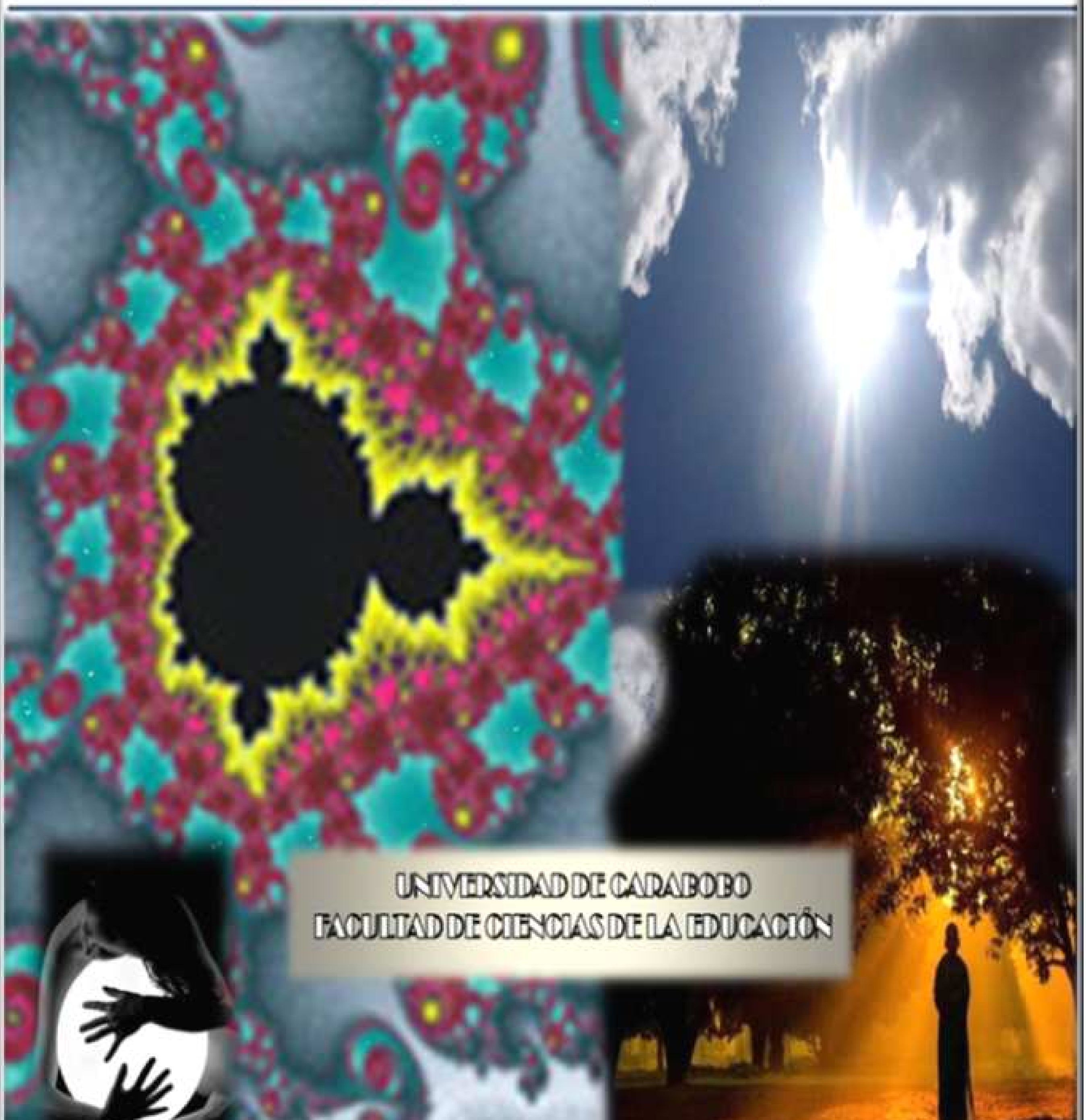
HOMOTECIA

CÁTEDRA DE CÁLCULO - DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA y FÍSICA – FACULTAD DE CIENCIAS DE LA EDUCACIÓN – UNIVERSIDAD DE CARABOBO

 Hecho el Depósito de Ley. Depósito Legal: PPi2012024055 – I. S. S. N.: 2244-7385

E- mail: homotecia2002@gmail.com Nº 9 – AÑO 16 Valencia, Lunes 3 de Septiembre de 2018



HOMOTECIA
DEPARTAMENTO DE MATEMATICA Y FISICA - FACE - UC
ADVENTUS NOVUS CALCULUS
CÁTEDRA DE CÁLCULO

Índice

Diseño de Portada y Montaje Gráfico: R. A. A. H.

