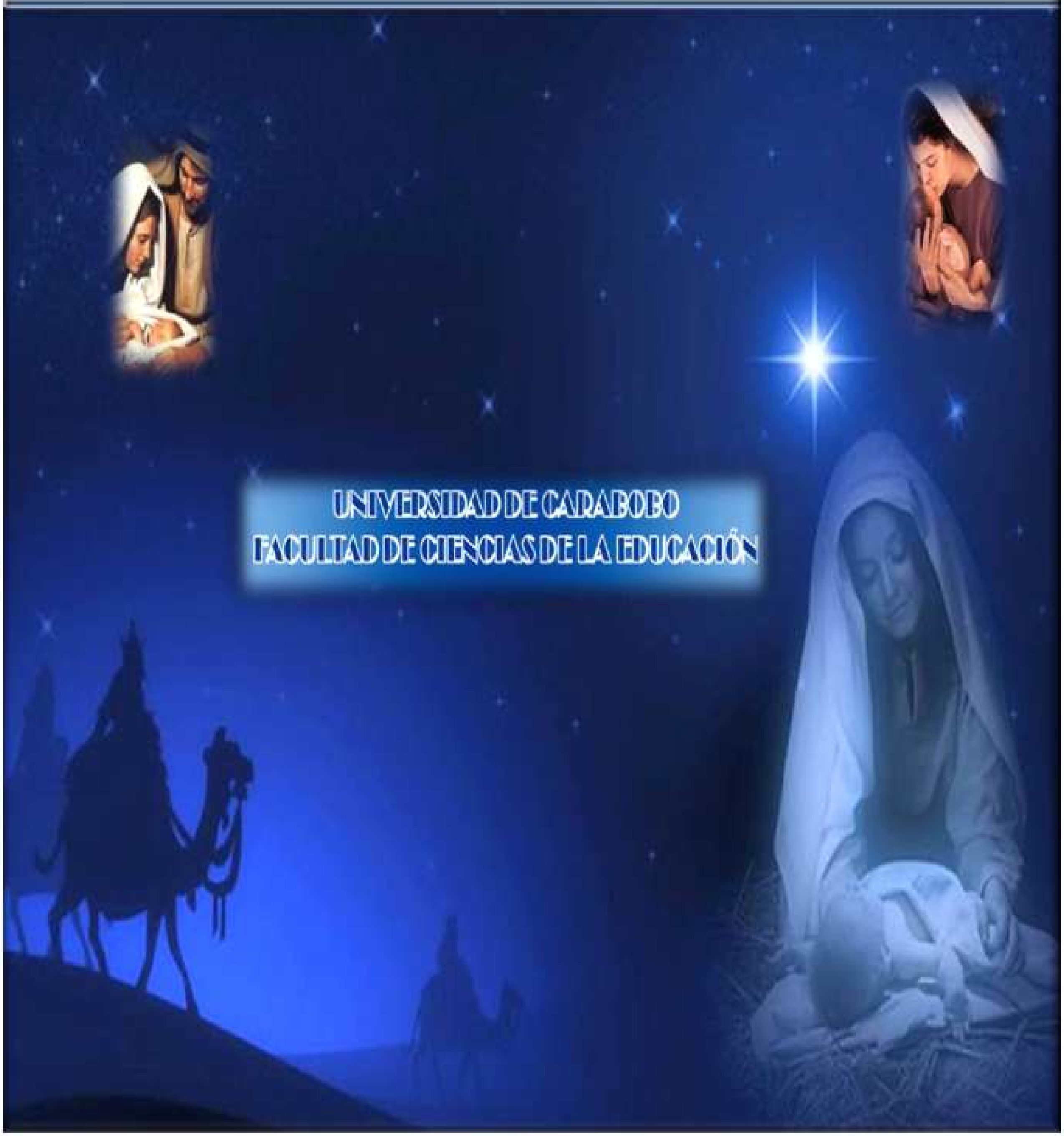
HOMOTECIA

CÁTEDRA DE CÁLCULO - DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA y FÍSICA – FACULTAD DE CIENCIAS DE LA EDUCACIÓN – UNIVERSIDAD DE CARABOBO

 Depósito Legal: PPi2012024055 – I. S. S. N.: 2244-7385

E- mail: homotecia2002@gmail.com - Nº 12 – AÑO 15 Valencia, Viernes 1º de Diciembre de 2017



HOMOTECIA

DEPARTAMENTO DE MATEMATICA Y FISICA - FACE - UC

ADVENTUS NOVUS CALCULUS

CÁTEDRA DE CÁLCULO

Índice

Diseño de Portada y Montaje Gráfico: R. A. A. H.

La mayoría de las imágenes que aparecen en esta publicación, son obtenidas de Google, Facebook y msn, vía Internet.

Para el acceso a todos los números publicados de la Revista HOMOTECIA, conectarse al enlace:
http:/servicio.bc.uc.edu.ve/homotecia/index.htm > Sección: MULTIDISCIPLINARIAS

Revista HOMOTECIA
© Rafael Ascanio H. – 2009
Hecho el Depósito de Ley.
Depósito Legal:
PPi2012024055
I. S. S. N.: 2244-7385

e-mail:
homotecia2002@gmail.com

Publicación Mensual
Revista de acceso libre

Publicada por:

CÁTEDRA DE CÁLCULO
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA Y FÍSICA
FACULTAD DE CIENCIAS DE LA EDUCACIÓN
UNIVERSIDAD DE CARABOBO

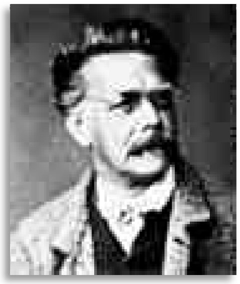
Nº 12 - AÑO 15 - Valencia, Miércoles 1º de Diciembre de 2017

EDITORIAL

Llegamos a diciembre. Pronto celebraremos las fiestas navideñas y recibiremos el nuevo año. Como siempre, realizaremos actividades tradicionales. Oiremos aguinaldos, gaitas y esa música caribeña alegre y contagiosa que acompaña las reuniones familiares en esta época. En las casas, y hasta en edificios públicos, se verán adornos relacionados con las fechas, el arbolito con sus luces y bambalinas; y en muchos de ellos veremos espectaculares nacimientos. Con referencia a estos últimos, queremos incluir como parte de este editorial, un artículo publicado por Eumenes Fuguet (*churuguarero77@gmail.com*) en *El carabobeño.com* el 23 de diciembre de 2015, titulado *"San Francisco de Asís, creador de nacimientos navideños"*. A continuación dicho artículo:

En Venezuela, como en casi todo el mundo, durante la época decembrina se colocan los nacimientos o pesebres, conocidos en otros países como Belén, portal o pasito; que representan el nacimiento del "Niño Jesús". Esta iniciativa surgió de San Francisco de Asís, fundador de la Orden Franciscana, quien había pasado la Navidad de 1223 en Grecehio, en el valle de Rieti. Con tal ocasión, había dicho a su amigo, Juan da Vellita: "Quisiera hacer una especie de representación viviente del nacimiento de Jesús en Belén, para presenciar, por decirlo así, con los ojos del cuerpo la humildad de la Encarnación y verle recostado en el pesebre entre el buey y el asno". Belén estaba llena de visitantes, que acudían a cumplir la orden de empadronamiento dictada por el emperador Augusto; por ello, las posadas solo daban albergue a quienes tuvieran dinero. Como la Virgen María estaba embarazada le permitieron quedarse en un establo donde nació Jesús. Emulando el advenimiento, Francisco se alojó en una ermita, la tradición indica que de manera milagrosa en la escena aparecieron ángeles y se personificó al Niño Jesús, la Santísima Virgen y San José. El primer nacimiento se construyó con figuras de barro en Nápoles a finales del siglo XV, feliz idea llevada, de Italia a otros países europeos. Carlos III ordenó que los belenes se extendieran y popularizaran en todas sus posesiones. Traídos a Hispanoamérica por los frailes franciscanos en el siglo XVIII. San Francisco de Asís, nacido el 5 de julio de 1182, bajo el nombre de Giovanni, la gente le apodó "Francesco". Nacido en cuna de oro, en un viaje a Apulia en el 1205, mientras se dirigía a la guerra, durante la noche escuchó una voz que le recomendaba regresar a Asís. Regreso envuelto ahora en meditaciones, decidiendo vivir bajo la más estricta pobreza con desapego a lo terrenal y observancia de los Evangelios. Les insistía a sus primeros seguidores que amaran muchísimo a Jesucristo y a la Santa Iglesia Católica. Poco a poco aumentaba la cantidad de quienes lo ayudaban en labores diarias atendiendo leprosos. Es el primer caso conocido en la historia de estigmatizaciones visibles y externas, desde entonces se mostraba con las manos metidas entre las mangas del hábito, y con los pies cubiertos por medias y calzado. En 1209, el papa Inocencio III le aprobó la primera regla de la Orden. Antes de 1215, tenía seguidores en Italia, en el sur de Francia y en los reinos de España. Su primera seguidora mujer, Santa Clara, funda la Orden de las Clarisas. Murió en Asís el 3 de octubre de 1226; fue canonizado por la Iglesia Católica durante el papado de Gregorio IX el 16 de julio de 1228, su festividad se celebra el 4 de octubre; es patrono del medio ambiente, sastres y tejedores y de Italia, Quito, Filipinas y algunas ciudades de México. El principal santuario se encuentra en la ciudad de Asís.

Los Grandes Matemáticos



LUDWIG OTTO HESSE
(1811 - 1874)

Nació el 22 de abril de 1811 en Königsberg, Prusia (ahora llamada Kaliningrado, en Rusia); y murió el 4 de agosto de 1874, en Múnich, Alemania.

Trabajó en el desarrollo de las funciones de la teoría algebraica y la teoría de invariantes.
Es recordado particularmente por introducir el determinante Hessiano.

El padre de Otto Hesse fue Johann Gottlieb Hesse que era comerciante y fabricante de cerveza. La madre de Otto fue Anna Karoline Reiter (1788-1865). Habiendo nacido en Königsberg, Otto Hesse creció en la famosa ciudad donde asistió el viejo gimnasio (liceo) de la ciudad. Su padre murió en 1829 mientras él estaba en la secundaria. Se graduó en 1832 y luego entró en la Universidad de Königsberg.

En la Universidad Hesse estudió matemáticas y ciencias naturales, teniendo como profesores a Jacobi, Bessel, Carl Neumann y F. J. Richelot. Si no hubiera sido por las influyentes enseñanzas de Jacobi, Hesse hubiera optado por especializarse en un tema de ciencia diferente a las matemáticas. Sin embargo Hesse se graduó en 1837 con calificaciones que le permitieron enseñar matemática, física y química en las escuelas secundarias, y luego pasó un año como profesor de pruebas en el gimnasio Kneiphof de Königsberg. En el verano de 1838 viajó por Alemania e Italia, promoviendo educación. De regreso a Königsberg para el comienzo del curso escolar de otoño, tomó un puesto de enseñanza de física y química en una escuela de comercio allí.

Hesse había continuado estudiando para su doctorado bajo la tutoría de Jacobi y obtuvo el grado en Königsberg en 1840 después de presentar su tesis *De octo punctis intersectionis trium superficium secundi ordinis*. En 1841 presentó su tesis de habilitación en Königsberg y fue designado como docente. En este momento renunció a su puesto de profesor en la escuela de comercio.

(CONTINÚA EN LA SIGUIENTE PÁGINA)

Reflexiones

"Un hilo invisible conecta a aquellos que están destinados a encontrarse, sin importar el tiempo, el lugar ni la circunstancia. El hilo se puede estirar o enredar, pero nunca se romperá".

PROVERBIO CHINO

(VIENE DE LA PÁGINA ANTERIOR)

En el mismo año se casó con Marie Sophie Emilie Dulk, hija de Friedrich Philipp Dulk (1788-1852) quien fue profesor de química en Königsberg; tuvieron un hijo y cinco hijas.

En 1845 Hesse fue promovido a profesor extraordinario en Königsberg y pasó sus años más productivos publicando la mayor parte de su trabajo en la Revista de Crelle. Muchos matemáticos famosos hicieron sus estudios de doctorado bajo la tutoría de Hesse. Entre estos doctorandos se incluyen Gustav Kirchhoff y Carl Neumann de Königsberg, pero también fue profesor de varios otros estudiantes que llegarían a ser matemáticos excepcionales, entre ellos Siegfried Aronhold, Alfred Clebsch y Rudolph Lipschitz. En 1855 Hesse fue nombrado profesor ordinario de Halle, pero sólo desempeñó este cargo durante un año ya que le habían ofrecido la Cátedra en Heidelberg para suceder a Ferdinand Schweins, la cual aceptó con el propósito de unirse al equipo formado allí por sus ex alumnos Kirchhoff y Bunsen. En 1856 asumió oficialmente este cargo en Heidelberg, desde el 9 de septiembre y permaneció allí hasta 1868 cuando aceptó un cargo en la nueva escuela Politécnica de Munich. En la Universidad Ruprecht-Karls de Heidelberg tutoró a famosos investigadores entre quienes se incluían Adolph Mayer, Ernst Schröder, Heinrich Weber, Olaus Henrici y Max Noether.

El trabajo principal de Hesse fue en el desarrollo de la teoría de funciones algebraicas y la teoría de invariantes. Haas escribe en [1]:

> *Sus logros pueden ser evaluados, sin embargo, solamente en estrecha relación con los de sus contemporáneos. Hesse estaba en deuda con las investigaciones de Jacobi sobre transformación lineal de formas cuadráticas por la inspiración y punto de partida de sus trabajos iniciales sobre la teoría de curvas cuadráticas y planos. Para la prueba (otra vez influenciado por Jacobi) usó los determinantes recientemente desarrollados que permitió su presentación al alcanzar una elegancia no lograda previamente.*

De hecho, Hesse introdujo el "determinante Hessiano" en un trabajo de 1842 durante una investigación de curvas cúbicas y cuadráticas. Posteriormente este concepto se ha aplicado ampliamente en la geometría algebraica.

Una investigación reciente ha sugerido que Hesse mejoró mucho más que la presentación de ciertos resultados de Jacobi. Por ejemplo en [3] Fraser presenta un argumento sólido que fue más fundamental y que muchos han considerado obra de Hesse. Fraser analiza el resultado de 1837 de Jacobi en el cálculo de variaciones y la reformulación de Hesse en 1857:

> *El resultado de Jacobi no tiene mucha visibilidad en los textos actuales de cálculo de variaciones y menos aún en el de Hesse. Ambos tienen grandes contribuciones en este campo, que podría ser considerado el umbral del análisis funcional. Tras el importante avance de Euler y Lagrange, fue un paso natural para estudiar la segunda variación. Jacobi en 1837 propuso una teoría de la segunda variación que generalmente fue bien recibida. En 1857 Hesse publicó otra presentación de la teoría, que ha sido considerada simplemente como una mejor exposición de los resultados de Jacobi. El autor desafía a estas opiniones, atribuyendo a Hesse una presentación efectivamente distinta de la teoría. De hecho, Hesse cambia de un enfoque algorítmico para el cálculo de variaciones a un énfasis en su carácter analítico. Esta fue la línea de investigación adoptada en el método de campos de extremos, que caracteriza el progreso del cálculo de variaciones en el siglo XIX. Hesse podría ser considerado un precursor de estos desarrollos.*

Otro resultado de Hesse que ha demostrado ser particularmente influyente es el "principio de transferencia" que presentó en 1866 en su trabajo sobre Geometría proyectiva. Cómo esto influyó en muchas áreas diferentes de las matemáticas es estudiado por Hawkins en el interesante documento [4]. Wilhelm Meyer dio una forma general del principio de transferencia de Hesse en 1883 que a su vez fue utilizado por Cartan en 1913 para construir todas las representaciones irreducibles de un Álgebra de Lie semisimple compleja.

