 + d_1x + e_1)^2} = \\ & \delta^2 \frac{(d_2 - 2b)x + \varepsilon_1}{x^2 + d_2x + e_2} - \delta^2 \frac{(d_2 - 2b)x + \varepsilon_2}{x^2 + d_1x + e_1} - \\ & \delta \frac{x + d_1 - b}{(x^2 + d_1x + e_1)^2} \quad \blacksquare \quad (18) \end{aligned}$$

donde:

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= (d_2 - b)^2 - e_2; \quad \varepsilon_2 = (d_1 - b)(d_2 - b) - e_1 \\ \text{y } \delta &= \frac{1}{(d_2 - d_1)(b^2 - d_1b + e_1)}. \end{aligned}$$

Este procedimiento puede repetirse k veces y así obtener la expresión que se muestra a continuación, sin usar sistemas de ecuaciones (ver [3]).

$$\begin{aligned} & \frac{1}{(x^2 + d_2x + e_2)(x^2 + d_1x + e_1)^k} = \\ & \frac{\mu_0x + \rho_0}{x^2 + d_2x + e_2} + \sum_{i=1}^k \frac{\mu_i x + \rho_i}{(x^2 + d_1x + e_1)^i}. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Teorema 1 La expresión:

$$\frac{1}{(x + b_2)^n (x + b_1)^k} \quad (19)$$

donde; $b_1, b_2 \in \mathbb{R}$ y $n, k \in \mathbb{N}$ ($n, k \geq 1$), puede ser DFS sin emplear sistemas de ecuaciones.

Demostración:

Se debe probar que, se puede escribir como:

$$\frac{1}{(x + b_2)^n (x + b_1)^k} = \sum_{i=1}^n \frac{\alpha_i}{(x + b_2)^i} + \sum_{j=1}^k \frac{\beta_j}{(x + b_1)^j}$$

donde α_i ($i = \overline{1 : n}$) y β_j ($j = \overline{1 : k}$) se pueden obtener sin usar sistemas de ecuaciones.

En efecto, de acuerdo a la proposición 1, se tiene:

$$\frac{1}{(x + b_2)(x + b_1)^k} = \sum_{i=1}^k \frac{\alpha_i}{(x + b_1)^{k-i+1}} + \frac{\alpha_0}{x + b_2}$$

donde:

$$\alpha_i = \frac{(-1)^{i+1}}{(b_2 - b_1)^i} \quad (\text{con } i = \overline{1 : k}) \text{ y } \alpha_0 = \frac{(-1)^k}{(b_2 - b_1)^k}.$$

Por lo que:

$$\begin{aligned} \frac{1}{(x + b_2)^2 (x + b_1)^k} &= \frac{1}{x + b_2} \frac{1}{(x + b_2)(x + b_1)^k} = \\ & \frac{1}{x + b_2} \left[\sum_{i=1}^k \frac{\alpha_i}{(x + b_1)^{k-i+1}} + \frac{\alpha_0}{x + b_2} \right]. \end{aligned}$$

Es decir;

$$\begin{aligned} & \frac{1}{(x + b_2)^2 (x + b_1)^k} = \\ & \sum_{i=1}^k \underbrace{\alpha_i \frac{1}{(x + b_2)(x + b_1)^{k-i+1}}}_{(A)} + \frac{\alpha_0}{(x + b_2)^2}. \end{aligned}$$

A cada término de la forma (A) se le puede aplicar la proposición 1 y así se obtiene una descomposición para cada expresión de la forma:

$$\frac{1}{(x + b_2)(x + b_1)^{k-i+1}}.$$

Este procedimiento puede repetirse en forma recursiva hasta obtener una DFS (ver [3]), sin usar sistemas de ecuaciones, para la expresión:

$$\frac{1}{(x + b_2)^n (x + b_1)^k}. \quad \blacksquare$$

Teorema 2 La expresión:

$$\frac{1}{(x+b_2)^n(x^2+d_1x+e_1)^k} = \sum_{i=1}^n \frac{\alpha_i}{(x+b_2)^i} + \sum_{j=1}^k \frac{\mu_jx+\rho_j}{(x^2+d_1x+e_1)^j} \quad (20)$$

donde; $b_2, d_1, e_1 \in \mathbb{R}$, $n, k \in \mathbb{N}$ ($n, k \geq 1$), $\alpha_i, \mu_j, \rho_j \in \mathbb{R}$ ($i = \overline{1:n}$, $j = \overline{1:k}$). Puede ser DFS sin emplear sistemas de ecuaciones.

Demostración:

La prueba se logra siguiendo las líneas de la demostración del teorema 1, pero usando la proposición 1 y 2, ver [3]. ■

Teorema 3 La expresión:

$$\frac{1}{(x^2+d_2x+e_2)^n(x^2+d_1x+e_1)^k} = \sum_{i=1}^n \frac{\alpha_ix+\beta_i}{(x^2+d_2x+e_2)^i} + \sum_{j=1}^k \frac{\mu_jx+\rho_j}{(x^2+d_1x+e_1)^j} \quad (21)$$

con: $d_2, d_1, e_1, e_2 \in \mathbb{R}$, $n, k \in \mathbb{N}$ ($n, k \geq 1$), $\alpha_i, \beta_i, \mu_j, \rho_j \in \mathbb{R}$ ($i = \overline{1:n}$, $j = \overline{1:k}$). Puede ser DFS sin emplear sistemas de ecuaciones.

Demostración:

Esta prueba se obtiene; siguiendo la demostración del teorema 1 y usando el resultado de la proposición 3 (para más detalles ver [3]). ■

Observación 1 La maquinaria expuesta hasta ahora es aplicable solo al caso:

$$\frac{1}{Q(x)}. \quad (22)$$

Donde;

$$Q(x) = (x+b_1)^{n_1} \dots (x+b_p)^{n_p} (x^2+d_1x+e_1)^{m_1} \dots (x^2+d_sx+e_s)^{m_s},$$

con: $n_i \in \mathbb{N}$, $m_j \in \mathbb{N}$ y $x^2+d_jx+e_j$ irreducible en \mathbb{R} ; para $i = \overline{1:p}$ y $j = \overline{1:s}$.

Ahora, con el apartado siguiente los autores del presente trabajo cubren el caso más general. A saber;

si se quisiera descomponer en fracciones simples una expresión de la forma:

$$\frac{P(x)}{Q(x)}. \quad (23)$$

En ese sentido, para la expresión (23), se consideran los polinomios $P(x)$ y $Q(x)$ con coeficientes reales. Se llamará función racional propia a la fracción $P(x)/Q(x)$ donde el grado del polinomio $P(x)$ es menor que el grado de $Q(x)$. Cuando $P(x)/Q(x)$ no es propia (impropia), de acuerdo al algoritmo de la división de Euclides siempre se podrá escribir:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = C(x) + \frac{R(x)}{Q(x)} \quad (24)$$

donde: $C(x)$, $R(x)$ y $Q(x)$ son tales que ahora:

$$\frac{R(x)}{Q(x)}$$

es una función racional propia.

Lema 2 Sea $P(x)/Q(x)$ una función racional propia. Y sea α una raíz real de multiplicidad $\beta \geq 1$ del polinomio $Q(x)$. En ese sentido; se puede escribir:

$$Q(x) = (x-\alpha)^\beta M(x) \text{ y } M(\alpha) \neq 0, \quad (25)$$

entonces existen $A \in \mathbb{R}$ y un polinomio $P_1(x)$ con coeficientes reales tales que:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A}{(x-\alpha)^\beta} + \frac{P_1(x)}{(x-\alpha)^{\beta-1}M(x)} \quad (26)$$

donde $\frac{P_1(x)}{(x-\alpha)^{\beta-1}M(x)}$ también es propia.

Demostración:

Es claro que:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(x)}{(x-\alpha)^\beta M(x)}.$$

Y no menos claro es que:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \left[\frac{P(x)}{(x-\alpha)^\beta M(x)} - \frac{A}{(x-\alpha)^\beta} \right] + \frac{A}{(x-\alpha)^\beta}$$

de lo anterior, se infiere que:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A}{(x-\alpha)^\beta} + \underbrace{\frac{P(x)-AM(x)}{(x-\alpha)^\beta M(x)}}_{(I)} \quad (27)$$

por definición de fracción racional propia el grado de $P(x)$ es menor que el grado de $Q(x)$. Es obvio que el grado del polinomio $M(x)$ es menor que el grado de $Q(x)$ (puesto que $\beta \geq 1$) por lo que independientemente del valor que tome “A”, la fracción:

$$\frac{P(x) - AM(x)}{(x - \alpha)^\beta M(x)}$$

es regular. Ahora, se elije “A” de forma tal que “ α ” sea raíz del polinomio $P(x) - AM(x)$ y, por lo tanto, que este polinomio sea divisible por $x - \alpha$, donde $\alpha \in \mathbb{R}$.

En términos simples, se elije “A” con la condición de que $P(\alpha) - AM(\alpha) = 0$. De este hecho, se infiere que $A = P(\alpha)/M(\alpha)$. Para tal elección de “A” el término (I) del lado derecho en (27) se puede simplificar por $x - \alpha$, resultando que la fracción ha de ser del tipo:

$$\frac{P_1(x)}{(x - \alpha)^{\beta-1} M(x)}.$$

Como esta fracción fue obtenida con la simplificación de una fracción racional propia con coeficientes reales por el factor $x - \alpha$, donde $\alpha \in \mathbb{R}$, entonces ella misma también es una función racional propia con coeficientes reales (ver [3]). ■

Observación 2 Si los polinomios $P(z)$ y $Q(z)$ tienen coeficientes complejos y $z = \alpha$ es una raíz compleja de multiplicidad $\beta \geq 1$ del polinomio $Q(z)$, entonces la descomposición anterior también ocurre; pero el “A” obtenido es en general un número complejo.

Lema 3 Sea $\frac{P(x)}{Q(x)}$ una fracción racional propia. Si el número complejo $z_1 = a + ib$ con $a, b \in \mathbb{R}$ ($b \neq 0$), es una raíz de multiplicidad $\alpha \geq 1$ del polinomio $Q(x)$, es decir:

$$Q(x) = (x^2 + px + q)^\alpha Q_1(x),$$

donde: $Q_1(z_1) \neq 0$ y $x^2 + px + q = (x - z_1)(x - \bar{z}_1)$, entonces existen números reales M, N y el polinomio $P_1(x)$ con coeficientes reales, tales que:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{Mx + N}{(x^2 + px + q)^\alpha} + \underbrace{\frac{P_1(x)}{(x^2 + px + q)^{\alpha-1} Q_1(x)}}_{(I)}$$

donde, la fracción (I) también es propia.

Demostración:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(x)}{(x^2 + px + q)^\alpha Q_1(x)}.$$

Es claro que:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{Mx + N}{(x^2 + px + q)^\alpha} + \frac{P(x)}{(x^2 + px + q)^\alpha Q_1(x)} - \frac{Mx + N}{(x^2 + px + q)^\alpha}.$$

Lo anterior puede escribirse como:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{Mx + N}{(x^2 + px + q)^\alpha} + \underbrace{\frac{P(x) - (Mx + N)Q_1(x)}{(x^2 + px + q)^\alpha Q_1(x)}}_{(A)}$$

donde, el término (A) es una fracción propia.

Se escogerá a “M” y “N” de tal forma que el numerador de la fracción (A) sea divisible por:

$$x^2 + px + q = (x - z_1)(x - \bar{z}_1).$$

Para ello; basta elegir a “M” y “N” de forma tal que z_1 y \bar{z}_1 sean raíces de la expresión:

$$P(x) - (Mx + N)Q_1(x).$$

De esto se tiene que; este polinomio es divisible por $x^2 + px + q$ y en ese sentido:

$$P(z_1) - (Mz_1 + N)Q_1(z_1) = 0.$$

De donde:

$$Mz_1 + N = \frac{P(z_1)}{Q_1(z_1)}$$

donde, $Q_1(z_1) \neq 0$.

Sea $z_1 = a + ib$ y $\frac{P(z_1)}{Q_1(z_1)} = A + iB$, entonces

$$A + iB = Mz_1 + N = M(a + ib) + N.$$

De lo anterior, es posible inferir que:

$$M = \frac{B}{b} \quad \text{y} \quad N = A - \frac{a}{b}B.$$

Para estos valores de “M” y “N” el polinomio:

$$P(x) - (Mx + N)Q_1(x)$$

es divisible por la expresión $x^2 + px + q$. Luego, simplificando el término (A) se logra obtener una fracción propia con coeficientes reales ([3]) del tipo:

$$\frac{P_1(x)}{(x^2 + px + q)^{\alpha-1} Q_1(x)}.$$

■

Observación 3 A veces conviene dependiendo del problema, aplicar alguna de las dos opciones siguientes o incluso combinarlas:

Opción 1 Se escribe la expresión (23) como:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = P(x) \cdot \underbrace{\frac{1}{Q(x)}}_{(A)}$$

después, se aplica la DFS con la nueva técnica al factor (A), lo siguiente es efectuar el producto de $P(x)$ por cada término de la descomposición de $\frac{1}{Q(x)}$.

Este producto está formado por términos de la forma:

$$\frac{p_i(x)}{(a_i x + b_i)^{t_i}} \quad \text{ó} \quad \frac{p_j(x)}{(c_j x^2 + d_j x + e_j)^{s_j}}$$

Si el grado del numerador, en alguna de las fracciones anteriores, es mayor o igual al grado del denominador hay que hacer la respectiva división para luego, agrupar a los términos semejantes.

Opción 2 Expresar $P(x)$ como sumas de:

$$(a_i x + b_i)^{k_i} \quad \text{y/o} \quad (c_j x^2 + d_j x + e_j)^{d_j}$$

Luego simplificar. Con esto, cada término obtenido es más sencillo de descomponer.

En general; esta última opción es la más sencilla y óptima, no obstante, a veces es conveniente combinar ambas opciones (para más detalles ver [3]).

5. Implementación de la Nueva Técnica

Problema 1 Realizar la DFS, sin la necesidad de implementar sistemas de ecuaciones, de la expresión:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{2x^4 + x^3 + 4x^2 + 1}{(x^2 + 1)^2(x - 1)}. \quad (28)$$

Solución:

Caso 1

$$Q_1(x) = (x^2 + 1)^2 \quad \text{y} \quad \alpha = 1.$$

De acuerdo al lema 2 es fácil ver que $A = \frac{P(1)}{Q_1(1)} = 2$.

Luego;

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{2}{x - 1} + \frac{2x^4 + x^3 + 4x^2 + 1 - 2(x^2 + 1)^2}{(x^2 + 1)^2(x - 1)} =$$

$$\frac{2}{x - 1} + \frac{x^3 - 1}{(x^2 + 1)^2(x - 1)}.$$

Factorizando y simplificando, se tiene la DFS:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{2}{x - 1} + \frac{(x - 1)(x^2 + x + 1)}{(x^2 + 1)^2(x - 1)} =$$

$$\frac{2}{x - 1} + \frac{x^2 + x + 1}{(x^2 + 1)^2} = \frac{2}{x - 1} + \frac{1}{x^2 + 1} + \frac{x}{(x^2 + 1)^2}. \quad \square$$

Caso 2

$$Q_1(x) = x - 1, z_1 = a + ib = i \Rightarrow a = 0 \quad \text{y} \quad b = 1.$$

De acuerdo al lema 3, es fácil ver que:

$$A + iB = \frac{P(i)}{Q_1(i)} = \frac{2i^4 + i^3 + 4i^2 + 1}{i - 1} = i,$$

por lo que; $A = 0, B = 1$. De lo anterior, se tiene que:

$$M = 1 \quad \text{y} \quad N = 0.$$

Por lo tanto;

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{x}{(x^2 + 1)^2} + \frac{2x^4 + x^3 + 4x^2 + 1 - x(x - 1)}{(x^2 + 1)^2(x - 1)} =$$

$$\frac{x}{(x^2 + 1)^2} + \frac{2x^4 + x^3 + 3x^2 + x + 1}{(x^2 + 1)^2(x - 1)}.$$

Pero de acuerdo al lema 3, el polinomio $2x^4 + x^3 + 3x^2 + x + 1$ es divisible por $x^2 + 1$. En efecto, al realizar esta división resulta:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{x}{(x^2 + 1)^2} + \underbrace{\frac{2x^2 + x + 1}{(x^2 + 1)(x - 1)}}_{(I)}. \quad (29)$$

Aplicando nuevamente el lema 3, pero al término (I):

$$\frac{P^*(x)}{Q^*(x)} = \frac{2x^2 + x + 1}{(x^2 + 1)(x - 1)}.$$

El nuevo $P(x)$ es $2x^2 + x + 1$ y $Q_1(x)$ es $x - 1$.

$$z_i = a + ib = i \Rightarrow a = 0 \quad \text{y} \quad b = 1.$$

Por el lema 3 se observa que:

$$A + iB = \frac{P(i)}{Q_1(i)} = \frac{-2 + i + 1}{i - 1} = 1,$$

de donde; $A = 1$ y $B = 0$. Luego, se tiene que:

$$M = 0 \quad \text{y} \quad N = 1.$$

Por lo tanto;

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{1}{x^2 + 1} + \frac{2x^2 + x + 1 - (x - 1)}{(x^2 + 1)(x - 1)} =$$

$$\frac{1}{x^2 + 1} + \frac{2x^2 + 2}{(x^2 + 1)(x - 1)}.$$

Al simplificar, se tiene que:

$$\frac{P^*(x)}{Q^*(x)} = \frac{1}{x^2 + 1} + \frac{2}{x - 1}. \quad (30)$$

Se sustituye (30) en (29) se tiene la DFS deseada:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{2}{x - 1} + \frac{1}{x^2 + 1} + \frac{x}{(x^2 + 1)^2}. \quad \square$$

Problema 2 El siguiente problema fue extraído del [9] y el mismo consiste en calcular la integral:

$$\int \left[\frac{x^4 + 4x^3 + 11x^2 + 12x + 8}{(x^2 + 2x + 3)^2(x + 1)} \right] dx. \quad (31)$$

Para calcular la integral (31) es necesario la DFS de:

$$\frac{x^4 + 4x^3 + 11x^2 + 12x + 8}{(x^2 + 2x + 3)^2(x + 1)}.$$

El desarrollo se limitará a realizar solo la DFS y, la misma, se hará con el método sugerido por [9] (MCI y Evaluación). También, se trabajará con la técnica propuesta en este artículo y así se hará la comparación entre los métodos utilizados.

Usando el método sugerido en [9]:

$$\frac{x^4 + 4x^3 + 11x^2 + 12x + 8}{(x^2 + 2x + 3)^2(x + 1)} = \frac{Ax + B}{(x^2 + 2x + 3)^2} + \frac{Cx + D}{x^2 + 2x + 3} + \frac{E}{x + 1}.$$

Lo anterior puede escribirse como:

$$\frac{x^4 + 4x^3 + 11x^2 + 12x + 8}{(x^2 + 2x + 3)^2(x + 1)} = (x + 1)$$

$$\left[\frac{Ax + B}{(x^2 + 2x + 3)^2} + \frac{Cx + D}{x^2 + 2x + 3} \right] + E.$$

Al sustituir por $x = -1$ se tiene que $E = 1$.

Basta comparar los numeradores.

$$x^4 + 4x^3 + 11x^2 + 12x + 8 = (Ax + B)$$

$$(x + 1) + (Cx + D)(x^3 + 3x^2 + 5x + 3) + E(x^4 + 4x^3 + 10x^2 + 12x + 9).$$

Para obtener el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} C + E = 1 \\ 3C + D + 4E = 4 \\ A + 5C + 3D + 10E = 11 \\ A + B + 3C + 12E = 12 \end{cases} \quad (32)$$

Al resolver el sistema (32) se obtiene la siguiente solución:

$$A = 1, B = -1, C = 0 \text{ y } D = 0.$$

De esta forma se han encontrado los coeficientes de cada una de las fracciones más simples. \square

El siguiente paso sería integrar. Ese paso no se hará como ya se había comentado, el único interés es determinar los coeficientes y comparar la técnica de este artículo con el método propuesto en [9].

Usando la técnica propuesta en este artículo:

$$\frac{x^4 + 4x^3 + 11x^2 + 12x + 8}{(x^2 + 2x + 3)^2(x + 1)} = \frac{(x^2 + 2x + 3)^2 + (x + 1)(x - 1)}{(x^2 + 2x + 3)^2(x + 1)}. \quad (33)$$

Al simplificar el lado derecho de (33) se obtiene:

$$\frac{x^4 + 4x^3 + 11x^2 + 12x + 8}{(x^2 + 2x + 3)^2(x + 1)} = \frac{1}{x + 1} + \frac{x - 1}{(x^2 + 2x + 3)^2}.$$

De donde:

$$A = 1, B = -1, C = 0, D = 0 \text{ y } E = 1. \quad \square$$

6. Conclusiones

La *descomposición en fracciones simples* puede ser una tarea muy engorrosa. Explorar métodos alternativos de descomposición que agilicen el proceso puede ser muy útil para que la *descomposición en fracciones simples* no parezca tan abrumadora. Comprender los conceptos básicos, aprender algunos atajos

y saber cuándo usarlos es esencial para ser competente, seguro y eficiente al resolver problemas de *descomposición en fracciones simples* [8].

La principal contribución de la técnica mostrada en este artículo radica en su eficiencia superior: ésta evita por completo la construcción y resolución de sistemas lineales, simplificando el proceso a operaciones algebraicas elementales. Esto no solo acelera los cálculos, sino que también minimiza errores comunes cometidos generalmente por estudiantes novatos al utilizar métodos tradicionales.

En ese sentido, la implementación de una técnica alternativa que evite el uso de sistemas de ecuaciones en la *descomposición en fracciones simples* resulta fundamental, ya que optimiza los procesos de cálculo, reduce errores y agiliza, por ejemplo, la simplificación de integrales complejas. Además, esta mejora metodológica no solo facilita el análisis de funciones racionales, sino que también amplía su aplicabilidad en áreas como el cálculo avanzado, las ecuaciones diferenciales y la ingeniería, contribuyendo así a un enfoque más eficiente y accesible en el estudio de las matemáticas aplicadas y teóricas.

Por otro lado, se destaca que esta nueva técnica no solo optimiza procesos computacionales, sino que también amplía las posibilidades pedagógicas en la enseñanza de matemáticas avanzadas [5], al ofrecer un camino más intuitivo y menos mecánico para la DFS, en esa dirección, dos estudios recientes (ver [3] y [4]) han demostrado que la implementación de esta nueva técnica —la cual evita el uso de sistemas de ecuaciones—, en comparación con técnicas tradicionales como: MCI y MHO, no solo fomenta actitudes más positivas en estudiantes universitarios, sino que también potencia significativamente su pensamiento algebraico. Estos hallazgos sugieren que su aplicación podría contribuir de manera efectiva a la mejora del rendimiento académico, posicionándola como una prometedora herramienta del álgebra para la enseñanza del cálculo.

Referencias

[1] Chrystal, G. (1961). *Textbook of algebra*. Dover Publications.

[2] Díaz, J. (2017). Técnicas alternativas para el cálculo de fracciones parciales. *El Cálculo y su Enseñanza. Enseñanza de las Ciencias y la Matemática*, 9:24–41.

[3] Hernández, F. (2024). *Aproximación teórica para la descomposición en fracciones simples y su efecto en el rendimiento académico inmediato. Una estrategia didáctica alternativa y la modelación matemática*. PhD thesis, Instituto Pedagógico “Rafael Alberto Escobar Lara”. Universidad Pedagógica Experimental Libertador. Maracay, Venezuela.

[4] Hernández, F. (2025). *Actitudes estudiantiles hacia la descomposición en fracciones simples. Coeficientes indeterminados o Hermite-Ostrogradsky*. Master’s thesis, Facultad de Ciencias de la Educación. Universidad de Carabobo. Valencia, Venezuela.

[5] Hernández, F. and Flores, E. (2024). Una técnica alternativa y la teoría APOE para la descomposición en fracciones simples. Caso: factores lineales no repetidos. *ARJÉ*, 18(35).

[6] Huang, X. (1991). A shortcut in partial fractions. *The College Mathematics Journal*, 22(5):413–415.

[7] Martínez, A. (2006). Descomposición en fracciones parciales. *Scientia et Technica*, XII(31):259–264.

[8] Newberry, A. (2011). *Investigating methods of partial fraction decomposition*. Master’s thesis, The University of Texas at Austin. Austin, EUA.

[9] Piskunov, N. (1978). *Cálculo diferencial e integral*. Editorial Montaner y Simon, S.A.

[10] Purcell, E. (2007). *Cálculo*. (9na ed.). Pearson Educación.

[11] Pérez, F. (2008). *Cálculo diferencial e integral de funciones de una variable*. Universidad de Granada, Departamento de Análisis Matemático.

[12] Wang, T. (2007). Techniques on partial fractions. *American Mathematical Association of Two Year Colleges*, (33).

[13] Zill, D. (2011). *Cálculo de una variable*. (4ta ed.). Mc Graw-Hill.



Estudio comparativo: método gráfico vs. Newton-Raphson en redes de flujo

Enrique V. Flores C.^{1a}, Antoinette C. Freitas G.^{1b}, Arquímedes González R.^{1c}

¹ Departamento de Térmica y Energética, Escuela de Ingeniería Mecánica, Facultad de Ingeniería, Universidad de Carabobo. Venezuela.

^a Instituto de Matemática y Cálculo Aplicado (IMYCA), Facultad de Ingeniería, Universidad de Carabobo. Venezuela.

ORCID iD: 0000-0002-7605-3286^a 0009-0003-1984-2881^b 0009-0001-1828-5038^c

Correo electrónico del autor para correspondencia: evflores@uc.edu.ve^a

Correos electrónicos de los coautores: antoi.freites@gmail.com^b arquimedesgrr@gmail.com^c

Recibido: 5/07/2025, Revisado: 15/08/2025, Aceptado: 11/09/2025.

Resumen

En este trabajo se presenta la comparativa del empleo del método gráfico con el empleo del método de Newton-Raphson para calcular los caudales que atraviesan las tuberías en tres casos distintos de redes a través de las cuales fluye agua. Se toman tres casos de la bibliografía considerando distintas cantidades de tuberías en cada caso. Se determinan los errores relativos de los caudales determinados, y se calcula la suma de los cuadrados de los errores relativos en cada caso estudiado. Se determina que tanto el método gráfico como el método de Newton-Raphson ofrecen buenas aproximaciones a los resultados reportados en la bibliografía, que las magnitudes de los errores relativos calculados pueden diferir significativamente según el método empleado, y que el método que tuvo un mejor desempeño en los casos estudiados es el método gráfico, ofreciendo en la mayoría de los caudales calculados un error relativo menor al 1% y teniendo el menor valor de la suma de los cuadrados de los errores relativos en dos de los tres casos estudiados.

Palabras Clave: Errores relativos, método gráfico, método de Newton-Raphson, redes de flujo de fluidos.

Comparative study: graphical method vs. Newton-Raphson in flow networks

Abstract

This paper presents a comparison of the graphic method with the Newton-Raphson method for calculating the flow rates through pipes in three different cases of networks through which water flows. Three cases from the literature are taken, considering different numbers of pipes in each case. The relative errors of the determined flow rates are calculated, and the sum of the squares of the relative errors is calculated for each case studied. It is determined that both the graphical method and the Newton-Raphson method provide good approximations to the results reported in the literature, that the magnitudes of the calculated relative errors can differ significantly depending on the method employed, and that the method that performed better in the studied cases is the graphical method, offering in most of the calculated flows a relative error of less than 1% and having the lowest value of the sum of the squares of the relative errors in two of the three cases studied.

Keywords: Fluid flow networks, graphical method, Newton-Raphson method, relative errors.

1. Introducción

Tal como se indica en [22], los sistemas de conducción de fluidos en plantas industriales por lo general comprenden innumerables tuberías, muchas de ellas entre si formando redes. Destacan entre estas las redes en forma de malla, cuyas tuberías forman circuitos y están intercomunicadas; donde no es posible a priori establecer el sentido de flujo en todas las tuberías que conforman la red.

En [14] se señala que el análisis de una red de flujo, se pueden considerarse como elementos constitutivos esenciales los indicados a continuación: Resistencias (tuberías y accesorios), Fuentes/Sumideros (Tanques) y Turbomáquinas (Bombas o compresores encargados de mover fluidos). Se indica, además, que resolver una red de flujo consiste en establecer el caudal que circula en cada uno de los tramos de tubería que conforma la red de flujo. En [4], [9], [14], [17] se afirma que la resolución de la red se basa en el cumplimiento de la ecuación de continuidad (ley de conservación de la masa) en todo el sistema, y del cumplimiento del balance de energía (primera ley de la termodinámica) en cada tramo de la red; requiriendo el planteamiento de un sistema de ecuaciones cuyo carácter en general es no lineal, el cual pudiera ameritar para su resolución el empleo de métodos numéricos; y que si el tamaño de dicho sistema es grande, pudiese requerir el apoyo de un computador.

En [6] se señala como métodos numéricos iterativos comúnmente usados para la resolución del sistema de ecuaciones previamente nombrado al método de Hardy-Cross, el método de Newton-Raphson, el método Lineal, y el método del gradiente; estableciéndose para cada uno de estos métodos sus ventajas y desventajas. En [18] se indican software que pueden ser empleados para la resolución de redes que transportan agua tales como KYPIPE2, que emplea el método lineal; EPANET, que emplea el método del gradiente y WaterCAD que emplea el método del gradiente. En [1] y [21] se afirma que el software Pipe Flow Expert emplea el método de Newton-Raphson. En [8] se muestra que en una actividad didáctica propuesta a los estudiantes cursantes de una asignatura donde se imparten métodos de resolución de redes de flujo los software utilizados por dichos estudiantes en la actividad son PipeFlow Expert, EPANET y WaterCad; y en [7] y [8] se indica a su vez que el software

mayormente utilizado en la Universidad de Carabobo es Pipe Flow Expert.