La mayoría de las imágenes que aparecen en esta publicación, son obtenidas de Google, Facebook y MSN, vía Internet.

Para el acceso a todos los números publicados de la Revista HOMOTECIA, conectarse al enlace:
http:/servicio.bc.uc.edu.ve/homotecia/index.htm > Sección: MULTIDISCIPLINARIAS

Revista HOMOTECIA
© Rafael Ascanio H. – 2009
Hecho el Depósito de Ley.
Depósito Legal:
PPi2012024055
I. S. S. N.: 2244-7385

e-mail:
homotecia2002@gmail.com

Publicación Mensual
Revista de acceso libre

Publicada por:
CÁTEDRA DE CÁLCULO
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA Y FÍSICA
FACULTAD DE CIENCIAS DE LA EDUCACIÓN
UNIVERSIDAD DE CARABOBO

Nº 9 - AÑO 16 - Valencia, Lunes 3 de Septiembre de 2018

EDITORIAL

En los últimos tiempos, el interés investigativo de los docentes de matemática y sobre todo de aquellos que específicamente se preocupan por la didáctica en el hecho pedagógico, gira sobre afectividad, valores y conocimientos. Ya anteriormente, en muchos trabajos que hemos presentado, hemos resaltado que en Venezuela por las características actuales de la nación, la educación debe considerar como una de sus metas principales además de instruir a las personas, hacerlas mejores ciudadanos, convertirlas en los habitantes venezolanos deseados. Por ello, afirmábamos que es una necesidad transformar los planteles en lugares con un óptimo ambiente educativo, donde el discente participe en el hacer científico y a su vez, donde el ambiente educativo existente haga sentir que son recintos donde existen elementos que permitan el crecimiento de la personalidad de los estudiantes, procurando su formación, el afianzamiento y fortalecimiento de los valores personales, lo que no debe limitarse simplemente a que en la escuela se informe sobre la necesidad de manifestarlos, sino que se practiquen para formar seres virtuosos.

Por ello también hemos afirmado reiteradamente que el hecho pedagógico no debe verse solo como un acción del trabajo con una disciplina sino que también adquiere características interdisciplinarias y transdisciplinarias: el producto humano a lograr ya no será una consecuencia del actuar de un docente mediante su asignatura sino que esto es parte de un proceso caracterizado holísticamente por la acción integral del cuerpo docente de la institución. Con esto afirmamos que apoyamos la idea de definir pedagogía ya no solamente como gerencia del aula sino que se amplía desde la posición particular del docente a gerencia del plantel: el hecho pedagógico que afecta a un estudiante, hecho único y universal en sí, es el producto holístico de la acción en conjunto de todos y cada uno de los docentes de la institución, como docentes y como seres humanos.

Por esto lo de la necesidad de enseñar teniendo presente que esta acción involucra además de la indudable transposición didáctica de los conocimientos, a la afectividad y a los valores. Todo docente debe tener muy consciente que actualmente se requiere un cambio en la sociedad, y que si se ha de lograr es a través de la educación mediante un largo y arduo trabajo, que permita desterrar todos esos anti valores que se han ido arraigando en los últimos años en el comportamiento ciudadano.

La tesis que defendemos es que la sociedad debe reconstruir su cultura y su inicio debería estar dentro del ambiente educativo. Se debe reconstruir la cultura del ambiente escolar en general pero esto se logra reconstruyendo la cultura de los docentes, alumnos, padres, representantes, comunidad de entorno, de cada uno de estos elementos señalados ya que son actores naturales dentro del medio. Un punto particular de los varios que como tarea deben asumirse para iniciar la reconstrucción de la cultura de la sociedad es promover la reconstrucción de la cultura de los docentes pero esta debe hacerse desde su génesis, es decir desde cuando comienza a formarse como tal.

Los Grandes Matemáticos

ERNST SCHRÖDER
(1841 - 1902)

Nació el 25 de Noviembre de 1841 en Mannheim, y murió el 16 de Junio de 1902 en Karlsruhe; ambas localidades en Alemania.

Realizó trabajos importantes en el área de álgebra, teoría de conjuntos y lógica. Su trabajo en conjuntos ordenados y números ordinales es fundamental para las matemáticas.