El trabajo de Hesse también fue influenciado por Steiner, particularmente el trabajo que hizo sobre la interpretación geométrica de las transformaciones algebraicas. Plücker y Poncelet también habían realizado importantes contribuciones sobre las que Hesse construyó. Su estudiante Aronhold mostró que algunos de los resultados de Hesse aquí eran los mejores posibles. Hesse trabajó en algunos temas en los que Cayley también estaba trabajando y ambos produjeron una teoría de las formas homogéneas que publicaron al mismo tiempo.

Haas escribe en [1] sobre las contribuciones de Hesse como profesor:

> *Lo enseñado por Hesse también tuvo influencia. En sus largos años como profesor, continuamente mostró su entusiasmo por las matemáticas, y sus libros de texto de geometría analítica deben considerarse en este contexto. Las formas especiales de la ecuación lineal y ecuación de planos que Hesse utilizada en estos libros se llaman forma normal de Hesse de la ecuación lineal y de la ecuación de planos en todos los libros de texto modernos en la disciplina.*

Los dos libros que escribió Hesse durante sus años en Heidelberg son *Vorlesungen über analytische Geometrie des Raumes: insbesondere über Oberflächen zweiter Ordnung* (1861) y *Vorlesungen über analytische Geometrie der geraden Linie, des Punktes und des Kreises in der Ebene* (1865), des Punktes und des Kreises en der Ebene (1865). También se tiene su importante trabajo *Sieben Vorlesungen aus der analytischen Geometrie der Kegelschnitte* que apareció en Zeitschrift für Mathematik und Physik en 1874.

Muchas academias honraron a Hesse como miembro, incluyendo la Academia de Ciencias de Berlín, la Academia de Ciencias de Gotinga (Königliche Gesellschaft der Wissenschaften) en 1856 y la Academia Bávara de Ciencias (Königlich Bayerischen Akademie der Wissenschaften) en Munich en 1869. En 1871 se convirtió en Miembro Honorario Extranjero de la Sociedad Matemática de Londres. También fue distinguido con la concesión del Premio Steiner de la Academia de Ciencias de Berlín en 1872.

Hesse murió en Munich de un problema hepático, pero fue enterrado en Heidelberg a petición suya, puesto que siempre sintió que esa ciudad era su segundo hogar. Su obra completa fue publicada por la Academia Bávara de Ciencias en 1897 con un prólogo de Walther von Dyck, S. Gundelfinger, Jacob Lüroth y Max Noether. El libro de 731 páginas fue reimpreso por la *Empresa Editorial de Chelsea* en 1972.

Referencias.-

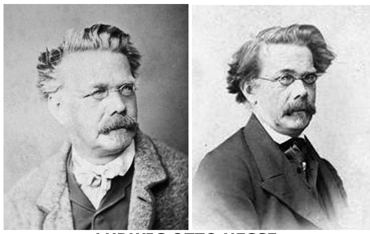
1. K Haas, Biography in *Dictionary of Scientific Biography* (New York 1970-1990). http://www.encyclopedia.com/doc/1G2-2830901982.html

Libros:

2. W Dyck, S Gundelfinger, J Lüroth and M Noether, Otto Hesse, in *Ludwig Otto Hesse's gesammelte Werke* (Chelsea Publishing Co., Bronx, N.Y., 1972).

Artículos:

3. C G Fraser, Jacobi's result (1837) in the calculus of variations and its reformulation by Otto Hesse (1857), in *A study in the changing interpretation of mathematical theorems. History of mathematics and education: ideas and experiences* (Göttingen, 1996), 149-172.
4. T Hawkins, Hesse's principle of transfer and the representation of Lie algebras, *Arch. Hist. Exact Sci.* **39** (1) (1988), 41-73.
5. M Noether, Otto Hesse, *Zeitschrift für Mathematik und Physik* **20** (1875), 77-88.



LUDWIG OTTO HESSE

Imágenes obtenidas de:

Google

Versión en español por R. Ascanio H. del artículo de J. J. O'Connor y E. F. Robertson sobre "Ludwig Otto Hesse" (Agosto 2006).
FUENTE: MacTutor History of Mathematics. [http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Hesse.html].

Aportes al conocimiento

Elementos Básicos del Cálculo Diferencial (29)

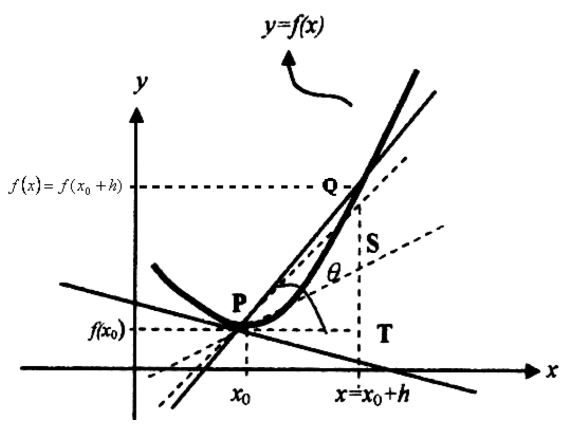
Por: Prof. Rafael Ascanio Hernández - Prof. Próspero González Méndez

ÍNDICE.-

DERIVADAS DE FUNCIONES

Derivada de una función.-

Consideremos la siguiente gráfica:



$\overline{PQ}$: Recta secante a *f(x)* en P y Q.

$\overline{PS}$: Recta secante a *f(x)* en P y S.

$\overline{PT}$: Recta tangente a *f(x)* en P.

$$m_{\overleftrightarrow{PQ}} = tg\,\theta = \frac{f(x)-f(x_o)}{x-x_0}$$

o también

$$m_{\overleftrightarrow{PQ}} = tg\,\theta = \frac{f(x_0+h)-f(x_o)}{h}$$

Cuando $h \to 0$, $x \to x_0$ y *PQ* tiende a convertirse en *PT*. Luego:

$$\boxed{Tg\,\theta = m_{\overleftrightarrow{PT}} = \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{x_0+h-x_0} = \lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}}$$

La derivada de una función f en un punto x_0, geométricamente expresa la pendiente de la recta tangente a la curva en dicho punto:

$$\boxed{m = f'(x_0)}$$

Como por cada punto de la curva que representa gráficamente a la función se puede trazar una recta tangente, esta definición se puede generalizar: Sea f una función real. Entonces, f es derivable o diferenciable en todo punto de su dominio $(x \in Dom_f)$ si se cumple que el $\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = f'(x)$ existe y es finito. El valor $f'(x)$ de este límite se denomina derivada de la función *f*.

Ejemplos:

1.- Determine la pendiente de la curva $y = x^3$ **en el punto de abscisa 2.**

Solución:

Aplicando la definición de derivada:

$$m = f'(2) = \lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2} = \lim_{x\to 2}\frac{x^3-2^3}{x-2} = \lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x^2+2x+4)}{x-2} = \lim_{x\to 2}(x^2+2x+4) = 12 \Rightarrow m = 12$$

2.- Determinar la pendiente de la curva $y = f(x) = Senx$ **en el punto de abscisa** $x = \frac{\pi}{4}$**.**

Solución:

Aplicando la definición de derivada:

$$m = f'(\tfrac{\pi}{4}) = \lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{f(x)-f(\frac{\pi}{4})}{x-\frac{\pi}{4}} = \lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{Senx - Sen\frac{\pi}{4}}{x-\frac{\pi}{4}} = \lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{2Cos\left(\frac{x+\frac{\pi}{4}}{2}\right)\cdot Sen\left(\frac{x-\frac{\pi}{4}}{2}\right)}{x-\frac{\pi}{4}} =$$

$$= \lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\left[Cos\left(\frac{x+\frac{\pi}{4}}{2}\right)\right]\cdot \lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\left[\frac{Sen\left(\frac{x-\frac{\pi}{4}}{2}\right)}{\frac{x-\frac{\pi}{4}}{2}}\right] = Cos\left(\tfrac{\pi}{4}\right)\cdot 1 = Cos\left(\tfrac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \qquad \Rightarrow \qquad m = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Notación de derivada.-

En cuanto a la forma de denotar la derivada de una función, las podemos resumir acá:

$y' = f'(x)$: *notación prima*

$\frac{dy}{dx} = \frac{df}{dx}$: *notación de Leibniz*

$D\,f(x) = D_x\,y$: *notación D*

La notación prima se le atribuye tanto a Newton como a Lagrange y la notación *D* se le atribuye a Cauchy.

Se puede utilizar una u otra notación. En realidad es una cuestión de práctica y su utilidad se determina si permite o no que un procedimiento sea más sencillo o menos complejo.

Derivadas de funciones algebraicas.-

Aplicando la definición de derivada de una función, se puede obtener la derivada de funciones algebraicas. Los siguientes ejemplos ilustrarán este procedimiento.

Ejemplos:

1.- Calcular las derivadas de las siguientes funciones utilizando la definición:

$$\boxed{f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}}$$

a) $y = f(x) = c;\quad c: constante$

Solución:

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{c-c}{h} = \lim_{h\to 0} 0 = 0 \quad \Rightarrow \quad f'(x) = 0$$

Regla que se deduce: *La derivada de una constante es igual a cero.*

b) $y = c\cdot f(x);\quad c: constante$

Solución:

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{c\cdot f(x+h)-c\cdot f(x)}{h} = c\cdot\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = c\cdot f'(x) \Rightarrow \quad [c\cdot f(x)]' = c\cdot f'(x)$$

Regla que se deduce: *La derivada del producto de una constante por una función es igual a la constante por la derivada de la función.*

c) $f(x) = x$

Solución:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{x+h-x}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h}{h} = \lim_{h \to 0} 1 = 1 \quad \Rightarrow \quad f'(x) = 1$$

Regla que se deduce: *La derivada de una variable con respecto a sí misma es igual a 1.*

d) $f(x) = 4x$

Solución:

A este ejemplo se le puede aplicar la regla deducida en el ejemplo *b*, pero para reforzar la aplicación de la definición de derivada, la misma la obtendremos según el procedimiento seguido hasta ahora.

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{4(x+h) - 4x}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{4x + 4h - 4x}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{4h}{h} = \lim_{h \to 0} 4 = 4 \quad \Rightarrow \quad f'(x) = 4$$

e) $f(x) = x^2$

Solución:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{x^2 + 2xh + h^2 - x^2}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{2xh + h^2}{h} = \lim_{h \to 0} (2x + h) = 2x \quad \Rightarrow \quad f'(x) = 2x$$

f) $f(x) = x^3$

Solución:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^3 - x^3}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3 - x^3}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{3x^2h + 3xh^2 + h^3}{h} = \lim_{h \to 0} \left(3x^2 + 3xh + h^2\right) = 3x^2 \quad \Rightarrow \quad f'(x) = 3x^2$$

Regla que se deduce de los ejemplos *e* y *f*: *La derivada de una potencia de la variable es igual al producto del exponente por la base (variable) elevada al exponente disminuido en uno* $\left[\left(x^n\right)' = n \cdot x^{n-1} \right]$.

g) $f(x) = 3x^2$

Solución:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{3 \cdot (x+h)^2 - 3x^2}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{3x^2 + 6xh + 3h^2 - 3x^2}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{6xh + 3h^2}{h} = \lim_{h \to 0} (6x + 3h) = 6x \quad \Rightarrow \quad f'(x) = 6x$$

2.- Calcule las siguientes derivadas aplicando las reglas deducidas:

a) $f(x) = ax^4 + bx^2$

Solución: $f'(x) = 4ax^3 + 2bx$

b) $y = x^{\frac{4}{3}} - 5$

Solución: $y' = \frac{4}{3} x^{\frac{4}{3} - 1} = \frac{4}{3} x^{\frac{1}{3}}$

Como se puede detallar, la aplicación de las reglas de la derivación de funciones simplifica este procedimiento del cálculo. Más adelante, para otros tipos de funciones, se deducirán reglas de derivación mediante la aplicación de la definición de derivada y así iremos construyendo un formulario adecuado que nos servirá de mucha ayuda para la derivación.

Álgebra de Derivadas.-

Cuando se hace referencia al álgebra de funciones, se toca el punto de operar funciones mediante la adición, la sustracción, la multiplicación y la división. De igual manera, es posible derivar estas operaciones entre funciones, siendo de gran ayuda para ello la utilización de la definición de derivada. Las reglas que se deducen constituyen lo que se denomina ***Álgebra de Derivadas***.