La bibliografía existente muestra, además de los métodos iterativos previamente citados, métodos gráficos para la resolución de redes. En [17] se señala que las metodologías gráficas son simples expresiones gráficas de procedimientos analíticos de resolución de redes que tienen como ventaja permitir una visualización física de los aspectos hidráulicos de los sistemas de tuberías; indicando a su vez que dichas metodologías se basan en el trazado de las curvas de operación hidráulica de los elementos constitutivos de la red; y la combinación de estas para la obtención de los caudales que atraviesan cada tramo de la red. En [15] se muestra un método denominado Método Descriptivo basado en el trazado de curvas características de tramos de una red de tuberías para el cálculo del caudal que atraviesa cada tramo. En [14] se muestra un método gráfico basado en el concepto denominado Sistema Equivalente.

En [11] se presenta un software que en particular permite el análisis de redes de flujo, mediante la aplicación de métodos gráficos, desarrollado para funcionar en plataformas computacionales bajo el sistema operativo Windows, presentando dificultades en su instalación y funcionamiento en versiones distintas para la que fueron desarrollados. En [20] se muestra el desarrollo de una herramienta computacional multiplataforma para la simulación de la dinámica del flujo transitorio en procesos de vaciado y llenado de tanques en redes de flujo; sin la capacidad de resolver redes de flujo. En [8] se muestra el uso de algunos software para la resolución de al menos una red de flujo; indicándose en un bajo porcentaje de casos la resolución de la misma red empleando métodos gráficos, y sin realizar comparativa de los resultados obtenidos usando el software con los obtenidos usando el método gráfico. Es de destacar que el software más empleado en [8] fue Pipe Flow Expert; y que la resolución con el método gráfico se hizo sin el apoyo de graficador computarizado alguno. En [1] se realiza el análisis de una red de distribución de agua estudiando similitudes y disparidades en los resultados obtenidos mediante la aplicación del método de Hardy Cross y el método de Newton Raphson, observándose diferencias en los resultados arrojados por cada método atribuidas al enfoque particular de cada método.

En el presente trabajo se muestra una comparativa de los resultados obtenidos mediante el uso del método gráfico descrito en [14] y mediante el uso del método de Newton-Raphson en la resolución de redes de flujo de fluidos. Se persigue determinar si existen diferencias significativas entre los resultados obtenidos, e indicar si uno de estos dos métodos se constituye como el más exacto en casos de estudio reportados en la bibliografía relacionado con el tema.

2. Bases teóricas

En esta sección se presenta un breve resumen de la teoría que sustenta al presente trabajo. Se inicia con la presentación de los conceptos relacionados con el método gráfico para la resolución de redes de flujo, tomando como referencia lo plasmado en [14].

Conceptos asociados a las redes de flujo de fluidos

La ley de conservación de la masa para un proceso de flujo incompresible y de régimen permanente en un tramo de tubería establece que el caudal Q_i que entra a la tubería es igual al caudal Q_o que sale de la tubería; esto es:

$$Q_i = Q_o = Q.$$

Para flujo incompresible y régimen permanente en un punto denominado nodo, en el que confluyen $M + N$ tuberías, donde Q_i representa un caudal de entrada al nodo y Q_o representa un caudal de salida del nodo, se tiene:

$$\sum_{i=1}^M Q_i = \sum_{i=1}^N Q_o. \quad (1)$$

Sea P la presión, V la magnitud de la velocidad promedio, y z la altura en un punto del tramo de tubería. Sea γ el peso específico de un fluido a la temperatura del mismo, y sea g la aceleración de gravedad. Se define como disponibilidad H a:

$$H = \frac{P}{\gamma} + z + \frac{V^2}{2g}. \quad (2)$$

Considere un proceso de flujo incompresible y régimen permanente a temperatura constante en un tramo de tubería donde no existe transferencia de calor ni se efectúa ningún tipo de trabajo. Considere la sección de entrada 1 y la sección de salida 2 de dicho tramo. La ley de conservación de la energía para este proceso establece que:

$$H_2 = H_1 - hf_{12}. \quad (3)$$

El término hf_{12} representa la pérdida por fricción en el tramo de tubería, el cual se puede calcular mediante diversas ecuaciones; entre estas, se tiene la ecuación de Darcy – Weisbach:

$$hf_{12} = f \frac{L V^2}{D 2g}$$

siendo f el factor de fricción, L la longitud del tramo, D el diámetro hidráulico de la tubería, y el término $\frac{V^2}{2g}$ tiene el mismo significado que en (2). Valores de hf_{12} para tuberías nuevas de acero comercial catalogado con la cédula 40 se encuentran tabulados para distintos diámetros de tubería y para distintos caudales en [12] cuando el fluido es agua a 15 °C.

Conceptos asociados al método gráfico para resolver redes de flujo de fluidos

La curva de comportamiento de un fluido que atraviesa un tramo de tubería está formada por los pares (Q, hf_{12}) para un determinado fluido y un determinado tramo de tubería. La representación gráfica de esta curva se hace en el plano $Q - H$ tal como se muestra en la figura 1.

Dadas dos tuberías que transportan el mismo fluido y que se acoplan en serie, el arreglo en serie de estas dos tuberías transportan el mismo caudal. La curva de comportamiento de este arreglo en serie se determina sumando las pérdidas de ambas tuberías a caudal constante (ver figura 2). Esto es válido para n tuberías acopladas en serie.

Dadas dos tuberías que transportan el mismo fluido y que se acoplan en paralelo, cada tubería del arreglo en paralelo tienen la misma pérdida por fricción. La curva de comportamiento de este arreglo en paralelo se

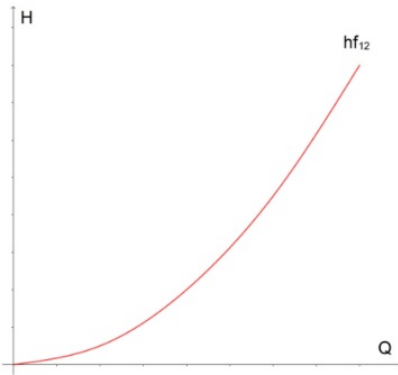


Figura 1. Curva de Comportamiento. Fuente: propia.

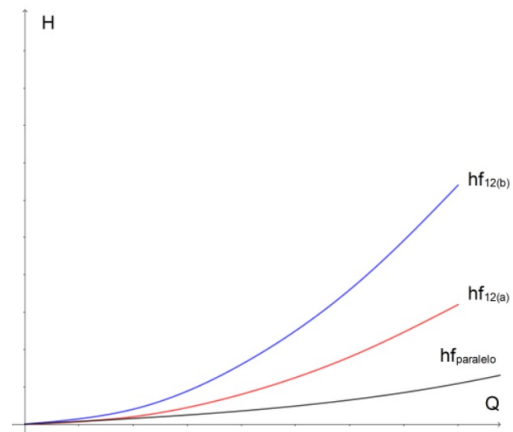


Figura 3. Curva de Comportamiento arreglo en paralelo. Fuente: propia.

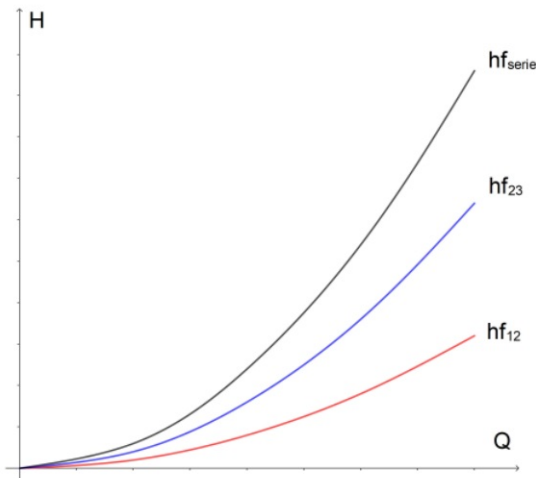


Figura 2. Curva de Comportamiento arreglo en serie. Fuente: propia.

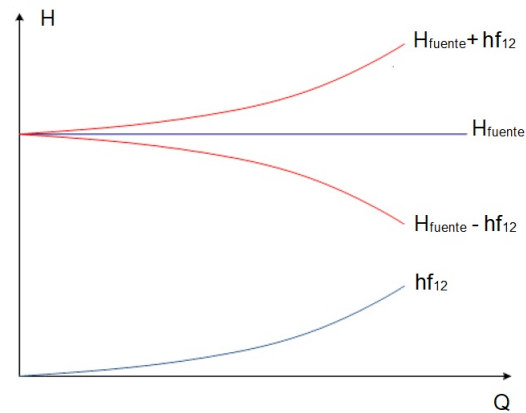


Figura 4. Curva de Comportamiento acople fuente o sumidero - tubería. Fuente: propia.

determina sumando los caudales de ambas tuberías a disponibilidad constante (ver figura 3). Esto es válido para n tuberías acopladas en paralelo.

Una fuente o sumidero es un reservorio de disponibilidad constante para cualquier caudal que se considere. El acople de una fuente o sumidero a una tubería produce una curva de comportamiento con pendiente positiva o curva de comportamiento con pendiente negativa en el plano $Q - H$ dependiendo de la relación que exista entre la disponibilidad de la fuente o sumidero y la disponibilidad del extremo de la tubería no acoplada a la fuente o sumidero. El conjunto de pares (Q, H) se obtiene mediante la aplicación de la ecuación (3) entre la fuente o sumidero y el extremo de la tubería. (ver figura 4).

El sistema equivalente consiste en un único acople de una fuente o sumidero a una tubería que representa a un conjunto de acoples de fuente o sumidero con sus respectivas tuberías que confluyen en un punto común de empalme. Para determinar el sistema equivalente, se asignan distintos valores de disponibilidad comunes a los acoples de fuente o sumidero con sus respectivas tuberías, y se realiza la suma algebraica de los caudales que atraviesan cada tubería. El conjunto de pares formados por los resultados de la sumas algebraicas de caudales calculados y la disponibilidad correspondiente a dicha suma, representan la curva de comportamiento del sistema equivalente. La figura 5 muestra la construcción de la curva del sistema equivalente que representa el flujo desde un punto común de empalme hacia dos fuentes.

El punto de intersección entre dos curvas de compor-

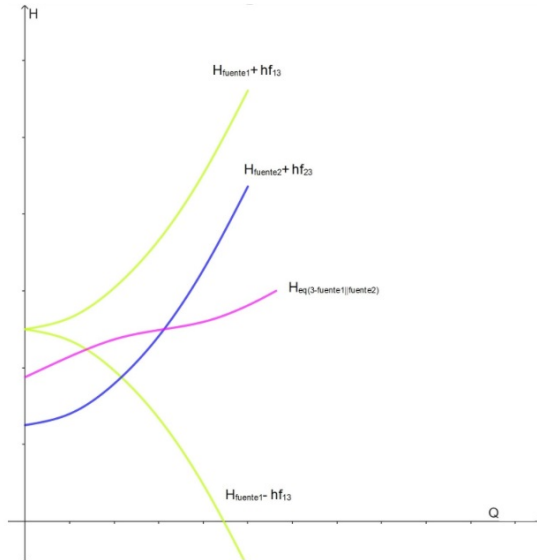


Figura 5. Curva de Comportamiento de un sistema equivalente. Fuente: propia.

tamiento de sistema equivalentes únicos que confluyen en un punto común, donde uno de los sistemas equivalentes tiene una curva de comportamiento de pendiente positiva, y el otro sistema equivalente tiene una curva de comportamiento de pendiente negativa, se denomina punto de trabajo. A partir del punto de trabajo, es posible determinar los caudales que atraviesan cada tramo de tubería que conformó a su vez cada sistema equivalente. El método gráfico para resolver redes de flujo consiste en la determinación de caudales a partir del punto de trabajo que surge de la intersección de las curvas de sistemas equivalentes con pendientes distintas. Los caudales calculados deben satisfacer la ecuación (1) en cada nodo de la red, y deben satisfacer la ecuación (3) en cada tramo. La figura 6 muestra el cálculo de los caudales que atraviesan los tramos de una red a través del método gráfico.

Trazador cúbico (Spline cúbico). Geogebra

En [16] se establece que dados $N + 1$ puntos $(x_0, y_0), (x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$ cuyas abscisas están ordenadas de manera creciente en el intervalo $[x_0, x_n]$ definen una función $S(x)$ denominada trazador cúbico para dichos puntos si existen N polinomios cúbicos $S_k(x)$ que pueden ser escritos en términos de coeficientes $s_{k,0}, s_{k,1}, s_{k,2}$ y $s_{k,3}$ como:

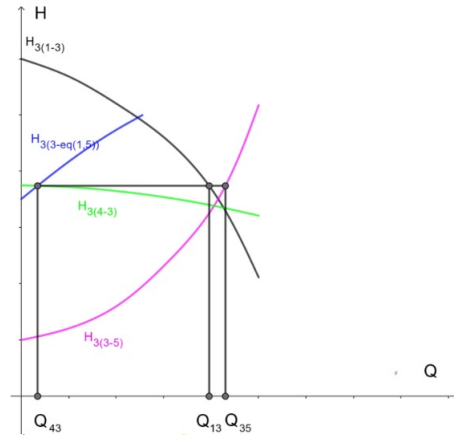


Figura 6. Cálculo de caudales usando el método gráfico. Fuente: propia.

$$S(x) = S_k(x) = s_{k,0} + s_{k,1}(x - x_k) + s_{k,2}(x - x_k)^2 + s_{k,3}(x - x_k)^3$$

para $x \in [x_k, x_{k+1}]$ y $k = 0, 1, \dots, N - 1$ que verifican las siguientes propiedades:

- I. $S(x_k) = y_k$ para $k = 0, 1, \dots, N$.
- II. $S_k(x_{k+1}) = S_{k+1}(x_{k+1})$ para $k = 0, 1, \dots, N - 2$.
- III. $S'_k(x_{k+1}) = S'_{k+1}(x_{k+1})$ para $k = 0, 1, \dots, N - 2$.
- IV. $S''_k(x_{k+1}) = S''_{k+1}(x_{k+1})$ para $k = 0, 1, \dots, N - 2$.

$S(x)$ es un polinomio cúbico a trozos que interpola los datos, que tiene primera y segunda derivada continua. Un trazador cúbico es también conocido como spline cúbico.

En [13] se emplea el spline cúbico para el trazado de la curva de comportamiento de una bomba centrífuga de tipo axial, y para el trazado de la curva de comportamiento de un arreglo de bombas centrífugas acopladas en paralelo, concluyéndose que el spline cúbico trazado en cada caso correlaciona los datos eficientemente y efectivamente sin importar que tan aleatorio parezca el conjunto de puntos dado; pudiéndose identificar a partir del spline cúbico trazado las zonas donde no se recomienda la operación de las

bombas dadas y con esto evitar excesivo consumo de potencia y/o daño a las bombas.

En el marco del empleo del método gráfico para la resolución de redes de flujo, para la representación gráfica de una curva de comportamiento de un determinado fluido que atraviesa una tubería en el plano $Q-H$ pueden emplearse distintos polinomios de interpolación. En los casos de estudio correspondientes a este trabajo, se emplea el spline cúbico para el trazado de dichas curvas. Dicho trazado se hace con el apoyo del software Geogebra. En [2] se indica que Geogebra es un software libre de matemática dinámica, que se encuentra disponible en múltiples plataformas. GeoGebra permite el trazado dinámico de construcciones geométricas, así como la representación gráfica, el tratamiento algebraico y el cálculo de funciones reales de variable real. En [19] se señala que Geogebra se considera un Software de Geometría Dinámica, en virtud que está orientado al análisis de problemas geométricos combinando álgebra y geometría, vinculando descripciones y vistas algebraicas con geométricas. En [3] se muestra que es posible el trazado de un spline cúbico mediante el uso de Geogebra. Geogebra también puede usarse para las sumas algebraicas que se hacen en forma gráfica para la determinación de los sistemas equivalentes que permiten la determinación del punto de operación y el posterior cálculo de caudales.

Método de Newton Raphson para la solución de sistemas de ecuaciones no lineales. Pipe Flow Expert

En [16] se establece que el método de Newton-Raphson para sistemas de ecuaciones no lineales es una generalización del método de Newton-Raphson para una ecuación no lineal de una variable. Si se considera el sistema de n ecuaciones no lineales con n incógnitas x_1, x_2, \dots, x_n :

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) = F(X) =$$

$$(f_1(X), f_2(X), \dots, f_n(X)) = (0, 0, \dots, 0).$$

Considerando $J_{X_k}F$ como la matriz jacobiana de F en el punto X_k , la aproximación X_{k+1} a la solución

del sistema de ecuaciones dado se obtiene mediante el proceso iterativo de punto fijo definido por:

$$X_{k+1} = X_k - [J_{X_k}F]^{-1}F(X_k).$$

En [21] se indica que el método de solución que emplea el software Pipe Flow Expert para resolver el sistema de ecuaciones no lineales que surgen de modelar la red de flujo a resolver es el método de Newton-Raphson, determinando caudales en cada tramo y presiones en cada nodo de dicha red. En [5] se señala que Pipe Flow Expert permite el diseño de sistemas hidráulicos y permite, además de otros parámetros, el cálculo de caudales que atraviesa el fluido en cada tramo de tubería que conforma dicho sistema. En los casos de estudio correspondientes a este trabajo, se emplea Pipe Flow Expert para el cálculo de caudales a través del uso del método de Newton Raphson.

3. Metodología empleada y resultados obtenidos

Se sigue la metodología llevada a cabo en [5] que consiste en resolver tres (03) redes de flujo distintas cuyos resultados están reportados en [23], primeramente empleando el método gráfico con el apoyo de la herramienta computacional multiplataforma Geogebra; y posteriormente el cálculo de la solución de la red mediante el método de Newton-Raphson empleando el software Pipe Flow Expert. La representación gráfica de las curvas de comportamiento de los tramos corresponde a un spline cúbico que se realiza empleando el comando spline provisto por Geogebra y descrito en [10]. Se calcula el error relativo respecto del valor reportado en la bibliografía para cada caudal, se realiza la suma de los cuadrados de los errores tanto para el método gráfico como para el método de Newton-Raphson, y se hace la comparativa de estos resultados. A partir de los resultados obtenidos se establece si un método en particular se constituye como el más exacto en las tres redes resueltas.

Casos de estudio

Caso de estudio 1: Se considera una red compuesta por tres fuentes conectadas en un único nodo a

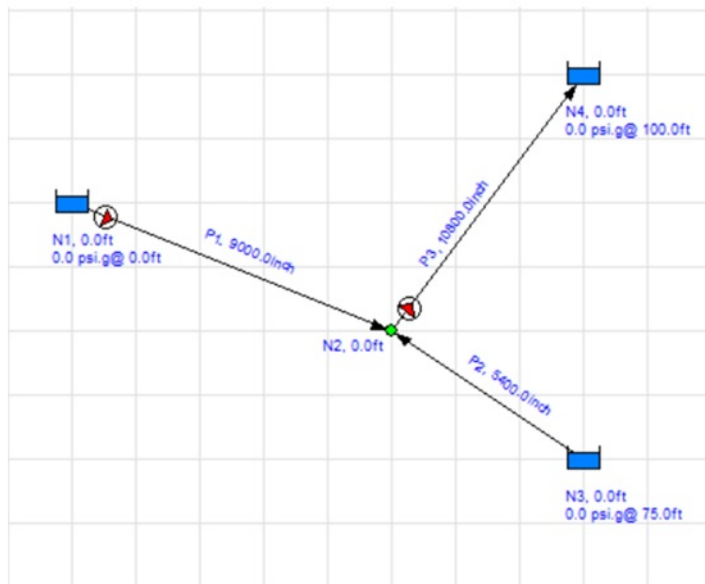


Figura 7. Caso de estudio 1. Fuente: propia.

través de tuberías de las cuales se da la información correspondiente a diámetros y longitudes. Esta red corresponde al problema 2.4. enunciado en [23]. Su esquema representado en el software Pipe Flow Expert se muestra en la figura 7.

Caso de estudio 2: Se considera una red compuesta por cuatro fuentes conectadas en un único nodo a través de tuberías de las cuales se da la información correspondiente a diámetros y longitudes. Esta red corresponde al problema 1.2. enunciado en [23]. Su esquema representado en el software Pipe Flow Expert se muestra en la figura 8.

Caso de estudio 3: Se considera una red compuesta por cuatro fuentes; dos de estas conectadas en un primer nodo a través de tuberías; las dos restantes conectadas en un segundo nodo a través de tuberías; y el primer nodo conectado al segundo nodo por una única tubería; lo que hace que la red este constituida por cinco tuberías. Para todas las tuberías se da la información correspondiente a pérdidas por fricción en cada tubería. Esta red corresponde al problema 4.16. enunciado en [23]. Su esquema representado en el software Pipe Flow Expert se muestra en la figura 9.

Las Tablas 1, 2 y 3 muestran los resultados obtenidos en cada caso. Los valores Q_i representan las magnitudes de los caudales calculados. La columna RB

representa el valor reportado en la bibliografía para el caudal calculado, la columna R1 representa el resultado obtenido mediante el empleo del método de Newton Raphson, la columna R2 representa el resultado obtenido mediante el empleo del método gráfico, la columna ER1 representa el error relativo en tanto por ciento obtenido con el empleo del método de Newton Raphson, y la columna ER2 representa el error relativo en tanto por ciento obtenido con el empleo del método Gráfico.

Tabla 1: Resultados obtenidos en el caso 1.

Caudal	RB	R1	R2	ER1	ER2
Q_1	79.00	79.21	79.17	0.27	0.22
Q_2	6.33	6.54	6.84	3.32	8.13
Q_3	85.33	85.76	86.02	0.50	0.81

Tabla 2: Resultados obtenidos en el caso 2.

Caudal	RB	R1	R2	ER1	ER2
Q_1	37.67	37.85	37.57	0.48	0.27
Q_2	48.33	48.61	48.39	0.58	0.13
Q_3	62.67	63.29	62.96	0.99	0.46
Q_4	73.33	74.05	73.78	0.98	0.61

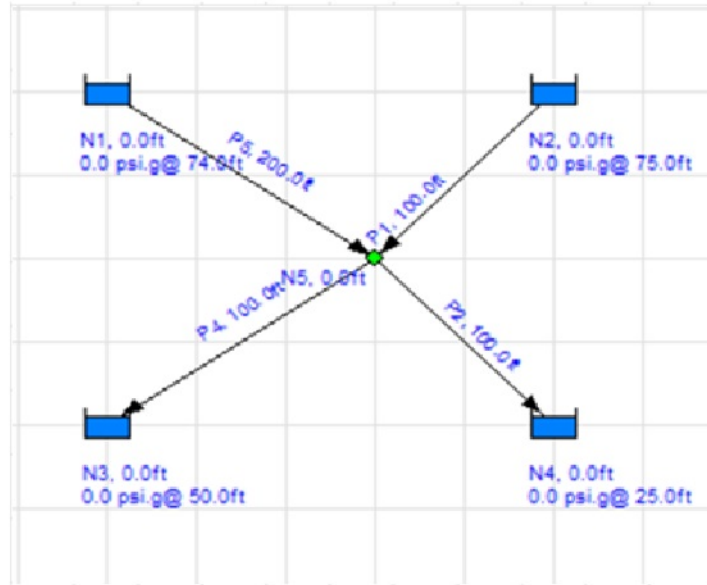


Figura 8. Caso de estudio 2. Fuente: propia.

Tabla 3: Resultados obtenidos en el caso 3.

Caudal	RB	R1	R2	ER1	ER2
Q_1	121.67	121.87	122.17	0.16	0.41
Q_2	130.00	128.42	128.48	1.22	1.17
Q_3	6.33	6.55	6.31	3.48	0.33
Q_4	351.67	351.11	351.55	0.16	0.03
Q_5	221.67	222.69	222.96	0.46	0.58

Para cada caso se calcularon la suma de los cuadrados de los errores relativos en cada método. Los resultados se presentan en la Tabla 4. La columna S1 representa el resultado obtenido para el método de Newton Raphson y la columna S2 representa el resultado obtenido para el método gráfico.

Tabla 4: Suma de los cuadrados de los errores para cada método en cada caso.

Caso	S1	S2
1	11.33	66.80
2	2.51	0.68
3	13.82	1.98

Discusión de resultados

De lo reflejado en los resultados obtenidos, se observa que:

- En todos los casos estudiados, no hay igualdad absoluta en los errores relativos obtenidos en cada

método empleado (Método de Newton-Raphson y Método Gráfico) para cada caudal calculado. Este resultado es similar al obtenido en [1].

- Los errores relativos para cada caudal calculado son menores al 4% cuando se emplea el método de Newton Raphson en la resolución de cada red. Para el caso 1, dos de los tres resultados obtuvieron errores por debajo del 1%; para el caso 2, cuatro de los cuatro caudales obtuvieron errores por debajo del 1%; y para el caso 3, tres de los cinco resultados obtuvieron errores por debajo del 1%.

- Los errores relativos para cada caudal calculado son menores al 8% cuando se emplea el Método Gráfico. Para el caso 1, dos de los tres resultados obtuvieron errores por debajo del 1%; para el caso 2, cuatro de los cuatro caudales obtuvieron errores por debajo del 1%; y para el caso 3, cuatro de los cinco resultados obtuvieron errores por debajo del 1%.

- En dos de los tres casos estudiados, el menor valor de suma de los cuadrados de los errores se obtienen cuando se emplea la herramienta el Método Gráfico.

- Solo en el caso 2, en la totalidad de los caudales calculados tanto el Método de Newton Raphson como con el Método Gráfico, los errores relativos son menores al 1%. Para el caso 1 y para el caso 3 existe al menos un caudal para el cual el error relativo difiere en forma significativa entre el valor determinado con un método en comparación con el otro.

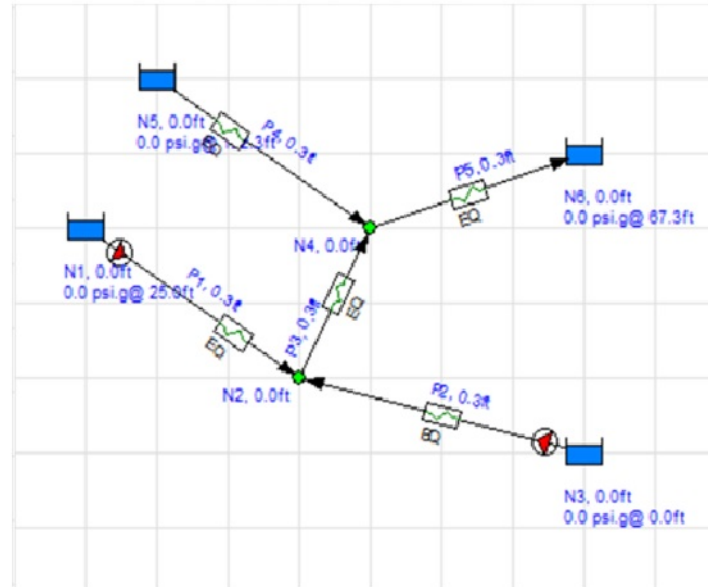


Figura 9. Caso de estudio 3. Fuente: propia.

Los resultados obtenidos muestran la efectividad del método gráfico mediante el empleo de un spline cúbico trazado con el apoyo del software Geogebra aplicado al cálculo de caudales en una red de flujo de fluidos, problema de mayor complejidad que el correspondiente al trazado de una curva de comportamiento de una bomba o de un arreglo de bombas que fue reportado en [13]. Adicionalmente, los resultados confirman la efectividad del método de Newton – Raphson implementado a través del software Pipe Flow Expert para el cálculo de caudales en una red de flujo coincidente con lo señalado en [21] y mostrándose además que los valores obtenidos a través de este método son cercanos a los reportados en la bibliografía, lo que es concordante con lo obtenido en [5].

4. Conclusiones

En los casos presentados, se visualiza que las soluciones provenientes de los métodos empleados para la solución de las redes de flujo de fluidos correspondientes presentan diferencias que pudiesen ser significativas. En la mayoría de los caudales calculados en cada caso de estudio, los errores relativos calculados están por debajo del 1%. A partir de la cantidad de caudales calculados en cada caso cuyo error relativo

es superior al 1% y a partir del cálculo de la suma de los cuadrados de los errores de cada método en cada uno de los casos de estudio, se concluye que el método que ofrece resultados más cercanos a los reportados en la bibliografía es el método gráfico.

Referencias

- [1] Adekunle, A., Adekunle, I., Familusi, A., Adamu, M. (2021). Analysis of flow in water distribution network using numerical and experimental modelling. *Acta Technica Corviniensis-Bulletin of Engineering*, 14(4):25–28.
- [2] Allan, C., Parra, S., Martins, A. (2017). Objetos de aprendizaje para la interpretación geométrica de métodos numéricos: uso de GeoGebra. *Revista Iberoamericana de Tecnología en Educación y Educación en Tecnología*, (20):51–56.
- [3] Carrillo, T., González, M., Canchola, S. (2024). El sistema de prácticas del enfoque ontosemiótico en plataforma moodle para la enseñanza de interpolación polinomial. *RIDE. Revista Iberoamericana para la Investigación y el Desarrollo Educativo*, 15(29).
- [4] Cengel, Y., Cimbala, J. (2006). *Mecánica de fluidos*. McGraw Hill.