Friedrich Wilhelm Karl Ernst Schröder. Los padres de Ernst fueron Heinrich Georg Friedrich Schröder y Karoline Walther. Se casaron en 9 de septiembre de 1840 en Haunsheim, un distrito de Dillingen, Baviera. Heinrich Schröder, nació en Múnich el 28 de septiembre de 1810, estudió en la Universidad de Múnich y se convirtió en profesor de física para escuelas secundarias. Trabajó primero en la Escuela Politécnica de Múnich, luego en el Liceo de Solothurn y en ese tiempo nació Ernst. Fue profesor de física y química en la Higher Bürgerschule de Mannheim. Fue muy influyente en el fomento de la enseñanza de la ciencia en los gimnasios y colegios del distrito. Su esposa Karoline era la hija de un pastor de Haunsheim y su padre, Johann Gottfried Walther (1785-1852), tutoró a Ernst por dos años cuando joven. De hecho Ernst vivió con su abuelo durante estos dos años. El reverendo Walther dio a su nieto una excepcionalmente buena educación básica con énfasis en el estudio del latín. También el padre de Ernst fue de una gran influencia sobre su hijo y, teniendo en cuenta que Heinrich Schröder trabajó por el fomento de la educación científica, no es ninguna sorpresa que influenciara en su hijo para que este siguiera una carrera en ciencia. Ernst fue el mayor de los cuatro hijos de sus padres: Clara nació en 1842; Heinrich nació en 1845 y llegó a ser director de un banco; Walter nació en 1850 y se convirtió en un hombre de negocios. Después de ser tutorado por su abuelo, Ernst estudió en varias escuelas diferentes de Mannheim donde demostró habilidad excepcional en idiomas, química y matemática. En 1856, cuando tenía quince años de edad, ingresó al Liceo de Mannheim y allí estudió durante cuatro años, graduándose en 1860.

(CONTINUA EN LA SIGUIENTE PÁGINA)

Reflexiones

"Lo que puedas hacer o soñar, ponte a hacerlo. La osadía está llena de genialidad, poder y magia".

JOHANN W. GOETHE (1749-1832)

Poeta, novelista, dramaturgo y científico alemán.

(VIENE DE LA PÁGINA ANTERIOR)

Después de graduarse en el Liceo Mannheim, Schröder entró en la Universidad de Heidelberg. En ella tuvo como profesores a Otto Hesse en matemática, a Gustav Kirchhoff en física y a Roberto Bunsen en química. Heidelberg era un lugar emocionante en esta época con Kirchhoff y Bunsen haciendo fundamentales avances en el análisis del espectro de elementos. Kirchhoff y Bunsen habían sido estudiantes de Hesse. Mientras que Schröder fue realizando investigaciones asesorado por Hesse, varios otros estudiantes, que pronto se convertirían en famosos, también realizaban sus estudios doctorales con Hesse en Heidelberg.

Por ejemplo, Adolph Mayer (doctorado en 1861) y Heinrich Weber (doctorado en 1863) fueron estudiantes de Hesse al mismo tiempo que Schröder, mientras que Olaus Henrici llegó a Heidelberg para comenzar sus estudios en 1862. La Universidad Ruprecht-Karls de Heidelberg otorgó a Schröder un doctorado en 1862 por su tesis *Ueber die Vielecke von gebrochener Seitenzahl oder die Bedeutung der Stern-Polygone in der Geometrie*. En su tesis, escribe:

> *La extensión del concepto de potencia, originalmente asociado sólo con números enteros, a fracciones racionales ha sido muy fructífera en álgebra; esto sugiere que debemos tratar de hacer lo mismo en geometría cuando se presente la oportunidad*.

Entre ejemplos de potencias fraccionarias, pasa a definir p/q-caras de polígonos.

Hesse había sido profesor en Königsberg antes de su nombramiento en Heidelberg, y tanto Kirchhoff como Bunsen habían sido sus estudiantes en Königsberg. Franz Neumann había sido profesor de física en Königsberg en aquel tiempo y había también enseñado a Kirchhoff y a Bunsen. Hesse había enseñado a Carl Neumann, hijo de Franz Neumann, así que con estos fuertes vínculos entre el personal de Heidelberg y Franz Neumann, es poco sorprendente que después de obtener el doctorado Schröder pasara a Königsberg para permanecer dos años estudiando física matemática con Franz Neumann y análisis matemático con F. J. Richelot.