Operaciones algebraicas entre funciones.-

Suma Algebraica: $F(x) = (f \pm g)(x) = f(x) \pm g(x)$

Producto: $F(x) = (f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$

Cociente: $F(x) = \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$

Deducción de las reglas del Álgebra de Derivadas utilizando la definición de derivada.-

Para la deducción de la regla partimos de considerar que las funciones a utilizar, f y g, son derivables. Procedamos:

1ª) Adición de funciones: $F(x) = (f + g)(x)$.

$$(f+g)'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{(f+g)(x+h)-(f+g)(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)+g(x+h)-f(x)-g(x)}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)+g(x+h)-g(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} + \lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h} =$$

$$= f'(x)+g'(x) \quad \Rightarrow \quad \boxed{(f+g)'(x) = f'(x)+g'(x)}$$

2ª) Sustracción de funciones: $F(x) = (f - g)(x)$

$$(f-g)'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{(f-g)(x+h)-(f-g)(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-g(x+h)-f(x)+g(x)}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)-g(x+h)+g(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} - \lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h} =$$

$$= f'(x)-g'(x) \quad \Rightarrow \quad \boxed{(f-g)'(x) = f'(x)-g'(x)}$$

3ª) Producto de funciones: $F(x) = (f \cdot g)(x)$

$$(f\cdot g)'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{(f\cdot g)(x+h)-(f\cdot g)(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)\cdot g(x+h)-f(x)\cdot g(x)}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)\cdot g(x+h)-f(x)\cdot g(x)+f(x+h)\cdot g(x)-f(x+h)\cdot g(x)}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)\cdot g(x)-f(x)\cdot g(x)+f(x+h)\cdot g(x+h)-f(x+h)\cdot g(x)}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{[f(x+h)-f(x)]\cdot g(x)+f(x+h)\cdot[g(x+h)-g(x)]}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{[f(x+h)-f(x)]}{h}\cdot g(x) + \lim_{h\to 0} f(x+h)\cdot\frac{[g(x+h)-g(x)]}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{[f(x+h)-f(x)]}{h}\cdot \lim_{h\to 0} g(x) + \lim_{h\to 0} f(x+h)\cdot \lim_{h\to 0}\frac{[g(x+h)-g(x)]}{h} =$$

$$= f'(x)\cdot g(x)+f(x)\cdot g'(x) \quad \Rightarrow \quad \boxed{(f\cdot g)'(x) = f'(x)\cdot g(x)+f(x)\cdot g'(x)}$$

4ª) Cociente de funciones: $F(x)=\left(\frac{f}{g}\right)(x)$

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{\left(\frac{f}{g}\right)(x+h)-\left(\frac{f}{g}\right)(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{f(x+h)}{g(x+h)}-\frac{f(x)}{g(x)}}{h}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)\cdot g(x)-g(x+h)\cdot f(x)}{h\cdot[g(x+h)\cdot g(x)]}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)\cdot g(x)-g(x+h)\cdot f(x)+f(x)\cdot g(x)-f(x)\cdot g(x)}{h\cdot[g(x+h)\cdot g(x)]}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{1}{g(x+h)\cdot g(x)}\cdot\left[\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\cdot g(x)-f(x)\cdot\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\right]=$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{1}{g(x+h)\cdot g(x)}\cdot\left[\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\cdot\lim_{h\to 0}g(x)-\lim_{h\to 0}f(x)\cdot\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\right]$$

$$=\frac{1}{g(x)\cdot g(x)}\cdot[f'(x)\cdot g(x)-f(x)\cdot g'(x)]=\frac{f'(x)\cdot g(x)-f(x)\cdot g'(x)}{[g(x)]^2}$$

$$\Rightarrow\quad \boxed{\left(\frac{f}{g}\right)'(x)=\frac{f'(x)\cdot g(x)-f(x)\cdot g'(x)}{[g(x)]^2}}$$

A continuación, un resumen de las reglas deducidas para el álgebra de derivadas utilizando la notación de Leibniz:

$$\begin{cases} F(x)=(f\pm g)(x)\ \Rightarrow\ \dfrac{d[(f\pm g)(x)]}{dx}=\dfrac{d[f(x)]}{dx}\pm\dfrac{d[g(x)]}{dx}\\[2ex] F(x)=(f\cdot g)(x)\ \Rightarrow\ \dfrac{d[(f\cdot g)(x)]}{dx}=\dfrac{d[f(x)]}{dx}\cdot g(x)+f(x)\cdot\dfrac{d[g(x)]}{dx}\\[2ex] F(x)=\left(\dfrac{f}{g}\right)(x)\ \Rightarrow\ \dfrac{d\left[\left(\dfrac{f}{g}\right)(x)\right]}{dx}=\dfrac{\dfrac{d[f(x)]}{dx}\cdot g(x)-f(x)\cdot\dfrac{d[g(x)]}{dx}}{\left[(g(x))^2\right]}\end{cases}$$

Derivada de la Función Logarítmica.-

Utilizando la definición de derivada, obtendremos las reglas de derivación de algunas funciones logarítmicas.

Ejemplos:

1.- $f(x)=Ln\,x\ \Rightarrow\ f'(x)=?$

<u>Solución</u>:

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{Ln(x+h)-Ln\,x}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{Ln\left(\frac{x+h}{x}\right)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\cdot Ln\left(\frac{x+h}{x}\right)=\lim_{h\to 0}Ln\left(1+\frac{h}{x}\right)^{\frac{1}{h}}=$$

$$=\lim_{h\to 0}Ln\left(1+\frac{h}{x}\right)^{\frac{1}{h}\cdot\frac{x}{x}}=\lim_{h\to 0}Ln\left[\left(1+\frac{h}{x}\right)^{\frac{x}{h}}\right]^{\frac{1}{x}}=\lim_{h\to 0}\left[\frac{1}{x}\cdot Ln\left(1+\frac{h}{x}\right)^{\frac{x}{h}}\right]=\frac{1}{x}\cdot\lim_{h\to 0}\left[Ln\left(1+\frac{h}{x}\right)^{\frac{x}{h}}\right]=$$

$$=\frac{1}{x}\cdot Ln\left[\lim_{h\to 0}\left(1+\frac{h}{x}\right)^{\frac{x}{h}}\right]=\frac{1}{x}\cdot Ln\left[\lim_{u\to\infty}\left(1+\frac{1}{u}\right)^{u}\right]=\frac{1}{x}\cdot Ln\,e=\frac{1}{x}$$

$$\Rightarrow Si\quad f(x)=Ln\,x\ \ entonces\ \ f'(x)=\frac{1}{x}$$

Cambio de variable realizado:

$$u=\frac{x}{h}\Rightarrow\frac{1}{u}=\frac{h}{x}$$

$$h\to 0;\ u\to\infty$$

2.- $f(x) = Log_a\, x \quad \Rightarrow \quad f'(x) = ?$

Solución:

Aplicando cambio de base de logaritmo queda entonces que: $f(x) = Log_a\, x = \dfrac{Ln\, x}{Ln\, a}$

Aplicando la definición de derivada se tiene que:

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{\frac{Ln(x+h)}{Ln\,a} - \frac{Ln\,x}{Ln\,a}}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\frac{1}{Ln\,a}\cdot\left[Ln(x+h) - Ln\,x\right]}{h} =$$

$$= \tfrac{1}{Ln\,a}\cdot \lim_{h\to 0}\frac{Ln\left(\frac{x+h}{x}\right)}{h} = \tfrac{1}{Ln\,a}\cdot \lim_{h\to 0}\left[\tfrac{1}{h}\cdot Ln\left(\tfrac{x+h}{x}\right)\right] =$$

$$= \tfrac{1}{Ln\,a}\cdot \lim_{h\to 0}\left[\tfrac{1}{h}\cdot Ln\left(1+\tfrac{h}{x}\right)\right] = \tfrac{1}{Ln\,a}\cdot \lim_{h\to 0}\left[Ln\left(1+\tfrac{h}{x}\right)^{\frac{1}{h}}\right] =$$

$$= \tfrac{1}{Ln\,a}\cdot \lim_{h\to 0}\left[Ln\left(1+\tfrac{h}{x}\right)^{\frac{1}{h}\cdot\frac{x}{x}}\right] = \tfrac{1}{Ln\,a}\cdot \lim_{h\to 0} Ln\left[\left(1+\tfrac{h}{x}\right)^{\frac{x}{h}}\right]^{\frac{1}{x}} =$$

$$= \tfrac{1}{x\,Ln\,a}\cdot \lim_{h\to 0}\left[Ln\left(1+\tfrac{h}{x}\right)^{\frac{x}{h}}\right] = \tfrac{1}{x\,Ln\,a}\cdot \lim_{u\to \infty}\left[Ln\left(1+\tfrac{1}{u}\right)^{u}\right] =$$

$$= \tfrac{1}{x\,Ln\,a}\cdot Ln\,e = \frac{1}{x}\cdot\frac{Ln\,e}{Ln\,a} = \frac{1}{x}\cdot Log_a e$$

$$\Rightarrow \; Si \quad f(x) = Log_a x \quad entonces \quad f'(x) = \frac{1}{x}\cdot Log_a e$$

Cambio de variable realizado:

$$u = \frac{x}{h} \Rightarrow \frac{1}{u} = \frac{h}{x} \qquad h\to 0;\, u\to\infty$$

Derivada de la Función Exponencial.-

Mediante la utilización de la definición de derivada, obtendremos las reglas de derivación de algunas funciones exponenciales.

Ejemplos:

1.- $f(x) = a^x \quad \Rightarrow \quad f'(x) = ?$

Solución:

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{a^{x+h} - a^x}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{a^x\cdot(a^h - 1)}{h} = a^x\cdot \lim_{h\to 0}\left(\frac{a^h - 1}{h}\right) =$$

$$= a^x\cdot \lim_{m\to\infty}\frac{\frac{1}{m}}{\frac{Ln\left(1+\frac{1}{m}\right)}{Ln\,a}} = a^x\cdot Ln\,a\cdot \lim_{m\to\infty}\left(\frac{1}{m\cdot Ln\left(1+\frac{1}{m}\right)}\right) =$$

$$= a^x\cdot Ln\,a\cdot \lim_{m\to\infty}\left(\frac{1}{Ln\left(1+\frac{1}{m}\right)^m}\right) = a^x\cdot Ln\,a\cdot\left(\frac{1}{\lim\limits_{m\to\infty} Ln\left(1+\frac{1}{m}\right)^m}\right) =$$

$$= a^x\cdot Ln\,a\cdot\left(\frac{1}{Ln \lim\limits_{m\to\infty}\left(1+\frac{1}{m}\right)^m}\right) = a^x\cdot Ln\,a\cdot\frac{1}{Lne} = a^x\cdot Ln\,a$$

$$\Rightarrow \boxed{Si \quad f(x) = a^x \quad entonces \quad f'(x) = a^x\cdot Ln\,a}$$

Cambio de variable realizado:

$$a^h - 1 = \frac{1}{m}$$

$$a^h = 1 + \frac{1}{m}$$

$$h\cdot Ln\,a = Ln\left(1+\frac{1}{m}\right)$$

$$h = \frac{Ln\left(1+\frac{1}{m}\right)}{Ln\,a} \qquad h\to 0;\; m\to\infty$$

2.- $f(x) = e^x \quad \Rightarrow \quad f'(x) = ?$

Solución:

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{e^{x+h} - e^x}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{e^x \cdot (e^h - 1)}{h} = e^x \cdot \lim_{h\to 0} \left(\frac{e^h - 1}{h}\right) =$$

$$= e^x \cdot \lim_{m\to\infty} \frac{\frac{1}{m}}{Ln\left(1+\frac{1}{m}\right)} = e^x \cdot \lim_{m\to\infty} \left(\frac{1}{m \cdot Ln\left(1+\frac{1}{m}\right)}\right) =$$

$$= e^x \cdot \lim_{m\to\infty} \left(\frac{1}{Ln\left(1+\frac{1}{m}\right)^m}\right) = e^x \cdot \left(\frac{1}{\lim_{m\to\infty} Ln\left(1+\frac{1}{m}\right)^m}\right) =$$

$$= e^x \cdot \left(\frac{1}{Ln \lim_{m\to\infty}\left(1+\frac{1}{m}\right)^m}\right) = e^x \cdot \frac{1}{Lne} = e^x$$

$$\Rightarrow \boxed{Si \quad f(x) = e^x \quad entonces \quad f'(x) = e^x}$$

Cambio de variable realizado :

$e^h - 1 = \frac{1}{m}$

$e^h = 1 + \frac{1}{m}$

$h = Ln\left(1 + \frac{1}{m}\right) \qquad h \to 0\,;\ m \to \infty$

Derivadas de Funciones Trigonométricas.-

Con la utilización de la definición de derivada, obtendremos las reglas de derivación de algunas funciones trigonométricas.

Ejemplos.-

1) $f(x) = Senx \quad \Rightarrow \quad f'(x) = ?$

Solución:

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{Sen(x+h) - Senx}{h} = \frac{Senx - Senx}{0} = \frac{0}{0} \quad \to Indeterminación.$$

Eliminando la indeterminación:

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{Sen(x+h) - Senx}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{2Sen\frac{x+h-x}{2} \cdot Cos\frac{x+h+x}{2}}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{2Sen\frac{h}{2} \cdot Cos\frac{2x+h}{2}}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{2Sen\frac{h}{2}}{h} \cdot \lim_{h\to 0} Cos\frac{2x+h}{2} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{Sen\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} \cdot \lim_{h\to 0} Cos\left(x + \frac{h}{2}\right) =$$

$$= 1 \cdot Cosx = Cosx$$

Se utiliza:

$$Senx - Seny = 2Sen\frac{x-y}{2} \cdot Cos\frac{x+y}{2}$$

$$\boxed{f(x) = Senx \quad \Rightarrow \quad f'(x) = Cosx}$$

2) $f(x) = Cosx \quad \Rightarrow \quad f'(x) = ?$

Solución:

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{Cos(x+h) - Cosx}{h} = \frac{Cosx - Cosx}{0} = \frac{0}{0} \quad \rightarrow Indeterminación.$$

Eliminando la indeterminación:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{Cos\,(x+h) - Cosx}{h} = \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{-2\,Sen\,\frac{x+h-x}{2} \cdot Sen\,\frac{x+h+x}{2}}{h} = \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{-2\,Sen\,\frac{h}{2} \cdot Sen\,\frac{2x+h}{2}}{h} = \\ &= -\lim_{h\to 0} \frac{2\,Sen\,\frac{h}{2}}{h} \cdot \lim_{h\to 0} Sen\,\frac{2x+h}{2} = \\ &= -\lim_{h\to 0} \frac{Sen\,\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} \cdot \lim_{h\to 0} Sen\left(x + \frac{h}{2}\right) = \\ &= -1 \cdot Senx = -Senx \end{aligned}$$

Se utiliza:

$$Cosx - Cosy = -2Sen\frac{x-y}{2} \cdot Sen\frac{x+y}{2}$$

$$\boxed{f(x) = Cosx \quad \Rightarrow \quad f'(x) = -Senx}$$

3) $f(x) = Tgx \quad \Rightarrow \quad f'(x) = ?$

Solución:

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{Tg(x+h) - Tgx}{h} = \frac{Tgx - Tgx}{0} = \frac{0}{0} \quad \rightarrow Indeterminación.$$

Eliminando la indeterminación:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{Tg(x+h) - Tgx}{h} = \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{Sen(x+h-x)}{h \cdot [Cos(x+h) \cdot Cosx]} = \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{Sen\,h}{h \cdot [Cos(x+h) \cdot Cosx]} = \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{Sen\,h}{h} \cdot \lim_{h\to 0} \frac{1}{Cos(x+h) \cdot Cosx} = \\ &= 1 \cdot \frac{1}{\lim_{h\to 0} Cos(x+h) \cdot \lim_{h\to 0} Cosx} = \frac{1}{Cosx \cdot Cosx} = \\ &= \frac{1}{Cos^2 x} = Sec^2 x \end{aligned}$$

Se utiliza:

$$Tgx - Tgy = \frac{Sen(x-y)}{Cosx \cdot Cosy}$$

$$\boxed{f(x) = Tgx \quad \Rightarrow \quad f'(x) = Sec^2 x}$$

Derivada de la Función Compuesta (Regla de la Cadena).-

Cuando se deriva a la función compuesta se da origen a una regla de derivación conocida con el nombre de *Regla de la Cadena*.

Se basa en lo siguiente: La función compuesta viene dada por $(f \circ g)(x) = f[g(x)]$, en el caso de estar definida en la variable *x*. De esta manera f es la función y *g*, llamada *función interna*, se convierte en la *variable* de *f*. Mediante el cambio de variable $u = g(x)$, se tiene entonces que $(f \circ g)(x) = f[g(x)] = f(u)$. Luego, al derivar *f*, se hace con respecto a u; de igual manera hay que derivar a u pero con respecto a *x*.