- [5] Contreras, J., Taylor, B., Tinoco, R., Yáñez, L., Cortés, M., Hernández, J., Morales, M. (2016). Uso de pipe flow expert como una estrategia innovadora de aprendizaje en mecánica de fluidos. In *Memorias del XXXVII Encuentro Nacional de la AMIDIQ*, pages EDU106–EDU110.
- [6] Dongre, A. (2016). Optimization of water distribution network - a review. *IJSTE - International Journal of Science Technology Engineering*, 2(9):269–272.
- [7] Flores, E., Luque, Á., Gómez, M. (2018). Compromiso del estudiante desde una dimensión cognitiva en el uso de herramientas computacionales de simulación de procesos de flujo compresible: un caso de estudio. *Revista Ingeniería y Sociedad UC*, 13(2):110–120.
- [8] Flores, E., Velásquez, J., Martino, L., Cruz, M., Gómez, M. (2016). Compromiso del estudiante desde una dimensión cognitiva en el uso de herramientas computacionales de simulación de redes de flujo: Un caso de estudio. In *Memorias de las Jornadas de Investigación y Encuentro Académico Industrial de la Facultad de Ingeniería de la Universidad Central de Venezuela*.
- [9] Fox, R., Mc Donald, A. (1995). *Introducción a la mecánica de fluidos*. McGraw Hill.
- [10] Geogebra (2025). Comando Spline. <https://geogebra.github.io/docs/manual/es/commands/Spline/>. Fecha de acceso: 19 de Junio de 2025.
- [11] Goncalves, G., Pacheco, A. (2019). Desarrollo de una herramienta didáctica computacional para el estudio de fenómenos asociados al manejo de flujos de fluidos. Trabajo Especial de Grado para optar al título de Ingeniero Mecánico. Universidad Carabobo.
- [12] Hydraulic Institute (1961). Pipe friction manual. Hydraulic Institute Publications.
- [13] Kadim, M., Tilefih, R., Shakir, A. (2018). Numerical analysis for (H-Q) curve of centrifugal pumps using natural and constrained cubic spline interpolations. *Journal of Mechanical Engineering Research and Developments*, 41(3):6–8.
- [14] Laya, A. (1995). *Manejo de fluidos*. Universidad de Carabobo.
- [15] Luszczewski, A. (2020). *Redes industriales de tuberías*. Reverte.
- [16] Mathews, J., Fink, K. (2000). *Métodos numéricos con MATLAB*. Prentice Hall.
- [17] Méndez, M. (1995). *Tuberías a presión en los sistemas de abastecimiento de Agua*. Universidad Católica Andres Bello.
- [18] Obura, D., Kimera, D., Khaldi, A. (2022). A hardy cross approach for hydraulic modelling of water pipe networks. *East African Journal of Engineering*, 5(1):28–56.
- [19] Prado, M., Ortiz, R., García, L., Cidoncha, M. (2021). Graphical modelling with computer extended descriptive geometry (CeDG): description and comparison with CAD. *Computer-Aided Design Applications*, 18(2):272–284.
- [20] Rivas, Á., Díaz, J., Flores, E., Hornebo, L. (2018). Desarrollo de una herramienta computacional para la simulación de la dinámica del flujo transitorio en procesos de vaciado y llenado de tanques. *Ingeniería Industrial. Actualidad y Nuevas Tendencias*, 6(23):45–56.
- [21] Ssenozzi, I., Larson, M., Persson, T. (2016). Modeling energy losses in the hydraulic system of Vombverket water treatment plant. *Journal of Water Management and Research*, 72:211–227.
- [22] Valiente, A. (2002). *Problemas de flujo de fluidos*. Limusa.
- [23] Velásquez, J., Aguirre, R. (2001). *Problemario de manejo de fluidos*. Universidad de Carabobo.



Cuatro ecuaciones recurrentes que debes conocer

Luis A. Rodríguez

Departamento de Matemáticas, Facultad Experimental de Ciencias y Tecnología, Universidad de Carabobo. Venezuela.

Centro Multidisciplinario de Visualización y Cómputo Científico (CEMVICC), Universidad de Carabobo. Venezuela.

ORCID iD: 0000-0002-7253-7339

larodri@uc.edu.ve

Recibido: 7/07/2025, Revisado: 18/08/2025, Aceptado: 13/09/2025.

Resumen

Este artículo divulgativo presenta cuatro problemas conocidos: una aproximación griega a la raíz cuadrada de dos, la sucesión de Fibonacci, el problema de la ruina y las Torres de Hanói. Su formulación matemática conduce al estudio de una ecuación de recurrencia. Se introduce una revisión del método de resolución de ecuaciones de recurrencia lineal de segundo orden basado en el estudio del núcleo del operador de retardo lineal y, posteriormente, se aplica este método en la resolución de estas cuatro ecuaciones.

Palabras Clave: Aproximación a raíz cuadrada de dos, ecuaciones recurrentes, operador de retardo, problema de la ruina, sucesión de Fibonacci, torres de Hanói.

Four difference equations you should know

Abstract

This informative article presents four well-known problems: a Greek approximation to the square root of two, the Fibonacci sequence, the ruin problem, and the Towers of Hanói. Its mathematical formulation leads to the study of a recurrence equation. A review of the method for solving second-order linear recurrence equations based on the study of the kernel of the linear delay operator is introduced, and this method is then applied to the solution of these four equations.

Keywords: Approximation to square root two, Fibonacci sequence, recurrent equations, ruin problem, shift operator, towers of Hanoi.

1. Introducción

En este artículo se aborda el tema de las “Relaciones de recurrencia”, este es un tópico de suma importancia en la enseñanza de la teoría de la computación, en particular en cursos de matemáticas discretas y en el análisis de algoritmo [1]. Relaciones recurrentes (RR) aparecen en matemáticas historicamente en distinto períodos, como queda de manifiesto en los cuatro ejemplos estudiados: una aproximación de los griegos a la raíz de dos (380 a 385 a. C.) ver [7], la sucesión de Fibonacci (en el Liber Abacci en 1202) ver [3], el problema de la ruina (en 1657) ver [5] y las torres de Hanói (en 1883) ver [3].

Generalmente, una relación recurrente, ecuación en recurrencia o recurrencia es una sucesión $\{f_n\}$ que satisface

$$f_n = H(f_{n-1}, \dots, f_{n-k})$$

cuando H es una función lineal la recurrencia es lineal en otro caso no lineal. Los primeros $k - 1$ valores se conocen como condiciones iniciales. Resolver una relación de recurrencia significa expresar f_n en forma cerrada en función de n y (en caso de necesidad) de las condiciones iniciales. Se describe brevemente algunas de las técnicas de resolución para el caso lineal homogéneo y no homogéneo¹,

$$y_n = a_1 f_{n-1} + \dots + a_k f_{n-k} + g(n).$$

Una de las primeras formas de resolución de RR lineales es el método de sustitución. Este método requiere intuir la forma de la solución según las condiciones iniciales. A partir de la introducción de la técnica de demostración por inducción completa, este método de tipo empírico se puede formalizar al garantizar que la solución obtenida para el entero n es verdadera para todo $n \geq n_0$. ([4], pág. 19). Para aplicar este método se requieren amplios conocimientos, ingenio y experiencia.

El método de iteración consiste en expandir la recurrencia, paso a paso, aplicándola a sí misma. Así, la RR se convierte en suma (a veces producto) de términos que dependen solo de n y las condiciones iniciales. Posteriormente, se utilizan técnicas para evaluar sumas, [4], [6] para obtener la solución. A menudo

¹Cuando $g(n) \equiv 0$ la ecuación es homogénea en otro caso no homogénea.

se obtienen sumas de términos de series aritméticas o geométricas y se deben conocer las fórmulas correspondientes.

Métodos generales para la solución de una ecuación en recurrencia, consisten principalmente en: funciones generatrices, asociación de polinomio característico, operadores aniquiladores. El estudio general de RR empezó en 1718 con Abraham DeMoivre, este resolvió la relación de recurrencia de Fibonacci utilizando la función generadora. Leonhard Euler amplió la técnica en su estudio de las particiones de números enteros en 1748. Posteriormente, las funciones generadoras se desarrollaron aún más al combinarse con la teoría de la probabilidad, y surgió la función generadora de momentos, presentada por Pierre-Simon de Laplace en 1812, ver [2], [3].

En este trabajo, se presenta un método general para la resolución de ecuaciones recurrentes lineales de segundo orden homogéneas y no homogéneas al relacionar su solución con la determinación del núcleo de un operador. Este operador se define como un polinomio de segundo grado evaluado en el operador de retardo. Este método cae dentro del marco de operadores aniquiladores, este método utiliza elementos del álgebra lineal. La ventaja desde un punto de vista didáctico de este enfoque, es autocontenido y riguroso.

En la sección 2, introducimos algunos preliminares teóricos, en particular resolvemos la ecuación recurrente lineal de segundo orden homogénea. En el caso no homogéneo la inversión de operadores de la forma $I - \lambda T$ permite la construcción de una solución particular. La solución general se obtiene al sumar esta solución particular con la solución homogénea.

En la Sección 3, aplicamos este método a diversas ecuaciones en diferencias asociadas con problemas conocidos, incluyendo:

- Una aproximación griega a la raíz cuadrada de dos.
- La sucesión de Fibonacci.
- El problema de la ruina.
- El problema de las Torres de Hanói.

2. Preliminares teóricos

Introducimos algunas definiciones necesarias para abordar la temática.

Definición 1 Sea $\mathcal{L} = \{f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}\} = \{\{f_n\}_{n=1}^{\infty}\}$ el espacio vectorial de todas las sucesiones reales, dotado de las operaciones usuales de suma y multiplicación por escalar.

Definición 2 Definimos el operador de retardo $T : \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L}$ mediante $T(f_n) = f_{n+1}$.

Equivalentemente, si representamos la sucesión como $f = (f_1, f_2, f_3, \dots)$, entonces:

$$T(f_1, f_2, f_3, \dots) = (f_2, f_3, f_4, \dots).$$

Observación 1 El operador T es lineal, es decir, para cualesquiera $f, g \in \mathcal{L}$ y $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} T(f+g) &= T(f) + T(g) \\ T(\lambda f) &= \lambda T(f). \end{aligned}$$

2.1 Ecuación recurrente lineal de primer orden no homogénea

Una ecuación recurrente lineal de primer orden no homogénea se define por

$$f_{n+1} = \lambda f_n + b$$

para $\lambda, b \in \mathbb{R}$, $\lambda \neq 0$. Observemos que si definimos $T(x) = \lambda x + b$ la solución se encuentra al resolver el problema de punto fijo $x = T(x)$ la cual en este caso es $x = \frac{b}{1-\lambda}$, ver Figura 1.

Para esta ecuación no es difícil demostrar utilizando el principio de inducción que

$$f_n = \lambda^n f_0 + b \sum_{j=0}^{n-1} \lambda^j$$

y como $\sum_{j=0}^{n-1} \lambda^j = (1 - \lambda^n)/(1 - \lambda)$ se tiene que la solución de la ecuación esta dada por

$$f_n = \lambda^n f_0 + b \frac{1 - \lambda^n}{1 - \lambda}$$

como se observa gráficamente en la Figura 1, las composiciones sucesivas convergen al punto fijo, para $|\lambda| < 1$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n = \frac{b}{1 - \lambda}.$$

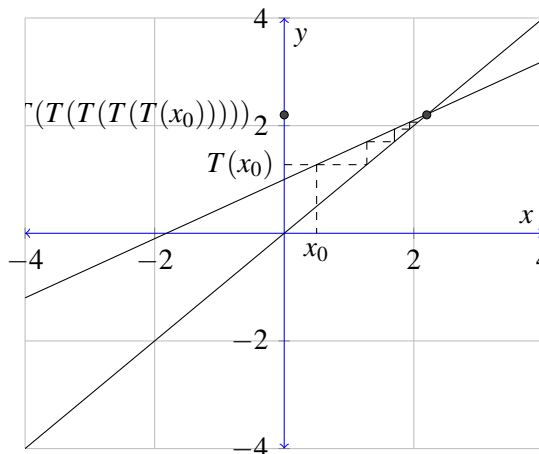


Figura 1. Representación gráfica de la ecuación de punto fijo. Fuente: propia.

2.2 Ecuación recurrente lineal de segundo orden

Considere una ecuación recurrente lineal de segundo orden definida por:

$$af_{n+1} + bf_n + cf_{n-1} = 0, \quad n \geq 2$$

para hallar su solución introducimos algunas definiciones previas.

Esta ecuación puede reescribirse en términos del operador T como:

$$(aT^2 + bT + cI)f_{n-1} = 0$$

donde $T^2 = T \circ T$ es la composición de T consigo mismo e I es el operador identidad.

Definición 3 El núcleo del operador $aT^2 + bT + cI$ es el conjunto:

$$N(aT^2 + bT + cI) = \{f \in \mathcal{L} : (aT^2 + bT + cI)f = 0\}$$

que corresponde exactamente al conjunto de soluciones de la ecuación recurrente.

El polinomio característico asociado a la ecuación es $P(\lambda) = a\lambda^2 + b\lambda + c$.

Supongamos que $P(\lambda)$ tiene raíces reales λ_1 y λ_2 (que pueden ser iguales). Entonces podemos factorizar el operador como:

$$aT^2 + bT + cI = a(T - \lambda_1 I)(T - \lambda_2 I).$$

Teorema 1 (Kreider [9]) Sean L_1, \dots, L_k operadores lineales en \mathcal{S} tales que, $L_i \circ L_j = L_j \circ L_i$, para todo $i, j = 1, \dots, k$ y $L = L_1 \circ \dots \circ L_k$ entonces si $f \in N_{L_i}$ para algún $i = 1, \dots, k$ entonces $f \in N_L$.

Demostración: Se tiene conmutando sucesivamente los operadores que,

$$\begin{aligned} L(f) &= L_1 \circ \dots \circ L_{i-1} \circ L_i \circ \dots \circ L_k(f) \\ &= L_1 \circ \dots \circ L_{i-1} \circ L_{i+1} \circ \dots \circ L_k \circ L_i(f) = 0. \end{aligned}$$

Observación 2 El teorema anterior permite un abordar el estudio para ecuaciones recurrentes de cualquier orden. Es válido para el operador derivada lo que permite el estudio de ecuaciones diferenciales lineales. Además, implica que $\bigoplus_{i=1}^k N_{L_i} = N_L$, donde el símbolo \bigoplus indica suma directa de subespacios, esto significa suma de subespacios cuyo elemento común es el vector cero.

Como una consecuencia del teorema anterior nos basta estudiar por separado los núcleos de los operadores $T - \lambda I$, estos corresponden a ecuaciones recurrentes lineales de primer orden con $b = 0$ como las que estudiamos en la sección 2.1. Consideremos el caso con raíces distintas.

Teorema 2 Si $\lambda_1 \neq \lambda_2$, entonces:

$$\begin{aligned} N(aT^2 + bT + cI) \\ = \{f \in \mathcal{L} : f_{n+1} = A\lambda_1^n + B\lambda_2^n, A, B \in \mathbb{R}\} \end{aligned}$$

Demostración: Dado que los operadores conmutan ($(T - \lambda_1 I)(T - \lambda_2 I) = (T - \lambda_2 I)(T - \lambda_1 I)$), tenemos:

$$\begin{aligned} N(aT^2 + bT + cI) \\ = N((T - \lambda_1 I)(T - \lambda_2 I)) \\ = N(T - \lambda_1 I) + N(T - \lambda_2 I). \end{aligned}$$

La suma es directa cuando $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Por lo tanto, cualquier solución es combinación lineal de las soluciones básicas λ_1^n y λ_2^n . El siguiente teorema estudia el caso de raíces repetidas.

Teorema 3 Si $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$, entonces:

$$\begin{aligned} N(aT^2 + bT + cI) \\ = \{f \in \mathcal{L} : f_{n+1} = (A\lambda^n + Bn\lambda^n), A, B \in \mathbb{R}\}. \end{aligned}$$

Demostración: Cuando hay una raíz doble, el operador se factoriza como $a(T - \lambda I)^2$. Además de la solución λ^n , se puede verificar que $n\lambda^n$ también es

solución. Estas dos soluciones son linealmente independientes y generan el espacio de soluciones.

De esta forma hemos encontrado como se expresan las soluciones a este tipo de ecuación recurrente.

2.3 Ecuación recurrente lineal de segundo orden no homogénea

Consideramos la ecuación recurrente con término no lineal

$$af_{n+1} + bf_n + cf_{n-1} = g_n,$$

escrita en términos del operador de retardo, así la ecuación anterior es equivalente a

$$(aT^2 + bT + cI)(f)_{n-1} = g_n$$

esto significa que g_n pertenece a la imagen del operador $(aT^2 + bT + cI)$ por lo tanto una preimagen de g_n , es decir, una solución particular de la recurrencia se obtiene al factorizar

$$(aT^2 + bT + cI) = a(T - \lambda_1 I) \circ (T - \lambda_2 I)$$

e invertir cada factor del operador

$$f_{n-1}^P = (T - \lambda_1 I)^{-1} \circ (T - \lambda_2 I)^{-1}((1/a)g_n).$$

Observación 3 La inversión de operadores de la forma $(T - \lambda I)$ puede realizarse mediante series de potencias bajo ciertas condiciones. Note que

$$T - \lambda I = -\lambda \left(I - \frac{1}{\lambda} T \right),$$

y formalmente,

$$(T - \lambda I)^{-1} = -\frac{1}{\lambda} \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{1}{\lambda} T \right)^j,$$

siempre que la serie converja. Lo que permite en algunos casos tener una expresión explícita de $\{f_n^P\}$.

Sea f una solución de la ecuación

$$af_{n+1} + bf_n + cf_{n-1} = g_n$$

entonces $(aT^2 + bT + cI)(f - f^P) = 0$, implica que $f - f^P \in N(aT^2 + bT + cI)$ concluimos que la solución general para la ecuación en recurrencia esta dada por $f_n^H + f_n^P$.

2.4 Estabilidad de las Soluciones

Estudiamos condiciones para que las soluciones de ecuaciones recurrentes tengan un comportamiento estable en el infinito.

Definición 4 Una solución $\{f_n\}$ de la ecuación recurrente se dice estable si $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n = 0$.

Teorema 4 Para la ecuación recurrente $af_{n+1} + bf_n + cf_{n-1} = 0$:

1. Si $|\lambda_1| < 1$ y $|\lambda_2| < 1$, todas las soluciones son estables.
2. Si $|\lambda_1| > 1$ o $|\lambda_2| > 1$, existen soluciones no acotadas.
3. Si $|\lambda_1| = 1$ o $|\lambda_2| = 1$, las soluciones pueden ser acotadas pero no necesariamente convergentes.

En algunos casos las ecuaciones en recurrencia están asociadas al cálculo del cardinal de un conjunto finito, por lo tanto el comportamiento en infinito deja de tener sentido. Aunque las series pueden ser usadas formalmente para obtener los cardinales de ciertos conjuntos.

3. Aplicaciones

A continuación se presenta la aplicación de la metodología descrita anteriormente a los problemas concretos cuya resolución queremos mostrar.

3.1 Aproximación Pitagórica a raíz de dos

Los antiguos griegos desarrollaron un ingenioso método para aproximar números inconmensurables, un concepto que, en el lenguaje matemático moderno, nos conduce a las recurrencias lineales. Para el caso específico de la raíz cuadrada de dos, propusieron las siguientes relaciones de recurrencia:

- $a_{n+1} = a_n + b_n$,
- $b_{n+1} = 2a_n + b_n$,

donde $n \geq 0$, $a_0 = 1$, $b_0 = 1$. Este sistema permite generar una sucesión de valores que se aproximan cada vez más al valor real de la raíz de dos,

$$a_{n+2} = 2a_{n+1} + a_n$$

con $a_0 = 1$ y $a_1 = 1$. Al resolver esta recurrencia observamos que el polinomio asociado es $\lambda^2 - 2\lambda - 1$ el cual tiene raíces $\lambda_1 = 1 + \sqrt{2}$ y $\lambda_2 = 1 - \sqrt{2}$ de donde la solución se expresa

$$a_n = C_1(1 + \sqrt{2})^n + C_2(1 - \sqrt{2})^n$$

al sustituir las condiciones iniciales $a_0 = 1$ y $a_1 = 1$ se tiene que $C_1 = C_2 = 1/2$ así

$$a_n = \frac{1}{2} \left[(1 + \sqrt{2})^n + (1 - \sqrt{2})^n \right]$$

al dividir la recursión $a_{n+1} = a_n + b_n$ entre a_n se obtiene

$$\frac{b_n}{a_n} = \frac{a_{n+1}}{a_n} - 1 = \frac{(1 + \sqrt{2})^{n+1} + (1 - \sqrt{2})^{n+1}}{(1 + \sqrt{2})^n + (1 - \sqrt{2})^n} - 1$$

y cuando n va a infinito la expresión converge a $(1 + \sqrt{2}) - 1 = \sqrt{2}$, la solución es estable.

Si calculamos los cuatro primeros términos de la sucesión de racionales $b_1/a_1 = 2$, $b_2/a_2 = 4/3 \approx 1,33$, $b_3/a_3 = 10/7 \approx 1,42$. Finalmente, $b_4/a_4 = 24/17 \approx 1,4118$ que aproxima $\sqrt{2}$ con un error de 10^{-2} .

3.2 La sucesión de Fibonacci

Leonardo de Pisa, un destacado matemático italiano del siglo XIII, más conocido como Fibonacci, nos presentó un fascinante problema relacionado con la cría de conejos, lo introdujo en el Liber Abacci en 1202.

Imagina un hombre que tiene una única pareja de conejos en un espacio cerrado. La pregunta es: ¿Cuántas parejas de conejos se producirán a partir de esta pareja inicial en el transcurso de un año, sabiendo que cada nueva pareja es capaz de reproducirse al segundo mes de vida, dando a luz a otra pareja cada mes?

Este intrigante problema dio origen a lo que hoy conocemos como la sucesión de Fibonacci, un concepto fundamental en las matemáticas con aplicaciones en diversos campos.

Denotamos por f_j el número de conejos procreados por mes. Tenemos que el problema puede ser expresado matemáticamente por las ecuaciones:

$$f_0 = 1, f_1 = 1 \text{ y } f_j = f_{j-1} + f_{j-2},$$

al usar la metodología de la sección 2, el polinomio asociado es $\lambda^2 - \lambda - 1$ cuyas raíces son

$$\lambda_1 = (1 - \sqrt{5})/2, \quad (1 + \sqrt{5})/2.$$

Esto nos lleva a la solución,

$$f_j = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^{j+1} - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^{j+1} \right].$$

3.3 El problema de la ruina

Imagina a Carlos y Nelson, dos jugadores enzarzados en una serie de partidas. Carlos tiene una probabilidad p de ganar, mientras que Nelson gana con una probabilidad q . Cada juego es independiente del anterior. Por cada partida, el perdedor le paga una moneda al ganador.

Carlos inicia con un capital de A monedas y Nelson con B monedas. El juego continúa hasta que uno de los dos se queda sin dinero, es decir, ¡Se arruina! La pregunta clave aquí es: ¿Cuál es la probabilidad de que Carlos se arruine?

Este es un enigma clásico, debatido por figuras históricas como Fermat y Pascal, y resuelto de forma magistral por Montmort. Se le conoce popularmente como el problema de la ruina del jugador. Para nuestra solución, nos basaremos en la presentación del libro [2]. ¡Vamos a resolverlo!

Para $1 \leq j \leq C - 1$ con $C = A + B$, sea f_j la probabilidad de que Carlos este arruinado, su capital después de una cantidad de juegos sea 0, dado que su capital era j . La solución del problema se reduce a encontrar f_A .

Se puede demostrar que,

$$f_j = pf_{j+1} + (1-p)f_{j-1}, \quad 1 \leq j \leq C-1$$

con las condiciones de frontera, $f_0 = 1$ y $f_C = 0$. Por la metodología introducida en la sección 2 tenemos que el polinomio asociado tiene raíces

$$\lambda_1 = \frac{1 + \sqrt{1 - 4p(p-1)}}{2p}, \quad \lambda_2 = \frac{1 - \sqrt{1 - 4p(p-1)}}{2p},$$

así la solución es $f_j = C_1 \lambda_1^j + C_2 \lambda_2^j$.

Resolvemos el problema completamente cuando $p = 1/2$ entonces $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ así la solución es

$$f_j = C_1 + jC_2$$

donde $f_0 = 1$ implica $C_1 = 1$ y $f_C = 1$ implica $C_2 = -1/(A+B)$ de donde

$$f_A = 1 - \frac{A}{A+B}$$

si $B \rightarrow \infty$ entonces **la probabilidad de ruina es 1**, la solución es estable. Este es el caso cuando un jugador se enfrenta contra una casa de juego y su capital es infimo comparado con el que usualmente tienen estas casas.

3.4 Recurrencia de las torres de Hanói

Las Torres de Hanói es un clásico rompecabezas matemático inventado en 1883 por el matemático francés Édouard Lucas. Este juego de mesa individual consiste en una serie de discos perforados de radio creciente, apilados en uno de los tres postes fijados a un tablero.

El objetivo del juego es trasladar toda la pila a otro poste, siguiendo una regla fundamental: nunca se puede colocar un disco más grande encima de uno más pequeño.

El número mínimo de movimientos necesarios para n discos se determina al resolver la siguiente ecuación de recurrencia $f_n = 2f_{n-1} + 1$ primero la solución de la ecuación homogénea $f_n = 2f_{n-1}$ es $f_n^H = 2^n f_0$ y para $f_0 = 1$ tenemos $f_n^H = 2^n$. La ecuación homogénea es equivalente a

$$\frac{1}{2}f_n - f_{n-1} = \frac{1}{2},$$

y en forma de operador tenemos

$$\left(I - \frac{1}{2}T \right) (f_{n-1}) = -\frac{1}{2}$$

entonces $f_{n-1}^P = \left(I - \frac{1}{2}T \right)^{-1} \left(-\frac{1}{2} \right)$ pero

$$\begin{aligned} \left(I - \frac{1}{2}T \right)^{-1} \left(-\frac{1}{2} \right) &= \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2} \right)^j \left(-\frac{1}{2} \right) \\ &= -\frac{1}{2} \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2} \right)^j = -1. \end{aligned}$$

así

$$f_n = f_n^H + f_n^P = 2^n - 1.$$

Agradecimientos

Gracias a Ricardo Ríos por su minuciosa lectura, a los árbitros anónimos y al editor del volumen Franzyuri Hernández. Sus sugerencias mejoraron sustancialmente el trabajo.

Referencias

- [1] Bakoev, V. (2010) The Recurrence relations in teaching students of informatics. *Informatics in Education*, Vol. 9, No. 2, 159–170.
- [2] Chung, K. (1979) *Elementary probability theory with stochastic process*. Springer Verlag, New York.
- [3] Cull, P., Flahive, M., Robson, R. (2005) *Difference equations: from rabbits to chaos*. Springer Verlag.
- [4] Graham, R., Knuth, D., Patashnik, O. (1998). *Concrete mathematics: a foundation for computer science* (2nd ed.). Addison-Wesley Professional.
- [5] Huygens, C. (1656) *De ratiociniis in ludo aleae* (sobre el cálculo en los juegos de azar).
- [6] Knuth, D. (1969). *The art of computer programming. Volume 1: fundamental algorithms*. Addison-Wesley, Reading, Massachusetts.
- [7] Filep, L. (1999) Pythagorean side and diagonal number. *Acta Mathematica Academiae Paedagogicae Nyíregyháziensis*. 15, Pp. 1-7, disponible www.bgytf.hu/amap.
- [8] Iribaren, I. (2012) Los griegos y la raíz cuadrada de dos. Mes de noviembre del calendario Matemático 2012. Ediciones Polar.
- [9] Kreider, D. (1966) *An introduction to linear analysis*. Addison-Wesley.



Resolución de sistemas lineales complejos simétricos provenientes de discretizar la ecuación de Helmholtz 1D

Carlos E. Cadenas R.^{1a}, Ángel Padilla¹

¹Departamento de Matemáticas, Facultad Experimental de Ciencias y Tecnología, Universidad de Carabobo. Venezuela.

^aCentro Multidisciplinario de Visualización y Cómputo Científico (CEMVICC), Universidad de Carabobo. Venezuela.

ORCID iD: 0000-0003-3828-2560^a

Correo electrónico del autor para correspondencia: ccadenas@uc.edu.ve^a

Recibido: 10/07/2025, Revisado: 20/08/2025, Aceptado: 15/09/2025.

Resumen

En este trabajo se considera dar soluciones a sistemas de ecuaciones lineales complejos simétricos no-hermitianos provenientes de discretizar la ecuación de *Helmholtz* 1D por el método de elementos finitos *Local Discontinuous Galerkin* (LDG). Se da una descripción del problema modelo y se presenta la metodología clásica de LDG para obtener un sistema de dos ecuaciones en diferencia. Para dar solución de manera rápida y eficaz a estos sistemas se propone una metodología en la que se comparan dos métodos tipo *Krylov* para sistemas de ecuaciones complejos simétricos. Finalmente se exponen los resultados de las pruebas numéricas realizadas.

Palabras Clave: Ecuación de Helmholtz, *Galerkin discontinuo local*, método COCR, método QMR, subespacios de Krylov.

Solution of symmetric complex linear systems from discretizing the equation of Helmholtz 1D

Abstract

In this work, it is considered to give solutions to symmetric complex linear systems of non-Hermitian equations from discretizing the Helmholtz 1D equation by the Local Discontinuous Galerkin (LDG) finite element method. We have a description of the model problem and we present the LDG classic methodology to obtain a system of two difference equations. To provide a quick and effective solution to these systems, a methodology is proposed in which two Krylov-type methods are compared for complex symmetric equation systems. Finally, the results of the numerical tests carried out are exposed.