En 1864, después de sus dos años en Königsberg, Schröder tomó los exámenes para calificar como docente de matemáticas y Ciencias naturales en los gimnasios. Tomó estos exámenes en el estado de Baden-Baden, pero luego fue a Zúrich, donde presentó su tesis de habilitación en la Eidgenössische Technische Hochschule en 1865. Dipert [12] especula que sus razones para ir a Zúrich pueden no haber sido enteramente académicas puesto que él fue un muy entusiasta montañista y realizó una serie de difíciles ascensiones sin guía durante su tiempo en Suiza. Después de haber calificado como profesor, enseñó por un tiempo como docente particular en la Eidgenössische Technische Hochschule. Volviendo a Alemania, tomó otros exámenes para ser docente en Baden-Baden en octubre de 1869 y enseñaba allí cuando estalló la guerra franco-prusiana en 1870. Schröder se ofreció como voluntario para el ejército y, a pesar de su mala visión, fue aceptado. Sin embargo, su período de servicio activo fue muy corto. Para finales de 1870, el Ministerio de educación en Baden le pidió regresara para que tomara un cargo como profesor de matemáticas y ciencias naturales en el Realgymnasium de Baden-Baden. El Bosque Negro era bastante diferente a Los Alpes Suizos, pero Schröder aprovechó la zona haciendo muchas largas caminatas durante sus años en Baden-Baden. En 1874 fue nombrado catedrático de la Technische Hochschule de Darmstadt. Permaneció allí durante dos años, trasladándose a la Technische Hochschule de Karlsruhe en 1876. Es casi seguro que este movimiento se produjo por iniciativa de Jacob Lüroth. Como Schröder, Lüroth creció en Mannheim y los dos se hicieron amigos en la escuela allí. Lüroth había sido nombrado profesor de matemáticas en la Technische Hochschule de Karlsruhe en 1869 y su firma aparece en la carta del nombramiento de Schröder . Schröder permaneció en Karlsruhe el resto de su carrera, se hizo Director de la Technische Hochschule en el año 1890-1891.

El trabajo importante de Ernst Schröder es en el área de álgebra, teoría de conjuntos y lógica. Su trabajo en conjuntos ordenados y números ordinales es fundamental para el tema. Sin embargo, él no se consideraba ser un lógico, Peckhaus señalaen la referencia [22]:

> *Su propio objeto de investigación fue el álgebra absoluta con respecto a sus problemas básicos y supuestos fundamentales. ¿Cuál era la conexión entre lógica y álgebra en la investigación de Schröder? ... uno podría asumir que estos campos pertenecen a dos campos separados de investigación, pero este no es el caso. Se entrelazan en el marco de su idea heurística de una ciencia general.*

De hecho Schröder empezó a interesarse en la física matemática, y su movimiento hacia la lógica fue simplemente un intento de profundizar en sus fundamentos. Temprano en su carrera, escribió un importante artículo Über iterirte Functionen (1871) citado a menudo como base de la teoría moderna de sistemas dinámicos. Ahora uno ve Schröder inlinarse hacia la lógica con su trabajo *Lehrbuch der Arithmetik und Algebra für Lehrer und Studierende* publicado por Teubner en 1873. Ivor Grattan-Guinness [5] escribe:

> *En el subtitulo menciona "las siete operaciones algebraicas": suma y resta en el "primer nivel", la multiplicación y la división en el segundo y la exponenciación, raíces y los logaritmos en el tercero. ... puso adelante a las matemáticas como "la doctrina de los números", en lugar de las magnitudes; y destacó el doblado algebraico buscando el "álgebra absoluta" de tal manera que el álgebra común fuera un ejemplo.*

En 1874 publicó *Normale Elemente der absoluten Algebra* que fue escrito para usarlo en la escuela de Baden-Baden (aunque es difícil creer que él tuviera estudiantes capaces de apreciar las ideas contenidas en este pequeño libro) y en este continuó desarrollando las ideas de la publicación anterior. Escribió su primera obra sobre lógica matemática *Der Operationskreis des Logikkalkuls*, influenciado por George Boole y Hermann Grassmann, en 1877. Contenía, por primera vez, la formulación del Principio de Dualidad y destacaba la dualidad de la conjunción (intersección) y disyunción (unión) que muestra cómo dos teoremas pueden encontrarse. Fue el primero en utilizar el término "cálculo proposicional" y parece ser el primero en utilizar el término "lógica matemática". De hecho, él compara el álgebra y la lógica de Boole diciendo:

> *Sin duda hay un contraste de los objetos de las dos operaciones. Son totalmente diferentes. En aritmética, letras son números, pero aquí, son conceptos arbitrarios.*

En *Vorlesungen über die Algebra der Logik*, un extenso trabajo publicado entre 1890 y 1905 (fue editado y completado por Eugen Müller después de su muerte), Schröder dio una cuenta detallada de la lógica algebraica, proporcionándole a Alfred Tarski una fuente para desarrollar la moderna teoría algebraica y dio una extensa bibliografía de la historia de la lógica. La Teoría de Redes también surgió de este trabajo. Brady escribe en la referencia [3]:

> *Ofrece la primera exposición de la teoría del redes abstracta, la primera exposición de la teoría de cadenas de Dedekind luego de la hecha por el propio Dedekind, el desarrollo más comprensivo del cálculo de relaciones, y un tratamiento de los fundamentos de las matemáticas en el cálculo de relaciones que Löwenheim en 1940 todavía pensaba que era tan razonable como la teoría de conjuntos. El concepto de Schröder para resolver una ecuación relacional fue un precursor de las funciones de Skolem, e inspiró la formulación de Löwenheim y la prueba del famoso teorema que cada proposición con un modelo infinito tiene un modelo contable, el primer teorema verdadero de la lógica moderna.*