Al final, la regla queda enunciada así:

La derivada de la función compuesta es igual al producto de la derivada de la función por la derivada de la función interna.

Esta regla se puede presentar de las siguientes formas:

* $y' = f'(u) \cdot u'$
* $(f \circ g)'(x) = f'[g(x)] \cdot g'(x)$
* $\dfrac{d[f(u)]}{dx} = \dfrac{df}{du} \cdot \dfrac{du}{dx}$
* $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{du} \cdot \dfrac{du}{dx}$

Todas estas expresiones corresponden a la aplicación básica de la regla. Es posible que de acuerdo a la forma como esté definida la función, el proceso se convierta en una derivación por encadenamiento reiterado.

Resumen de Reglas para la Derivación de Funciones.-

A continuación se muestra una Tabla donde se resumen las Reglas más utilizadas en la derivación de funciones. Todas las fórmulas están expresadas considerando la Derivada de la Función Compuesta o Regla de la Cadena:

1) $y = c;\ \ c:\ constante$	$\dfrac{dy}{dx} = 0$	13) $y = Senu$	$\dfrac{dy}{dx} = Cosu \cdot \dfrac{du}{dx}$
2) $y = c.u$	$\dfrac{dy}{dx} = c \cdot \dfrac{du}{dx}$	14) $y = Cosu$	$\dfrac{dy}{dx} = -Senu \cdot \dfrac{du}{dx}$
3) $y = x$	$\dfrac{dy}{dx} = 1$	15) $y = Tgu$	$\dfrac{dy}{dx} = Sec^2u \cdot \dfrac{du}{dx}$
4) $y = \sqrt[n]{u}$	$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\sqrt[n]{u}}{n.u} \cdot \dfrac{du}{dx}$	16) $y = Cotgu$	$\dfrac{dy}{dx} = -Cosec^2u \cdot \dfrac{du}{dx}$
5) $y = c \cdot \sqrt[n]{u}$	$\dfrac{dy}{dx} = c \cdot \dfrac{\sqrt[n]{u}}{n \cdot u} \cdot \dfrac{du}{dx}$	17) $y = Secu$	$\dfrac{dy}{dx} = Secu \cdot Tgu \cdot \dfrac{du}{dx}$
6) $y = u^n$	$\dfrac{dy}{dx} = n \cdot u^{n-1} \cdot \dfrac{du}{dx}$	18) $y = Cosecu$	$\dfrac{dy}{dx} = -Cosecu \cdot Cotgu \cdot \dfrac{du}{dx}$
7) $y = a.u^n;\ \ a:\ constante$	$\dfrac{dy}{dx} = n \cdot a \cdot u^{n-1} \cdot \dfrac{du}{dx}$	19) $y = ArcSenu$	$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot \dfrac{du}{dx}$
8) $y = a^u$	$\dfrac{dy}{dx} = a^u \cdot Ln\,a \cdot \dfrac{du}{dx}$	20) $y = ArcCosu$	$\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot \dfrac{du}{dx}$
9) $y = e^u$	$\dfrac{dy}{dx} = e^u \cdot \dfrac{du}{dx}$	21) $y = ArcTgu$	$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{1+u^2} \cdot \dfrac{du}{dx}$
10) $y = Log_a u$	$\dfrac{dy}{dx} = \frac{1}{u} \cdot Log_a e \cdot \dfrac{du}{dx}$	22) $y = ArcCotgu$	$\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{1}{1+u^2} \cdot \dfrac{du}{dx}$
11) $y = Lnu$	$\dfrac{dy}{dx} = \frac{1}{u} \cdot \dfrac{du}{dx}$	23) $y = ArcSecu$	$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{u \cdot \sqrt{u^2-1}} \cdot \dfrac{du}{dx}$
12) $y = \lvert u \rvert$	$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{u}{\lvert u \rvert} \cdot \dfrac{du}{dx};\ u \neq 0$	24) $y = ArcCosecu$	$\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{1}{u \cdot \sqrt{u^2-1}} \cdot \dfrac{du}{dx}$

Ejercicios resueltos.-

Hallar las derivadas de las siguientes funciones:

1) $y = x^5 - 4x^3 + 2x - 3$.

Solución:

$$y = x^5 - 4x^3 + 2x - 3 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = 5x^4 \cdot \frac{dx}{dx} - 12x^2 \cdot \frac{dx}{dx} + 2 \cdot \frac{dx}{dx} = 5x^4 - 12x^2 + 2$$

Al aplicar la regla de la cadena y al tener que determinar la derivada interna, recordemos que cuando se deriva una variable con respecto a sí misma esta derivada es igual uno $\left(\frac{dx}{dx} = 1\right)$. Al multiplicar, el otro factor absorbe su valor. En el resto de los ejercicios omitiremos la derivada interna cuando sea la derivada de la variable con respecto a sí misma.

2) $f(x) = ax^2 + bx + c$.

Solución:

$$f(x) = ax^2 + bx + c \Rightarrow \frac{df}{dx} = 2ax + b$$

3) $g(t) = at^m + bt^{m+n}$.

Solución:

$$g(t) = at^m + bt^{m+n} \Rightarrow \frac{dg}{dt} = m \cdot a \cdot t^{m-1} + b \cdot (m+n) \cdot t^{m+n-1}$$

4) $y = \frac{\pi}{x} + Ln2$.

Solución:

$$y = \frac{\pi}{x} + Ln2 = \pi \cdot x^{-1} + Ln2 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\pi \cdot x^{-2} = -\frac{\pi}{x^2}$$

5) $f(u) = \sqrt[3]{u^2}$.

Solución:

$$f(u) = \sqrt[3]{u^2} = u^{\frac{2}{3}} \Rightarrow \frac{df}{du} = \tfrac{2}{3} u^{-\frac{1}{3}} = \frac{2}{3 \cdot \sqrt[3]{u}}$$

6) $g(w) = \frac{a + bw}{c + dw}$.

Solución:

$$g(w) = \frac{a + bw}{c + dw} \Rightarrow \frac{dg}{dw} = \frac{b(c + dw) - (a + bw)d}{(c + dw)^2} = \frac{bc + bdw - ad - bdw}{(c + dw)^2} = \frac{bc - ad}{(c + dw)^2}$$

7) $h(t) = \frac{2}{2t-1} - \frac{1}{t}$.

Solución:

$$h(t) = \frac{2}{2t-1} - \frac{1}{t} \Rightarrow \frac{dh}{dt} = \frac{0 \cdot (2t-1) - 2 \cdot 2}{(2t-1)^2} - \frac{0 \cdot t - 1 \cdot 1}{t^2} = \frac{-4}{(2t-1)^2} + \frac{1}{t^2} = \frac{-4t^2 + (2t-1)^2}{t^2 \cdot (2t-1)^2} =$$

$$= \frac{-4t^2 + 4t^2 - 4t + 1}{t^2 \cdot (2t-1)^2} = \frac{-4t+1}{t^2 \cdot (2t-1)^2}$$

8) $f(\theta) = 5Sen\theta + 3Cos\theta$.

Solución:

$$f(\theta) = 5Sen\theta + 3Cos\theta \quad \Rightarrow \quad \frac{df}{d\theta} = 5Cos\theta - 3Sen\theta$$

9) $g(y) = \dfrac{Seny + Cosy}{Seny - Cosy}$.

Solución:

$$g(y) = \frac{Seny + Cosy}{Seny - Cosy} \quad \Rightarrow \frac{dg}{dy} = \frac{(Cosy - Seny)(Seny - Cosy) - (Seny + Cosy)(Cosy + Seny)}{(Seny - Cosy)^2} =$$

$$= \frac{Cosy \cdot Seny - Cos^2 y - Sen^2 y + Seny \cdot Cosy - Seny \cdot Cosy - Sen^2 y - Cos^2 y - Cosy \cdot Seny}{(Seny - Cosy)^2} =$$

$$= \frac{-Cos^2 y - Sen^2 y - Sen^2 y - Cos^2 y}{(Seny - Cosy)^2} = \frac{-2Cos^2 y - 2Sen^2 y}{(Seny - Cosy)^2} = \frac{-2 \cdot (Cos^2 y + Sen^2 y)}{(Seny - Cosy)^2} =$$

$$= -\frac{2}{(Seny - Cosy)^2}$$

10) $y = x \cdot Cotgx$.

Solución:

$$y = x \cdot Cotgx = \frac{x}{Tgx} \quad \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1 \cdot Tgx - x \cdot Sec^2 x}{Tg^2 x} = \frac{\dfrac{Senx}{Cosx} - \dfrac{x}{Cos^2 x}}{\dfrac{Sen^2 x}{Cos^2 x}} = \frac{\dfrac{Senx \cdot Cosx - x}{Cos^2 x}}{\dfrac{Sen^2 x}{Cos^2 x}} =$$

$$= \frac{Senx \cdot Cosx - x}{Sen^2 x} = \frac{Senx \cdot Cosx}{Sen^2 x} - \frac{x}{Sen^2 x} = \frac{Cosx}{Senx} - x \cdot Co\sec^2 x = Cotgx - x \cdot Co\sec^2 x$$

11) $y = x^7 \cdot e^x$.

Solución:

$$y = x^7 \cdot e^x \quad \Rightarrow \frac{dy}{dx} = 7x^6 \cdot e^x + x^7 \cdot e^x = x^6 \cdot e^x \cdot (x + 7)$$

12) $f(m) = (m-1) \cdot 5^m$.

Solución:

$$f(m) = (m-1) \cdot 5^m \quad \Rightarrow \frac{df}{dm} = 1 \cdot 5^m + (m-1) \cdot 5^m \cdot Ln5 = 5^m + m \cdot 5^m \cdot Ln5 - 5^m \cdot Ln5 =$$

$$= 5^m \cdot (1 + m \cdot Ln5 - Ln5) = 5^m \cdot (Ln\,e + Ln5^m - Ln5) = 5^m \cdot \left(Ln\,e + Ln\frac{5^m}{5} \right) =$$

$$= 5^m \cdot (Ln\,e + Ln5^{m-1}) = 5^m \cdot Ln(e \cdot 5^{m-1}) = Ln(e \cdot 5^{m-1})^{5^m}$$

13) $y = \dfrac{2^x}{x^2}$.

Solución:

$$y = \frac{2^x}{x^2} \quad \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{2^x \cdot Ln2 \cdot x^2 - 2^x \cdot 2x}{(x^2)^2} = \frac{2^x \cdot x \cdot (xLn2 - 2)}{x^4} = \frac{2^x \cdot (xLn2 - 2)}{x^3}$$

14) $t(u) = e^u \cdot Cos\, u$.

Solución:

$$t(u) = e^u \cdot Cos\, u \quad \Rightarrow \frac{dt}{du} = e^u \cdot Cos\, u + e^u \cdot (-Sen\, u) = e^u \cdot Cos\, u - e^u \cdot Sen\, u = e^u \cdot (Cos\, u - Sen\, u)$$

15) $f(x) = \dfrac{x^2}{Lnx}$.

Solución:

$$f(x) = \frac{x^2}{Lnx} \quad \Rightarrow \frac{df}{dx} = \frac{2x \cdot Lnx - x^2 \cdot \frac{1}{x}}{(Lnx)^2} = \frac{2x \cdot Lnx - x}{Ln^2 x} = \frac{x \cdot (2Lnx - 1)}{Ln^2 x} = \frac{x \cdot (Lnx^2 - 1)}{Ln^2 x}$$

16) $y = \dfrac{1}{x} + 2Lnx - \dfrac{Lnx}{x}$.

Solución:

$$y = \frac{1}{x} + 2Lnx - \frac{Lnx}{x} \quad \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{1}{x^2} + 2 \cdot \frac{1}{x} - \frac{\frac{1}{x} \cdot x - Lnx \cdot 1}{x^2} = -\frac{1}{x^2} + \frac{2}{x} - \frac{1 - Lnx}{x^2} =$$

$$= \frac{-1 + 2x - 1 + Lnx}{x^2} = \frac{-2 + 2x + Lnx}{x^2} = -\frac{2}{x^2} + \frac{2x}{x^2} + \frac{Lnx}{x^2} = -\frac{2}{x^2} + \frac{2}{x} + \frac{Lnx}{x^2}$$

17) $y = \left(\dfrac{ax+b}{c}\right)^3$.

Solución:

Cambio de Variable (c. v.):

$$u = \frac{ax+b}{c} \Rightarrow y = u^3$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = \frac{d\left[u^3\right]}{du} \cdot \frac{du}{dx} = \frac{d\left[u^3\right]}{dx} \cdot \frac{d\left(\frac{ax+b}{c}\right)}{dx} = 3u^2 \cdot \frac{a}{c} = 3 \cdot \left(\frac{ax+b}{c}\right)^2 \cdot \frac{a}{c} = \frac{3a}{c} \cdot \left(\frac{ax+b}{c}\right)^2 = \frac{3a}{c^3} \cdot (ax+b)^2$$

18) $y = (3+2x^2)^4$.

Solución:

$c.v.:$

$$u = 3 + 2x^2 \Rightarrow y = u^4$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = \frac{d\left[u^4\right]}{du} \cdot \frac{d\,(3+2x^2)}{dx} = 4u^3 \cdot 4x = 4(3+2x^2)^3 \cdot 4x = 16x \cdot (3+2x^2)^3$$

19) $y = \sqrt[3]{a + bx^3}$.

Solución:

$$y = \sqrt[3]{a+bx^3} = (a+bx^3)^{\frac{1}{3}}$$

$c.v.:$

$$u = a + bx^3 \Rightarrow y = u^{\frac{1}{3}}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = \frac{d\left[u^{\frac{1}{3}}\right]}{du} \cdot \frac{du}{dx} = \tfrac{1}{3} \cdot u^{-\frac{2}{3}} \cdot 3bx^2 = \tfrac{1}{3}(a+bx^3)^{-\frac{2}{3}} \cdot 3bx^2 = \frac{bx^2}{(a+bx^3)^{\frac{2}{3}}} = \frac{bx^2}{\sqrt[3]{(a+bx^3)^2}}$$

20) $y = Tgx - \frac{1}{3}Tg^3 x + \frac{1}{5}Tg^5 x$.