Keywords: COCR method, Helmholtz equation, Krylov subspaces, *local discontinuous Galerkin*, QMR method.

1. Introducción

La ecuación de *Helmholtz* es un modelo matemático que describe el comportamiento de ondas elásticas, electromagnéticas y acústicas, la cual puede ser obtenida en muchas otras áreas de las Ciencias Básicas e Ingeniería. Sin embargo, resulta habitual que en la mayoría de los casos (2D, 3D con frontera irregular y/o no acotada) no se puedan obtener soluciones analíticas de este tipo de problemas. Debido a esto, en la práctica, resulta necesario usar métodos numéricos para dar aproximaciones numéricas de la solución. También es sabido que la solución exacta y la calidad de las aproximaciones numéricas dependen de un parámetro denominado número de onda k .

Hoy en día, existen muchos métodos que ayudan a estimar la solución a estos problemas. Estos métodos son: Diferencias Finitas, Elementos Finitos, Elementos de Contorno, Volúmenes Finitos, Elementos Finitos Galerkin Discontinuo, Elementos Espectrales, métodos sin mallas, métodos miméticos, entre otros.

La finalidad de este trabajo, es el estudio del método COCR (*Conjugate A-Orthogonal Conjugate Residual*, [42]), que es una extensión del método CR (*Conjugate Residual*, [40]) para sistemas lineales complejos simétricos. Se busca aproximar la solución numérica del sistema lineal resultante, luego de discretizar la ecuación de *Helmholtz* 1D por el método LDG (*Local Discontinuous Galerkin*, [17, 18, 20]) que es un caso particular dentro de los métodos de DG (*Discontinuous Galerkin*, [2, 3, 6, 41, 44]). Además, se utiliza el método QMR (*Quasi Minimal Residual*) para comparar los resultados de convergencia y tiempo de ejecución ya que son más eficientes que los métodos tipo gradiente conjugado, [7, 29] y los métodos iterativos evaluados en los números reales para resolver sistemas lineales simétricos complejos, [4, 21].

Es de destacar que el método COCR ha sido utilizado para resolver ecuaciones de propagación de ondas acústicas y electromagnéticas cuando se utilizan diversos métodos, como lo son: diferencias finitas, elementos finitos y en muchos casos se combinan con métodos de descomposición de dominios [5, 23, 27, 30–33, 36–38, 43]. Sin embargo los autores desconocen de su utilización a los sistemas simétricos complejos obtenidos con el método LDG.

2. Planteamiento del Problema

El estudio de dispersión de ondas acústicas en una dimensión conlleva al estudio y formulación de un problema de contorno basado en una ecuación diferencial ordinaria la cual es conocida como la ecuación de *Helmholtz*:

$$p'' + k^2 p = 0 \quad (1)$$

donde p es la presión de la onda acústica y k es el número de onda.

El caso que nos compete se refiere a una onda de presión (incidente) que choca con una pared infinita o plano. Dicha presión viene dada por la ecuación: $\hat{p}_{inc}(x, t) = e^{ikt} e^{-iwt} = p_{inc}(x) e^{-iwt}$, donde k es el número de onda y w la frecuencia. Por ser este un problema de dispersión de ondas en dominios exteriores, es necesario imponer una condición de contorno en el infinito del tipo Sommerfeld, vea [22]. A este efecto el plano modela una pared rígida localizada en $x = 0$. Después de descomponer la presión como: $p(x) = p_{inc}(x) + p_{sc}(x)$, el problema con valores en la frontera que satisface la presión de dispersión $p_{sc}(x)$ se reduce a:

$$\begin{cases} p_{sc}'' + k^2 p_{sc} = 0, & 0 < x < 1, \\ p_{sc}'(0) = ik \\ \frac{dp_{sc}}{dx}(1) - ikp_{sc}(1) = 0. \end{cases} \quad (2)$$

La segunda y tercera ecuación de (2) son la condición de pared rígida, y la ya mencionada *Condición de Sommerfeld*. La solución al problema con valores en la frontera descrito por (2), es la onda estacionaria $p_{sc}(x) = e^{ikx}$. La utilización de este enfoque unidimensional es común para comparar métodos y sus prestaciones. Entre algunos de ellos que se pueden mencionar se encuentran [9–12, 16]. También se han utilizado otros métodos de elementos finitos del tipo Galerkin Discontinuo para resolver la ecuación de *Helmholtz*, como lo son: [1, 24–26, 34].

3. Aplicación del Método Local Galerkin Discontinuos (LDG)

En el caso que nos compete se considerará la ecuación de *Helmholtz* homogénea en 1D:

$$u'' + k^2 u = 0 \quad \text{en } \Omega. \quad (3)$$

Para resolver la ecuación (3) por el método *LDG* ([3] y [19]), primero es necesario expresar dicha ecuación como un sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden. Para ello, se utiliza la variable auxiliar $q = u'$, obteniéndose el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} q - u' = 0, & \text{en } \Omega; \\ q' + k^2 u = 0 & \text{en } \Omega. \end{cases} \quad (4)$$

Luego, este sistema es transformado en otro sistema equivalente, pero elemento a elemento. Por ello, es necesario hacer una discretización del dominio e introducir condiciones de frontera entre elementos.

Sean Ω^h particiones regulares de Ω en subdominios Ω_i (es decir, $\bar{\Omega} = \bigcup \bar{\Omega}_i$ con $\Omega_i \cap \Omega_j = \emptyset$ para $i \neq j$), $\hat{\Omega} = \bigcup \Omega_i$ y $\Gamma = \bigcup (\bar{\Omega}_i \cap \bar{\Omega}_j)$, luego la formulación del problema (4) quedaría:

$$\begin{cases} q - u' = 0, & \text{en } \bar{\Omega}; \\ q' + k^2 u = 0 & \text{en } \bar{\Omega} \\ [[u]] = 0, & \text{en } \Gamma \\ [[q]] = 0, & \text{en } \Gamma \end{cases} \quad (5)$$

donde el operador de salto $[[\cdot]]$ es definido sobre los nodos frontera x_j , usando los valores a la derecha y a la izquierda que denotaremos por $+$ y $-$ respectivamente, por lo que $[[u]] \equiv u^+ - u^-$ y $[[q]] \equiv q^+ - q^-$.

Usando el procedimiento clásico del *LDG* en el intervalo (x_j, x_{j+1}) , para la primera ecuación del sistema (5) obtenemos:

$$\int_{x_j}^{x_{j+1}} (q - u') v dx = 0$$

e integrando por partes

$$\int_{x_j}^{x_{j+1}} q v dx + \int_{x_j}^{x_{j+1}} u v' dx - \hat{u}_{j+1} v(x_{j+1}^-) + \hat{u}(x_j^+) v(x_j^+) = 0. \quad (6)$$

Similarmente para la segunda ecuación del sistema (5) e integrando por partes obtenemos:

$$\int_{x_j}^{x_{j+1}} (q' + k^2 u) \tau dx = 0$$

$$\int_{x_j}^{x_{j+1}} q \tau' dx - k^2 \int_{x_j}^{x_{j+1}} u \tau dx + \hat{q}_j \tau(x_j^+) - \hat{q}_{j+1} \tau(x_{j+1}^-) = 0 \quad (7)$$

donde los flujos en (6) y (7) son definidos en función de los operadores promedio y salto:

$$\begin{aligned} \{|u_j|\} &= \frac{1}{2}(U_j^+ + U_j^-) \quad (\text{promedio}) \\ [[u_j]] &= U_j^+ - U_j^- \quad (\text{salto}) \\ \{|q_j|\} &= \frac{1}{2}(Q_j^+ + Q_j^-) \quad (\text{promedio}) \\ [[q_j]] &= Q_j^+ - Q_j^- \quad (\text{salto}) \end{aligned}$$

así, los flujos \hat{u}_j y \hat{q}_j vienen dados por:

$$\begin{aligned} \hat{u}_j &= \{|u_j|\} - C_{12} [[u_j]] + C_{22} [[q_j]] \\ \hat{q}_j &= \{|q_j|\} - C_{11} [[u_j]] + C_{12} [[q_j]]. \end{aligned}$$

Para el método *LDG* $C_{22} = 0$, por lo tanto, solo se tienen a C_{11} y C_{12} como parámetros del método. De esta manera, los flujos quedan expresados como:

$$\begin{aligned} \hat{u}_j &= \frac{1}{2}(U_j^+ + U_j^-) - C_{12}(U_j^+ - U_j^-) \\ \hat{q}_j &= \frac{1}{2}(Q_j^+ + Q_j^-) - C_{11}(U_j^+ - U_j^-) + C_{12}(Q_j^+ - Q_j^-) \end{aligned}$$

con los valores discretos

$$U_j^+ \equiv \lim_{x \rightarrow x_j^+} u(x), \quad U_j^- \equiv \lim_{x \rightarrow x_j^-} u(x),$$

$$Q_j^+ \equiv \lim_{x \rightarrow x_j^+} q(x) \quad \text{y} \quad Q_j^- \equiv \lim_{x \rightarrow x_j^-} q(x).$$

3.1 Ecuaciones en Diferencia usando Aproximación Lineal

En esta sección, presentamos el procedimiento clásico para obtener las ecuaciones en diferencia expresadas en la variable principal U cuando se usan funciones de prueba y bases lineales para u , q , v y τ en el sistema (6) y (7), véase [13, 15].

Primero, sean las aproximaciones $u_h = \varphi_j U_j^+ + \varphi_{j+1} U_{j+1}^-$ y $q_h = \varphi_j Q_j^+ + \varphi_{j+1} Q_{j+1}^-$ de u y q respectivamente, con las funciones bases lineales φ_j y φ_{j+1} definidas en (x_j, x_{j+1}) . Si usamos las funciones de prueba $\tau_j = \varphi_j$ y $\tau_j = \varphi_{j+1}$ en (6) y $v_j = \tau_j$ y $v_j = \varphi_{j+1}$ en (7) en conjunto con las aproximaciones u_h y q_h , obtenemos las siguientes ecuaciones:

$$\left(\frac{1}{2} - C_{12}\right) U_j^- + C_{12} U_j^+ - \frac{1}{2} U_{j+1}^- + \frac{h}{3} Q_j^+ + \frac{h}{6} Q_{j+1}^- = 0 \quad (8)$$

$$\frac{1}{2} U_j^+ + C_{12} U_{j+1}^- - \left(\frac{1}{2} + C_{12}\right) U_{j+1}^+ + \frac{h}{6} Q_j^+ + \frac{h}{3} Q_{j+1}^- = 0 \quad (9)$$

y

$$- C_{11}U_j^- + \left(C_{11} - k^2\frac{h}{3}\right)U_j^+ - k^2\frac{h}{6}U_{j+1}^- + \left(\frac{1}{2} + C_{12}\right)Q_j^- - C_{12}Q_j^+ + \frac{1}{2}Q_{j+1}^- = 0 \quad (10)$$

$$- k^2\frac{h}{6}U_j^+ + \left(C_{11} - k^2\frac{h}{3}\right)U_{j+1}^- - C_{11}U_{j+1}^+ + \frac{1}{2}Q_j^+ - C_{12}Q_{j+1}^- - \left(\frac{1}{2} - C_{12}\right)Q_{j+1}^+ = 0 \quad (11)$$

respectivamente, donde $h = x_{j+1} - x_j$.

Ahora, resolviendo el sistema de ecuaciones formado por (8) y (9), se obtiene:

$$hQ_j^+ = (4C_{12} - 2)U_j^- - (4C_{12} - 1)U_j^+ + (2C_{12} + 2)U_{j+1}^- - (2C_{12} + 1)U_{j+1}^+ \quad (12)$$

$$hQ_{j+1}^- = (1 - 2C_{12})U_j^- - (2C_{12} - 2)U_j^+ + (4C_{12} + 1)U_{j+1}^- - (4C_{12} + 2)U_{j+1}^+ \quad (13)$$

Sustituyendo (12) y (13) (con las traslaciones adecuadas) en (10) y (11), se obtiene el sistema de ecuaciones en diferencia

$$AU_{j-1}^- + BU_{j-1}^+ + CU_j^- + DU_j^+ + EU_{j+1}^- + BU_{j+1}^+ = 0; \quad (14)$$

$$HU_{j-1}^- + EU_{j-1}^+ + GU_j^- + CU_j^+ + HU_{j+1}^- + AU_{j+1}^+ = 0; \quad (15)$$

donde, $A = 1 - 4C_{12}^2$,

$B = 4C_{12}^2 - 2C_{12} - 2$,

$C = -(16C_{12}^2 + 2 + 2C_{11}h)$,

$D = 16C_{12}^2 + 4C_{12} + 4 + 2C_{11}h - \frac{2}{3}k^2h^2$,

$E = 1 - 4C_{12}^2 - \frac{1}{3}k^2h^2$;

$G = 16C_{12}^2 - 4C_{12} + 4 + 2C_{11}h - \frac{2}{3}k^2h^2$ y

$H = 4C_{12}^2 + 2C_{12} - 2$.

Con este par de ecuaciones, (14) y (15), y al utilizar las condiciones de contorno se genera el sistema de ecuaciones lineales simétricos no hermitiano a resolver para el caso que se utilice el método de LDG con funciones de forma lineales.

3.2 Ecuaciones en Diferencia usando Aproximaciones Cuadráticas

En esta sección, presentamos un procedimiento similar al de la sección (3.1) para obtener una ecuación en diferencia expresada solo en la variable principal U cuando se usan funciones de prueba y base cuadráticas para u , q , v y τ en el sistema formado por (6) y (7). La diferencia con la sección (3.1) radica en que

aparecen incorporados nuevos valores (es decir, $U_{j+\frac{1}{2}}$ y $Q_{j+\frac{1}{2}}$ en la discretización, por lo que es necesario eliminarlos.

Primero, utilizando las funciones de base cuadrática φ_j , $\varphi_{j+\frac{1}{2}}$ y φ_{j+1} y las aproximaciones $u_h = \varphi_j U_j^+ + \varphi_{j+\frac{1}{2}} U_{j+\frac{1}{2}} + \varphi_{j+1} U_{j+1}^-$ y $q_h = \varphi_j Q_j^+ + \varphi_{j+\frac{1}{2}} Q_{j+\frac{1}{2}} + \varphi_{j+1} Q_{j+1}^-$ de u y q respectivamente. Usando las funciones de prueba $v_j = \varphi_j$, $v_j = \varphi_{j+\frac{1}{2}}$ y $v_j = \varphi_{j+1}$ dadas, en (6), se obtienen las siguientes ecuaciones:

$$\left(\frac{1}{2} - C_{12}\right)U_j^- + C_{12}U_j^+ - \frac{2}{3}U_{j+\frac{1}{2}} + \frac{1}{6}U_{j+1}^- + \frac{2h}{15}Q_j^+ + \frac{h}{15}Q_{j+\frac{1}{2}} - \frac{h}{30}Q_{j+1}^- = 0 \quad (16)$$

$$\frac{2}{3}U_j^+ - \frac{2}{3}U_{j+1}^- + \frac{h}{15}Q_j^+ + \frac{8h}{15}Q_{j+\frac{1}{2}} + \frac{h}{15}Q_{j+1}^- = 0 \quad (17)$$

$$-\frac{1}{6}U_j^+ + U_{j+\frac{1}{2}} + C_{12}U_{j+1}^- - \left(\frac{1}{2} + C_{12}\right)U_{j+1}^+ - \frac{h}{30}Q_j^+ + \frac{h}{15}Q_{j+\frac{1}{2}} + \frac{2h}{15}Q_{j+1}^- = 0. \quad (18)$$

Luego, sustituyendo $\tau_j = \varphi_j$, $\tau_j = \varphi_{j+\frac{1}{2}}$ y $\tau_j = \varphi_{j+1}$ en la ecuación (7), obtenemos:

$$-C_{11}U_j^- + \left(C_{11} - \frac{2k^2h}{15}\right)U_j^+ - \frac{k^2h}{15}U_{j+\frac{1}{2}} + \frac{2k^2h}{30}U_{j+1}^- + \left(\frac{1}{2} + C_{12}\right)Q_j^- - C_{12}Q_j^+ - \frac{2}{3}Q_{j+\frac{1}{2}} + \frac{1}{6}Q_{j+1}^- = 0 \quad (19)$$

$$-\frac{k^2h}{15}U_j^+ - \frac{8k^2h}{15}U_{j+\frac{1}{2}} - \frac{k^2h}{15}U_{j+1}^- + \frac{2}{3}Q_j^+ - \frac{2}{3}Q_{j+1}^- = 0 \quad (20)$$

$$\frac{k^2h}{30}U_j^+ - \frac{k^2h}{15}U_{j+\frac{1}{2}} + \left(C_{11} - \frac{2k^2h}{15}\right)U_{j+1}^- - C_{11}U_{j+1}^+ - \frac{1}{6}Q_j^+ + \frac{2}{3}Q_{j+\frac{1}{2}} - C_{12}Q_{j+1}^- + \left(C_{12} - \frac{1}{2}\right)Q_{j+1}^+ = 0. \quad (21)$$

Con estas seis ecuaciones ((16) a la (21)) se pueden eliminar los valores $U_{j+\frac{1}{2}}$ y $Q_{j+\frac{1}{2}}$. Por lo tanto, el sistema resultante puede escribirse en la forma dada por las ecuaciones (14) y (15), donde,

$$A = 18(k^2h^2 - 20)(4C_{12}^2 - 1)$$

$$B = 12(2C_{12} + 1)(3(1 - C_{12})k^2h^2 + 20(3C_{12} - 1))$$

$$C = -24(18C_{12}^2 + C_{11}h + 1)k^2h^2$$

$$+ 240(12C_{12}^2 + C_{11}h + 2)$$

$$D = -k^4h^4 + (24(2C_{12} + 1)(9C_{12} - 1)$$

$$+ 8(3C_{11}h + 19))k^2h^2 - 240(12C_{12}^2 + 2C_{12} + C_{11}h + 3)$$

$$E = k^4h^4 + 2(36C_{12}^2 - 19)k^2h^2 + 360(1 - 4C_{12}^2)$$

$$G = -3k^4h^4 + (24(2C_{12} - 1)(9C_{12} + 1)$$

$$+ 8(3C_{11}h + 19))k^2h^2 - 240(12C_{12}^2 - 2C_{12} + C_{11}h + 3)$$

$$H = 12(2C_{12} - 1)(-3(1 + C_{12})k^2h^2 + 20(3C_{12} + 1)).$$

También, es fácil concluir que aunque se aplique el método LDG de mayor orden se puede obtener esta estructura.

4. Métodos utilizados para resolver los sistemas lineales

4.1 Métodos basados en Subespacios de Krylov

Los métodos iterativos tipo *Krylov*, [35], utilizados para la resolución de grandes sistemas lineales se obtienen para adaptarse, en principio, a dos requerimientos básicos, esto es, minimizar una cierta norma del vector residuo sobre un subespacio de *Krylov* generado por la matriz del sistema y que se traduce en una convergencia suave sin grandes fluctuaciones y ofrecer un bajo costo computacional por iteración sin exigir alta disponibilidad de almacenaje. Los métodos basados en los subespacios de *Krylov*, se han desarrollado para la resolución de grandes sistemas de ecuaciones lineales:

$$Ax = b \quad (22)$$

donde la matriz A es no singular y de tipo *sparse*. Estos métodos se basan en un proceso de proyección sobre un subespacio de *Krylov* que es generado por vectores de la forma $p(A)v$. Esto es, se aproxima $A^{-1}b$ por $p(A)v$ donde $p(A)$ es un polinomio matricial elegido adecuadamente.

4.1.1 Sistemas Lineales Complejos Simétricos

Consideramos sistemas lineales grandes tipo *sparse*:

$$Ax = b, \quad A \in \mathbb{C}^{n \times n} \quad \text{con} \quad x, b \in \mathbb{C}^n$$

donde A es compleja simétrica pero no-hermitiana, es decir, $A = A^T = A^H$

4.1.2 Subespacios de Krylov

Sea $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ y $0 \neq b \in \mathbb{C}^n$. Entonces, llamaremos al subespacio

$$K_k(A, b) = (b, Ab, A^2b, \dots, A^{k-1}b) \quad (23)$$

subespacio de *Krylov* de orden k asociado a A y b .

4.2 Método COCR

Sea x_n la n -ésima aproximación de la solución al utilizar un método iterativo. Entonces, el n -ésimo

vector residual $r_n = b - Ax_n$ y la dirección de búsqueda p_n para el método *COCR* vienen dadas por las siguientes fórmulas recurrentes:

$$r_0 = b - Ax_0, \quad p_0 = r_0 \quad (24)$$

$$r_n = r_{n-1} - \alpha_{n-1}Ap_{n-1} \quad (25)$$

$$p_n = r_n - \beta_{n-1}p_{n-1}, \quad \text{para } n = 1, 2, \dots \quad (26)$$

Para determinar luego los escalares α_{n-1} y β_{n-1} en las recurrencias (25) y (26), se tienen las siguientes condiciones de ortogonalidad:

$$r_n \perp W \quad \text{y} \quad Ap_n \perp W. \quad (27)$$

Como vemos en (27), es necesario elegir un subespacio W para determinar estos parámetros, por lo tanto, si haciendo el cambio $W = \bar{A}K_n(\bar{A}, \bar{r}_0)$ y eligiendo las condiciones de ortogonalidad para el método *COCR*:

$$r_n \perp \bar{A}K_n(\bar{A}, \bar{r}_0) \quad \text{y} \quad Ap_n \perp \bar{A}K_n(\bar{A}, \bar{r}_0) \quad (28)$$

se presenta el proceso para determinar los escalares α_{n-1} y β_{n-1} usando las recurrencias (25) y (26) junto a las condiciones de ortogonalidad dadas en (28).

Para determinar α_{n-1} , a partir de (25) se sigue que el producto interno entre $\bar{A}^n \bar{r}_0$ y r_n es calculado de la siguiente manera:

$$(\bar{A}^n \bar{r}_0, r_n) = (\bar{A}^n \bar{r}_0, r_{n-1}) - \alpha_{n-1}(\bar{A}^n \bar{r}_0, Ap_{n-1}).$$

Ya que $\bar{A}^n \bar{r}_0 \in \bar{A}K_n(\bar{A}, \bar{r}_0)$, entonces $(\bar{A}^n \bar{r}_0, r_n) = 0$ por la condición (28). Luego, despejando α_{n-1} , nos queda:

$$\alpha_{n-1} = \frac{(\bar{A}^n \bar{r}_0, r_{n-1})}{(\bar{A}^n \bar{r}_0, Ap_{n-1})}. \quad (29)$$

Ahora, para determinar β_{n-1} a partir de (26) se sigue que el producto interno entre $\bar{A}^n \bar{r}_0$ y Ap_n nos queda de la siguiente manera:

$$(\bar{A}^n \bar{r}_0, Ap_n) = (\bar{A}^n \bar{r}_0, Ar_n) + \beta_{n-1}(\bar{A}^n \bar{r}_0, Ap_{n-1}).$$

Luego, por la condición (28), $(\bar{A}^n \bar{r}_0, Ap_n) = 0$; así:

$$\beta_{n-1} = \frac{(\bar{A}^n \bar{r}_0, Ar_n)}{(\bar{A}^n \bar{r}_0, Ap_{n-1})} = -\alpha_{n-1} \frac{(\bar{A}^n \bar{r}_0, Ap_n)}{(\bar{A}^n \bar{r}_0, r_{n-1})}. \quad (30)$$

Ahora, notemos que de las recurrencias (24), (25) y (26), los vectores $\bar{A}r_{n-1}$ y $\bar{A}p_{n-1}$ pueden ser reescritos como:

$$\bar{A}\bar{r}_{n-1} = \bar{c}_{n-1}\bar{A}^n\bar{r}_0 + \bar{A}\bar{z}_1, \quad \bar{A}\bar{z}_1 \in \bar{A}K_n(\bar{A}, \bar{r}_0) \quad (31)$$

$$\bar{A}\bar{p}_{n-1} = \bar{c}_{n-1}\bar{A}^n\bar{r}_0 + \bar{A}\bar{z}_2, \quad \bar{A}\bar{z}_2 \in \bar{A}K_n(\bar{A}, \bar{r}_0) \quad (32)$$

donde $\bar{c}_{n-1} = (-1)^{n-1} \prod_{i=0}^{n-2} \alpha_i$.

Entonces, a partir de (31), (32) y de la condición (28), podemos reescribir el escalar α_{n-1} como:

$$\begin{aligned} \alpha_{n-1} &= \frac{(\bar{A}\bar{r}_{n-1}, r_{n-1}) - (\bar{A}\bar{z}_1, r_{n-1})}{(\bar{A}p_{n-1}, Ap_{n-1}) - (\bar{A}\bar{z}_2, Ap_{n-1})} \\ &= \frac{(\bar{A}\bar{r}_{n-1}, r_{n-1})}{(\bar{A}p_{n-1}, Ap_{n-1})}. \end{aligned} \quad (33)$$

Similarmente, tenemos que la fórmula para β_{n-1} en (30) viene dada por:

$$\beta_{n-1} = -\alpha_{n-1} \frac{(\bar{A}p_{n-1} - \bar{A}\bar{z}_2, r_n)}{(\bar{A}\bar{r}_{n-1} - \bar{A}\bar{z}_1, r_{n-1})}.$$

Como $\bar{A}\bar{z}_1$ y $\bar{A}\bar{z}_2$ son \bar{A} -ortogonal, entonces $\bar{A}\bar{z}_1$ y $\bar{A}\bar{z}_2$ son \bar{A} -ortogonal con r_j , esto es, $(\bar{A}\bar{z}_1, Ar_j) = 0$ y $(\bar{A}\bar{z}_2, Ar_j) = 0$ para $j = 0, 1, \dots, n$ por lo tanto:

$$\beta_{n-1} = -\alpha_{n-1} \frac{(\bar{A}p_{n-1}, r_n)}{(\bar{A}\bar{r}_{n-1}, r_{n-1})}. \quad (34)$$

Ahora, de (25) podemos ver que:

$$-\alpha_{n-1}Ap_{n-1} = r_n - r_{n-1}. \quad (35)$$

Sustituyendo (35) en (34), obtenemos:

$$\beta_{n-1} = \frac{(\bar{A}\bar{r}_n, r_n - r_{n-1})}{(\bar{A}\bar{r}_{n-1}, r_{n-1})}$$

pero $(\bar{A}\bar{r}_{n-1}, r_{n-1}) = 0$ por (28), por lo tanto, la fórmula para el escalar β_{n-1} nos queda de la siguiente forma:

$$\beta_{n-1} = \frac{(\bar{A}\bar{r}_n, r_n)}{(\bar{A}\bar{r}_{n-1}, r_{n-1})}. \quad (36)$$

Finalmente, de la relación (25) y sabiendo que $r_n = b_n - Ax_n$, la n -ésima aproximación de la solución x_n en el método viene dada por:

$$x_n = x_{n-1} + \beta_{n-1}p_{n-1}. \quad (37)$$

4.3 Biortogonalización de Lanczos

El algoritmo propuesto por Lanczos para matrices no simétricas construye, un par de bases biortogonales v_1, \dots, v_m y w_1, \dots, w_m para los subespacios:

$$K_m(A, v_1) = \text{span}\{v_1, Av_1, \dots, A^{m-1}v_1\}$$

y

$$K_m(A^T, w_1) = \text{span}\{w_1, A^T w_1, \dots, (A^T)^{m-1}w_1\}$$

respectivamente.

La idea es obtener dos matrices V_m y W_m formadas por los vectores v_1, \dots, v_m y w_1, \dots, w_m respectivamente, de manera que se tridiagonalice la matriz A , esto es:

$$W_m^T AV_m = T_m.$$

Además, como las bases son biortogonales, se satisface que:

$$W_m^T V_m = I_m.$$

4.4 Método QMR

El método QMR (*Quasi Minimal Residual*) es similar al método GMRES, [39], y fue propuesto por Freund y Nachtigal, [28].

A partir del algoritmo de Lanczos se puede demostrar que:

$$AV_m = V_{m+1}\bar{T}_m \quad (38)$$

donde \bar{T}_m es una matriz diagonal $(m+1) \times m$

$$\bar{T}_m = \begin{pmatrix} T_m \\ \delta_{m+1}e_m^T \end{pmatrix}.$$

Si v_1 está definido como un múltiplo de r_0 , es decir, $v_1 = \beta r_0$, el vector residual está dado por:

$$\begin{aligned} b - Ax &= b - A(x_0 + V_m y) \\ &= r_0 - AV_m y \\ &= \beta v_1 - V_{m+1} \bar{T}_m y \\ &= V_{m+1} (\beta e_1 - \bar{T}_m y). \end{aligned}$$

La norma del vector residual es por lo tanto,

$$\|b - Ax\| = \|V_{m+1}(\beta e_1 - \bar{T}_m y)\|_2.$$

Si los vectores columna de V_{m+1} fueran ortonormales, entonces se podría tener que $\|b - Ax\| = \|\beta e_1 - \bar{T}_m y\|_2$, como en GMRES. Por consiguiente, una solución de mínimos cuadrados puede ser obtenida del subespacio de *Krylov* minimizando $\|\beta e_1 - \bar{T}_m y\|_2$ sobre y . En el algoritmo de *Lanczos*, los v_i no son ortogonales, sin embargo, es aún razonable la idea de minimizar la función

$$J(y) = \|\beta e_1 - \bar{T}_m y\|_2 \quad (39)$$

sobre y y calcular la solución aproximada correspondiente $x_0 + V_m y$.