Schröder dice de su objetivo (leer en referencia [22]):

> *... al diseñar la lógica como una disciplina de cálculo, sobre todo para dar acceso al manejo exacto de conceptos relativos y, a partir de ese momento, por la emancipación de los reclamos habituales del lenguaje natural, retirar así cualquier suelo fértil de "cliché" en el campo de la filosofía. Esto debe preparar el terreno para un lenguaje universal científico que dispare esfuerzos lingüísticos como el Volapük [un lenguaje universal como el Esperanto, muy popular en Alemania en aquel momento tiempo], se parece más a un lenguaje de señas que a un lenguaje de sonidos.*

Schröder tenía una alta calificada opinión sobre Charles Sanders Peirce. Los dos se correspondían de igual manera pero Peirce mostró una actitud más mixta que Schröder, alabándolo a veces mientras que en otras ocasiones era altamente crítico. Brady escribe en la referencia [3]:

> *Schröder desarrolló el cálculo relativo de Peirce mucho más sistemático que el mismo Peirce. Schröder consideró cuantificadores (o, al menos, sumas y productos equivalentes a los cuantificadores para un dominio fijo) en la lógica de primer y superior orden. Entendió que existen nociones como contabilidad que están más allá del cálculo relativo (y también más allá de la lógica de predicados de primer orden).*

Dipert [referencia 12] da una semblanza interesante de la personalidad de Schröder, la cual él compara con la de Peirce:

> *En cuanto a la personalidad de Schröder, al parecer fue hombre muy ecuánime y suave. Todos sus biógrafos atestiguan este hecho, y estas cualidades se muestran visiblemente en su correspondencia con Peirce y su generosidad hacia Christine Ladd-Franklin y su hija, Margaret. La Vorlesungen es, algo inusual para los tiempos, cuidadoso al observar el trabajo de otros y nunca toma crédito vago de lo que era en realidad el trabajo de otros. Mientras que Peirce generalmente elogiaba a Schröder, sin embargo a veces ferozmente lo agredió, por medio de correspondencia escrita y privada. Schröder veneró a Peirce, sin embargo, y tenía en abundancia lo que Peirce reconoció que le faltaba: autocontrol.*

Putnam demuestra el respeto que se le tuvo a Schröder después de cien años de terminada su obra [25]:

> *Cuando empecé a rastrear el posterior desarrollo de la lógica, lo primero que hice fue mirar a el "Vorlesungen über die Algebra der Logik" de Schröder... [cuyo] tercer volumen está en la lógica de relaciones (álgebra und Logik der pariente, 1895). Los tres volúmenes de inmediato se convirtieron en el mejor conocido texto de lógica avanzada e incluyen lo que cualquier matemático interesado en el estudio de la lógica debería haber sabido, o al menos haber sido conocido, en la década de 1890.*

Sin embargo, como Wussing escribe en la referencia [1], este respeto por Schröder era no se percibía estando en vida:

> *Schröder participó en el desarrollo de la lógica matemática como una disciplina independiente en la segunda mitad del siglo XIX. Este es su logro real, aunque su aporte no fue reconocido hasta principios del siglo XX. Tres factores explican el retraso: el estado en desarrollo inicial de este campo de la matemática durante su vida; una cierta prolijidad en su estilo; y, sobre todo, el aislamiento impuesto por su enseñanza en escuelas técnicas. Como resultado de ello fue un forastero, en una situación de desventaja en la terminología de elegir, plantear su argumentación y juzgar lo que la lógica matemática podría lograr.*

Schröder tuvo muchas aficiones deportivas: ciclismo, senderismo, natación, patinaje sobre hielo, paseos a caballo y jardinería. Siempre se le veía manejar su bicicleta alrededor de Karlsruhe, por ello fue conocido localmente como el “profesor de la bicicleta”. Él incluso esquiaba aun cuando ya tenía sesenta años de edad. Nunca se casó pero parecía que encontraba sus deberes en la Technische Hochschule de Karlsruhe extremadamente exigentes, tal vez porque los emprendió muy concienzudamente. Sin duda le resultó muy difícil encontrar el tiempo necesario para completar su importante obra de tres volúmenes *Vorlesungen über die Algebra der Logik*. El padre de Schröder, Heinrich, se retiró en 1873 y, un año después de que su esposa Karoline muriera en 1875, se trasladó a Karlsruhe para estar cerca de sus hijos Ernst y Heinrich; Heinrich Schröder padre murió en 1885.