Solución:

$c.v.:$

$$u = Tgx \Rightarrow y = u - \tfrac{1}{3}u^3 + \tfrac{1}{5}u^5$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = \frac{d\left(u - \frac{1}{3}u^3 + \frac{1}{5}u^5\right)}{du} \cdot \frac{du}{dx} = \left(1 - u^2 + u^4\right) \cdot Sec^2 x = \left(1 - Tg^2 x + Tg^4 x\right) \cdot Sec^2 x = \frac{1 - Tg^2 x + Tg^4 x}{Cos^2 x}$$

21) $f(x)=\sqrt{Cotgx}-\sqrt{Cotga}.$

Solución:

$$f(x)=\sqrt{Cotgx}-\sqrt{Cotga}=Cotg^{\frac{1}{2}}x-\sqrt{Cotga}$$

$c.v.:$

$$u=Cotg\ x \Rightarrow f(x)=u^{\frac{1}{2}}-\sqrt{Cotga}$$

$$\frac{df}{dx}=\frac{df}{du}\cdot\frac{du}{dx}=\frac{d\left(u^{\frac{1}{2}}-\sqrt{Cotga}\right)}{du}\cdot(-Cosec^2x)=\tfrac{1}{2}u^{-\frac{1}{2}}\cdot(-Cosec^2x)=\tfrac{1}{2}Cotg^{-\frac{1}{2}}x\cdot(-Cosec^2x)=$$

$$=-\tfrac{1}{2}Cotg^{-\frac{1}{2}}x\cdot Cosec^2x=-\frac{1}{2Cotg^{\frac{1}{2}}x\cdot Sen^2x}=-\frac{1}{2\cdot\sqrt{Cotgx}\cdot Sen^2x}$$

22) $y=\sqrt[3]{2e^x-2^x+1+Ln^5x}.$

Solución:

$$y=\sqrt[3]{2e^x-2^x+1+Ln^5x}=\left(2e^x-2^x+1+Ln^5x\right)^{\frac{1}{3}}.$$

$c.v.:$

$$u=2e^x-2^x+1+Ln^5x \Rightarrow y=u^{\frac{1}{3}}.$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}=\tfrac{1}{3}u^{-\frac{2}{3}}\cdot\left(2e^x-2^x\cdot Ln2+0+\frac{5Ln^4x}{x}\right)=\tfrac{1}{3}\left(2e^x-2^x+1+Ln^5x\right)^{-\frac{2}{3}}\cdot\left(2e^x-2^x\cdot Ln2+0+\frac{5Ln^4x}{x}\right)=$$

$$=\frac{2e^x-2^x\cdot Ln2+\frac{5Ln^4x}{x}}{3\cdot\left(2e^x-2^x+1+Ln^5x\right)^{\frac{2}{3}}}=\frac{2e^x-2^x\cdot Ln2+\frac{5Ln^4x}{x}}{3\cdot\sqrt[3]{\left(2e^x-2^x+1+Ln^5x\right)^2}}=\frac{2xe^x-2^x\cdot x\cdot Ln2+5Ln^4x}{3x\cdot\sqrt[3]{\left(2e^x-2^x+1+Ln^5x\right)^2}}$$

23) $y=LnTg(e^{2x}).$

Solución:

$c.v.:$

$v=2x$

$w=e^v$

$t=Tg\,w$

$y=Ln\,t$

$$\Rightarrow\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\cdot\frac{dt}{dw}\cdot\frac{dw}{dv}\cdot\frac{dv}{dx}$$

$$\frac{dy}{dt}=\frac{d(Ln\,t)}{dt}=\frac{1}{t}=\frac{1}{Tgw}=\frac{1}{Tge^v}=\frac{1}{Tge^{2x}}$$

$$\frac{dt}{dw}=\frac{d(Tgw)}{dw}=Sec^2w=Sec^2\left(e^v\right)=Sec^2\left(e^{2x}\right)$$

$$\frac{dw}{dv}=\frac{d(e^v)}{dv}=e^v=e^{2x}$$

$$\frac{dv}{dx}=\frac{d(2x)}{dx}=2$$

Luego:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\cdot\frac{dt}{dw}\cdot\frac{dw}{dv}\cdot\frac{dv}{dx}=\frac{1}{Tg\left(e^{2x}\right)}\cdot Sec^2\left(e^{2x}\right)\cdot e^{2x}\cdot 2=\frac{2\cdot Sec^2\left(e^{2x}\right)\cdot e^{2x}}{Tg\left(e^{2x}\right)}\Rightarrow\quad\frac{dy}{dx}=\frac{2\cdot Sec^2\left(e^{2x}\right)\cdot e^{2x}}{Tg\left(e^{2x}\right)}$$

24) $y = Ln\,Cotg\,(e^{3x}).$

Solución:

$c.v.:$
$v = 3x$
$w = e^v$
$t = Cotgw$
$y = Lnt$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\cdot\frac{dt}{dw}\cdot\frac{dw}{dv}\cdot\frac{dv}{dx}$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{d\,(Lnt)}{dt} = \frac{1}{t} = \frac{1}{Cotgw} = \frac{1}{Cotge^v} = \frac{1}{Cotg\left(e^{3x}\right)}$$

$$\frac{dt}{dw} = \frac{d\,(Cotgw)}{dw} = -Cosec^2 w = -Cosec^2\left(e^v\right) = -Cosec^2\left(e^{3x}\right)$$

$$\frac{dw}{dv} = \frac{d\,(e^v)}{dv} = e^v = e^{3x}$$

$$\frac{dv}{dx} = \frac{d\,(3x)}{dx} = 3$$

Luego:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\cdot\frac{dt}{dw}\cdot\frac{dw}{dv}\cdot\frac{dv}{dx} = \frac{1}{Cotg\left(e^{3x}\right)}\cdot\left[-Cosec^2\left(e^{3x}\right)\right]\cdot e^{3x}\cdot 3 = -\frac{3Cosec^2\left(e^{3x}\right)\cdot e^{3x}}{Cotg\left(e^{3x}\right)}$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{3Cosec^2\left(e^{3x}\right)\cdot e^{3x}}{Cotg\left(e^{3x}\right)}$$

Ejercicios propuestos.-

A. Sobre funciones algebraicas, trigonométricas, logarítmicas y exponenciales.

I.- Comprobar utilizando la definición de derivada que:

1) $Si \quad f(x) = \frac{x}{2} + 3 \quad entonces \quad f'(x) = \frac{1}{2}.$
2) $Si \quad f(x) = 5x^2 - x + 2 \quad entonces \quad f'(x) = 10x - 1.$
3) $Si \quad f(x) = \dfrac{4}{x^2+2} \quad entonces \quad f'(x) = -\dfrac{8x}{\left(x^2+2\right)^2}.$
4) $Si \quad g(x) = \frac{5x}{3} \quad entonces \quad g'(x) = \frac{5}{3}.$
5) $Si \quad h(x) = \sqrt{x} \quad entonces \quad h'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$
6) $Si \quad t(x) = \frac{3}{5}x^5 \quad entonces \quad t'(x) = 3x^4.$
7) $Si \quad s(x) = (4-x)(3+x) \quad entonces \quad s'(x) = 1 - 2x.$
8) $Si \quad f(x) = Cotgx \quad entonces \quad f'(x) = Cosec^2 x.$
9) $Si \quad f(x) = Secx \quad entonces \quad f'(x) = Secx \cdot Tgx.$
10) $Si \quad f(x) = Cosecx \quad entonces \quad f'(x) = -Cosecx \cdot Cotgx.$

II.- Verificar las siguientes derivadas utilizando la regla correspondiente:

1) $y = \frac{1}{4} - \frac{1}{3}x + x^2 - 0{,}5x^4$	1) $y' = -\frac{1}{3} + 2x - 2x^3$
2) $f(x) = \dfrac{5x^3}{a}$	2) $f'(x) = \dfrac{15}{a}x^2$
3) $g(u) = \dfrac{au^6 + b}{\sqrt{a^2+b^2}}$	3) $g'(u) = \dfrac{6au^5}{\sqrt{a^2+b^2}}$
4) $y = 3x^{\frac{2}{3}} - 2x^{\frac{5}{2}} + x^{-3}$	4) $y' = 2x^{-\frac{1}{3}} - 5x^{\frac{3}{2}} - 3x^{-4}$
5) $y = \dfrac{a}{\sqrt[3]{x^2}} - \dfrac{b}{\sqrt[3]{x}}$	5) $y' = -\dfrac{2a}{3x\cdot\sqrt[3]{x^2}} + \dfrac{1}{3x\cdot\sqrt[3]{x}}$

6) $y = x^2 \cdot \sqrt[3]{x^2}$	6) $y' = \frac{8x}{3} \cdot \sqrt[3]{x^2}$
7) $h(x) = \frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}$	7) $h'(x) = \frac{1}{\sqrt{x} \cdot (1-\sqrt{x})^2}$
8) $y = \frac{2x+3}{x^2-5x+5}$	8) $y' = \frac{-2x^2-6x+25}{(x^2-5x+5)^2}$
9) $y = Tgx - Cotgx$	9) $y' = \frac{4}{Sen^2 2x}$
10) $y = 2x \cdot Senx - (x^2-2) \cdot Cosx$	10) $y' = x^2 \cdot Senx$
11) $y = x^{-2} \cdot e^x$	11) $y' = x^{-3} \cdot e^x \cdot (x-2)$
12) $y = e^x \cdot Cosx$	12) $y' = e^x \cdot (Cosx - Senx)$
13) $f(x) = x^3 \cdot Lnx - \frac{x^3}{3}$	13) $f'(x) = 3x^2 \cdot Lnx$
14) $h(x) = Ln\,Logx - Lna \cdot Log_a x$	14) $h'(x) = \frac{2Lnx}{xLn10} - \frac{1}{x}$
15) $y = \frac{1}{x} + 2 \cdot Ln\,x - \frac{Ln\,x}{x}$	15) $y' = -\frac{2}{x^2} + \frac{2}{x} + \frac{Ln\,x}{x}$
16) $f(x) = Log\left(e^x + 5Sen\,x - 4ArcSen\,x\right)$	16) $f'(x) = \frac{\left(e^x + 5Cos\,x\right) - 4}{e^x + 5Sen\,x - 4ArcSen\,x} \cdot Log\left(e^x + 5Sen\,x - 4ArcSen\,x\right)$
17) $y = \frac{x}{2} \cdot \sqrt{x^2 - a^2} - \frac{a^2}{2} \cdot Ln\left(x + \sqrt{x^2-a^2}\right)$	17) $y' = \sqrt{x^2 - a^2}$
18) $h(x) = \frac{1}{4\left(1+x^4\right)} + \frac{1}{4} \cdot Ln\left(\frac{x^4}{1+x^4}\right)$	18) $h'(x) = \frac{x^3}{\left(1+x^4\right)^2}$
19) $g(x) = Tg\,x - Cotg\,x$	19) $g'(x) = \frac{4}{Sen^2(2x)}$
20) $y = \frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}$	20) $y' = \frac{1}{\sqrt{x} \cdot (1-\sqrt{x})^2}$
21) $g(x) = x^{-2} \cdot e^x$	21) $g'(x) = x^{-3} \cdot e^x \cdot (x-2)$
22) $y = \sqrt{e^{ax}}$	22) $y' = \frac{a\sqrt{e^{ax}}}{2}$
23) $y = Ln\left[Cos\left(\frac{x-1}{x}\right)\right]$	23) $y' = -\frac{1}{x^2} \cdot Tg\left(\frac{x-1}{x}\right)$
24) $f(x) = e^{-x} \cdot [-Sen(3x)]$	24) $f(x) = -3e^{-x} \cdot \left[Sen(3x) + Cos(3x)\right]$
25) $y = (Sen\,x)^x$	25) $y' = (Sen\,x)^x \cdot \left[Ln\,(Sen\,x) + x \cdot Cotg\,x\right]$

III.- Comprobar las siguientes derivadas utilizando la regla correspondiente:

1) $y = Cosec^2 x + Sec^2 x$	1) $\frac{dy}{dx} = -\frac{16\,Cotg\,2x}{Sen^2 2x}$
2) $y = Cos\,(ax+b)$	2) $\frac{dy}{dx} = -a \cdot Sen\,(ax+b)$
3) $y = Senx \cdot Sen(x+a)$	3) $\frac{dy}{dx} = Sen\,(2x+a)$
4) $y = x^2 \cdot 10^{2x}$	4) $\frac{dy}{dx} = 2x \cdot 10^{2x}(1 + x \cdot Ln10)$
5) $f(x) = x \cdot Sen2^x$	5) $\frac{df}{dx} = Sen2^x + 2^x \cdot x \cdot Cos2^x \cdot Ln2$
6) $y = \sqrt{3x-2}$	6) $y' = \frac{3}{2 \cdot \sqrt{3x-2}}$
7) $g(x) = Log\,(Senx)$	7) $g'(x) = Cotgx \cdot Loge$
8) $h(x) = \sqrt{Lnx+1} \cdot Ln\left(\sqrt{x}+1\right)$	8) $h'(x) = \frac{1}{2x \cdot \sqrt{Lnx+1}} + \frac{1}{2 \cdot \left(\sqrt{x}+x\right)}$
9) $r(x) = \frac{4}{5x^2} + \frac{2}{3x^3}$	9) $r'(x) = \frac{8}{5x^3} - \frac{2}{3x^4}$

10) $y = e^{Sen^2 x}$

11) $y = x^n \cdot a^{-x^2}$

12) $f(t) = (t+1)(2t+1)(3t+1)$

13) $g(t) = t^{t^2}$

14) $h(t) = t^{Sent}$

15) $y = (Cosx)^{Senx}$

16) $y = \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^x$

17) $y = \sqrt[x]{x}$

18) $y = (1+3x-5x^2)^4$

19) $y = (2a+3bx)^2$

20) $y = \sqrt{1-x^2}$

21) $y = (3-2Sen\,x)^5$

22) $y = 2x - 5 \cdot Cos^3 x$

23) $y = \sqrt{x \cdot e^x + x}$

24) $y = Sen\,(3x) + Cos\,\left(\frac{x}{5}\right) + Tg\,\sqrt{x}$

25) $y = Sen\left(x^2 - 5x + 1\right) + Tg\,\left(\frac{a}{x}\right)$

26) $y = \dfrac{1 + Cos\,(2x)}{1 - Cos\,(2x)}$

27) $y = 5 \cdot e^{-x^2}$

28) $y = Ln\,(2x+7)$

29) $y = Ln\left(1-x^2\right)$

30) $y = Tg^2(5x)$

31) $y = \sqrt[3]{\dfrac{1+x^3}{1-x^3}}$

32) $y = \dfrac{1}{2\sqrt{6}} \cdot Ln\left(\dfrac{x\sqrt{3}-\sqrt{2}}{x\sqrt{3}+\sqrt{2}}\right)$

33) $y = Ln\sqrt{\dfrac{1-Sen\,x}{1+Sen\,x}}$

34) $y = \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}$

35) $y = Sen\left[Cos^2\left(Tg^3 x\right)\right]$

36) $y = x^{a^a} + a^{x^a} + a^{a^x} \quad (a > 0)$

37) $y = e^x + e^{e^x} + e^{e^{e^x}}$

10) $\dfrac{dy}{dx} = Sen2x \cdot e^{Sen^2 x}$

11) $y' = x^{n-1} \cdot a^{-x^2} \cdot (n - 2x^2 \cdot Lna)$

12) $f'(t) = 3(t+1)(1+2t)$

13) $g'(t) = t^{t^2+1} \cdot (1 + 2Lnt)$

14) $h'(t) = t^{Sen\,t} \cdot \left(\dfrac{Sen\,t}{t} + Cos\,t \cdot Ln\,t\right)$