De esta manera la aproximación QMR del subespacio de *Krylov* de dimensión m es obtenida como $x_0 + V_m y_m$, donde y_m minimiza la función (34).

5. Pruebas Numéricas

Esta sección está dedicada a la aplicación de los algoritmos desarrollados anteriormente e implementados en MATLAB. Concretamente, se ha prestado especial atención a sistemas resultantes de la discretización del problema de *Helmholtz* 1D. El objetivo que se persigue es comprobar la efectividad de los algoritmos, y realizar un estudio comparativo entre ellos.

En las diferentes pruebas, realizadas con un computador portátil modelo *HP CORE I7 Pavilion Dv6*, se ha fijado un valor de tolerancia igual a 10^{-15} en todos los casos. Los resultados son expuestos mediante curvas de convergencia, en las que se representa el número de iteraciones y/o tiempo de CPU respecto a la norma del residual necesarios para alcanzar la tolerancia predeterminada.

El caso que nos compete se refiere a una onda de presión (incidente) que choca con un plano. La ecuación de la presión viene dada por: $\hat{p}_{inc}(x, t) = e^{ikt} e^{-iwt} = p_{inc}(x) e^{-iwt}$, donde k es el número de onda y w la frecuencia. A este efecto, el plano modela una pared rígida localizada en $x = 0$ (ver 2).

A continuación, se muestran los casos estudiados:

5.1 Ejemplo 1

Se aplicó el método LDG al problema planteado en (2) con los siguientes parámetros: número de onda $k = 100$, grado del polinomio $p = 5, \beta = 0$, $C_{12} = 1/2$ y número de intervalos $N = 20$. Luego de discretizar, el método genera una matriz compleja simétrica de orden 126×126 . En la figura a continuación podemos observar las curvas solución que representan la solución exacta (rojo) y la aproximada (azul) del método LDG:

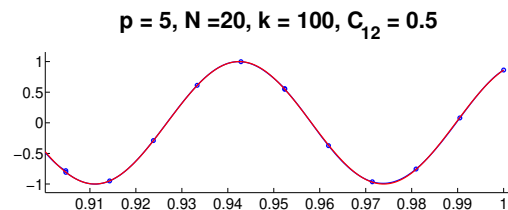


Figura 1. Solución para LDG con $k = 100$, $p = 5$, $C_{12} = 1/2$, $\beta = 0$ y $N = 20$.

Ahora aplicamos los métodos QMR y COCR a la matriz resultante luego de la discretización para obtener los siguientes resultados:

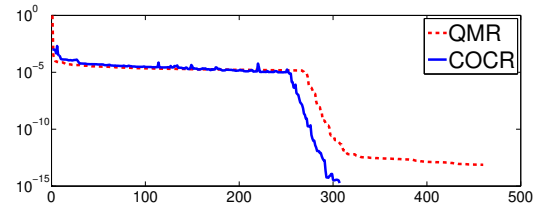


Figura 2. Curvas de convergencia para los métodos QMR y COCR.

En la siguiente tabla se muestran los resultados obtenidos por ambos métodos:

Método	Iteraciones	Tiempo
COCR	308	0,15819117
QMR	458	0,36488808

Tabla 1. Ejemplo 1: número de iteraciones, tiempo de CPU en segundos para los métodos QMR y COCR.

5.2 Ejemplo 2

Similarmente, se aplicó el método LDG al problema planteado en (2) con los siguientes parámetros: número de onda $k = 200$, grado del polinomio

$p = 8, \beta = 0, C_{12} = 0$ y número de intervalos $N = 30$. Luego de discretizar, el método genera una matriz compleja simétrica de orden 279×279 . En la figura a continuación podemos observar las curvas solución que representan la solución exacta (rojo) y la aproximada (azul) del método LDG:

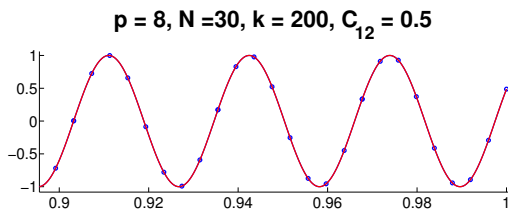


Figura 3. Solución para LDG con $k = 200, p = 8, C_{12} = 0, \beta = 0$ y $N = 30$.

Ahora aplicamos los métodos QMR y COCR a la matriz resultante luego de la discretización para obtener los siguientes resultados:

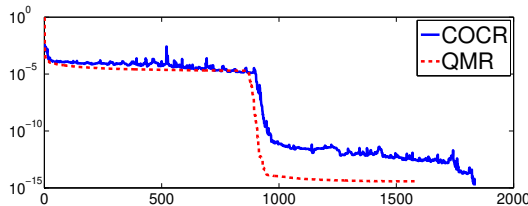


Figura 4. Curvas de convergencia para los métodos QMR y COCR.

En la siguiente tabla se muestran los resultados obtenidos por ambos métodos:

Método	Iteraciones	Tiempo
COCR	1835	1,3941741
QMR	1492	1,6948232

Tabla 2. Ejemplo 2: número de iteraciones, tiempo de CPU en segundos para los métodos QMR y COCR.

5.3 Ejemplo 3

De nuevo se aplicó el método LDG al problema planteado en (2) ahora con los siguientes parámetros: número de onda $k = 1000$, grado del polinomio $p = 12, \beta = 0, C_{12} = 1/2$ y número de intervalos $N = 35$. Luego de discretizar, el método genera una matriz compleja simétrica de orden 468×468 . En la figura a continuación podemos observar las curvas

solución que representan la solución exacta (rojo) y la aproximada (azul) del método LDG:

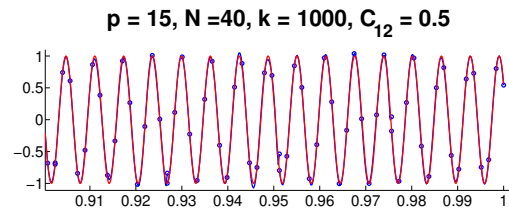


Figura 5. Solución para LDG con $k = 1000, p = 15, C_{12} = 1/2, \beta = 0$ y $N = 40$.

Ahora aplicamos los métodos QMR y COCR a la matriz resultante luego de la discretización para obtener los siguientes resultados:

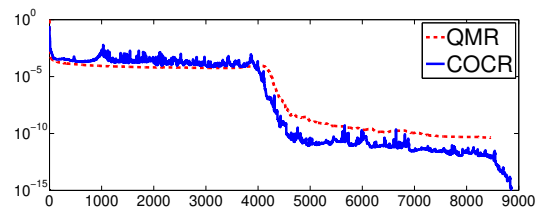


Figura 6. Curvas de convergencia para los métodos QMR y COCR.

En la siguiente tabla se muestran los resultados obtenidos por ambos métodos:

Método	Iteraciones	Tiempo
COCR	4448	5,35502259
QMR	4353	6,34001232

Tabla 3. Ejemplo 3: número de iteraciones, tiempo de CPU en segundos para los métodos QMR y COCR.

6. Conclusiones

En este trabajo se ha estudiado la resolución de sistemas de ecuaciones lineales complejos simétricos resultantes de discretizar la ecuación de Helmholtz 1D a través del método de elementos finitos LDG (*Local Discontinuous Galerkin*). Para resolver el sistema generado se utilizaron dos métodos iterativos basados en subespacios de Krylov, QMR y COCR. Se mostró a detalle la derivación de los métodos, así como algunas propiedades de ortogonalidad.

Una vez implementados y validados los algoritmos se procedió a resolver el sistema de ecuaciones resultan-

te de la discretización del problema modelo (2) por medio del LDG, tomando una tolerancia de 10^{-15} para todos los ejemplos. Al comparar la curvas de convergencia, como se puede observar en las figuras (2), (4) y (6) y en las tablas de comparación (1), (2) y (3), nótese que el método COCR es mas eficiente en cuanto a tiempo de convergencia que el método QMR. En el ejemplo 1, el método COCR supera ampliamente al método QMR en cuanto a tiempo e iteraciones para llegar a la tolerancia establecida. Para las pruebas realizadas con $k < 500$ y $p < 12$ en cuanto a iteraciones el método QMR superó al método COCR en dos de los ejemplos, pero en tiempo de convergencia el método COCR resultó ser muy eficiente superándolo por amplio margen como se puede observar en la tablas gráficas. De acuerdo a los resultados de las pruebas numericas, queda decir que el método COCR es una elección formidable para resolver sistemas de ecuaciones lineales complejos simétricos provenientes de la discretización de la ecuación de *Helmholtz* en 1D utilizando el método LDG.

Queda recomendar el estudio de nuevas técnicas de preconditionamiento para matrices simétricas, además de hacer mas comparaciones con otros métodos como *transpose-free* QMR (TFQMR), CGNR, CGNE, entre otros. También se cree conveniente extender este estudio para el caso bidimensional, ([8, 14]).

7. Agradecimientos

El autor agradece a los árbitros la lectura minuciosa del documento, lo que mejoró considerablemente la presentación del trabajo.

Referencias

- [1] Alvarez, G., Loula, A., do Carmo, E. and Rochinha, F. (2006). A discontinuous finite element formulation for Helmholtz equation. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. 195(33-36), 4018-4035.
- [2] Arnold, D., Brezzi, F., Cockburn, B. and Marini, D. (2000). Discontinuous Galerkin methods for elliptic problems. *In Discontinuous Galerkin methods: theory, computation and applications*. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg. 89-101.
- [3] Arnold, D., Brezzi, F., Cockburn, B. and Marini, L. (2002). Unified analysis of discontinuous Galerkin methods for elliptic problems. *SIAM journal on numerical analysis*. 39(5), 1749-1779.
- [4] Axelsson, O. and Kucherov, A. (2000). Real valued iterative methods for solving complex symmetric linear systems. *Numerical linear algebra with applications*. 7(4), 197-218.
- [5] Barucq, H., Bendali, A., Diaz, J. and Tordeux, S. (2024). Revisiting the plane-wave ultra-weak variational formulation. *hal-04591459*.
- [6] Brezzi, F., Manzini, G., Marini, D., Pietra, P. and Russo, A. (2000). Discontinuous Galerkin approximations for elliptic problems. *Numerical Methods for Partial Differential Equations: An International Journal*. 16(4), 365-378.
- [7] Bunse-Gerstner, A. and Stöver, R. (1999). On a conjugate gradient-type method for solving complex symmetric linear systems. *Linear Algebra and its Applications*. 287(1-3), 105-123.
- [8] Cadenas, C. (2007). Galerkin continuo y discontinuo para la resolución de problemas de acústica con condiciones de contorno artificiales. *Universitat Politècnica de Catalunya*.
- [9] Cadenas, C. and Villamizar, V. (2003). Application of least squares finite element method to acoustic scattering and comparison with other numerical techniques. *In Proceedings of the International Conference on Numerical Analysis and Computational Mathematics (NaCoM-2003)*. Cambridge, UK.
- [10] Cadenas, C. (2003). Formulación y aplicación del método de elementos finitos mínimos cuadrados a un problema de dispersión de onda y comparación con otros métodos numéricos. Universidad de Carabobo, Venezuela.
- [11] Cadenas, C. and Villamizar, V. (2004). Comparison of least squares fem, mixed Galerkin fem and an implicit fdm applied to acoustic scattering. *Applied Numerical Analysis and Computational Mathematics*, 1(1), 128-139.

- [12] Cadenas, C., Rojas, J. and Villamizar, V. (2006). A least squares finite element method with high degree element shape functions for one-dimensional Helmholtz equation. *Mathematics and Computers in Simulation*. 73(1-4), 76-86.
- [13] Cadenas, C., Fernández-Méndez, S. and Huerta, A. (2009). Dualidad de las aproximaciones discretas en dinámica estructural y propagación de ondas: comparación de Galerkin continuo (CG) y LDG. *Proceedings of the 8th Workshop on Numerical Methods in Applied Science and Engineering*.
- [14] Cadenas, C., Fernández-Méndez, S. and Huerta, A. (2009). Galerkin discontinuo local aplicado a problemas de ondas acústicas: condiciones de frontera absorbente locales de bajo orden. *NMA-SE 07 (6th: 2007: Vall de Núria)*. 1-16
- [15] Cadenas, C., Méndez, S. and Huerta, A. (2009). Análisis de la dispersión numérica del método LDG. In *Métodos numéricos en Ingeniería. III Congreso de Métodos Numéricos en Ingeniería*, Barcelona, 19 de junio al 2 de julio de 2009. Sociedad Española de Métodos Numéricos en Ingeniería (SEMNI). 295-295.
- [16] Cadenas, C. and Quiñonez, L. (2019). Mimetic methods to Helmholtz equation: numerical dispersion. *Divulgaciones matemáticas*. 20(1), 1-15.
- [17] Castillo, P. (2006). A review of the local discontinuous Galerkin (LDG) method applied to elliptic problems. *Applied numerical mathematics*. 56(10-11), 1307-1313.
- [18] Castillo, P., Cockburn, B., Perugia, I. and Schötzau, D. (2000). An a priori error analysis of the local discontinuous Galerkin method for elliptic problems. *SIAM Journal on Numerical Analysis*. 38(5), 1676-1706.
- [19] Cockburn, B. (2003). Discontinuous Galerkin methods. *ZAMM-Journal of Applied Mathematics and Mechanics/Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik: Applied Mathematics and Mechanics*. 83(11), 731-754.
- [20] Cockburn, B. and Shu, C. (1998). The local discontinuous Galerkin method for time-dependent convection-diffusion systems. *SIAM journal on numerical analysis*. 35(6), 2440-2463.
- [21] Day, D. and Heroux, M. (2001). Solving complex-valued linear systems via equivalent real formulations. *SIAM Journal on Scientific Computing*. 23(2), 480-498.
- [22] Engquist, B. and Majda, A. (1977). Absorbing boundary conditions for the numerical simulation of waves. *Math. Comput.* 31: 629-651.
- [23] Erath, C., Mascotto, L., Melenk, J., Perugia, I. and Rieder, A. (2022). Mortar coupling of hp-discontinuous Galerkin and boundary element methods for the Helmholtz equation. *Journal of Scientific Computing*, 92(1), 2.
- [24] Farhat, C., Wiedemann-Goiran, P. and Tezaur, R. (2004). A discontinuous Galerkin method with plane waves and Lagrange multipliers for the solution of short wave exterior Helmholtz problems on unstructured meshes. *Wave Motion*. 39(4), 307-317.
- [25] Farhat, C., Wiedemann-Goiran, P. and Tezaur, R. (2004). A discontinuous Galerkin method with plane waves and Lagrange multipliers for the solution of short wave exterior Helmholtz problems on unstructured meshes. *Wave Motion*. 39(4), 307-317.
- [26] Farhat, C., Tezaur, R. and Weidemann-Goiran, P. (2004). Higher-order extensions of a discontinuous Galerkin method for mid-frequency Helmholtz problems. *International journal for numerical methods in engineering*. 61(11), 1938-1956.
- [27] Foucart, C., Mirabito, C., Haley, P. and Lermusiaux, P. (2021, September). High-order discontinuous Galerkin methods for nonhydrostatic ocean processes with a free surface. In *OCEANS 2021: San Diego-Porto* (pp. 1-9). IEEE.
- [28] Freund, R. and Nachtigal, N. (1991). QMR: a quasi-minimal residual method for non-Hermitian linear systems. *Numerische mathematik*. 60(1), 315-339.
- [29] Freund, R. (1992). Conjugate gradient-type methods for linear systems with complex symmetric coefficient matrices. *SIAM Journal on*

- Scientific and Statistical Computing, 13(1), 425-448.
- [30] Gu, X., Huang, T., Li, L., Li, H., Sogabe, T. and Clemens, M. (2014). Quasi-minimal residual variants of the COCG and COCR methods for complex symmetric linear systems in electromagnetic simulations. *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, 62(12), 2859-2867.
- [31] Gu, X., Carpentieri, B., Huang, T. and Meng, J. (2016). Block variants of the COCG and COCR methods for solving complex symmetric linear systems with multiple right-hand sides. In *Numerical Mathematics and Advanced Applications ENUMATH 2015* (pp. 305-313). Cham: Springer International Publishing.
- [32] Leumüller, M. (2025). A hybrid discontinuous Galerkin method with impedance traces for the Helmholtz equation (*Doctoral dissertation, Technische Universität Wien*).
- [33] Liu, D., Zhou, L. and Zhang, X. (2022). On an adaptive LDG for the p-Laplace problem. *International Journal of Numerical Analysis and Modeling*, 19(2-3), 315-328.
- [34] Loula, A., Alvarez, G., do Carmo, E. and Rochinha, F. (2007). A discontinuous finite element method at element level for Helmholtz equation. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. 196(4-6), 867-878.
- [35] Molina, B. and Raydán, M. (2004). Métodos Iterativos tipo Krylov para sistemas lineales. *Editado por el Centro de Estudios Avanzados, Instituto de Investigaciones Científicas (IVIC)*. Caracas, Venezuela.
- [36] Murayama, T. and Takei, A. (2024). Convergence characteristics of domain decomposition method for full-wave electromagnetic analysis. *IEICE Transactions on Electronics*, 107(11), 465-471.
- [37] Ogino, M., Takei, A., Notsu, H., SUGIMOTO, S. and Yoshimura, S. (2013). Finite element analysis of high frequency electromagnetic fields using a domain decomposition method based on the COCR method. *Theoretical and Applied Mechanics Japan*, 61, 173-181.
- [38] Pham, H., Faucher, F. and Barucq, H. (2023). On the implementation of hybridizable discontinuous Galerkin discretization for linear anisotropic elastic wave equation: Voigt-notation and stabilization (*Doctoral dissertation, INRIA Bordeaux*).
- [39] Saad, Y. and Schultz M. (1986). GMRES: a generalized minimal residual algorithm for solving nonsymmetric linear systems. *Proc. of International Congress of Mathematics*. 7, 856-869.
- [40] Saad, Y. (2000). *Iterative methods for sparse linear systems*. second edition.
- [41] Sherwin, S., Kirby, R., Peiró, J., Taylor, R. and Zienkiewicz, O. (2006). On 2D elliptic discontinuous Galerkin methods. *International journal for numerical methods in engineering*. 65(5), 752-784.
- [42] Sogabe, T. and Zhang, S. (2007). A COCR method for solving complex symmetric linear systems. *Journal of Computational and Applied Mathematics*. 199:297-303.
- [43] Sugimoto, S., Takei, A. and Ogino, M. (2017). Finite element analysis with tens of billions of degrees of freedom in a high-frequency electromagnetic field. *Mechanical Engineering Letters*, 3, 16-00667.
- [44] Zienkiewicz, O., Taylor, R., Sherwin, S. and Peiro, J. (2003). On discontinuous Galerkin methods. *International journal for numerical methods in engineering*. 58(8), 1119-1148.



Algunas propiedades de la suma de dígitos binarios

Armando Hernández^{a**}, Aldo Reyes C.^{2a**}, Luis A. Rodríguez^{1a*}

¹Departamento de Matemáticas, Facultad Experimental de Ciencias y Tecnología, Universidad de Carabobo. Venezuela.

²Departamento de Computación, Facultad Experimental de Ciencias y Tecnología, Universidad de Carabobo. Venezuela.

^aCentro Multidisciplinario de Visualización y Cómputo Científico (CEMVICC), Universidad de Carabobo. Venezuela.

ORCID iD: 0000-0002-7253-7339* 0009-0006-4836-2205** 0009-0001-1945-1544***

Correo electrónico del autor para correspondencia: larodri@uc.edu.ve*

Correos electrónicos de los coautores: arhpra2@gmail.com** areyes@uc.edu.ve***

Recibido: 12/07/2025, Revisado: 23/08/2025, Aceptado: 30/09/2025.

Resumen

Este artículo de tipo estado del arte presenta una conjetura planteada por Giuseppe Melfi, acerca del comportamiento asintótico de la distribución de los números que escritos en binario satisfacen que tanto el número como su cuadrado tienen la misma cantidad de unos. Este problema nos lleva a introducir una serie de resultados relacionados con la función $B(n)$ que cuenta el número de unos del entero n escrito en binario. Los números que satisfacen la propiedad $B(n) = B(n^2)$ se conocen como números $(2, 1, 2)$ y la conjetura de Melfi cuenta la proporción de números de este tipo. En general, un entero positivo n satisface la propiedad (k, l, m) si la suma de sus dígitos en su desarrollo en base k es l veces la suma de los dígitos del desarrollo en base k de n^m . El trabajo de Melfi fue introducido en 2005, nos centramos en ese trabajo y sus posteriores referencias. Sin embargo, estudiaremos ciertos trabajos anteriores relacionados con la función $B(n)$ los cuales introducen propiedades del promedio de esta. Nuestra contribución se centra en presentar una revisión de los avances relacionados con los números $(2, 1, 2)$ y presentar detalles en las demostraciones que fueron omitidos en los artículos estudiados.

Palabras Clave: Conjetura de Melfi, dígitos binarios, distribución asintótica.

Some properties of the sum of the digits of binary numbers

Abstract

This state of the art article presents a conjecture proposed by Giuseppe Melfi about the asymptotic behavior of the distribution of numbers written in binary that satisfy the requirement that both the number and its square have the same number of ones. This problem leads us to introduce a series of results related to the function $B(n)$ that counts the number of ones in the integer n written in binary. Numbers that satisfy the property $B(n) = B(n^2)$ are known as $(2, 1, 2)$ numbers, and the Melfi's conjecture counts the proportion of numbers of this type. In general, a positive integer n satisfies the property (k, l, m) if the sum of its digits in its base k expansion is l times the sum of the digits in the base k expansion of n^m . Melfi's work was introduced in 2005; we focus on that work and subsequent references. However, we will study certain previous works related to the function $B(n)$ that introduce properties of its average. Our contribution focuses on presenting a review of the progress related to the numbers $(2, 1, 2)$ and presenting details in the proofs that were omitted in the articles studied.

Keywords: Asymptotic distribution, binary digits, Melfi's conjecture.

1. Introducción

Sea $n \in \mathbb{N}$, y consideremos su representación como suma de potencias de base 2 dada por $n = \sum_{i=1}^k c_i 2^{i-1}$, donde $c_i \in \{0, 1\}$, $c_k = 1$. Diremos que la cadena $(c_k \dots c_1)$ es la expansión binaria de n . Se define la función suma de dígitos binarios por:

$$B(n) = \sum_{i=1}^k c_i. \quad (1)$$

La función contadora de dígitos es el concepto clave que conecta la teoría de números con la seguridad criptográfica práctica, [16]. Esta función simplemente mide la longitud de un número en bits, que es la unidad fundamental de la información digital. En criptografía, la fortaleza de un sistema no se basa en el valor de una clave, sino en su longitud (por ejemplo, una clave de 256 bits). Esta longitud, determinada por la función contadora de dígitos, define el número total de combinaciones posibles, haciendo que un ataque de fuerza bruta sea exponencialmente más difícil con cada bit que se añade.

Un ejemplo del uso de esta función es el algoritmo RSA (Ron Rivest, Adi Shamir y Leonard Adleman, ver [18]), éste es un sistema de criptografía de clave pública que utiliza un par de claves matemáticas; una pública (para cifrar) y una privada (para descifrar), para asegurar comunicaciones y realizar firmas digitales.

El estudio sistemático de $B(n)$ fue iniciado por Bush [3] y Stolarsky [19, 20], quienes establecieron relaciones profundas entre la suma de dígitos y propiedades asintóticas de sucesiones numéricas.

En el caso general se pueden estudiar el número de dígitos para representaciones de un entero en cualquier base r , denotamos por $s_r(n)$ esta suma. En algunos casos, esta función se puede evaluar en polinomios con variable entera $p(n)$. Conforme con la notación establecida en [15], un número $n \in \mathbb{N}$ es $(2, 1, 2)$ si satisface la propiedad $B(n) = B(n^2)$, en este Melfi estudia $p(n) = n^2$. Observemos que $s_2(n) = B(n)$.

Entre los principales autores que han estudiado las propiedades y relaciones puntuales de $s_r(n)$, por ejemplo, [19], [13], [15] y [8]. En particular, una conjetura de Stolarsky introducida en [19] sobre algunas propiedades de distribución de la razón $s_r(p(n))/s_r(n)$

ha sido recientemente resuelta por Hare *et al.* en [10]. Melfi en [15] propuso estudiar el conjunto de n tales que $B(n^2) = B(n)$, y demostró que

$$\#\{n < N : B(n^2) = B(n)\} \gg N^{1/40},$$

donde el símbolo # indica el cardinal de un conjunto. Usando argumentos probabilísticos heurísticos, Melfi conjeturó el resultado más fuerte

$$\#\{n < N : B(n^2) = B(n)\} \approx \frac{N^\alpha}{\log N} \quad (2)$$

y calculó un valor explícito para $\alpha \approx 0,75488$.

En la sección 2, se estudian algunas propiedades de la función $B(n)$, entre las principales que es subaditiva y submultiplicativa. En la sección 3, se estudia la suma promedio de dígitos en cualquier base. En la sección 4, se estudia la función B evaluada en un polinomio $p(n) = n^j$ y su comportamiento límite. En la sección 5, damos propiedades de los números $(2, 1, 2)$. La sección 6 presenta el argumento heurístico de Melfi que permite introducir la conjetura dada por la ecuación (2). Por último, en la sección 7, se enuncian sin demostración algunos resultados referentes a ecuaciones con números $(2, 1, 2)$.

2. Función Suma de Dígitos de un número escrito en representación binaria

Se presentan en la sección definiciones básicas y propiedades generales que serán utilizadas a lo largo del trabajo. En particular damos la demostración de la subaditividad y submultiplicatividad de la función que cuenta los 1 en la representación binaria de un entero, éstos son resultados básicos pero sus respectivas demostraciones son difíciles de encontrar en la literatura por lo cual las incluimos en detalle.

Definición 1 Sea $n \in \mathbb{N}$, $n = (c_k c_{k-1} \dots c_1)$ un número escrito en base dos. Sea $B : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ la función suma de dígitos binaria, la cual se define por $B(n) = \sum_{i=1}^k c_i$.

Ejemplo: Sea $n = (11001)$; en este caso, $c_5 = 1$, $c_4 = 1$, $c_3 = 0$, $c_2 = 0$ y $c_1 = 1$. Por lo tanto, $B(n) = 1 + 1 + 0 + 0 + 1 = 3$.

Observación 1 La expansión binaria está compuesta de unos y ceros, por esta razón, en algunos casos utilizaremos la notación compacta del número en la que $\overbrace{(1 \dots 1)}^{k\text{-veces } 1} = (1_{(k)})$ y $\overbrace{(0 \dots 0)}^{b\text{-veces } 0} = (0_{(b)})$; por ejemplo, el número (111100011) se denotará $(1_{(4)}0_{(3)}1_{(2)})$.

Observemos que para cada $k \in \mathbb{N}$, $2^k = (10_{(k)})$, por lo tanto, $B(2^k) = 1$.

Definición 2 Definimos el conjugado de $n = \sum_{i=1}^n c_i 2^{i-1}$ por $n' = \sum_{i=1}^n c'_i 2^{i-1}$, donde $c'_i = 1 - c_i$.

El siguiente teorema muestra una relación entre la suma de dígitos $B(n)$ y la suma de dígitos de su conjugado $B(n')$.

Teorema 1 Si $n = \sum_{i=1}^k c_i 2^{i-1}$, entonces $n' = 2^k - n - 1$ y $B(n) = k - B(2^k - n - 1)$.

Demostración: Como $c'_i = 1 - c_i$ y $n' = \sum_{i=1}^k c'_i 2^{i-1}$, tenemos que:

$$n' = \sum_{i=1}^k 2^{i-1} - \sum_{i=1}^k c_i 2^{i-1}.$$

El primer sumando es una suma de términos de una progresión geométrica cuya sumatoria es $2^k - 1 - n$ y el segundo sumando es igual a n por hipótesis, por lo tanto:

$$n' = 2^k - 1 - n. \tag{3}$$

Ahora, falta comprobar que $B(n) = k - B(2^k - n - 1)$.

$$B(n) = \sum_{i=1}^k c_i = \sum_{i=1}^k 1 - \sum_{i=1}^k c'_i = k - B(n').$$

Luego, por la ecuación (3), tenemos que

$$B(n) = k - B(2^k - n - 1). \blacksquare$$

A continuación demostraremos la subaditividad de la función B . Para este fin requerimos del siguiente lema.

Lema 1 Sean $n = \sum_{i=1}^k c_i 2^{i-1}$, $j \in \mathbb{N}^*$ tal que $j < k$ y $n + 2^j = \sum_{i=1}^{k+1} d_i 2^{i-1}$. Entonces

$$B(n + 2^j) = 1 - L_j + B(n),$$

donde:

$$L_j = \min_{l \in \mathbb{N}} \{l / c_{j+l} = 0\}.$$

Demostración: Consideremos el caso en que $c_{j+1} = 0$. Tenemos que $d_q = c_q$ para todo $q \in \{1, 2, \dots, j\}$, $d_{j+1} = 1$, $d_q = c_q$ para todo $q \in \{j+2, j+3, \dots, k\}$ y $d_{k+1} = 0$; en consecuencia, $B(n + 2^j) = B(n) + 1$ y se verifica el Lema 1, ya que $L_j = 0$. Este caso se ilustra en la tabla 1.

Consideremos el caso en que $c_{j+1} = 1$. Para observar lo que ocurre en este caso, referimos al cálculo que se muestra en la tabla 2. En este caso, $L_j > 0$, ya que el mínimo de los índices para el cual $c_{j+l} = 0$ es mayor que $j + 1$. Así, $B(n + 2^j) = 1 + B(n) - L_j$. En efecto: se suman las cifras de n , se añade 1 (el uno que se agrega en la posición $j + 1$) y se le resta L_j (que no es más que la cantidad de ceros producto del acarreo al sumar 1, es decir, los 1 que fueron cambiados por cero al sumar). ■

Observación 2 Para $j \geq k$ se tiene que $B(n + 2^j) = B(n) + 1$.