En cuanto a Ernst Schröder, sorprende que un hombre sano como él muriera a la edad de 60 años. Él esquió y anduvo en bicicleta pocos días antes de su muerte, pero se resfrió. Su estado de salud empeoró en el transcurso de unos días y murió de "fiebre cerebral" según el certificado de defunción. Muchos de sus amigos sentían que su vida deportiva extenuante a la edad de sesenta años lo había conducido a una muerte prematura. Fue sepultado en el cementerio principal de Karlsruhe, muy cerca del apartamento en que vivió. No tenía parientes que continuaran cuidando su tumba y siguiendo la costumbre, la tumba fue reutilizada después de un período de 30 años por lo que hoy allí no hay ningún registro de sus restos en el cementerio.

Es interesante hacer referencia que en junio de 1913, Norbert Wiener presentó su tesis doctoral en la Universidad de Harvard; Wiener tenía tan solo 18 años de edad. La tesis se refería a una comparación entre los sistemas lógicos de Ernst Schröder y Bertrand Russell, con especial atención a los diferentes tratamientos de las relaciones. Hay una interesante discusión de este y posteriores desarrollos en la referencia [15].

Referencias.-

1. H Wussing, Biography in *Dictionary of Scientific Biography* (New York 1970-1990). http://www.encyclopedia.com/doc/1G2-2830903913.html

Libros:

2. D Bondoni, *La teoria delle relazioni nell'algebra della logica schroderiana* (Milan, 2007).
3. G Brady, *From Pierce to Skolem: A Neglected Chapter in the History of Logic* (Elsevier, 2000).
4. J Gasser, *A Boole Anthology : Recent and Classical Studies in the Logic of George Boole* (Springer-Verlag, 2000).
5. I Grattan-Guinness, *The Search for Mathematical Roots, 1870-1940 : Logics, Set Theories and the Foundations of Mathematics from Cantor Through Russell to Gödel* (Princeton University Press, 2000).
6. A N Kolmogorov, A P Yushkevich, A Shenitzer, H Grant and O B Sheinin, *Mathematics of the 19th Century : Mathematical Logic, Algebra, Number Theory, Probability Theory* (Birkhäuser, 2001).
7. V Peckhaus, *Logik, Mathesis universalis und allgemeine Wissenschaft. Leibniz und die Wiederentdeckung der formalen Logik im 19. Jahrhundert* (Akademie-Verlag. 1997).
8. G van Brummelen and M Kinyon, *Mathematics and the Historian's Craft : The Kenneth O. May Lectures* (Springer-Verlag, 2005).

Artículos:

9. I H Anellis, Schröder material at the Russell archives, *Modern Logic* **1** (2-3) (1990/91), 237-245.
10. R Crespo, Ernesto Schröder (Spanish), *Gaceta Mat.* (1) **3** (1951), 211-214.
11. R R Dipert, Individuals and extensional logic in Schröder's Vorlesungen über die Algebra der Logik, *Modern Logic* **1** (2-3) (1990/91), 140-159.
12. R R Dipert, The life and work of Ernst Schröder, *Modern Logic* **1** (2-3) (1990/91), 117-139.
13. F Ferrante, The origins of thought in Ernst Schröder's *Introduction to lessons on algebra of logic* (1890), *Metalogicon* **9** (2) (1996), 105-137.
14. F Ferrante, 'Folgerichtigkeit' - the basic conception of logical thought in Ernst Schröder's introduction to [his] *Lessons on algebra of logic (1890), Metalogicon* **8** (1) (1995), 33-40.
15. I Grattan-Guinness, Wiener on the logics of Russell and Schröder: An account of his doctoral thesis, and of his discussion of it with Russell, *Ann. of Sci.* **32** (1975), 103-132.
16. L Gruszecki, Ernst Schröder's algebra of logic, *Zeszyty Nauk. Politech. Rzeszowskiej Mat. No.* **27** (2004), 25-28.
17. N Houser, The Schröder-Peirce correspondence, *Modern Logic* **1** (2-3) (1990/91), 206-236.
18. S G Ibragimov, On forgotten works of Ernst Schröder lying between algebra and logic (Russian), *Istor.-Mat. Issled.* **17** (1966), 247-258.
19. J Lüroth, Nekrolog auf Ernst Schröder, *Jahresberichte der Deutschen Mathematiker-Vereinigung* **12** (1903), 249-265.
20. V Peckhaus, Wozu Algebra der Logik? Ernst Schröders Suche nach einer universalen Theorie der Verknüpfungen, *Modern Logic* **4** (4) (1994), 357-381.
21. V Peckhaus, Ernst Schröder und die 'pasigraphischen Systeme' von Peano und Peirce, *Modern Logic* **1** (2-3) (1990/91), 174-205.
22. V Peckhaus, 19th Century Logic between Philosophy and Mathematics, *Bulletin of Symbolic Logic* **5** (1999), 433-450.
23. V Peckhaus, The influence of Hermann Günther Grassmann and Robert Grassmann on Ernst Schröder's algebra of logic, in Hermann Günther Grassmann (1809-1877): visionary mathematician, scientist and neohumanist scholar, *Boston Stud. Philos. Sci.* **187** (Dordrecht, 1996), 217-227.
24. V Peckhaus, Schröder's Logic, in *D M Gabbay and John Woods (eds.), Handbook of the History of Logic. Vol. 3: The Rise of Modern Logic: From Leibniz to Frege* (North Holland, 2004), 557-609.
25. H Putman, Peirce the Logician, *Historia Mathematica* **9** (1982), 290-301.
26. C Thiel, Ernst Schröder and the distribution of quantifiers, *Modern Logic* **1** (2-3) (1990/91), 160-173.
27. C Thiel, A portrait, or, how to tell Frege from Schröder, *Hist. Philos. Logic* **2** (1981), 21-23.