15) $y' = (Cosx)^{Senx} \cdot \left[Cosx \cdot Ln\,(Cosx) - Senx \cdot Tgx\right]$

16) $y' = \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^x \cdot Ln\left(1 + \dfrac{1}{x}\right) - \dfrac{1}{1+x}$

17) $\dfrac{dy}{dx} = \sqrt[x]{x} \cdot \left(\dfrac{1 - Ln\,x}{x}\right)$

18) $y' = 4 \cdot (1+3x-5x^2)^3 \cdot (3-10x)$

19) $y' = 12ab + 18b^2 x$

20) $y' = -\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$

21) $y' = -10 \cdot Cos\,x \cdot (3-2Sen\,x)^4$

22) $y' = 2 - 15 \cdot Cos^2 x \cdot Sen\,x$

23) $y' = \dfrac{e^x \cdot (1+x) + 1}{2 \cdot \sqrt{x \cdot e^x + x}}$

24) $y' = 3 \cdot Cos\,(3x) - \frac{1}{5}\,Sen\left(\frac{x}{5}\right) + \dfrac{Sec^2\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}$

25) $y' = (2x-5) \cdot Cos\,\left(x^2 - 5x + 1\right) - \frac{a}{x^2}\,Sec^2\,\left(\frac{a}{x}\right)$

26) $y' = -\dfrac{2Cos\,x}{Sen^3 x}$

27) $y' = -10x \cdot e^{-x^2}$

28) $y' = \dfrac{2}{2x+7}$

29) $y' = -\dfrac{2}{1-x^2}$

30) $y' = 10 \cdot Tg(5x) \cdot Sec^2(5x)$

31) $y' = \dfrac{2x^2}{1-x^6} \cdot \sqrt[3]{\dfrac{1+x^3}{1-x^3}}$

32) $y' = \dfrac{1}{3x^2 - 2}$

33) $y' = -\dfrac{1}{Cos\,x}$

34) $y' = \dfrac{1 + 2\sqrt{x} + \left(4\sqrt{x}\right) \cdot \left(\sqrt{x+\sqrt{x}}\right)}{8\sqrt{x} \cdot \left(\sqrt{x+\sqrt{x}}\right) \cdot \left(\sqrt{x + \sqrt{x+\sqrt{x}}}\right)}$

35) $y' = -3Tg^2 x \cdot Sec^2 x \cdot Sen\left(2Tg^3 x\right) \cdot Cos\left[Cos^2\left(Tg^3 x\right)\right]$

36) $y' = a^a \cdot x^{a^a - 1} + a \cdot x^{a-1} \cdot a^{x^a} \cdot Ln\,a + a^x \cdot a^{a^x} \cdot Ln^2 a$

37) $y' = e^x \cdot \left[1 + e^{e^x} \cdot \left(1 + e^{e^{e^x}}\right)\right]$

38) $y = -\dfrac{Cos\,x}{2\,Sen^2 x} + Ln\sqrt{\dfrac{1+Cos\,x}{Sen\,x}}$ 38) $y' = \dfrac{Cos^2 x}{Sen^3 x}$

39) $y = x\cdot\left[Sen(Ln\,x) - Cos(Ln\,x)\right]$ 39) $y' = 2\,Sen\,(Ln\,x)$

40) $y = Ln\left(1+Sen^2 x\right) - 2\,Sen\,x\cdot ArcTg\,(Sen\,x)$ 40) $y' = -2\,Cos\,x\cdot ArcTg\ (Sen\,x)$

41) $y = \dfrac{ArcCos\,x}{x} + \frac{1}{2}Ln\left(\dfrac{1-\sqrt{1-x^2}}{1+\sqrt{1-x^2}}\right)$ 41) $y' = -\dfrac{ArcCos\ x}{x^2}$

42) $y = \sqrt{1-x^2}\cdot Ln\ \left(\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}\right) + \dfrac{1}{2}\cdot Ln\left(\dfrac{1-\sqrt{1-x^2}}{1+\sqrt{1-x^2}}\right) + \sqrt{1-x^2} + ArcSenx$ 42) $y' = \dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x} - \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}\cdot Ln\left(\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}\right)$

IV.- Calcule las siguientes derivadas:

1) $y = 3x$
2) $y = 8 - x^2$
3) $y = (4x+1)^2$
4) $y = \dfrac{x^3}{3}$
5) $y = \dfrac{1}{x-3}$
6) $f(x) = \sqrt{1+x^2}$
7) $g(x) = 1 - 2x^3$
8) $h(x) = \dfrac{x+2}{x}$
9) $f(t) = \dfrac{3}{t^2-1}$
10) $g(t) = \dfrac{1}{t^2}$
11) $h(t) = 2\sqrt{t} - \dfrac{1}{\sqrt[3]{t}} + 5$
12) $f(u) = \dfrac{u^3}{3} + \dfrac{3}{u^3}$
13) $g(u) = \dfrac{2u+1}{5}$
14) $h(u) = u^2\cdot(2u-1)$
15) $y = (x^3+3)(4x^2-5)$
16) $y = (x-5)^4\cdot(x+3)^5$
17) $y = (x-1)\cdot\sqrt{x}$
18) $y = \dfrac{x^3-3}{5-x^2}$
19) $y = \dfrac{5x}{(5-2x)^3}$
20) $y = \dfrac{(3x^2+5)^3}{2x-3}$
21) $v = \dfrac{2}{(w^3+5)^5}$
22) $t = \sqrt[3]{6k^2-5}$
23) $y = \sqrt[3]{(4+3x)^2}$
24) $y = \dfrac{5}{\sqrt{x^2+4}}$
25) $y = \sqrt{\dfrac{x-2}{x+3}}$
26) $y = Sen^3 x$
27) $y = Senx^2$
29) $y = Cos\,\dfrac{x^3}{2}$
30) $y = x^2\cdot Cosx$
31) $y = \dfrac{Sen2x}{Cos3x}$
32) $y = (x^2-2)\cdot Senx + 2x\cdot Cosx$
33) $y = \dfrac{Cosx}{1-senx}$
34) $y = \dfrac{Senx-Cosx}{Senx+Cosx}$
35) $y = Tg^4(x^2+1)$
36) $y = (Tgx - Cotgx)^2$
37) $y = x - Tgx$
38) $y = \dfrac{Tgx}{\sqrt{x}}$
39) $y = \sqrt[4]{1+Cos^2 x}$
40) $y = Ln^2 x$
41) $y = \dfrac{1}{x} + 2Lnx - \dfrac{Lnx}{x}$
42) $y = LnTg\,\dfrac{x}{2}$
43) $y = Ln\,x^2$
44) $y = (x-1)\cdot e^x$
45) $y = (x^2-4x+8)\cdot e^{\frac{x}{2}}$
46) $y = Tg\,(5x^2) + Cotg\,(2x^5)$
47) $y = x\cdot e^{Sen\,x}$
48) $g(x) = x^2\cdot\sqrt[3]{x^2}$
49) $f(x) = x\cdot e^x$
50) $f(t) = \dfrac{t}{t-e^t}$
51) $h(r) = r^3 + 2r\cdot e^r$
52) $f(x) = Tg\ x - Cotg\ x$
53) $g(x) = 3x^4\cdot Cos\,x,\ con\ \ x\in R$
54) $h(x) = 7x^2\cdot Tgx,\ con\ x \neq \dfrac{\pi}{2} + n\pi,\ \ n\in Z$
55) $f(t) = 9t^{-6}\cdot Cosec\ t,\ \ con\ \ t\neq n\pi,\ \ n\in Z$

V.- Obtenga la derivada de las siguientes funciones:

1) $f(\theta) = Cos\,(Cos\,\theta)$

2) $f(\theta) = Cosec\ (Sec 2\theta)$

3) $y = Tg\,(Sen^2 w + 1)$

4) $f(x) = \sqrt{3x^4 + Cos\,x + 9}$

5) $g(x) = Sen^3\left(\dfrac{5x+3}{5x-3}\right)$

6) $h(x) = e^{Senx}$

7) $f(x) = e^{\sqrt{x} + Cosx}$

8) $y = \dfrac{\frac{3}{5x} - 1}{\frac{2}{x^2+7}}$

9) $f(x) = \left(x^2 + 2\right)^{\sqrt{x}}$

10) $g(x) = 2^{x^2 + Cosx}$

11) $y = Sen^2(2x)$

12) $f(x) = Cosec^3\left(\dfrac{3}{x^2}\right)$

13) $g(x) = Cotg^2\left(\dfrac{3x}{\sqrt{x}+5}\right)$

14) $h(x) = 2^x \cdot x \cdot Senx$

15) $f(x) = \left(3x^2 + 8\right)^{\pi} \cdot \left(8x^3 - 6x + 4\right)^{-\frac{5}{2}}$

16) $h(x) = \left(\dfrac{1}{4}\right)^{Sen^2(5x+8)}$

17) $f(x) = (2x+8)^{3x+5}$

18) $f(x) = \dfrac{3^{Tg^3\left(5x^2\right)}}{2^{\left(x^4+1\right)^2}}$

19) $g(x) = Sec^4\left[\dfrac{2x}{x^2+4}\right]$

20) $h(x) = e^{Sec^2(x^2+5x+1)}$

21) $f(x) = Log_4^2\,(8x^2 + 5x + 6)$

22) $f(x) = Log_{3x+8}\left(e^{2x^3+5} + 4x\right)$

23) $g(x) = \dfrac{3x^3 + 5x + 1}{4x^2 + \sqrt{x} + 6}$

24) $g(x) = (3x+5)^4 \cdot (x^3 - 2x + 1)^8$

25) $f(x) = \sqrt[3]{3x+6} \cdot \left(x + \sqrt[4]{x+1}\right)$

26) $y = \dfrac{(5x^2+3)^{\frac{5}{3}} \cdot (x^{\frac{1}{2}} + 8)^{\frac{1}{2}}}{x^2+2}$

27) $y = Sen^3(x \cdot e^{3x})$

28) $g(x) = Cos^4\left(3x^2 \cdot Ln\,(x^2+3)\right)$

29) $f(x) = Tg^2\left(\dfrac{e^{x^2+1} + 5}{x^2+3}\right)$

30) $f(x) = Ln(Cos\,x) \cdot Sen\,(Ln\,x)$

31) $g(x) = \dfrac{x + Cos^2(x^3)}{Tg\,(3x) + Ln\,(x^2)}$

32) $h(x) = Ln\,(Senx) \cdot Sen\,(Ln\,x)$

VI.- Dada la función $f(x) = Ln\left[Sen\,\sqrt{x}\right]$**:**

1) Narre en forma de “historia” cómo se procede para obtener $\dfrac{dy}{dx}$ según este orden: identificar la función y detalle paso a paso el procedimiento a seguir.

2) Resuelva el ejercicio según lo planteado en el aparte 1.

3) “Invente” un ejercicio similar y resuélvalo.

FÍSICOS NOTABLES

Sir Evan Owen Williams Richardson

Nació el 26 de abril de 1879 en Dewsbury, Yorkshire; y murió el 15 de febrero de 1959 en Alton, Hampshire; ambas localidades en el Reino Unido.

Ganador en 1928 del Premio Nobel en Física.

Por el conjunto de sus trabajos sobre los fenómenos térmicos y, especialmente, por el descubrimiento de la ley que lleva su nombre.

Por su contribución al desarrollo de la Ciencia en su país natal, fue honrado con el título de Caballero (Sir) en 1939.

Artículo elaborado por: J. R. Fernández de Cano.

Fuente: mcnbiografias.com

SIR OWEN WILLIAMS (1879-1959)

Fue el unigénito del matrimonio formado por Joshua Henry y Charlotte María Richardson, quienes pusieron especial empeño en proporcionarle una esmerada educación. Así, tras cursar con singular brillantez sus estudios primarios y secundarios en la Batley School, obtuvo una beca que le permitió ingresar en el prestigioso Trinity College, adscrito a la Universidad de Cambridge, donde fue el alumno más aventajado de su promoción en materias como las Ciencias Naturales, la Física y la Química.

En 1900, una vez licenciado por Cambridge, se incorporó al equipo de investigadores del célebre laboratorio científico de dicha universidad (el Cavendish Laboratory). Allí se especializó en el estudio de la emisión de electricidad por parte de los cuerpos sometidos a elevadas temperaturas, materia en la que consiguió avances tan espectaculares que fue recompensado con su elección, en 1902, como socio del Trinity College.

Por aquel tiempo, su asombrosa precocidad le había permitido enunciar ya, en una sesión oficial de la rigurosa Philosophical Society de Cambridge celebrada el 25 de noviembre de 1901, los fundamentos de la ley de la termodinámica por la que habría de ser recompensado con el Premio Nobel. Con poco más de veinte años, Owen Williams Richardson ya había descubierto (y, lo que es más importante, comprobado por vía experimental) que los efectos termodinámicos relacionados con los metales incandescentes, bien descritos en su día por Edison (1847-1931), se debían a la emisión de electrones por parte del propio metal (y no, como sostenían gran parte de los científicos de su tiempo, por las moléculas de aire próximas a su superficie).

Su temprano pero acreditado prestigio propició que, en 1906, fuera invitado por la Universidad de Princeton (Estados Unidos de América) a que se incorporase a su claustro docente en calidad de Profesor de Física, puesto que Owen W. Richardson desempeñó desde dicho año hasta 1913. Allí continuó desarrollando sus investigaciones sobre termodinámica y sobre la acción fotoeléctrica, trabajos que le granjearon nuevos honores y reconocimientos, como su elección como miembro de la American Philosophical Society (1911) y, dos años después, como socio de número de la Royal Society de Londres.

Este último honor facilitó su retorno al Reino Unido, donde encontró trabajo como Profesor de Física en el King's College de la Universidad de Londres, centro de estudios superiores al que habría de permanecer ligado durante treinta años (1914-1944). Durante todo aquel tiempo, Richardson continuó trabajando en la investigación de diferentes fenómenos físicos relacionados con la electricidad y el calor, trabajo que fue detallando pormenorizadamente en varios obras de gran valor científico; entre ellas, cabe recordar las tituladas *The Electron Theory of Matter* (*Teoría electrónica de la materia*, 1914), *The Emission of Electricity from Hot Bodies* (*Emisión de electricidad por los cuerpos calientes*, 1916) y *Molecular Hydrogen and its Spectrum* (*El hidrógeno molecular y su espectro*, 1934).