Utilizando este lema, demostraremos la subaditividad de la función B .

Teorema 2 Si $m, n \in \mathbb{N}$, se tiene que

$$B(m + n) \leq B(m) + B(n).$$

Demostración: Sea $n = \sum_{j=1}^d 2^{e_j}$, con $e_1 > e_2 > \dots > e_d \geq 0$; así, solamente consideramos las potencias de dos cuyo coeficiente es uno en la expansión binaria de n . Entonces, aplicando el Lema 1 repetidas veces, tenemos que:

$$\begin{aligned} B(m + n) &= B(m + \sum_{j=1}^d 2^{e_j}) \\ &\leq 1 + B(m + \sum_{j=2}^d 2^{e_j}) \\ &\leq \overbrace{(1 + 1 + \dots + 1)}^{d\text{-veces}} + B(m) \\ &= B(n) + B(m). \blacksquare \end{aligned}$$

Observación 3 Una condición para que se cumpla la igualdad es que cuando realizamos la suma en binario de $m + n$ no ocurran acarreos. Esto ocurre cuando las posiciones de los 1 de m y n están separadas suficientemente por ceros. Ejemplo: sean $m = 10110000$, $n = 111$, $B(m) = 3$ y $B(n) = 3$ entonces $m + n = 10110111$ y $B(m + n) = 6 = B(m) + B(n)$.

Ahora, veremos un lema que nos muestra que, al

$$\begin{array}{rcccccccc}
 & & & c_k & \dots & c_{j+(l+1)} & c_{j+l} & \dots & 0 & c_j & \dots & c_1 \\
 + & & & & & & & & & 1 & 0 & \dots & 0 \\
 \hline
 & d_{k+1} & d_k & \dots & d_{j+(l+1)} & d_{j+l} & \dots & 1 & d_j & \dots & d_1
 \end{array}$$

Tabla 1

$$\begin{array}{rcccccccc}
 & & & c_k & \dots & c_{j+(l+1)} & c_{j+l} & 1 & \dots & 1 & c_j & \dots & c_1 \\
 + & & & & & & & & & 1 & 0 & \dots & 0 \\
 \hline
 & d_{k+1} & d_k & \dots & d_{j+(l+1)} & 1 & 0 & \dots & 0 & d_j & \dots & d_1
 \end{array}$$

Tabla 2

multiplicar un número por una potencia de dos, no se altera su suma de dígitos.

Lema 2 Para todo $j \in \mathbb{N}$, $B(2^j n) = B(n)$.

Demostración: Sea $n = (c_k c_{k-1} \dots c_2 c_1)$. Haremos esta prueba por inducción sobre $j \in \mathbb{N}$:

- $j = 1$: Aquí tenemos que:

$$2n = 2 \sum_{i=1}^k c_i 2^{i-1} = \sum_{i=1}^k c_i 2^i.$$

Por lo tanto:

$$B(2n) = \sum_{i=1}^k c_i = B(n).$$

- **Hipótesis inductiva:** Supongamos que la proposición se cumple para $k \in \mathbb{N}$, y veamos que se cumple para $k + 1$:

$$B(2^{k+1}n) = B[2(2^k n)] = B(2^k n) = B(n). \blacksquare$$

El siguiente teorema demuestra la submultiplicatividad de B .

Teorema 3 Para $m, n \in \mathbb{N}$,

$$B(mn) \leq B(m)B(n).$$

Demostración: Si $m = 1$, $B(nm) = B(n)1 = B(m)B(n)$. Así pues, supongamos que $m > 1$ y $n > 1$. Sea $n = (c_k c_{k-1} \dots c_1)$. Entonces, aplicando la subaditividad de B y el lema anterior, y recordando que $c_i \in \{0, 1\}$ para $i \in \{1, \dots, k\}$, tenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned}
 B(nm) &= B(c_k 2^{k-1} m + \dots + c_1 m) \\
 &\leq B(c_k 2^{k-1} m) + \dots + B(c_1 m) \\
 &= B(c_k m) + \dots + B(c_1 m) \\
 &= B(c_k)B(m) + \dots + B(c_1)B(m) \\
 &= [B(c_k) + \dots + B(c_1)]B(m) \\
 &= B(n)B(m).
 \end{aligned}$$

Así culmina la demostración. \blacksquare

Ahora, en el siguiente lema y en su correspondiente corolario, estableceremos una cota tanto para la cantidad máxima de dígitos que tiene un número binario como para el valor máximo de $B(n)$.

Lema 3 Para cada entero positivo $n = 2^{e_1} + 2^{e_2} + \dots + 2^{e_r}$, con $e_1 > e_2 > \dots > e_r \geq 0$, se tiene que:

$$\log_2(n) - 1 \leq e_1 \leq \log_2(n).$$

Demostración: Por hipótesis, se tiene que $2^{e_1} \leq 2^{e_1} + 2^{e_2} + \dots + 2^{e_r} = n$, entonces $2^{e_1} \leq n$, por lo que $e_1 \leq \frac{\ln(n)}{\ln(2)} = \log_2(n)$.

Observemos que:

$$\sum_{j=1}^r \left(\frac{1}{2}\right)^{e_1 - e_j} \leq \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^j = 2$$

de donde:

$$2^{-e_1} \sum_{j=1}^r 2^{e_j} \leq 2$$

$$2^{-e_1} n \leq 2$$

$$n \leq 2^{e_1+1}.$$

De donde, tomando logaritmos, concluimos que:

$$\frac{\ln(n)}{\ln(2)} - 1 = \log_2(n) - 1 \leq e_1. \blacksquare$$

Corolario 1 Para cada $n \in \mathbb{N}$:

$$B(n) \leq [\log_2(n)] + 1.$$

Demostración: Como $n = 2^{e_1} + 2^{e_2} + \dots + 2^{e_r}$, es fácil ver que $B(n) \leq e_1 + 1$ (ya que algunos de los coeficientes c_i en la expansión binaria de n pueden

ser iguales a cero, y en el mejor de los casos todos son iguales a 1). En consecuencia, usando el lema anterior:

$$B(n) \leq e_1 + 1 \leq \left\lceil \frac{\ln(n)}{\ln(2)} \right\rceil + 1 = \lceil \log_2(n) \rceil + 1. \blacksquare$$

3. Suma Promedio de Dígitos

En esta sección se presenta una fórmula que aproxima el valor promedio de la suma de los dígitos de números enteros a medida que estos números tienden a infinito. E. Bush en [3] demostró que

$$S(r, n) = \sum_{k \leq n} s_r(k) \sim \frac{r-1}{2} n \log_r n$$

sin una fórmula de error, donde $s_r(k)$ es la suma de los dígitos para un número escrito en base r . En 1968, Trollope en [21] demostró una fórmula explícita para el término de error en el caso $r = 2$. En 1975, Delange en [6] extendió el resultado de Trollope a una base arbitraria r utilizando otra metodología. En 1999, Cooper y Kennedy aplicaron el método de Trollope con una base general r y demostraron que la forma de los errores es igual para cualquier r , ver [5]. Recientemente en 2024, Erdenebat y Wong en [9] introducen una prueba diferente a la de Trollope en el caso $r = 2$. Para generalizaciones en diferentes direcciones ver [7, 8].

Reproducimos los resultados del artículo de Bush, incluimos la demostración del teorema 3 que él deja al lector. Además demostramos los detalles de cada uno de sus teoremas. No incluimos resultados del cálculo del error porque implicaría introducir fórmulas de aproximación que requieren herramientas más analíticas.

Definición 3 Sean $n, r \in \mathbb{N}, r \geq 2$. Sea $n = (c_k c_{k-1} \dots c_1)_r$. Entonces, definimos y denotamos la función suma de dígitos en base r de la siguiente manera: $s_r : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} / s_r(n) = \sum_{i=1}^k c_i$.

Definición 4 Sean $n, r \in \mathbb{N}$, con $r \geq 2$. Denotamos por $S(r, n) = \sum_{j=0}^{n-1} B_r(k)$. Entonces, $\frac{S(r, n)}{n}$ es la suma promedio de dígitos.

Ahora, procederemos a establecer un comportamiento asintótico de $\frac{S(r, n)}{n}$.

Teorema 4

$$\frac{S(r, n)}{n} \underset{n}{\sim} \frac{(r-1)\ln(n)}{2\ln(r)}.$$

Es decir:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2S(r, n)\ln(r)}{(r-1)n\ln(n)} = 1. \quad (4)$$

Demostración: Consideremos todos los números desde 0 hasta $n-1$, inclusive, escritos en su orden natural en base r . Los dígitos que están en el i -ésimo lugar (contando de derecha a izquierda) se repiten en períodos de r^i números, y cada período consta de r^{i-1} de cada uno de los dígitos $0, 1, \dots, r-1$. El último período estará completo si y sólo si n es divisible entre r^i . Sea s_i la suma de dígitos en el i -ésimo lugar (contando de derecha a izquierda) de todos los números desde 0 a $n-1$. Como $r^i \in \mathbb{Z}$, si hacemos $\left\lfloor \frac{n}{r^i} \right\rfloor$, de la definición de función parte entera, obtenemos que:

$$\frac{n}{r^i} - 1 < \left\lfloor \frac{n}{r^i} \right\rfloor.$$

Luego, multiplicando por r^i , tenemos que:

$$n - r^i < \left\lfloor \frac{n}{r^i} \right\rfloor r^i \Rightarrow \left\lfloor \frac{n}{r^i} \right\rfloor r^i > n - r^i. \quad (5)$$

Ahora, de la definición de función parte entera, llegamos a que:

$$\left\lfloor \frac{n}{r^i} \right\rfloor + 1 \leq n + r^i. \quad (6)$$

Entonces, por (5) y (6), tenemos que:

$$\begin{aligned} s_i &\geq \left\lfloor \frac{n}{r^i} \right\rfloor r^{i-1} \frac{r(r-1)}{2} \\ &= \frac{1}{2} \left\lfloor \frac{n}{r^i} \right\rfloor r^i (r-1) > \frac{1}{2} (r-1) (n - r^i) \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} s_i &< \left[\frac{n}{r^i} + 1 \right] r^{i-1} \frac{r(r-1)}{2} \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{n}{r^i} + 1 \right] r^i (r-1) \leq \frac{1}{2} (r-1) (n + r^i). \end{aligned}$$

Como $S(r, n) = \sum_{i=1}^k s_i$, tenemos que:

$$\begin{aligned} S(r, n) &> \frac{1}{2}(r-1) \sum_{i=1}^k (n-r^i) \\ &= \frac{1}{2}(r-1) \left(\sum_{i=1}^k n - \sum_{i=1}^k r^i \right) \\ &= \frac{1}{2}(r-1) \left\{ kn - \frac{r^{k+1} - r}{r-1} \right\}. \end{aligned}$$

Se tiene que:

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}(r-1) \left\{ kn - \frac{r^{k+1} - r}{r-1} \right\} \\ &= \frac{1}{2} \{ (r-1)kn - (r^{k+1} - r) \} \\ &> \frac{1}{2} \{ (r-1)kn - r^{k+1} \}. \end{aligned}$$

Como $r > 1 \Rightarrow r^{k+1} < r^{k+2}$ y $r^{k-1} < n$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \{ (r-1)kn - r^{k+1} \} &> \frac{1}{2} \{ (r-1)kn - r^{k+2} \} \\ &= \frac{1}{2} \{ (r-1)kn - r^2 r^k \} \\ &\geq \frac{1}{2} \{ (r-1)kn - r^2 n \}. \end{aligned}$$

Por lo tanto:

$$\begin{aligned} S(r, n) &> \frac{1}{2} \{ (r-1)kn - r^2 n \} \\ &= \frac{1}{2} \{ (r-1)k - r^2 \} n. \end{aligned} \quad (7)$$

Por otra parte:

$$\begin{aligned} S(r, n) &< \frac{1}{2}(r-1) \sum_{i=1}^k (n+r^i) \\ &= \frac{1}{2} \{ (r-1)kn + r^{k+1} - r \} \\ &< \frac{1}{2} \{ (r-1)kn + r^{k+1} \}. \end{aligned}$$

Como $r^{k-1} < n$, obtenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned} S(r, n) &< \frac{1}{2} \{ (r-1)kn + r^{k+1} \} \\ &= \frac{1}{2} \{ (r-1)kn + r^2 r^{k-1} \} \\ &< \frac{1}{2} \{ (r-1)kn + r^2 n \}. \end{aligned}$$

Por lo tanto, concluimos que:

$$\begin{aligned} S(r, n) &< \frac{1}{2} \{ (r-1)kn + r^2 n \} \\ &= \frac{1}{2} \{ (r-1)k + r^2 \} n. \end{aligned} \quad (8)$$

De (7), tenemos lo siguiente:

$$S(r, n) > \frac{1}{2} \{ (r-1)k - r^2 \} n$$

entonces

$$\frac{2S(r, n) \ln(r)}{(r-1)n \ln(n)} > \frac{\{ (r-1)k - r^2 \} \ln(r)}{(r-1) \ln(n)}.$$

Ahora, recordando que $n \leq r^k$ implica que

$$k \geq \frac{\ln(n)}{\ln(r)} \text{ y } r \geq 2,$$

tenemos:

$$\begin{aligned} &\frac{\{ (r-1)k - r^2 \} \ln(r)}{(r-1) \ln(n)} \\ &= \frac{(r-1)k \ln(r)}{(r-1) \ln(n)} - \frac{r^2 \ln(r)}{(r-1) \ln(n)} \\ &\geq 1 - \frac{r^2 \ln(r)}{(r-1) \ln(n)}. \end{aligned}$$

Por lo tanto, podemos concluir que:

$$\begin{aligned} &\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{2S(r, n) \ln(r)}{(r-1)n \ln(n)} \\ &\geq \liminf_{n \rightarrow \infty} 1 - \frac{r^2 \ln(r)}{(r-1) \ln(n)} = 1. \end{aligned} \quad (9)$$

Por otro lado, partiendo de (8), tenemos lo siguiente:

$$S(r, n) \leq \frac{1}{2} \{ (r-1)k + r^2 \} n$$

de donde

$$\frac{2S(r, n) \ln(r)}{(r-1)n \ln(n)} \leq \frac{\{ (r-1)k + r^2 \} \ln(r)}{(r-1) \ln(n)}.$$

Ahora, como $n > r^{k-1} \Rightarrow k < \frac{\ln(n)}{\ln(r)} + 1$, tenemos:

$$\begin{aligned} &\frac{\{ (r-1)k + r^2 \} \ln(r)}{(r-1) \ln(n)} \\ &= \frac{(r-1)k \ln(r)}{(r-1) \ln(n)} + \frac{r^2 \ln(r)}{(r-1) \ln(n)}. \end{aligned}$$

Luego:

$$\begin{aligned} & \frac{(r-1)k \ln(r)}{(r-1) \ln(n)} + \frac{r^2 \ln(r)}{(r-1) \ln(n)} \\ &= \frac{(r-1) \left\{ \frac{\ln(n)}{\ln(r)} + 1 \right\} \ln(r)}{(r-1) \ln(n)} + \frac{r^2 \ln(r)}{(r-1) \ln(n)}. \end{aligned}$$

Haciendo las simplificaciones correspondientes, nos queda que:

$$\begin{aligned} & \frac{(r-1) \left\{ \frac{\ln(n)}{\ln(r)} + 1 \right\} \ln(r)}{(r-1) \ln(n)} + \frac{r^2 \ln(r)}{(r-1) \ln(n)} \\ &= 1 + \frac{(r-1) \ln(r)}{(r-1) \ln(n)} + \frac{r^2 \ln(r)}{(r-1) \ln(n)}. \end{aligned}$$

Al sumar las fracciones, obtenemos que:

$$\begin{aligned} & \frac{2S(r,n) \ln(r)}{(r-1) n \ln(n)} \\ & \leq 1 + \frac{(r-1) \ln(r)}{(r-1) \ln(n)} + \frac{r^2 \ln(r)}{(r-1) \ln(n)} \\ &= 1 + \frac{(r^2 + r - 1) \ln(r)}{(r-1) \ln(n)}. \end{aligned}$$

Por lo tanto, concluimos que:

$$\begin{aligned} & \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{2S(r,n) \ln(r)}{(r-1) n \ln(n)} \\ & \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} 1 + \frac{(r^2 + r - 1) \ln(r)}{(r-1) \ln(n)} = 1. \quad (10) \end{aligned}$$

Ahora, combinando, (9) y (10), obtenemos que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2S(r,n) \ln(r)}{(r-1) n \ln(n)} = 1.$$

Probando así (4).

El siguiente teorema nos dice que la suma promedio de dígitos es menor cuando los números están escritos en base 2.

Teorema 5 Sea $r \in \mathbb{N} / r > 2$. Entonces:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S(r,n)}{S(2,n)} > 1.$$

Demostración: Usando el teorema anterior, tene-

mos que:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S(r,n)}{S(2,n)} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{S(r,n)}{n}}{\frac{S(2,n)}{n}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{(r-1) \ln(n)}{2 \ln(r)}}{\frac{\ln(n)}{2 \ln(2)}} \\ &= \frac{(r-1) \ln(2)}{\ln(r)}. \end{aligned}$$

Ahora, como:

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dr} \left\{ \frac{(r-1) \ln(2)}{\ln(r)} \right\} \\ &= \frac{\{ \ln(r) + r^{-1} - 1 \} \ln(2)}{\ln^2(r)} > 0 \end{aligned}$$

para $r \geq 2$. Concluimos que $\frac{(r-1) \ln(2)}{\ln(r)}$ es una función monótona creciente en r y además:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S(r,n)}{S(2,n)} = \frac{(r-1) \ln(2)}{\ln(r)} \geq \frac{2 \ln(2)}{\ln(3)} > \frac{5}{4} > 1.$$

Para todo $r \geq 3$. Así concluye la demostración. ■

Los teoremas 4 y 5 se pueden usar para demostrar el siguiente teorema, que propone una situación más general al considerar dos bases cualesquiera r_1 y r_2 que la que se muestra en el teorema anterior:

Teorema 6 Si $2 \leq r_1 \leq r_2 - 1$, entonces se cumple la desigualdad:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S(r_2,n)}{S(r_1,n)} > 1. \quad (11)$$

■ **Demostración:**

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S(r_2,n)}{S(r_1,n)} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{S(r_2,n)}{n}}{\frac{S(r_1,n)}{n}} \\ &= \frac{\frac{(r_2-1) \ln(n)}{2 \ln(r_2)}}{\frac{(r_1-1) \ln(n)}{2 \ln(r_1)}} \\ &= \frac{(r_2-1) \ln(r_1)}{(r_1-1) \ln(r_2)}. \quad (12) \end{aligned}$$

Ahora, derivando (12) con respecto a r_2 , tenemos

que:

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dr_2} \left\{ \frac{(r_2 - 1)\ln(r_1)}{(r_1 - 1)\ln(r_2)} \right\} \\ &= \frac{\ln(r_1)}{r_1 - 1} \left\{ \frac{d}{dr_2} \left\{ \frac{r_2 - 1}{\ln(r_2)} \right\} \right\} \\ &= \frac{\ln(r_1)}{r_1 - 1} \left\{ \frac{\ln(r_2) + \frac{1}{r_2} - 1}{\{\ln(r_2)\}^2} \right\}. \end{aligned} \quad (13)$$

Recordando que $2 \leq r_1 \leq r_2 - 1$ y analizando (13), es claro que $\frac{\ln(r_1)}{r_1 - 1} > 0$ y $\ln(r_2) + \frac{1}{r_2} > 1$, por lo que (12) es una función monótona creciente con respecto a r_2 . Posteriormente, haciendo un razonamiento análogo al que se hizo en el teorema anterior, se puede llegar a (11). ■

Extendemos el Teorema 6 en el próximo corolario.

Corolario 2 Sea $p \in \mathbb{N}, p \geq 2$. Sea $\{r_i\}_{i=1}^p \subset \mathbb{N}$ tal que $2 \leq r_1 \leq r_2 - 1 \leq r_3 - 1 \leq \dots \leq r_p - 1$. Entonces, si $1 \leq j < l \leq p$, se tiene que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S(r_l, n)}{S(r_j, n)} > 1.$$

Demostración: Sea $p \in \mathbb{N}$, con $p \geq 2$. Sean $j, l \in \mathbb{N}$ tales que $1 \leq j < l \leq p$. Ahora, consideremos la sucesión creciente $\{r_i\}_{i=1}^p$ tal que $2 \leq r_1 \leq r_2 - 1 \leq r_3 - 1 \leq \dots \leq r_p - 1$. Así, si $j < l$, podemos ver que $2 \leq r_j \leq r_l - 1$. Así, las hipótesis del teorema anterior se cumplen, por lo que concluimos que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S(r_l, n)}{S(r_j, n)} > 1. \quad \blacksquare$$

4. Dígitos binarios de potencias de enteros

En lo que sigue, estudiaremos el comportamiento de $B(n^j)/B(n)$ para todo $j \in \mathbb{N}$ y $n \in \mathbb{N}$. Stolarsky demuestra en [19] resultados muy precisos acerca de estos cocientes. Enunciamos y demostramos algunos de sus resultados.

Teorema 7 Sean $n, h \in \mathbb{N}$ mayores que uno. Definamos $r_h(n) = \frac{B(n^h)}{B(n)}$. Entonces:

$$r_h(n) \leq 2 \{h \log_2(n)\}^{1 - \frac{1}{h}}.$$

Demostración: Por la submultiplicatividad de B , tenemos que $B(n^h) \leq B(n)^h$, por otra parte del Corolario 1 $B(n^h) \leq [h \log_2(n)] + 1$. En consecuencia:

$$\frac{B(n^h)}{B(n)} \leq B(n)^{-1} \min\{h \log_2(n) + 1, B(n)^h\}.$$

Si $B(n)^h \geq h \log_2(n) + 1 > h \log_2(n)$, tenemos que:

$$\begin{aligned} r_h(n) &\leq B(n)^{-1} \min\{h \log_2(n) + 1, B(n)^h\} \\ &\leq \{h \log_2(n)\}^{1 - \frac{1}{h}}. \end{aligned} \quad (14)$$

Por otra parte, si $B(n)^h < h \log_2(n) + 1$, entonces

$$B(n) \leq \{2h \log_2(n)\}^{\frac{1}{h}},$$

así

$$\begin{aligned} r_h(n) &\leq \frac{B(n)^h}{B(n)} \\ &= B(n)^{h-1} \\ &\leq \left(\{2h \log_2(n)\}^{\frac{1}{h}}\right)^{h-1} \\ &\leq 2 \{h \log_2(n)\}^{1 - \frac{1}{h}}. \quad \blacksquare \end{aligned} \quad (15)$$

El teorema a continuación necesita la construcción de un conjunto de Sidon (ver [4]), esto es, un conjunto de números enteros en el que todas las sumas de sus elementos son únicas. Por ejemplo: En el caso que consideremos solamente las sumas de dos elementos, el conjunto $\{1, 2, 4, 8\}$ es de Sidon, mientras que $\{1, 2, 3, 4\}$ no lo es, en efecto, la suma $1 + 4 = 2 + 3$.

Los conjuntos de Sidon permite estudiar el problema fundamental: ¿Qué tan denso o grande puede ser un conjunto? Es decir, ¿Cuántos elementos puede tener un conjunto si sus miembros no pueden ser mayores que un cierto número N ?

A continuación enunciamos un teorema que establece que la cota dada en el teorema precedente es la mejor que podemos obtener. Su demostración hace uso de la construcción de un conjunto de Sidon.

Teorema 8 La cota del teorema anterior es la mejor posible en el sentido de que existe una constante $c(h) > 0$, que depende sólo de h , tal que

$$r_h(n) > c(h) \{\log_2(n)\}^{1 - \frac{1}{h}}$$

infinitas veces.

Para una demostración véase [19]. No incluimos su demostración porque hace uso de un resultado debido a Bose y Chowla, el cual está fuera del alcance de los objetivos que nos hemos planteado. El teorema de Bose-Chowla es un resultado fundamental en la teoría aditiva de números que proporciona una construcción algebraica para conjuntos de Sidon donde todas las sumas de h elementos (con o sin repeticiones) son únicas.

Antes de demostrar el siguiente teorema, enunciaremos y demostraremos dos lemas.

Lema 4 Sean $a, b \in \mathbb{N}$ tales que $a \geq b$. Entonces $B(2^a - 2^b) = a - b$.

Demostración: Notemos que $2^a = (10_{(a)})$ y $2^b = (10_{(b)})$. Observamos de la tabla 3 que $B(2^a - 2^b) = a - b$. ■

Ahora, procederemos a demostrar un lema que generaliza al anterior.

Lema 5 Sean $A > a_1 > a_2 > \dots > a_q \geq 0$ números naturales. Entonces:

$$B(2^A - 2^{a_1} - 2^{a_2} - \dots - 2^{a_q}) = A + 1 - a_q - q.$$

Demostración: Notemos que:

$$\begin{aligned} & B(2^A - 2^{a_1} - 2^{a_2} - \dots - 2^{a_q}) \\ &= B[(2^A - 2^{a_q}) - 2^{a_1} - 2^{a_2} - \dots - 2^{a_{q-1}}]. \end{aligned}$$

Por el lema 4, $2^A - 2^{a_q} = (1_{(A-a_q)}0_{(a_q)})$. Así:

$$\begin{aligned} & B[(2^A - 2^{a_q}) - 2^{a_1} - 2^{a_2} - \dots - 2^{a_{q-1}}] \\ &= B[(1_{(A-a_q)}0_{(a_q)}) - 2^{a_1} - 2^{a_2} - \dots - 2^{a_{q-1}}]. \end{aligned}$$

Ahora, por hipótesis, al restar de $2^A - 2^{a_q}$ las restantes potencias de 2, lo que haremos será quitar unos en las posiciones respectivas $(a_1 + 1, a_2 + 1, \dots, a_{q-1} + 1)$, mientras que los otros dígitos no se modifican. En consecuencia, al final de la resta, el total de unos será la cantidad de unos originales $(A - a_q)$ menos la cantidad de unos que vamos quitando sucesivamente (que es igual a la cantidad de potencias de 2 que vamos quitando, ésto es, $q - 1$), o en otras palabras:

$$\begin{aligned} & B(2^A - 2^{a_1} - 2^{a_2} - \dots - 2^{a_q}) \\ &= A - a_q - (q - 1) = A + 1 - a_q - q. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

A continuación enunciamos el siguiente teorema de Stolarsky acerca del orden minimal del cociente $B(n^2)/B(n)$ y se da una idea de la demostración.

Teorema 9 Sea $n \in \mathbb{N}$. Sea $r_h(n)$ como se definió en el teorema 5. Entonces son ciertas las siguientes proposiciones:

1. Para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$r_2(n) \geq \{[\log_2(n)] + 1\}^{-1}.$$

2. Existen infinitos n , tales que

$$r_2(n) \leq 4 \frac{(\log \log(n))^2}{\log(n)}.$$

Demostración: Recordando que $B(n) \leq [\log_2(n)] + 1$, obtenemos:

$$B(n)^{-1} \geq \{[\log_2(n)] + 1\}^{-1}$$

y como $B(n^h) \geq 1$ se tiene la primera parte del teorema.

Daremos una idea de la segunda parte. La clave de la demostración reside en una ingeniosa construcción de enteros n cuya estructura binaria minimiza la formación de acarreo al ser elevados al cuadrado.

El objetivo de Stolarsky es construir un número n que sea una suma de potencias de 2 muy espaciadas: $n = \sum_{j=0}^{k-1} 2^{e_j}$. Al calcular su cuadrado, obtenemos:

$$n^2 = \left(\sum_{i=0}^{k-1} 2^{e_i} \right) \left(\sum_{j=0}^{k-1} 2^{e_j} \right) = \sum_{i=0}^{k-1} \sum_{j=0}^{k-1} 2^{e_i+e_j}.$$

La suma de dígitos de n^2 será pequeña si podemos elegir los exponentes $\{e_j\}$ de tal manera que, al sumar los k^2 términos de la forma $2^{e_i+e_j}$, se generen el menor número posible de acarreo.

Un caso ideal para esto sería si todos los k^2 exponentes $e_i + e_j$ fueran distintos. Esto se lograría si el conjunto de exponentes $\{e_j\}$ fuera un **conjunto de Sidon** (un conjunto A donde todas las sumas $a_i + a_j$ con $a_i, a_j \in A$ son únicas).

Se construye una sucesión de enteros n_k definida por dos parámetros: un entero $k \geq 1$ (que será el número de dígitos '1' en n_k) y un entero $d \geq 1$ (el factor de espaciado).

$$n_k = \sum_{j=0}^{k-1} 2^{j \cdot d}.$$

Lugar:		$a + 1$	a	\dots	$b + 1$	b	$b - 1$	\dots	1
2^a	=	1	0	\dots	0	0	0	\dots	0
-	2^b				1	0	0	\dots	0
		0	1	\dots	1	0	0	\dots	0

Tabla 3

Por construcción, la representación binaria de n_k consiste en k unos separados por $d - 1$ ceros. Por lo tanto, su suma de dígitos es trivialmente:

$$B(n_k) = k.$$

Ahora, calculamos su cuadrado:

$$n_k^2 = \sum_{i=0}^{k-1} \sum_{j=0}^{k-1} 2^{(i+j)d} = \sum_{s=0}^{2k-2} N_s \cdot 2^{sd}$$

donde N_s es el número de formas de escribir el entero s como suma $s = i + j$, con $0 \leq i, j \leq k - 1$. Este coeficiente es $N_s = s + 1$ para $0 \leq s < k$ y $N_s = 2k - 1 - s$ para $k \leq s \leq 2k - 2$. El valor máximo de estos coeficientes es $N_{k-1} = k$.