Versión en español por R. Ascanio H. del artículo en inglés de J. J. O'Connor y E. F. Robertson sobre “ERNST SCHRÖDER” (Abril 2009).
FUENTE: MacTutor History of Mathematics. [http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Schroder.html].

Aportes al conocimiento

Elementos Básicos del Cálculo Integral (3)

Por: Prof. Rafael Ascanio Hernández - Prof. Próspero González Méndez

ÍNDICE

INTEGRAL INDEFINIDA

INTEGRALES DE RESOLUCIÓN INMEDIATA

Fórmulas elementales o fundamentales.-

Definida la integración como el proceso contrario a la derivación y con base en las reglas de la derivación conocidas con anterioridad, se pueden elaborar las llamadas ***fórmulas elementales*** o ***fundamentales***. También hay otras cuya veracidad se puede comprobar por el mismo proceso de derivación. Algunas de las fórmulas elementales o fundamentales más utilizadas se presentan en las siguientes tablas:

1) $\int du = u + C$

2) $\int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C$

3) $\int a \cdot u^n du = \frac{a}{n+1} \cdot u^{n+1} + C$

4) $\int \frac{du}{u} = Ln|u| + C$

5) $\int a^u du = \frac{a^u}{Lna} + C$

6) $\int e^u du = e^u + C$

7) $\int e^{au} du = \frac{e^{au}}{a} + C$

8) $\int b^{au} du = \frac{b^{au}}{a \cdot Lnb} + C$

9) $\int u \cdot a^{au} du = \frac{e^{au}}{a^2}(a \cdot u - 1) + C$

10) $\int Lnu \cdot du = u \cdot Lnu - u + C$

11) $\int u^n \cdot Lnu \cdot du = u^{n+1}\left[\frac{Lnu}{n+1} - \frac{1}{(n+1)^2}\right] + C$

12) $\int \frac{du}{u \cdot Lnu} = Ln(Lnu) + C$

13) $\int Senu \cdot du = -Cosu + C$

14) $\int Cosu \cdot du = Senu + C$

15) $\int Sec^2 u \cdot du = Tgu + C$

16) $\int Cosec^2 u \cdot du = -Cotgu + C$

17) $\int Secu \cdot Tgu \cdot du = Secu + C$

18) $\int Cosecu \cdot Cotgu \cdot du = -Cosecu + C$

19) $\int Tgu \cdot du = Ln|Secu| + C$

20) $\int Cotgu \cdot du = -Ln|Cosecu| + C$

21) $\int Sen^2 u \cdot du = \frac{1}{2}u - \frac{1}{4}Sen2u + C$

22) $\int Cos^2 u \cdot du = \frac{1}{2}u + \frac{1}{4}Sen2u + C$

23) $\int Cos^n u \cdot Senu \cdot du = -\frac{Cos^{n+1}u}{n+1} + C; \quad n \neq -1$

24) $\int Sen^n u \cdot Cosu \cdot du = \frac{Sen^{n+1}u}{n+1} + C; \quad n \neq -1$

25) $\int u \cdot Senu \cdot du = Senu - uCosu + C$

26) $\int u \cdot Cosu \cdot du = Cosu + uSenu + C$

27) $\int Secu \cdot du = Ln|Secu + Tgu| + C$

28) $\int Cosec\, u \cdot du = Ln|Cosec\, u - Cotgu| + C$

29) $\int \frac{du}{1+u^2} = ArcTgu + C$

30) $\int \frac{du}{a^2+u^2} = \frac{1}{a}ArcTg\left(\frac{u}{a}\right) + C; \quad a \neq 0$