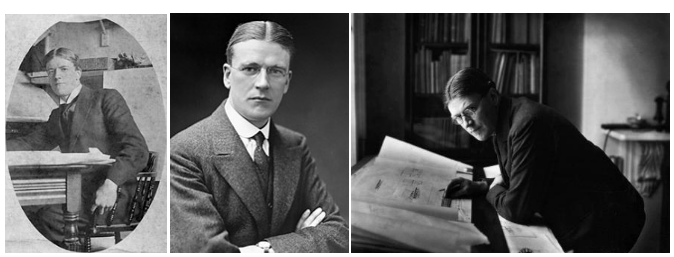
Entre los muchos premios y distinciones que jalonan su brillante trayectoria científica y académica, cabe citar, además, del ya mencionado Premio Nobel, la Medalla "Hughes" de la Royal Society (1920), con la que se vino a reconocer la importancia de sus descubrimientos sobre termodinámica. Además, fue elegido Presidente de la Sección A de la British Association (1921); Presidente de la Physical Society de Londres (cargo que desempeñó entre 1926-1928) y Profesor e Investigador Honorario de la Royal Society (1926-1944). Armado Caballero (*Sir*) en 1939, Richardson fue investido doctor honoris causa por las universidades de St. Andrews, Leeds y Londres.

Casado en 1906 con Lilian Maud Wilson (hermana de su compañero de estudios en Cambridge, H. A. Wilson), fue padre de dos hijos y una hija. Tras el fallecimiento de su primera esposa, acaecido en 1945, Richardson volvió a contraer matrimonio en 1948, esta vez con Henriette Rupp, que se dedicaba también a la Física.

Ley de Richardson

Sir Owen Williams Richardson enunció las leyes cuantitativas de la emisión de electrones por los metales incandescentes, de las cuales deriva la teoría electrónica de los metales. Además, realizó investigaciones sobre el espectro molecular del hidrógeno, y aportó valiosos hallazgos sobre espectroscopia, radiología y emisión fotoeléctrica.

Hacia 1900, como resultado de sus investigaciones sobre la pérdida de electrones por los cuerpos calientes en el vacío, Richardson estableció las bases de la termoiónica. Había tenido ocasión de observar que todos los metales, al ser calentados, se rodeaban de una nube de electrones con la que se podían establecer corrientes eléctricas en el vacío.



SIR EVAN OWEN WILLIAMS RICHARDSON

Imágenes obtenidas de:

Google

La determinación de la velocidad de la luz por Ole Rømer:

341 aniversarios del descubrimiento.

Ole Rømer, astrónomo descubridor de la determinación de la velocidad de la luz

Nació el 25 de septiembre de 1644 en Aarhus y murió el 19 de septiembre de 1810 en Copenhague; ambas localidades en Dinamarca.

Ole Christensen Rømer fue un astrónomo danés, famoso por ser la primera persona en determinar la velocidad de la luz en el año 1676 con un valor inicial de 214.000 km/s.

La determinación de la velocidad de la luz fue cosa de Ole Rømer. El astrónomo no es un personaje conocido por el gran público, pero su nombre va unido a este gran descubrimiento científico sucedido hace 341 años.

Ole Rømer dio con la clave sobre la velocidad de la luz que Galileo había buscado sin éxito dos décadas antes, cuando el rey español Felipe III ofreció una recompensa por determinar la longitud de un barco fuera de vista terrestre. Galileo propuso un método para establecer la hora, y por tanto la longitud, basado en las horas de los eclipses de las lunas de Júpiter, pero no funcionó.

Una de esas lunas de Júpiter, Ío, es la que Ole Rømer y su compañero Jean Picard observaron durante varios meses. Vieron que cuando la Tierra estaba más lejos del quinto planeta de la órbita solar, los eclipses de sus lunas tardaban más en percibirse y viceversa. Rømer siguió la investigación y acabó entendiendo que la diferencia estaba en la velocidad de la luz: esta tardaba más en llegar porque tenía más longitud. Esta medición de tiempo fue clave para anunciarlo de forma oficial en la Academia de Ciencias de París.

Ole Rømer realizó la primera estimación cuantitativa de la velocidad de la luz; en función de sus investigaciones concluyó que la luz tardaría 22 minutos en cruzar el diámetro de la órbita de la Tierra. En la actualidad, este valor se acerca a los 17 minutos.

También fue, a su vez, el inventor del micrómetro para observar eclipses y del telescopio o anteojo meridiano. En 1701, Ole ideó una escala de medida de temperatura llamada Grado Rømer, que hoy ya ha caído en desuso.

Con base en su influencia, Rømer introdujo el calendario gregoriano en Dinamarca en el año 1701.

Ole Rømer

Imágenes obtenidas de:

Google

QUÍMICOS DESTACADOS

Carl Bosch

Químico e Ingeniero.

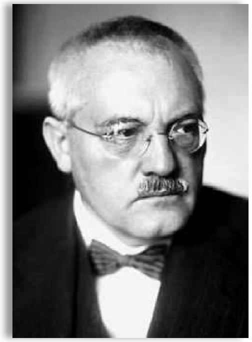
Nació el 27 de agosto de 1874 en Colonia; y murió el 26 de abril de 1940 en Heidelberg; ambas localidades en Alemania.

Recibió el Premio Nobel en Química en 1931.

Por el descubrimiento y desarrollo del método de síntesis química a alta presión.

El premio lo compartió con Friedrich Bergius

Fuente: Wikipedia



CARL BOSCH (1874-1940)

Síntesis biográfica

Estudió en el Instituto Politécnico de Charlottenburgo (hoy Universidad Técnica de Berlín) y, a partir de 1892, en la Universidad de Leipzig donde se licenció en 1898.

En 1919 ocupó la dirección general de BASF. En 1925 fue uno de los fundadores de la empresa IG Farbenindustrie, importante grupo de empresas químicas alemanas resultado de la fusión de BASF, Agfa y Hoechst, del que luego sería director general entre 1935 y 1940.

Bosch murió el 26 de abril de 1940 en la ciudad de Heidelberg, situada en el estado de Baden-Wurtemberg.

Investigaciones científicas

En 1899 comenzó a trabajar en la empresa BASF (Badische Anilin und Soda Fabrik). Desde 1908 hasta 1913 desarrolló el llamado proceso Haber-Bosch de síntesis del amoníaco a partir de hidrógeno y nitrógeno sometidos a altas presiones. Este método permitió emplear gas amoniaco en la fabricación de los abonos artificiales, que tanta influencia habría de tener en el desarrollo de la agricultura en todo el mundo. De este modo, el salitre fue sustituido por este abono sintético en perjuicio de su principal proveedor de ese entonces, Chile.

Después de la primera guerra mundial trabajó en la síntesis del petróleo y del metanol, con procedimientos de química de alta presión.

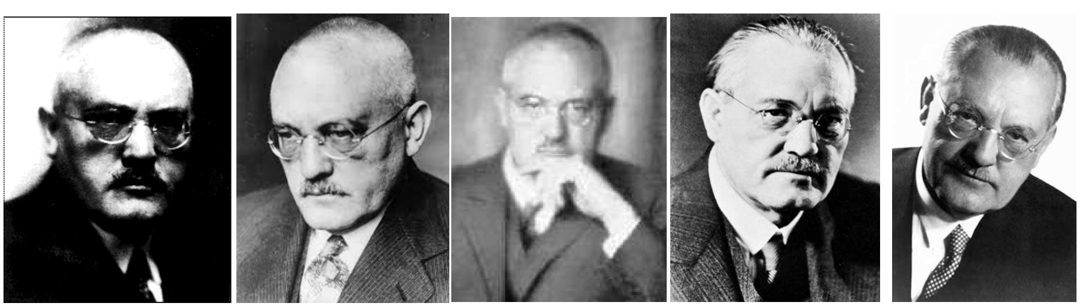
En 1931 le fue otorgado el premio Nobel de Química, compartido con Friedrich Bergius, *por el descubrimiento y desarrollo del método de síntesis química a alta presión*.

Reconocimientos

Recibió la medalla Liebig en 1919, otorgada por la Verein Deutscher Chemiker.

Eponimia

En su honor se bautizó el asteroide 7414 Bosch descubierto el 13 de octubre de 1990 por Lutz D. Schmadel y Freimut Börngen.



CARL BOSCH

Imágenes obtenidas de:

Google

QUÍMICOS DESTACADOS

Friedrich Bergius

Químico e Industrial, de nacionalidad alemana.

Nació el 11 de octubre de 1884 en Goldsmieden, cerca de Breslau, hoy en día en Polonia; y murió el 30 de marzo de 1949 en Buenos Aires, Argentina.

Recibió el Premio Nobel en Química en 1931.

Por sus contribuciones a la creación y desarrollo de los métodos químicos a alta presión.

El premio lo compartió con Carl Bosch

Fuente: Wikipedia

FRIEDRICH BERGIUS (1884-1949)

Síntesis biográfica

Nació el 11 de octubre de 1884 en Breslau, ciudad que en aquellos momentos formaba parte de Alemania, pero que hoy en día forma parte de Polonia con el nombre de Wrocław. Su familia estaba compuesta por científicos, teólogos, oficiales de las fuerzas armadas y hombres de negocios. Su abuelo fue profesor de Economía en Breslau y su padre dueño de una empresa química de su ciudad natal. Antes de entrar a la universidad, fue enviado por 6 meses al Ruhr (región minera e industrial de Alemania) para aprender los aspectos prácticos de la industria metalúrgica pesada.

En 1903 inició sus estudios de química en la Universidad de Breslau donde se licenció el 1905, y el 1907 se doctoró en la Universidad de Leipzig.

Investigó con Fritz Haber (premio Nobel de Química en 1918) el equilibrio químico en las relaciones de los gases y juntos realizaron innumerables experiencias para obtener el perfeccionamiento de la síntesis del amoniaco.

Entre 1912 y 1913 consiguió importantes resultados realizando experiencias de laboratorio tendientes a obtener combustibles líquidos a partir de la hidrogenación del carbón y de aceites pesados. Teniendo en cuenta que al inicio de la Segunda Guerra Mundial, Alemania no disponía de petróleo, por lo que sus experiencias resultaban interesantes para su país.

Desde 1914 a 1921 vivió en Berlín, donde se dedicó a obtener combustibles líquidos a partir de carbón. Esta tarea la realizó en plantas de regular tamaño situadas en Rheinau, cerca de Mannhein.

En 1927 logró el éxito y comenzó a producir combustibles líquidos sintéticos a gran escala. Para el final de la guerra, el 90% de los combustibles utilizados por Alemania eran de origen sintético.

En 1931 recibió el premio Nobel de Química compartido con el Carl Bosch "*por sus contribuciones a la creación y desarrollo de los métodos químicos a alta presión*".[1]

En 1936 recibió el doctorado de la Universidad de Heidelberg. También fue nombrado Doctor Honoris Causa en la Universidad de Hannover y de la Universidad de Harvard en ese mismo año.

Ejerció como Director de muchas empresas de la industria química.

A raíz de la derrota alemana en la Segunda Guerra Mundial vivió en Turquía, Italia, Suiza y se estableció en Madrid. Posteriormente se estableció en Buenos Aires. Se estima que su llegada a la Argentina fue en el año 1947. El gobierno argentino al mando de Juan Domingo Perón, acogió a muchos científicos germanos, luego de terminada la guerra. Bergius participó en la elaboración del famoso "Primer Plan Quinquenal de Perón para el Ministerio de Industria, donde se mostraba a la hidrogenación de carbón como un pilar fundamental para el abastecimiento energético del país. Falleció el 30 de marzo de 1949 en Buenos Aires.

Investigaciones científicas

Contribuyó de manera muy importante al desarrollo en su país de la industria química de síntesis. Creó un procedimiento para producir carburantes por hidrogenación del carbón a elevadas temperaturas y presiones. Más tarde desarrolló, también con éxito, un método de obtención de alimentos hidrocarbonados basado en el tratamiento del serrín con ácido clorhídrico; el producto fue muy utilizado como forraje en las granjas alemanas en épocas de escasez y para alimentar a prisioneros humanos en los campos de concentración nazis.

Referencias

1. «The Nobel Prize in Chemistry 1931». Nobelprize.org. Consultado el 22 de octubre de 2010.

FRIEDRICH BERGIUS

Imágenes obtenidas de:

Google

Charles Goodyear

CREADOR DEL CAUCHO VULCANIZADO

Nació el 29 de Diciembre de 1800

TOMADO DE: Notitarde.com > 29-12-2016

El inventor del caucho vulcanizado nació en Connecticut el 29 de diciembre de 1800. Durante mucho tiempo investigó la manera de mejorar la calidad del caucho o hule natural, de modo que no se volviera quebradizo con el frío, y blando y pegajoso con el calor. Tras 10 años de trabajo, en 1844 inventó un nuevo método de endurecimiento de la goma por medio del azufre.

El caucho es una sustancia impermeable, elástica y resistente a la abrasión y a las corrientes eléctricas, que se obtiene del látex de numerosas plantas tropicales.

Es pegajoso, blando en caliente y duro y fácil de quebrar en frío y se oxida rápidamente, por lo que, durante la década de 1830, muchos inventores trataron de encontrar un método que aumentara su resistencia.

En 1836 Goodyear había tenido algunos éxitos al tratar la goma con óxido nítrico, pero su proyecto fracasó por la crisis económica de 1837.

En 1839 descubrió accidentalmente el proceso de vulcanización, mezclando azufre y aplicándole mucho calor a la goma para producir un producto resistente y flexible. Parece ser que se le cayeron unos fragmentos de caucho sobre los que había espolvoreado cristales de azufre y fueron a parar a la placa de una estufa encendida. Cuando examinó los fragmentos, comprobó que el caucho había perdido su pegajosidad y, a la vez, su fluidez. La materia plástica y tenaz se había convertido en material sólido: el caucho se había transformado en goma. A raíz de la polimerización (vulcanización) se obtuvieron materiales gomosos, llamados elastómeros.

Goodyear luchó durante más de cinco años antes de poder patentar su proceso en 1844. En lugar de sacar provecho de su búsqueda, que finalmente acabó con éxito, Goodyear concedió licencias para la fabricación de caucho a precios ridículamente bajos, y se retiró de la fabricación para inventar nuevos usos para sus productos.

Piratas industriales infringieron sus patentes, y debió contratar un abogado para garantizar sus derechos con éxito, si bien jamás consiguió obtener ganancias de sus descubrimientos. No pudo patentar su proceso de vulcanización en el extranjero, pues Thomas Hancock ya lo había hecho en Inglaterra.

Parece ser que en 1834 llegó a manos de Goodyear un salvavidas de goma de la Roxbury India Rubber Company y rápidamente inventó una válvula de mejora para el dispositivo. Cuando Goodyear intentó vender su diseño a Roxbury, le dijeron que el propio caucho era lo que necesitaban mejorar, no la válvula.

Aunque recibió muchos premios y medallas y fue galardonado con la Cruz de la Legión de Honor en Francia, enfermo y débil, Goodyear volvió a Estados Unidos en 1858, donde encontró sus asuntos financieros en desorden y sus patentes una vez más.

22 de diciembre de 1853:
Nacimiento de la pianista venezolana Teresa Carreño

El 22 de diciembre de 2018 se cumplirán 164 años del natalicio de la ilustre compositora y pianista venezolana Teresa Carreño, quien nació en Caracas en 1853, y es reconocida por ser una de las artistas más dedicada a la música.