La clave ahora es elegir d suficientemente grande para que los bloques binarios de cada término $N_s \cdot 2^{sd}$ no se superpongan. La representación binaria de N_s requiere a lo sumo $\lceil \log_2 N_s \rceil + 1$ unos. Como $N_s \leq k$, necesita menos de $\log_2(k) + 1$ unos. Si elegimos el espaciado d tal que $d > \log_2(k)$, garantizamos que no hay superposición (acarreo) entre los términos $N_s 2^{sd}$ y $N_{s+1} 2^{(s+1)d}$. Bajo esta condición, la suma de dígitos de n_k^2 es simplemente la suma de las sumas de dígitos de cada componente:

$$B(n_k^2) = \sum_{s=0}^{2k-2} B(N_s).$$

Esta es la expresión exacta para $B(n_k^2)$ bajo la condición $d > \log_2(k)$. El problema se reduce a encontrar una buena cota para esta suma y optimizar la elección de los parámetros.

Stolarsky demostró la siguiente cota superior para la suma de las sumas de dígitos de estos coeficientes, en efecto existe una constante C tal que:

$$\sum_{s=0}^{2k-2} B(N_s) \leq Ck(\log_2 k)^2.$$

Al insertar esta cota en la expresión en el cociente, se

obtiene:

$$\begin{aligned} r_2(n_k) &= \frac{1}{k} \sum_{s=0}^{2k-2} B(N_s) \\ &\leq \frac{1}{k} (Ck(\log_2 k)^2) = C(\log_2 k)^2. \end{aligned}$$

Ahora, utilizando la elección de parámetro $k \approx \frac{\log_2 n}{\log_2 \log_2 n}$, llegamos al resultado final:

$$\begin{aligned} C(\log_2 k)^2 &\approx C \left(\log_2 \left(\frac{\log_2 n}{\log_2 \log_2 n} \right) \right)^2 \\ &= C(\log_2 \log_2 n - \log_2 \log_2 \log_2 n)^2 \\ &\sim C(\log_2 \log_2 n)^2. \end{aligned}$$

El argumento completo requiere normalizar esta expresión por $\log_2 n$ debido a la relación entre n, k y d , obteniendo la forma final de la cota de Stolarsky. A continuación reproducimos los argumentos de Stolarsky para hallar la cota exacta de los conjuntos de Sidon de interés y de allí hacer uso del teorema de Bose-Chowla para concluir.

Sean $q \geq 1$, $a(t) = 2^t$ y:

$$S = \sum_{j=1}^q 2^{a(q+1)-a(j)+1}.$$

Definamos $n = 2^{a(q+1)} - S$. Entonces, por el lema anterior, obtenemos que:

$$B(n) = 2^{q+1} + 1 - (2^{q+1} - 2^q + 1) - q = 2^q - q.$$

Ahora, por la forma en que se definió n , tenemos que:

$$n^2 = 2^{2a(q+1)} - 2^{a(q+1)+1} S + S^2. \tag{16}$$

Luego tenemos, desarrollando los 2 últimos términos de (16):

$$\begin{aligned}
 S^2 &= \left\{ \sum_{i=1}^q 2^{a(q+1)-a(i)+1} \right\}^2 \\
 &= \sum_{i=1}^q 2^{2a(q+1)-a(i+1)+2} \\
 &\quad + 2 \sum_{i < j} 2^{2a(q+1)-a(i)-a(j)+2} \\
 &= \sum_{i=1}^q 2^{2a(q+1)-a(i+1)+2} \\
 &\quad + \sum_{i=1}^{q-1} \sum_{j=i+1}^q 2^{2a(q+1)-a(i)-a(j)+3} \quad (17)
 \end{aligned}$$

por otra parte,

$$\begin{aligned}
 -2^{a(q+1)+1}S &= -2^{a(q+1)+1} \sum_{i=1}^q 2^{a(q+1)-a(i)+1} \\
 &= - \sum_{i=1}^q 2^{2a(q+1)-a(i)+2}. \quad (18)
 \end{aligned}$$

Los primeros $q - 1$ términos de S^2 se simplifican con los términos $2^{2a(q+1)}$ y $-2^{a(q+1)+1}S$ de (16), por lo tanto:

$$n^2 = 2^{a(q+1)+2} + \sum_{i=1}^Q 2^{e_i}, Q = \frac{q(q-1)}{2}. \quad (19)$$

Notemos que $a(q+1) \geq a(i)$ para todo $i \leq q$. Luego, tenemos que $2a(q+1) \geq a(i) + a(j)$ para todo $i, j \leq q$, por lo que $2a(q+1) - a(i) - a(j) + 3 \geq 0$ para todo $i, j \leq q$. En consecuencia, podemos escribir que $2a(q+1) - a(i) - a(j) + 3 = e_i$, donde $e_i \geq 0$. Ahora, ¿Cuántos e_i hay? Veamos cuáles son los posibles valores de i en (17): si $j = 2$, entonces $i \in \{1\}$; si $j = 3$, $i \in \{1, 2\}$, y así sucesivamente hasta que $j = q$, por lo que $i \in \{1, 2, \dots, q-1\}$. En consecuencia, la cantidad de posibles valores de i es $\sum_{k=1}^{q-1} k = \frac{q(q-1)}{2}$. Es por ello que en (19), podemos escribir que:

$$\begin{aligned}
 &\sum_{i=1}^{q-1} \sum_{j=i+1}^q 2^{2a(q+1)-a(i)-a(j)+3} \\
 &= \sum_{i=1}^Q 2^{e_i}, Q = \frac{q(q-1)}{2}.
 \end{aligned}$$

Por la forma que tiene m^2 , concluimos que

$$B(m^2) \leq 1 + \frac{q(q-1)}{2}. \quad \blacksquare$$

Stolarsky, en su trabajo [19], conjetura que $\lim_{n \rightarrow \infty} r_h(n) = 0$. Esta conjetura fue demostrada en el trabajo [10].

5. Números (2, 1, 2)

En esta sección, definiremos a los números (2, 1, 2), los caracterizaremos enunciando propiedades concernientes a ellos. Introducimos los resultados del trabajo de Melfi [15], incluyendo detalles que el artículo deja al lector, estos para facilitar la lectura son presentados como lemas o proposiciones.

Definición 5 Se dice que un número $n \in \mathbb{N}$ es (2, 1, 2), o que satisface la propiedad (2, 1, 2), si $B(n) = B(n^2)$.

En las siguientes proposiciones, se demuestran algunas propiedades de los números (2, 1, 2). El siguiente teorema demuestra la existencia de números (2, 1, 2).

Teorema 10 Para todo $k \in \mathbb{N}^*$, el número $n_k = 2^k - 1$ es del tipo (2, 1, 2).

Demostración: Como $n_k = (1_{(k)})$, se ve que $B(n_k) = k$. Además:

$$(n_k)^2 = (2^k - 1)^2 = 2^{2k} - 2^{k+1} + 1 = (1_{(k-1)}0_{(k)}1).$$

Por lo que $B[(n_k)^2] = k$. ■

Ahora, daremos otra caracterización de los números (2, 1, 2).

Teorema 11 Para todo $k \in \mathbb{N}, k \geq 9$ y $n = 2^k - 2^{k-2} - 2^{k-3} - 4$, los números $n, n + 1, n + 2$ y $n + 3$ son del tipo (2, 1, 2).

Demostración: En virtud del lema 5, tenemos que $B(n) = k - 4$. Por otra parte:

$$\begin{aligned}
 n^2 &= 2^{2k} + 2^{2k-3} + 2^{2k-6} + 2^{k+1} \\
 &\quad + 2^k + 2^4 - 2^{2k-1} - 2^{2k-2} - 2^{k+3} \\
 &= (1_{(2)}0_{(3)}1_{(k-7)}0_{(k-5)}10_{(4)}).
 \end{aligned}$$

Por lo que $B(n^2) = 2 + k - 7 + 1 = k - 4$.

Por otra parte, en virtud del lema 5, concluimos que

$B(n+1) = k-3$. Además:

$$\begin{aligned} (n+1)^2 &= 2^{2k} + 2^{2k-3} + 2^{2k-6} + 2^{k+2} + 2^k \\ &\quad + 2^3 + 1 - 2^{2k-1} - 2^{2k-2} - 2^{k+3} \\ &\quad - 2^{k-1} - 2^{k-2} \\ &= (1_{(2)}0_{(3)}1_{(k-8)}0_{(3)}10_{(k-4)}10_{(2)}1). \end{aligned}$$

En consecuencia,

$$B[(n+1)^2] = 2 + k - 8 + 1 + 1 + 1 = k - 3.$$

Por otro lado, en virtud del mismo lema 5, $B(n+2) = k-2$. Haciendo los cálculos pertinentes, tenemos que:

$$\begin{aligned} (n+2)^2 &= 2^{2k} + 2^{2k-3} + 2^{2k-6} + 2^k + 2^{k-1} \\ &\quad + 2^2 - 2^{2k-1} - 2^{2k-2} - 2^{k+1} \\ &= (1_{(2)}0_{(3)}1_{(k-5)}0_{(k-4)}10_{(2)}). \end{aligned}$$

Así, concluimos que $B[(n+2)^2] = 2 + k - 5 + 1 = k - 2$.

Invocando nuevamente el lema 5, llegamos a la conclusión de que $B(n+3) = k-2$. Por otro lado:

$$\begin{aligned} (n+3)^2 &= 2^{2k} + 2^{2k-3} + 2^{2k-6} + 2^{k-1} + 2^{k-2} \\ &\quad + 1 - 2^{2k-1} - 2^{2k-2} - 2^{k+1} \\ &= (1_{(2)}0_{(3)}1_{(k-7)}01_{(2)}0_{(k-3)}1) \end{aligned}$$

Así, $B[(n+3)^2] = 2 + k - 7 + 2 + 1 = k - 2$. ■

En el siguiente resultado, establecemos la existencia de infinitos intervalos que no contienen números del tipo $(2, 1, 2)$.

Proposición 1 Existen infinitos $n \in \mathbb{N}$ tales que el intervalo $(n, n + n^{\frac{1}{2}})$ no contiene números $(2, 1, 2)$.

Demostración: Sea $n = 2^{2k} = (10_{(2k)})$. Cada $m \in (n, n + n^{\frac{1}{2}})$ es de la forma $n + r$ tal que $0 < r < n^{\frac{1}{2}} = 2^k$. En su expansión binaria, m es de la forma $(10_{(k)}c_k c_{k-1} \dots c_1)$, donde $c_i \in \{0, 1\}$ y, por lo tanto, $B[(c_k c_{k-1} \dots c_1)] = B(r) \geq 1$. Ahora, sea $r^2 = (d_{2k} d_{2k-1} \dots d_1)$. Tenemos entonces nuevamente que $B(r^2) \geq 1$; por lo tanto:

$$\begin{aligned} m^2 &= [2^{2k} + (c_k c_{k-1} \dots c_1)]^2 \\ &= 2^{4k} + 2^{2k} (c_k c_{k-1} \dots c_1) \\ &\quad + (c_k c_{k-1} \dots c_1)^2 \\ &= (10_{(k-1)} c_k c_{k-1} \dots c_1 0 d_{2k} d_{2k-1} \dots d_1). \end{aligned}$$

Así, $B(m^2) = 1 + B(r) + B(r^2) > 1 + B(r) = B(m)$. ■

Ahora, enunciaremos una propiedad de la función B .

Lema 6 Si $0 < n < 2^v$, entonces $B[n(2^v - 1)] = v$.

Demostración: Tenemos 2 casos:

- Supongamos que n es impar. Sea $n = (c_k c_{k-1} \dots c_1) / c_1 = c_k = 1$. Como $n < 2^v$, tenemos que $k \leq v$ (esto es debido a que $n < 2^v \Rightarrow \sum_{i=1}^k c_i 2^{k-i} < 2^v \Rightarrow k \leq v$). Además de esto, notemos que $n(2^v - 1) = (c_k c_{k-1} \dots c_1 0_{(v)}) - (c_k c_{k-1} \dots c_1)$, por lo que $n(2^v - 1) = (c_k c_{k-1} \dots c_2 c'_1 1_{(v-k)} c'_k c'_{k-1} \dots c'_2 c_1)$. En consecuencia:

$$\begin{aligned} B[n(2^v - 1)] &= B[(c_k c_{k-1} \dots c_2 c'_1 1_{(v-k)} c'_k c'_{k-1} \dots c'_2 c_1)] \\ &= B[(c_k c_{k-1} \dots c_2 c_1 1_{(v-k)} c'_k c'_{k-1} \dots c'_2 c'_1)] \\ &= B(n) + (v - k) + k - B(n) = v. \end{aligned}$$

- Si n es par, entonces $n' = \frac{n}{2^h}$ es impar para algún $h \in \mathbb{N}$ y, evidentemente, $n' < 2^v$. En consecuencia, y usando el lema 2, tenemos que $B[n'(2^v - 1)] = v$ y $B[2^h n'(2^v - 1)] = v$, por lo que $B[n(2^v - 1)] = v$. ■

Con respecto a los múltiplos de potencias de 2, cuando a estos números se les suma una unidad, ¿Cuál es la suma de dígitos del número resultante? ¿Cuál es la suma de dígitos del cuadrado de éste número? Estas dudas nos las aclara el siguiente lema.

Lema 7 Sea $n \in \mathbb{N}$, y sea v tal que $n < 2^{v-1}$. Entonces:

$$B(2^v n + 1) = B(n) + 1$$

y

$$B[(2^v n + 1)^2] = B(n^2) + B(n) + 1.$$

Demostración: Sea $n = (c_k \dots c_1)$. Como $n < 2^{v-1}$, $k \leq v$. En consecuencia:

$$2^v n = (10_{(v)}) \cdot (c_k \dots c_1) = (c_k \dots c_1 0_{(v)}).$$

Por lo tanto, $2^v n + 1 = (c_k \dots c_1 0_{(v-1)} 1)$, y, así, $B(2^v n + 1) = B(n) + 1$. Supongamos que $n^2 = (d_{2k} \dots d_1)$; entonces $(2^v n + 1)^2 = 2^{2v} n^2 + 2^{v+1} n + 1$. Como $k \leq v$ (lo que obviamente implica que

$k \leq v + 1$), $2k \leq 2v$. En consecuencia, $2^{2^v}n^2 = (d_{2k} \dots d_1 0_{(2v)})$ y $2^{v+1}n = (c_k \dots c_1 0_{(v+1)})$.

Así, tenemos que:

$$\begin{aligned} B[(2^v n + 1)^2] &= B[(d_{2k} \dots d_1 0_{(2v)}) + (c_k \dots c_1 0_{(v+1)}) + 1] \\ &= B(n^2) + B(n) + 1. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Ahora, si a un múltiplo de una potencia de 2 le resto una cantidad cualquiera, ¿Cuál es la suma de dígitos de éste número y de su cuadrado? Para ello, tenemos el siguiente lema.

Lema 8 Sean $n = (c_k \dots c_1)$ y $m = (d_h \dots d_1)$ naturales impares. Si $v \geq \max\{2h - 1, h + k + 1\}$, tenemos que:

$$B(n2^v - m) = B(n) - B(m) + v$$

y

$$B[(n2^v - m)^2] = B(n^2) + B(m^2) - B(mn) + v - 1.$$

Demostración: Notemos que $c_k = d_h = 1 = c_1 = d_1$. Además, $n2^v = (c_k \dots c_1 0_{(v)})$, por lo que:

$$\begin{aligned} n2^v - m &= (c_k \dots c_1 0_{(v)}) - (d_h \dots d_1) \\ &= (c_k c_{k-1} \dots c_2 c'_1 1_{(v-h)} d'_h d'_{h-1} \dots d'_2 d_1). \end{aligned}$$

Como $c_k = d_h = 1$, tenemos que $c'_k + d_h = c_k + d'_h$ (pues $c'_k = 0 = d'_h$). Así:

$$\begin{aligned} B(n2^v - m) &= B[(c_k c_{k-1} \dots c_2 c'_1 1_{(v-h)} d'_h d'_{h-1} \dots d'_2 d_1)] \\ &= B[(c_k c_{k-1} \dots c_2 c_1 1_{(v-h)} d'_h d'_{h-1} \dots d'_2 d'_1)] \\ &= B(n) + v - B(m). \end{aligned}$$

Supongamos que $n^2 = (q_{2k} q_{2k-1} \dots q_1)$, $m^2 = (r_{2h} r_{2h-1} \dots r_1)$ y $mn = (s_{k+h} s_{k+h-1} \dots s_1)$. Es fácil ver que $(n2^v - m)^2 = (n^2 2^{2v} + m^2) - nm 2^{v+1}$; además, notemos que $s_{k+h} = 1 = q_{2k} = r_{2h}$.

Por hipótesis, $2h \leq v + 1$ y $k + h \leq v - 1$. Por lo tanto $(n2^v - m)^2$ es igual a

$$(q_{2k} \dots q_2 q'_1 1_{(v-k-h-1)} s'_{k+h} \dots s'_2 s_1 0_{(v+1-2h)} r_{2h} \dots r_1),$$

entonces

$$B[(n2^v - m)^2] = B(n^2) + B(m^2) + v - 1 - B(mn). \quad \blacksquare$$

Como una propiedad particular del lema anterior, podemos enunciar el siguiente corolario.

Corolario 3 Si $B(n^2) = 2B(n) - 1$ y $v \geq k + 2$, entonces $2^v n - 1$ es del tipo $(2, 1, 2)$.

Demostración: En este caso, $h = m = 1$. Entonces, $v \geq \max\{2 \cdot 1 - 1, 1 + k + 1\} = \max\{1, 2 + k\} = k + 2$. Por lo tanto, en virtud del lema anterior:

$$B(2^v n - 1) = B(n) + v - 1$$

y

$$\begin{aligned} B[(2^v n - 1)^2] &= B(n^2) + 1 - B(n) + v - 1 \\ &= B(n) + v - 1. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Otro corolario que se puede enunciar al lema anterior es el siguiente:

Corolario 4 Sea n un natural impar. Sea $m = 2^h - 1$ tal que $n < m$. Si $v \geq 2h + 1$, entonces:

$$B(n2^v - m) = B(n) + v - h$$

y

$$B[(n2^v - m)^2] = B(n^2) + v - 1.$$

Demostración: Sea $n = (c_k \dots c_1)$. En principio, cabe destacar que $m = (1_{(h)})$; además, se puede ver que $k \leq h$ (lo cual claramente implica que $n < 2^h$). Como $v \geq 2h + 1 = \max\{2k - 1, h + k + 1\}$, en virtud del lema anterior, tenemos que:

$$B(n2^v - m) = B(n) - B(m) + v = B(n) + v - h.$$

Ahora, como $n < 2^h$, tenemos, en virtud del lema 6, que:

$$B(nm) = B[n(2^h - 1)] = h.$$

Por otro lado, en virtud del teorema 12, $B(m^2) = h$. En consecuencia:

$$\begin{aligned} B[(n2^v - m)^2] &= B(n^2) + B(m^2) - B(mn) + v - 1 \\ &= B(n^2) + h - h + v - 1 = B(n^2) + v - 1. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Con las hipótesis adecuadas, se pueden construir ciertos números para los cuales es fácil calcular su suma de dígitos.

Lema 9 Sea $n = (c_k c_{k-1} \dots c_1)$ un natural impar. Supongamos que $B(n^2) \geq 2B(n) + 1$. Entonces, existen v y $h \in \mathbb{N}$ tales que, para $n' = n2^v - (2^h - 1)$, tenemos que $B[(n')^2] = 2B(n') - 1$.

Demostración: Sea $h = k + 1$; entonces $n < 2^h - 1$. Sea $v = B(n^2) - 2B(n) + 2h$, luego $v = 2h + a / a \geq 1$. Es importante señalar que $v < 4k + 2$. Así, las hipótesis del corolario 3 se cumplen, por lo que $B(n') = B(n) + v - h$ y:

$$\begin{aligned} B[(n')^2] &= B(n^2) + v - 1 \\ &= 2B(n) + v - 2h + v - 1 \\ &= 2B(n) + 2v - 2h - 1 \\ &= 2B(n') - 1. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

El siguiente lema nos muestra que existen ciertos números para los cuales podemos acotar la suma de dígitos de su cuadrado.

Lema 10 Sea $n = (c_k c_{k-1} \dots c_1) > 1$ un número natural. Sea $n_0 = (c_k c_{k-1} \dots c_1 0_{(k)} 10_{(2k+1)} 1)$. Entonces $B[(n_0)^2] > 2B(n_0) + 1$.

Demostración: Notemos que $n_0 = (n2^{k+1} + 1)2^{2k+2} + 1$. Así, como $n < 2^k$, podemos aplicar el lema 7, concluyendo que:

$$\begin{aligned} B(n_0) &= B[(n2^{k+1} + 1)2^{2k+2} + 1] \\ &= B(n2^{k+1} + 1) + 1 \\ &= B(n) + 2. \end{aligned}$$

Al aplicar el lema 7 nuevamente, obtenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned} B[(n_0)^2] &= B\left\{\left[(n2^{k+1} + 1)2^{2k+1} + 1\right]^2\right\} \\ &= B\left[(n2^{k+1} + 1)^2\right] + B(n2^{k+1} + 1) + 1 \\ &= B(n^2) + B(n) + 1 + B(n) + 1 + 1 \\ &= B(n^2) + B(n_0) + B(n_0) + 1 \\ &> 2B(n_0) + 1. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Observación 4 Con las hipótesis del lema anterior, se puede ver también que $n_0 \ll n^4$.

En lo que sigue, demostraremos uno de los teoremas principales del trabajo de Melfi el cual nos da una cota para la función que cuenta los números $(2, 1, 2)$.

Teorema 12 Sea $p(N) = \#\{n < N / B(n) = B(n^2)\}$. Entonces, tenemos que $p(N) \gg N^{0,025}$.

Demostración: Sea $n = (c_k c_{k-1} \dots c_1)$ un natural impar. Mostraremos que para una constante A que no depende de n , es posible construir un conjunto de n números $(2, 1, 2)$ distintos que no excedan a An^{40} .

Consideremos los n números $n_i = 2^k + i$ para $i = 1, \dots, n$. Obviamente, tenemos que $n_i < 4n$. Para todo i , por el lema 10, existe un $n_{0,i} \ll (n_i)^4$ tal que sus primeros $k + 1$ dígitos son los mismos que los de n_i y tal que $B[(n_{0,i})^2] > 2B(n_{0,i}) + 1$.

Ahora, por el lema 9, existe un $n'_{0,i} \ll (n_{0,i})^5$ tal que sus primeros k dígitos son, de nuevo, los mismos de n y tal que $B[(n'_{0,i})^2] = 2B(n'_{0,i}) - 1$.

Finalmente, por el corolario 3 existe un $n''_{0,i} \ll (n'_{0,i})^2$ cuyos primeros dígitos binarios son los mismos de n y tal que $B[(n''_{0,i})^2] = B(n''_{0,i})$.

Así, tenemos que $n''_{0,i} \ll (n'_{0,i})^2 \ll [(n_{0,i})^5]^2 \ll \left\{[(n_i)^4]^5\right\}^2 \ll n^{40}$. ■

Este resultado es mejorado por Hare *et al.*, Teorema 1.2, pág. 1739 en [11],

$$\#\{n < N : B(n^2) = B(n)\} \gg N^{1/19}.$$

En la próxima sección describimos la conjetura referente al comportamiento asintótico de los números $(2, 1, 2)$.

6. Conjetura de Melfi

En su trabajo [15], Melfi plantea la conjetura de que

$$p(n) = \#\{l < N : B(l) = B(l^2)\} \approx n^\alpha,$$

para algún $\alpha \in \mathbb{R}$. En ese mismo trabajo, utilizando argumentos probabilísticos, calcula de manera aproximada el valor de α . A continuación detallamos los argumentos.

Sea $n = (c_k c_{k-1} \dots c_1) \in \mathbb{N}$. Podemos suponer que cada c_i es una variable aleatoria Bernoulli; i.e., es una función $c_i : \Omega \rightarrow \{0, 1\}$, donde $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbb{P})$ es un espacio de probabilidad y la función de probabilidad

puntual está dada por:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\{w / c_i(w) = 1\}) &= \frac{1}{2} \\ \mathbb{P}(\{w / c_i(w) = 0\}) &= \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Por lo tanto, la función $B(n(w)) = \sum_{i=1}^k c_i(w)$ es una variable aleatoria binomial cuya función de distribución puntual está dada por:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\{w / B(n(w)) = l\}) \\ = \binom{k}{l-1} \frac{1}{2^k} \quad \text{para } n(w) \in [2^k, 2^{k+1}). \end{aligned}$$

Ahora, demostraremos que las distribuciones de $B(n)$ y $B(n^2)$ son binomiales denotamos la distribución binomial de parámetros N y p por $Bin(N, p)$.

Proposición 2 Si $2^k \leq n < 2^{k+1}$, entonces $B(n) - 1 \sim Bin(k, \frac{1}{2})$.

Demostración: Sea $n = (c_{k+1}c_k \dots c_2c_1)$. Entonces $n = \sum_{i=1}^{k+1} c_i 2^{i-1}$, donde $c_{k+1} = 1$. Luego, $B(n)$ se puede expresar como $B(n) = 1 + B(m)$, donde $m = n - 2^k$ y $B(m) \sim Bin(k, \frac{1}{2})$. ■

Proposición 3 Si $2^{2k} \leq n^2 < 2^{2k+1}$, entonces $B(n^2) - 1 \sim Bin(2k, \frac{1}{2})$. Si $2^{2k+1} \leq n^2 < 2^{2k+2}$, entonces $B(n^2) - 1 \sim Bin(2k+1, \frac{1}{2})$.

Demostración: La misma se deduce de la proposición anterior. ■

Utilizando la notación que introdujimos antes y prescindiendo de ω tenemos que:

$$\frac{p(n)}{n} \approx \mathbb{P}(B(n) = B(n^2), n \in [2^k, 2^{k+1})).$$

Si suponemos que la conjetura de Melfi es cierta:

$$\begin{aligned} n^{\alpha-1} \\ \approx \mathbb{P}(B(n) = B(n^2), n \in [2^k, 2^{k+1})) \\ = \sum_{l=1}^k \mathbb{P}(B(n) = l, B(n^2) = l) \\ \leq \sum_{l=1}^k \mathbb{P}(B(n) = l) \mathbb{P}(B(n^2) = l). \quad (20) \end{aligned}$$

La desigualdad (20) es cierta debido a la submultiplicatividad de la función B .

Para calcular el valor en (20), necesitamos calcular la distribución de $B(n^2)$; ésto lo hacemos en el lema siguiente.

Lema 11

$$\mathbb{P}(B(n^2) = l) = \frac{\binom{2k+1}{l-1}}{2^{2k+1}} + \frac{\binom{2k}{l-1}}{2^{2k}}.$$

Demostración: Definamos los conjuntos:

$$\begin{aligned} A &= \{B(n^2(w)) = l\} \\ B &= \{c_{2k+1}(n^2(w)) = 1\}. \end{aligned}$$

Entonces, por la regla de la probabilidad total:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(A) &= \mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(A \cap B^C) \\ &= \mathbb{P}(\{B(n^2) = l, c_{2k+1}(n^2) = 1\}) \\ &+ \mathbb{P}(\{B(n^2) = l, c_{2k+1}(n^2) = 0\}). \end{aligned}$$

Pero, como en el segundo caso $n^2 \in [2^{2k}, 2^{2k+1})$ y $c_{2k+1}(n^2) = 0$, tenemos que $c_{2k}(n^2) = 1$, por lo que:

$$\mathbb{P}(A) = \frac{\binom{2k+1}{l-1}}{2^{2k+1}} + \frac{\binom{2k}{l-1}}{2^{2k}}. \quad \blacksquare$$

Analicemos más a fondo el resultado obtenido en el lema anterior. Como $n^2 \in [2^{2k}, 2^{2k+1})$, tenemos que $c_{2k+2}(n^2) = 0$. Recordemos que suponemos que los $c_i(n^2)$ son variables aleatorias independientes Bernoulli, por ello, al recordar que, para la primera fracción, $c_{2k+1}(n^2) = 1$, podemos reescribir la primera fracción como

$$\frac{1}{2} \frac{\binom{2k}{l-1}}{2^{2k+2}}.$$

En la segunda fracción, tenemos que $c_{2k+2}(n^2) = 0$ y $c_{2k+1}(n^2) = 0$. En consecuencia, la segunda fracción

se puede reescribir como $\frac{\binom{2k}{l-1}}{2^{2k+2}}$.

En virtud de las observaciones anteriores, el resultado del lema anterior se puede expresar así:

$$\frac{1}{2} \frac{\binom{2k}{l-1}}{2^{2k+2}} + \frac{\binom{2k}{l-1}}{2^{2k+2}} = \binom{2k}{l-1} \left(\frac{3}{2^{2k+3}} \right).$$

Con ayuda de un computador, se puede comprobar que, para valores grandes de k , $\frac{3}{2^{2k+3}} \approx \frac{1}{2^{2k+1}}$; incluso, para $k = 2$, la diferencia entre ambos valores es de $0,0078125 \approx 7,81 \cdot 10^{-3}$, y a medida que k se incrementa, el error disminuye. En conclusión, podemos decir que:

$$\frac{\binom{2k+1}{l-1}}{2^{2k+1}} + \frac{\binom{2k}{l-1}}{2^{2k}} \approx \frac{\binom{2k}{l-1}}{2^{2k+1}}. \quad (21)$$

Si se supone que las variables aleatorias $B(n)$ y $B(n^2)$ son independientes, la desigualdad en (20) se transforma en una igualdad. Esta suposición en general no es cierta, porque para valores de n pequeños, la cantidad $B(n)$ y $B(n^2)$ es pequeña, lo que indica que estas variables no son independientes, pero Melfi afirma que si $B(n) > \sqrt{\log_2(n)}$, este fenómeno tiende a desaparecer.