Por Karelvia Serny
FUENTE: ***Noticias de Venezuela***
Tomado de: noticias24carabobo > 22/12/2016

FOTO: REFERENCIAL

Cuando debutó en el Irving Hall de Nueva York, con apenas ocho años de edad, uno de los críticos asistentes dijo asombrado: “no me explico cómo pueden alcanzar la octava esas manos, es un misterio, y, sin embargo, esos pasajes se oían claros y correctos. No comprendo: ¡No puedo comprenderlo!”.

Hija de Manuel Antonio Carreño y Clorinda García de Sena, se inició en los estudios de piano guiada por su padre, los cuales posteriormente continuó, con el afamado pianista Julio Hohené.

Fue una destacada compositora e intérprete, entre sus obras más notables podemos mencionar: “Saludo a Caracas”, “Himno a Bolívar”, un vals dedicado a su hija “Teresita”, el “Cuarteto para cuerdas en si bemol” y el “Bal en reve opus 26”.

Además, como concertista debuta sin haber cumplido aún los nueve años de edad, el 25 de noviembre de 1862, dando su primer concierto en el Irving Hall de Nueva York. Los más connotados pianistas del momento entre ellos Franz Liszt se interesan en su talento y recibe lecciones del maestro Luois Moreau, ejecutando conciertos en la Casa Blanca ante el Presidente Abraham Lincoln.

A lo largo de su vida Teresa tuvo tres divorcios y cuatro matrimonios, el primero con el violinista Emile Saurel; el segundo con el cantante de ópera Giovanni Tagliapetra, del cual se divorcia para contraer nupcias con el pianista Eugen D’Albert, su tercer marido y por último, con su cuñado Arturo Tagliapetra.

Fue así como su inestable vida emocional, unida a su intenso trabajo como concertista y a sus numerosas giras acabaron quebrantando su salud. Murió en Estados Unidos en la ciudad de Nueva York, el 12 de Junio de 1917, sus cenizas fueron traídas a Venezuela en 1938 y desde 1977; recibe el honor de reposar en el Panteón Nacional.

EL 19 DE ABRIL DE 1983 SE INAUGURÓ LA SALA RÍOS REYNA, CON LO CUAL SE ABRIÓ COMPLETAMENTE AL PÚBLICO EL TEATRO TERESA CARREÑO, UBICADO EN LOS CAOBOS, CIUDAD DE CARACAS, VENEZUELA. ESTA OBRA ARQUITECTÓNICA LLEVA COMO HOMENAJE, EL NOMBRE DE ESTA GRAN PIANISTA VENEZOLANA.

TEATRO TERESA CARREÑO

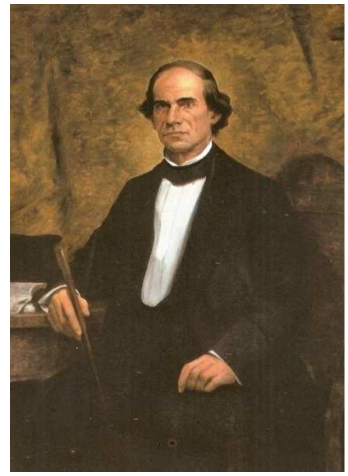


IMAGEN REFERENCIAL

152 años del fallecimiento de Fermín Toro

Por Karelvia Serny
FUENTE: ***Primicias 24***
TOMADO DE: noticias24carabobo > 23/12/2016

El 23 de diciembre de este año se cumplen 152 años del fallecimiento de **Fermín Toro**.

Fermín Toro, político y educador, reconocido literato quien nació en Caracas el 14 de julio de 1806 y fue el encargado de preparar las honras fúnebres a Simón Bolívar en Caracas, debido al traspaso de sus restos desde Colombia.

En 1846, fue ratificado como Ministro Plenipotenciario para efectuar en Madrid un canje de ratificaciones relacionadas con el acuerdo de paz del 30 de marzo de 1845, entre España y Venezuela.

Para el año 1847, debido a la renuncia de José Félix Blanco, regresó al país y fue nombrado ministro de Hacienda, por el presidente José Tadeo Monagas.

Además, participó en la Revolución de Marzo realizada por los partidos Conservador y Liberal en contra de José Tadeo Monagas en 1858. Después, fue electo Diputado y primer presidente de la convención Nacional de Valencia.

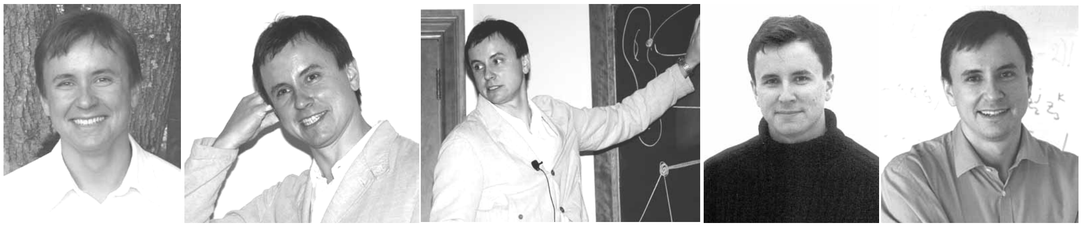
Cabe destacar que Fermín se casó con su prima María de las Mercedes de Tovar Rodríguez del Toro, con la cual tuvo 5 hijos; en la actualidad muchos institutos educativos de Venezuela llevan su nombre. Entre los más importantes se encuentran:

- La Universidad Fermín Toro de Cabudare, estado Lara, Venezuela.
- El Colegio Universitario Fermín Toro de Barquisimeto, estado Lara.
- El Liceo Fermín Toro de Caracas, Venezuela.
- El Instituto de Estudios Parlamentarios Fermín Toro de Caracas, Venezuela

Sin embargo, en 1862 se retiró de toda actividad política y se radicó en los Valles de Aragua para dedicarse a la ganadería y agricultura.

El polímata (conocedor de muchos campos del saber) venezolano murió en Caracas el 23 de diciembre de 1865 y sus restos reposan en el Panteón Nacional.

GALERÍA



Andrei Yuryevich Okounkov

Nació el 26 de julio de 1969 en Moscú, Rusia.

Ganador de la Medalla Fields en 2006

Andrei Yuryevich Okounkov fue educado en Moscú donde asistió a la Universidad Estatal de Moscú. Sin embargo, el camino que siguió no fue tan rápido como el que toman otros que alcanzan grandes logros [7]:

> *No fui a estudiar a escuelas especiales ni participé en olimpiadas. Estudié economía y presté el servicio militar. Yo tenía una familia antes que preparar documentos. Como resultado, mi mente probablemente no es tan rápida como pudo haber sido con un inicio más temprano en matemáticas. Pero tal vez también tenía algunas ventajas sobre mis compañeros más jóvenes. Tuve una visión más amplia del universo y una mejor idea sobre el lugar que ocupan las matemáticas en él. Esto me ayudó a formar mi propia opinión sobre lo que es importante, bonito, prometedor, etc.*

Después de conseguir su primer título, Okounkov permaneció en la Universidad Estatal de Moscú realizando una investigación para su Grado de Candidato (equivalente a un doctorado) tutorado por Alexander Aleksandrovich Kirillov. Explicó la importancia de sus maestros en este momento en la referencia [7] sobre su desarrollo matemático:

> *Creciendo en el entorno del seminario de Kirillov, tenía entre sus participantes, especialmente Grisha Ol'shanskii, maravillosos maestros que generosamente invirtieron su tiempo y talento en explicar matemáticas y que siguieron pacientemente mis primeros pasos profesionales. No me imagino haber llegado a ser un matemático sin ellos. Así que debe ser que en este sentido mi formación profesional se asemeja a la de los demás.*

Okounkov obtuvo su Grado de Candidato en 1995 por su tesis *Admissible Representation of Gelfand Pairs Associated with the Infinite Symmetric Group*. Antes de conseguir este título, él ya tenía trabajos impresos tales como *Thoma's theorem and representations of an infinite bisymmetric group* (en ruso) (1994) y *On the representation of orbits in the form of the sum of elementary orbits* (en ruso) (1994). Fue nombrado como becario de investigación en el Laboratorio de Matemáticas de Dobrushin en el Instituto de Problemas de Transmisión de la Información en la Academia Rusa de Ciencias. Al mudarse a los Estados Unidos, pasó un tiempo en el Instituto de Investigación de la Ciencia Matemática en Berkeley durante el curso 1996-1997, apoyado financieramente por una beca de la National Science Foundation. Una vez allí escribió el documento *Proof of a Conjecture of Goulden and Jackson* (Prueba de una conjetura de Goulden y Jackson). En su Abstract se lee:

> *Probamos una fórmula de integración que involucra los polinomios de Jack conjeturados por I. P. Goulden y D. M. Jackson en relación con la enumeración de los mapas de superficies.*

En 1997 fue nombrado Instructor en la Universidad de Chicago, un cargo que ocupó durante tres años. También permaneció un tiempo en el Instituto para Estudios Avanzados de Princeton. Nombrado Profesor Asistente de la Universidad de California en Berkeley, realizó becado como Fellow una investigación Alfred P. Sloan en el año 2000 y otra de la Fundación David y Lucile Packard en 2001. Las becas Packard se otorgan a investigadores en matemáticas, ciencias naturales, ingeniería y Ciencias de la computación que están en los primeros tres años de un nombramiento como profesores universitarios.

En 2002 Okounkov fue nombrado Profesor en la Universidad de Princeton. Recibió un Premio de la Sociedad Matemática Europea en 2004. En la notificación del premio se lee:

> *Andrei Okounkov... contribuyó grandemente al campo de la combinatoria asintótica. Un matemático extremadamente versátil, encontró una amplia gama de aplicaciones de sus métodos. Sus primeros resultados incluyen una prueba de una conjetura de Ol'shanskii sobre la teoría de las representaciones de grupos con dualidad infinito-dimensional. Okounkov dio la primera prueba de la célebre conjetura Baik-Deift-Johansson, que establece que la asíntota de particiones aleatorias que se distribuyen de acuerdo a la medida de Plancherel, coincide con el de los valores propios de las matrices Hermicianas grandes. Un resultado importante e influyente de Okounkov es una fórmula que encontró en trabajo realizado en conjunto con Borodin, en el que expresa un determinante de Toeplitz general como el determinante de Fredholm del producto de dos operadores asociados de Hankel. Las nuevas técnicas de trabajo con particiones al azar inventado y desarrollado con éxito por Okounkov conducen a una sorprendente serie de aplicaciones en una amplia variedad de campos: topología de espacios de módulo, teoría ergódica, teoría de las superficies aleatorias y geometría algebraica.*

Su mayor honor ha sido el recibir la Medalla Fields en el Congreso Internacional de Matemáticos celebrado en Madrid en agosto de 2006:

> *Por sus contribuciones al tender un puente entre las probabilidades, la teoría de la representación y la geometría algebraica.*

El comunicado de prensa sobre su premio comienza así:

> *La obra de Andrei Okounkov ha puesto de manifiesto profundas nuevas conexiones entre las distintas áreas de las matemáticas y ha traído nuevas penetraciones en problemas que surgidos en la física. Aunque su trabajo es difícil de clasificar, ya que toca en una variedad de áreas, dos temas claros son el uso de las nociones de aleatoriedad y de las ideas clásicas de teoría de la representación. Esta combinación ha demostrado potencia para atacar los problemas de geometría algebraica y mecánica estadística.*

Interrogado sobre cómo se sentía al ser premiado con una Medalla Fields, respondió:

> *De toda la gama de pensamientos que tuve desde el momento que que recibí la llamada telefónica del Presidente de la Unión Matemática Internacional, dos son especialmente recurrentes. En primer lugar, esto es un gran honor y significa una gran responsabilidad. A veces, me siento abrumado por ambos. En segundo lugar, no puedo esperar para compartir este reconocimiento con mis amigos y colaboradores. Las matemáticas son tanto un esfuerzo personal como colectivo: mientras que las ideas nacen en las cabezas individualmente, el intercambio de ideas con los colegas es sumamente importante para el progreso. Fui muy afortunado de trabajar con muchos matemáticos brillantes que también llegaron a convirtirse en mis amigos personales. Este es nuestro éxito en conjunto.*

En la referencia [7] explicó cómo fue el abordaje de problemas difíciles:

> *Personalmente no sé cómo se puede entender algo sin pensarlo con tranquilidad y discutirlo con los amigos. Cuando me siento abrumado, me gusta dar largas caminatas o pasear en bicicleta. Me gusta estar a solas con mi equipo jugando con fórmulas o experimentando con códigos. Pero cuando por fin tengo una idea, no puedo esperar para compartirlo con otros. Soy tan afortunado de poder compartir mi trabajo y toda mi emoción con mucha gente brillante que al mismo tiempo son maravillosos amigos.*

Andrew Wiles es citado en la referencia [3] al dar esta apreciación de su colega Andrei Okounkov:

> *Uno de sus mayores fortalezas es su increíble versatilidad. Trabaja en muchos diferentes campos de las matemáticas y tiene éxito al tomar los resultados de un área y aplicarlos en un campo aparentemente muy diferente.*

Okounkov fue a Princeton en 2010 para ocupar una Cátedra de Matemáticas en la Universidad de Columbia en Nueva York.

Referencias.-

Libro:

1. M Cook, *Mathematicians: An outer view of an inner world* (Princeton University Press, Princeton, 2009).

Artículos:

2. 2006 Fields Medals awarded, *Notices Amer. Math. Soc.* **53** (9) (2006), 1037-1044.
3. A Cai, Two Princetonians among four awarded Fields Medal: Okounkov, Tao GS '96 receive award considered Nobel Prize of mathematics, *The Daily Princetonian* (19 May 2006).
4. G Felder, The work of Andrei Okounkov, *International Congress of Mathematicians* **I** (European Mathematical Society, Zürich, 2007), 55-64.
5. R Kenyon, Les travaux d'Andrei Okounkov sur le modèle des diméres, *Gaz. Math. No.* **112** (2007), 18-22.
6. I Mundet i Riera, 2006 Fields Medal: Andrei Okounkov (Catalan), *SCM Not. No.* **23** (2007), 47-49.
7. V Munoz and U Persson, Interviews with three Fields medalists, *Notices Amer. Math. Soc.* **54** (3) (2007), 405-410.
8. A Okounkov, Interview with Andrei Okounkov, Fields Medal, 2006 ICM (Spanish), *Gac. R. Soc. Mat. Esp.* **9** (3) (2006), 655-659.
9. A M Vershik, J Bourgain, H Kesten and N Reshetikhin, The mathematical work of the 2006 Fields medalists, *Notices Amer. Math. Soc.* **54** (3) (2007), 388-404.

Versión en español por R. Ascanio H. del artículo en inglés de J. J. O'Connor y E. F. Robertson sobre "Andrei Yuryevich Okounkov" (Marzo 2011).
Fuente: MacTutor History of Mathematics [http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Okounkov.html].

Imágenes obtenidas de:

Google