Procedamos ahora a calcular α . Como $B(n)$ es una variable aleatoria binomial, si $n \in [2^k, 2^{k+1})$, tenemos

que $\mathbb{P}(B(n) = l) = \frac{\binom{k}{l-1}}{2^k}$. Ahora, sustituyendo lo antes expresado y la ecuación (21) en (20), tenemos:

$$\begin{aligned} n^{\alpha-1} &\approx \sum_{l=1}^k \frac{\binom{2k}{l-1}}{2^{2k+1}} \frac{\binom{k}{l-1}}{2^k} \\ &= \frac{1}{2^{2k+1} \cdot 2^k} \sum_{l=1}^k \binom{2k}{l-1} \binom{k}{l-1}. \end{aligned}$$

Y ahora, aplicando la identidad de Vandermonde, tenemos que $n^{\alpha-1} \approx \frac{1}{2^{3k+1}} \binom{3k}{k}$. Luego, tomando logaritmos en la ecuación anterior, y tomando $n = 2^k$:

$$\left[\ln(2^k) \right]^{\alpha-1} \approx -(3k+1)\ln(2) + \ln \left[\binom{3k}{k} \right].$$

Después, haciendo despejes, encontramos que:

$$(\alpha - 1)\ln(2) \approx -\left(3 + \frac{1}{k}\right)\ln(2) + \frac{1}{k} \ln \left[\binom{3k}{k} \right].$$

Esto, a su vez, implica que:

$$\alpha \approx -2 - \frac{1}{k} + \frac{1}{k \ln(2)} \ln \left[\binom{3k}{k} \right].$$

Por lo tanto, tomando el límite cuando $k \rightarrow \infty$, concluimos lo siguiente:

$$\alpha \approx -2 + \frac{1}{\ln(2)} \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \ln \left[\binom{3k}{k} \right]. \quad (22)$$

Recordemos que, por la fórmula de Stirling:

$$\begin{aligned} \ln \left[\binom{3k}{k} \right] &= \ln \left[\frac{(3k)!}{k!(2k)!} \right] \\ &= 3k \ln(3) - 2k \ln(2). \end{aligned}$$

De donde:

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \ln \left[\binom{3k}{k} \right] &= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} [3k \ln(3) - 2k \ln(2)] \\ &= 3 \ln(3) - 2 \ln(2). \end{aligned}$$

Por lo que, sustituyendo en (22), obtenemos que:

$$\alpha \approx -2 + \frac{1}{\ln(2)} [3 \ln(3) - 2 \ln(2)] = 0,75488.$$

7. Ecuaciones con números (2, 1, 2)

En esta sección se considera cuando la ecuación

$$B(n) = B(n^2) = k \quad (23)$$

tiene infinitas soluciones en n para un $k \in \mathbb{N}$ dado. Hare, Laishram y Stoll en [11] resolvieron todos los casos con la excepción de $k \in \{9, 10, 11, 14, 15\}$.

La principal motivación para considerar la ecuación (23) proviene del trabajo [14] de Madritsch y Stoll, quienes demostraron que $(B(n^2)/B(n))_{n \geq 1}$ es denso en \mathbb{R}^+ . Esto se basa en un resultado de [19], incluido en la sección 4, que dice que $\liminf_{n \rightarrow \infty} B(n^2)/B(n) = 0$. Dado que el tamaño promedio de $B(n^2)$ es el doble que el de $B(n)$ (véase [2]), la ecuación (23) concierne a un conjunto peculiar de enteros. En particular, para ciertos valores de k la ecuación admite infinitas soluciones impares n y para otros valores de k solo hay un número finito. Uno de los resultados de Hare, Laishram y Stoll [11] establece que existen familias paramétricas infinitas de soluciones para $k = 12, 13$ y $k \geq 16$. En el otro caso, solo hay un número finito de soluciones para $k \leq 8$. Por ejemplo, para $s(n) = s(n^2) = 8$, solo hay

64 soluciones en enteros impares y la solución más grande es $n = 266335$ (véase [11], tabla 2.).

Estos resultados se basan en un algoritmo que maneja todas las ordenaciones posibles de los exponentes en n^2 cuando n se escribe como una suma de un pequeño número de potencias de 2. Como el algoritmo trata (de manera exhaustiva) todos los casos, el método de [11] permitió determinar explícitamente todas las soluciones para $k \leq 8$. El tiempo de ejecución del algoritmo, sin embargo, se dispara para valores más grandes de k y ellos conjeturan por argumentos heurísticos de que solo hay un número finito de soluciones para $k \in \{14, 15\}$.

En [1] se demuestran, utilizando un nuevo lema de factorización combinatoria, dos algoritmos y resultados recientes en [12], que las soluciones correspondientes a las ecuaciones $k \in \{9, 10, 11\}$ son finitas, esto se logra a través de un estudio de casos.

8. Conclusiones

- Se realizaron las demostraciones de las conocidas propiedades algebraicas de $B(n)$, subaditividad y submultiplicatividad. Estas propiedades tienen aplicaciones en análisis de complejidad.
- Se verificó que la base binaria minimiza asintóticamente $S(r, n)/n$, con implicaciones en diseños de estructuras de datos que permiten el manejo de grandes números, mejorar la velocidad de cifrado, descifrado, el almacenamiento y búsqueda de claves.
- Se sabe que los números representables por la terna $(2, 1, 2)$ tienen densidad positiva, ya que se cumple que $p(n) \gg n^{1/19}$. No obstante, persisten algunas incógnitas fundamentales: en primer lugar, si el exponente $1/19$ es óptimo, y en segundo, la demostración definitiva de la conjetura de Melfi.
- Queda abierto caracterizar el número de soluciones de $B(n) = B(n^2) = k$ para los casos $k \in \{14, 15\}$. En [1] se conjetura que este conjunto de soluciones es finito.

9. Agradecimientos

A Alejandra Cáceres por su colaboración en la demostración de algunos resultados referentes a números $(2, 1, 2)$. A Stella Brassesco por ayudar a descifrar la heurística de la conjetura de Melfi (sección 6), a los árbitros anónimos y al editor invitado Franz Yuri Hernández por sus sugerencias.

Referencias

- [1] Alvoui, K., Jamet, D., Kaneko, H., Popoli, P. & Stoll, T. (2023). On the binary digits of n and n^2 . *Theoret. Comput. Sci.* 939:119-139.
- [2] Bassily, N. & Kátai, I. (1995). Distribution of the values of q -additive functions on polynomial sequences. *Acta Math. Hung.* 68(4):353-361.
- [3] Bush, L. (1940). An asymptotic formula for the average sum of the digits of integers. *The American Mathematical Monthly.* 47(3):154-156.
- [4] Cilleruelo, J. (2014). *Conjuntos de Sidon*. XXVII Escuela Venezolana de Matemáticas. Ediciones IVIC. Altos de Pipe.
- [5] Cooper, C., & Kennedy, R. (1999). A generalization of a result by Trollope on digital sums. *Journal of Institute of Mathematics & Computer Sciences. Mathematics Series.* 12(1):17-22.
- [6] Delange, H. (1975). Sur la fonction sommatoire de la fonction somme des chiffres. *L'Enseignement Mathématique.* 21:31-47.
- [7] Drmota, M. & Gajdosik, J. (1998). The distribution of the sum of digits function. *Journal de théorie des nombres de Bordeaux.* 10(1):17-32.
- [8] Drmota, M. & Rivat, J. (2005) The sum of digits function of squares. *J. London Math. Soc.* 72(2):273-292.
- [9] Erdenebat, E. & Wong, K. (2024) The error term of the sum of digital sum functions, in arbitrary bases. *Notes on Number Theory and Discrete Mathematics.* 30(2):311-318.
- [10] Hare, K., Laishram, S. & Stoll, T. (2011a) Stolarsky's conjecture and the sum of digits of polynomial values. *Proceedings of the American Mathematical Society.* 139(1):39-49.

- [11] Hare K., Laishram, S. & Stoll, T. (2011b). The sum of digits of n and n^2 . *International Journal of Number Theory*. 7(7):1737-1752.
- [12] Kaneko, H. & Stoll, T. (2022). Products of integers with few binary digits. *Uniform Distribution Theory*. 1:11-28.
- [13] Lindström, B. (1997) On the binary digits of a power. *J. Number Theory*. 65:321-324.
- [14] Madritsch, M. & Stoll, T. (2014). On simultaneous digital expansions of polynomial values. *Acta Math. Hung.* 143(1):192-200.
- [15] Melfi, G. (2005). On simultaneous binary expansions of n and n^2 . *Journal of Number Theory*. 111:248-256.
- [16] MacWilliams, F. & Sloane, N. (1978). *The Theory of Error Correcting Codes*. North-Holland Publishing Company.
- [17] Mauduit, C. & Rivat, J. (2010). Sur un problème de Gelfond: la somme des chiffres des nombres premiers. *Annals of Mathematics*. 171(3):1591-1646.
- [18] Rivest, R., Shamir, A. & Adleman, L. (1978). A method for obtaining digital signatures and public-key cryptosystems. *Communications of the ACM*. 21(2):120-126.¹
- [19] Stolarsky, K. (1978). The binary digits of a power. *Proceedings of the American Mathematical Society*. 71(1):1-5.
- [20] Stolarsky, K. (1977). Power and exponential sums related to binomial coefficient parity. *SIAM J. Applied Math*. 32:717-730.
- [21] Trollope, J. (1968). An explicit expression for binary digital sums. *Mathematics Magazine*. 41:21-25.

¹Previamente publicado como un reporte técnico en el MIT en abril de 1977.

GUIA PARA LOS AUTORES

La Revista FARAUTE UC de la Facultad de Ciencias y Tecnología (FACYT) considerará, para su difusión, trabajos inéditos relacionados con las ramas de las Ciencias Básicas y la Tecnología, tanto de carácter técnico como de carácter divulgativo, siempre que el mismo sea el producto de un proceso de investigación objetivo y comprobable. Se aceptan artículos o notas en español e inglés.

Tipos de Trabajos

- Artículos científicos con un máximo de doce (12) páginas.
- Artículos divulgativos de investigación con un máximo de doce (12) páginas.
- Notas Técnicas con un máximo de cinco (5) páginas.
- Artículos de Actualización Científica que resuman el “Estado del Arte” de un área específica de las ciencias y tecnología con un máximo de doce (12) páginas.
- Artículos de invitados especiales con un máximo de cinco (5) páginas.
- Cartas al Editor, que consistan en observaciones técnicas de artículos publicados en la revista.

Requerimientos de formato para manuscritos enviados para su evaluación:

El formato del manuscrito debe seguir las siguientes recomendaciones:

- Tipo de letra: *Times New Roman* 12 ptos, a excepción del título en español.
- Texto del artículo a doble columna a excepción del título, la información del(os) autor(es) y el resumen.
- Espaciado: simple
- Tamaño de papel: Carta con márgenes justificado de 2,5 cm por cada lado.
- Los artículos deben constar de las siguientes secciones:
 - **Título:** en español e inglés. El título en español debe ser en letra Times New Roman, tamaño 14, en mayúsculas, negritas, centrado. Dejando una línea de por medio, en letra tamaño 12, el título en inglés, negrita, en mayúsculas únicamente las iniciales de los nombres, pronombres, verbos, adjetivos y adverbios.

Información del(os) autor(es). Colocar el primer nombre completo, inicial del segundo, primer apellido completo e inicial del segundo, en mayúscula y centrado. En la siguiente línea colocar la dirección física de los autores y en la última línea la dirección de correo electrónica. Emplear superíndices numéricos para la identificación de los autores y sus respectivas direcciones. En caso de que varios autores posean correos electrónicos bajo un mismo dominio, utilizar el formato siguiente {login1, login2, ... loginn}@dominio. Ejemplo:

{sardito, hvasquez, jrodrigu}@uc.edu.ve
 - **Resumen:** máximo de 150 palabras a una sola columna justificada, sin incluir referencias bibliográficas. Luego colocar entre tres (03) y cinco (05) palabras clave en orden alfabético (el resumen y las palabras clave deben incluirse en idioma inglés).
 - **Introducción.**
 - **Cuerpo del artículo:** Materiales y métodos (en caso de ser necesario), resultados y discusión.
 - **Conclusiones** (opcional).

- **Agradecimientos** (opcional).
- **Bibliografía.** Las referencias bibliográficas serán listadas en orden alfabético, incluirán primer apellido, inicial del nombre y en caso de ser varios autores, inicial del nombre seguido del primer apellido, año de publicación, título de la obra o del trabajo citado (se debe colocar en mayúscula solo la letra inicial de la primera palabra). Ejemplos según sea el caso:
 - Publicaciones periódicas: Autor. Año. Título del artículo. *Nombre de la Revista abreviada*. Volumen (Número): páginas.

Baum, L. E., T. Petrie, G. Soules & N. Weiss. (1970). A maximization technique occurring in the statistical analysis of a probabilistic functions of Markov chains. *Ann. Math. Stat.* 41(1):164–171.

- Libros: Autor. Año. *Título del libro*. Casa editora. Ciudad.

Bernardo, J. & A. Smith. (1994). *Bayesian theory*. Wiley. New York.

- Libros colegiados: Autor. Año. Título del capítulo. In: *Título del libro* (editores), páginas. Casa editora. Ciudad.

Steyermark, J. (1994). Aspectos morfológicos del Parque Nacional Morrocoy. In: Flora del Parque Nacional Morrocoy (B. Manara, ed.), 66-103. Fundación Instituto Botánico de Venezuela y Agencia Española de Cooperación Internacional. Caracas, Venezuela.

- Proceedings o memorias: Autor. Año. Nombre del Evento. Institución donde se realizó el mismo. Ciudad. País. Páginas.

Toyota, M. (1999). Caracterização química e citológica como subsídios à taxonomia de grupos-problema. VIII Reunião brasileira de ficologia. Sociedade brasileira de ficologia. Pernambuco. Brasil. 41.

- Tesis o trabajos de ascenso: Autor. Año. Título. Tipo de Trabajo. Facultad. Universidad. Ciudad, País.

Vera, B. (2000). Estudio ficoflorístico de la región oriental del litoral central de Venezuela, Edo. Vargas, Venezuela. Trabajo de ascenso a la categoría de Asistente. Facultad de Ciencias. Universidad Central de Venezuela. Caracas, Venezuela.

- Documento en electrónico: citar según las indicaciones del documento electrónico o seguir los formatos indicados en la norma ISO 690-2, disponible en la dirección:

http://www.ugr.es/~pwlac/G00_Referencias_electronicas.html

- Las referencias deben ser citadas en el artículo, de acuerdo a:
 - **Un solo autor:** se indica el primer apellido del autor seguido por el año de la publicación, todo esto entre paréntesis.

..... (Vargas, 1999)....
 - **Dos autores:** se coloca el primer apellido del primer autor, el símbolo & y el primer apellido del segundo autor, seguidamente la fecha de publicación; todo esto entre paréntesis.

..... (Vargas & Rodríguez, 2002).....

- **Más de dos autores:** se coloca el primer apellido del primer autor, luego se coloca “*et al.*”, seguidamente la fecha de publicación; todo esto entre paréntesis.

..... (Vega *et al.*, 2005)

- **Más de dos referencias:** se coloca cada referencia de acuerdo a lo anterior, separados por puntos y comas (;). Se deben ordenar primariamente en orden cronológico y en segundo lugar alfabéticamente, todo esto entre paréntesis. el primer apellido del primer autor, luego se coloca “*et al.*”, seguidamente la fecha de publicación; todo esto entre paréntesis.

..... (Vargas, 1999; Vargas & Rodríguez, 2002; Graterol *et al.*, 2005; Vega *et al.*, 2005)

- Los encabezados de cada sección se escribirán en negritas y deben estar enumerados.
- Las figuras, fotografías, diagramas y gráficos deben denominarse como “Fig.”. Las tablas deben denominarse “Tabla”. Las tablas y figuras deben enumerarse correlativamente y estar citadas en el texto en el mismo formato anterior. Se presentarán insertas en el cuerpo del artículo y además se debe entregar una copia en versión digital de las mismas. Las figuras deben estar en blanco y negro o escala de grises en formato JPEG o TIFF a una resolución de 300 dpi. Para la entrega de la versión final se requieren las imágenes en archivos a parte.
- Unidades de medida. Los valores se deben expresar en el sistema métrico decimal de acuerdo con el Sistema Internacional de Unidades (SI). La mayoría de los símbolos se escriben abreviados, en minúscula, salvo algunas excepciones como aquellos derivados de nombres propios, no llevan punto y se separan del valor numérico por un espacio. Ejemplos: cm (centímetro), h (hora), °C (Celsius).
- Las ecuaciones deben identificarse con un número entre paréntesis correspondiente a la enumeración correlativa de las ecuaciones. Estas deben estar en cursiva. Ejemplo:

$$I_F = I_B = -I_C = A^2 I_{A1} + A I_{A2} + I_{A0} = \frac{-J\sqrt{3}E_A}{Z_1 + Z_2} \quad (1)$$

Las ecuaciones tienen que estar citadas en el manuscrito y deben identificarse como “Ec”.

- Los algoritmos o códigos fuentes de programas se deben identificar con la palabra “Algoritmo” seguida de un número correspondiente a la numeración correlativa de los algoritmos y un título que lo identifique. Estos deben respetar la indentación y en letra courier tamaño 9. Ejemplo:

```
(1) void * sum(void * arg) {
(2) int * p; p = (int *)arg;
(3) pthread_mutex_lock(&m);
(4) s = s + *p;
(5) pthread_mutex_unlock(&m);
(6) }
```

Algoritmo 1. Hilo que efectúa la suma.

- Nombres y coordenadas geográficas. Los nombres geográficos sólo se escriben en mayúscula cuando forman parte de un nombre propio, por ejemplo: Península de Paraguana, Río Cabriales. Las coordenadas deben citarse utilizando las siglas correspondientes: Lat. (latitud), Long. (longitud), N (norte), S (sur), E (este), O (oeste), ejemplo: 10°31'01” Lat. N., 67°06'10” Long. O.

Envío de manuscritos para arbitraje:

Los *manuscritos iniciales* deben ser enviados en formato electrónico PDF o MSWord (al menos en la version XP) a la siguiente dirección:

farautecienciauc@gmail.com

Hojas de estilo para artículos aceptados para su publicación:

El arte final de los artículos aceptados para su publicación debe respetar todos los requerimientos anteriores. Para ello se ponen a disposición de los autores las hojas de estilo correspondiente a cada formato (LATEX o Microsoft WORD), las cuales pueden ser obtenidas electrónicamente en la siguiente dirección electrónica:

<http://www.facyt.uc.edu.ve/investigacion/faraute>

Hoja de Estilos para LATEX:

CyT_UC.sty
CyT_UC.tex

Hoja de Estilos para WORD:

CyT_UC.doc

Notas finales:

Los artículos serán sometidos a arbitraje en extenso previa publicación. Los artículos arbitrados sujetos a modificación, deben ser corregidos en un plazo de tres semanas para su incorporación en el número correspondiente. En caso de no ser entregados, permanecerán por un período de espera de seis meses como máximo, para la entrega de la versión corregida. Una vez vencido este plazo el trabajo será arbitrado nuevamente previa solicitud por parte del autor.

La Revista Faraute de Ciencias y Tecnología es el órgano de difusión y divulgación de las actividades científicas de la Facultad de Ciencias y Tecnología de la Universidad de Carabobo, la cual es de Acceso Abierto No comercial (AANC).

GUIDE FOR AUTHORS

“Faraute” Journal of the Experimental Faculty of Science and Technology (Facyt) publishes original papers of interest to a broad group of readers from the basic Science and Technology community.

A submission to Faraute UC must be the original contribution of the author(s) and must not be published elsewhere or be under consideration for another publication in its submitted or a substantially similar form in any language. Contributions in Spanish and English in the following categories may be submitted.

Types of contributions

- Research articles with original results in the basic science and technology. Maximum twelve (12) pages.
- Technical notes. Maximum five (5) pages.
- Reviews. Critical surveys of specific field of science and technology in which existing published information is analyzed and discussed. Maximum twenty (20) pages.
- Articles of special guest. Maximum five (5) pages.
- Letters to the editor regarding technical observations of articles published in the journal.

Preparation of text:

The format of the manuscript must follow the following recommendations:

- Type of letter: *Times New Roman* size 12, except the title in Spanish.
- Text of the article in double columns, except the title, the information of the author(s) and the abstract..
- Spacing: single,
- Size of paper: letter, with justified margins of 2.5 cm on either space.
- The article must have the following sections:
 - **Title:** In Spanish and English. The title in Spanish must be in Times New Roman, size 14, in capital letters, bold, centered, leaving one line size 12 between. The title I English will be bold; capital letters are to be used only for the initial the names, pronouns, verbs, adjectives and adverbs. Cursive words are allowed, only when referring to the scientific name of a species. For example:

**DETERMINACIÓN Y CARACTERIZACIÓN PARCIAL DE PROTEASAS
OBTENIDAS DEL FRUTO DE *Thevetia ahouai* (L.) A.DC.**
 - **Information of the author(s).** Place the first name, initial of the second one, last name and initial of the second one, in capital letters and centered. In the following line place the physical address of the authors, and in the last line the electronic address. Use numeric super indexes to identify authors and their addresses. In case of various authors having electronic addresses under the same domain, use the following format: {login1, login2, ... loginn}@domain. For example:

{sardito, hvasquez, jrodrigu@uc.edu.ve}

- **Abstract:** The abstract must contain a maximum of 150 words in one column, justified, without including bibliographic references. Afterwards, add between three (3) and five (5) keywords in alphabetical order.
- **Introduction:** This section should provide a comprehensible statement of the problem, a relevant literature of the subject, and the proposed approach or solution.
- **Body of the article:** The paper may include a section of material and methods, if necessary, and must contain both a result and a discussion section.
- **Conclusions:** A conclusions section is optional.
- **Acknowledgments:** This section is also optional.
- **Bibliography:** Bibliographical references will be listed in alphabetical order. They will include, for the first author, first surname and initial of the first name. For the rest of the authors, if there are any, initial of first name followed by first surname. After the authors names it follows the year of publication in parenthesis. The next information should be the title of the work referenced. Only the first letter of the first word should be in capital letters. Examples of possible referenced works are given in the following paragraphs:

- Periodic publications: Author or authors. Year. Title of the article. Abreviated name of the publication (in italics). Volume (Number): pages.

Baum, L. E., T. Petrie, G. Soules & N. Weiss. (1970). A maximization technique occurring in the statistical analysis of a probabilistic functions of Markov chains. *Ann. Math. Stat.* 41(1):164–171.

- Books: Author or authors. Year. Title of book. Publishers. City.

Bernardo, J. & A. Smith. (1994). *Bayesian theory*. Wiley. New York.

- Collaborative books: Author or authors. Year. Title of chapter. In: Title of book (editors), pages. Publishers. City.

Steyermark, J. (1994). Aspectos morfológicos del Parque Nacional Morrocoy. In: Flora del Parque Nacional Morrocoy (B. Manara, ed.), 66-103. Fundación Instituto Botánico de Venezuela y Agencia Española de Cooperación Internacional. Caracas, Venezuela.

- Proceedings or memoirs: Author or authors. Year. Name of presentation. Name of the Event. Institution where the event took place. City. Country. Pages.

Toyota, M. (1999). Caracterização química e citológica como subsídios à taxonomia de grupos-problema. VIII Reunião brasileira de ficologia. Sociedade brasileira de ficologia. Pernambuco. Brasil. 41.

- Thesis or promotion research projects: Author or authors. Year. Title. Type of work. Faculty. University. City, Country.

Vera, B. (2000). Estudio ficoflorístico de la región oriental del litoral central de Venezuela, Edo. Vargas, Venezuela. Trabajo de ascenso a la categoría de Asistente. Facultad de Ciencias. Universidad Central de Venezuela. Caracas, Venezuela.

- Document in electronic format: Cite according to indications of the electronic document or follow the formats indicated the norm ISO 690-2, available in the address:

http://www.ugr.es/~pwlac/G00_Referencias_electronicas.html

- The references must be cited in the article according to:
 - **One author:** Indicate the first surname of the author followed by the year of publication, all in parenthesis.
 (Vargas, 1999)....
 - **Two authors:** indicate the first surname of the first author, the symbol & and the surname of the second author, followed by the year of publication, all in parenthesis.
 (Vargas & Rodríguez, 2002)....
 - **More than two authors:** Indicate the last name of the first author, the add “*et al.*”, followed by the year of publication, all in parenthesis.
 (Vega *et al.*, 2005)
 - **More than two references:** Write each reference according to the previous information, separated by semi-colons (;). They should be sorted chronologically firstly and them alphabetically, all in parenthesis.
 (Vargas, 1999; Vargas & Rodríguez, 2002; Graterol *et al.*, 2005; Vega *et al.*, 2005)
- The headings of each section must be written in bold, and should be numbered.
- Figures, photographs and graphics should be identified “Fig.”. Tables should be called “Table”. These words should be placed under the figure or table aligned to the left. There should follow a description, in Times New Roman letters, size 10. The tables and figures must be numbered correlatively and be cited in the text in the same previous format.
- Figures will be inserted in the body of the article, and a digital copy should be handed in. They should be in JPEG or TIFF, a resolution of 300 dpi, and the file should be name as “Fig”, followed by the corresponding number of the article.
- Units of measure. The values must be expressed in the decimal metric system, according to the Systeme International d’Unités (SI). Most symbols are abbreviated, in common letters, except in some cases, as those derived from proper names, they do not take a period, and are separated from the numeric value by a space. Examples: cm (centimeter), h (hour), °C (Celsius).
- Equations must be identified with a number in parenthesis corresponding to the correlative numbers of the equation. These must be in cursive. For example:

$$I_F = I_B = -I_C = A^2 I_{A1} + A I_{A2} + I_{A0} = \frac{-J\sqrt{3}E_A}{Z_1 + Z_2} \quad (1)$$

To refer these equation in the manuscript should be identified as “Eq”.

- Algorithms or codes of program sources must be identified with the word “Algorithms”, followed by a number corresponding to the correlative number of the algorithms and the title identifies it, all centered in a placed I the lower part. Each line must be numbered as show below. These must respect indentation and be in “Courier” size 9. Example:

```
(1) void * sum(void * arg) {
(2) int * p; p = (int *)arg;
(3) pthread_mutex_lock(&m);
(4) s = s + *p;
(5) pthread_mutex_unlock(&m);
(6) }
```

Algorithm 1. Hilo que efectúa la suma.

- Names and geographical coordinates. Geographical names are only written in capital letters when they are part of a proper name, for example: Península de Paraguana, Río Cabriales. Coordinates must be cited using the corresponding abbreviation: Lat. (latitude), Long. (length), N (north), S (south), E (east), W (west), for example: 10°31’01” Lat. N., 67°06’10” Long. O.

Sending manuscripts for arbitration:

The initial manuscripts must be sent in PDF or MSW electronic format to the following address:

farautecienciauc@gmail.com

Style pages for articles accepted for publication:

The final art of the article accepted for publication must respect all the previous requirements. Therefore, the authors are offered the style pages that correspond to each format (LATEX or Microsoft WORD), which can be obtained at the following electronic address: <http://www.facyt.uc.edu.ve/investigacion/faraute>

For LATEX style pages:

CyT_UC.sty
CyT_UC.tex

For WORD style pages:

CyT_UC.doc

Final notes:

The articles will undergo complete arbitration prior to publication. The arbitrated articles subjected to modifications, must be corrected in three weeks to be included in the corresponding number. In case they are not turned in they will be held for a maximum of six months, awaiting for the corrected version. Once that period expires the article will be subjected to arbitration again upon the author’s request.

Faraute de Ciencias y Tecnología is the organ of diffusion and dissemination of the scientific activities of the Facultad de Ciencias y Tecnología of the Universidad de Carabobo, which is Non-commercial Open Access (AANC).



UNIVERSIDAD DE CARABOBO
FACULTAD EXPERIMENTAL DE CIENCIAS Y TECNOLOGÍA

AUTORIDADES UNIVERSITARIAS

Jessy Divo de Romero
Rectora

Ulises Rojas
Vicerrector Académico

José A. Ferreria
Vicerrector Administrativo

Pablo Aure
Secretario

AUTORIDADES DE LA FACULTAD
EXPERIMENTAL DE CIENCIAS Y TECNOLOGÍA

Profesor José Gregorio Marcano
Decano

Profesora Elizabeth Perozo
Directora Departamento de Química

Profesor Reimer Romero
Director de Investigación

Profesor José Henríquez
Director Departamento de Computación

Profesor Juan Carlos Pereyra
Director de Postgrado

Profesor Richard Barrios
Director Departamento de Física

Profesor Orestes Montilla
Director de Asuntos Estudiantiles

Profesor Luis Rodríguez
Director Departamento de Matemáticas

Profesora Ysmel la Rosa
Directora de Extensión

Profesora Carmen Rodríguez
Directora Departamento de Biología

Lcdo. José Antonio Ramírez
Director de Asuntos Profesorales

Profesora Loyda Rivas
Coordinadora de la Unidad de Formación
Socio-Humanística

Profesora Rosa Bravo
Directora de Currículum