31) $\int \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = ArcSenu + C$

32) $\int \frac{du}{u\sqrt{u^2-1}} = ArcSecu + C$

33) $\int \frac{du}{u\sqrt{u^2-a^2}} = \frac{1}{a}ArcSec\frac{u}{a} + C; \quad a \neq 0$

34) $\int \frac{du}{u\sqrt{u^2+a^2}} = \frac{1}{a}Ln\left|\frac{u}{a+\sqrt{a^2+u^2}}\right| + C; \quad a \neq 0$

35) $\int \frac{du}{u^2-a^2} = \frac{1}{2a}Ln\left|\frac{u-a}{u+a}\right| + C; \quad a \neq 0$

36) $\int \frac{du}{a^2-u^2} = \frac{1}{2a} \cdot Ln\left|\frac{a+u}{a-u}\right| + C; \quad a \neq 0$

37) $\int \frac{du}{\sqrt{a^2-u^2}} = ArcSen\frac{u}{a} + C; \quad a \neq 0$

38) $\int \frac{du}{\sqrt{u^2 \pm a^2}} = Ln\left|u + \sqrt{u^2 \pm a^2}\right| + C$

39) $\int \sqrt{a^2-u^2}\,du = \frac{1}{2}u\sqrt{a^2-u^2}+\frac{1}{2}a^2 ArcSen\frac{u}{a}+C$

40) $\int \sqrt{u^2+a^2}\,du = \frac{1}{2}u\sqrt{u^2+a^2}-\frac{1}{2}a^2 Ln\left(u+\sqrt{u^2+a^2}\right)+C$

41) $\int \sqrt{u^2-a^2}\,du = \frac{1}{2}u\sqrt{u^2-a^2}-\frac{1}{2}a^2 Ln\left|u+\sqrt{u^2-a^2}\right|+C$

42) $\int ArcSenu\cdot du = u\cdot ArcSenu+\sqrt{1-u^2}+C$

43) $\int ArcCosu\cdot du = u\cdot ArcCosu-\sqrt{1-u^2}+C$

44) $\int ArcTgu\cdot du = u\cdot ArcTg\ u - Ln\sqrt{1+u^2}+C$

45) $\int ArcCotgu\cdot du = u.ArcCotg\ u + Ln\sqrt{1+u^2}+C$

46) $\int Sen\,(au)\cdot Sen\,(bu)\cdot du = -\frac{Sen\ (a+b)\cdot u}{2(a+b)}+\frac{Sen\ (a-b)\cdot u}{2(a-b)}+C;\quad a\neq b$

Ejercicios sobre cálculo de integrales de resolución inmediata.-

Una integral de resolución inmediata es la que se obtiene utilizando tanto la integración por simple inspección como las fórmulas elementales o fundamentales que aparecen en las tablas anteriores.

En la resolución de las integrales que se presentan a continuación, se utilizan además otros procesos matemáticos conocidos tales como operaciones con fracciones, transformación de una raíz en potencia de exponente fraccionario, definición de inverso de un número, desarrollo de productos notables, factorizaciones, entre otros; pero tanto en este capítulo como en el resto del material estos detalles se sobreentenderán y el lector, a manera de práctica para el aprendizaje, deberá identificarlos.

Al dar solución a cada integral, se tratará de detallar lo más preciso posible los procedimientos que se apliquen para no crear confusiones, pero de igual manera se invita al lector a la auto explicación correspondiente porque queda asumido que conoce y domina los mismos por su experiencia en cursos previos de matemática. Sólo cuando el procedimiento amerite un razonamiento más complejo y vaya más allá de lo que se puede comenzar a llamar *operatividad básica de solución*, se hará la explicación correspondiente. La idea es ofrecerle al lector la oportunidad de utilizar su capacidad para adquirir una destreza que le permita resolver, evaluar y hasta corregir los ejercicios que aquí se le proponen y también hacerlo con cualquier otro texto, propósito que queda enmarcado en el hecho de ser este un material principalmente dirigido a docentes en formación en enseñanza de la matemática.

En todos los ejercicios resueltos en este material, a las integrales indefinidas se les identificará con la letra I, lo que para ciertos pasos del proceso de solución permitirá trabajar con más comodidad. Cualquier otra integral indefinida que se origine durante el proceso de resolución de la integral I, se le identificará por una I_i donde i toma valores en $\{1, 2, 3, 4, \ldots\}$.

Ejercicios.-

1. – Obtenga $\int (2-x)\cdot(x+2)\,dx$.

Solución:

Resolviendo la integral.

$$I=\int(2-x)\cdot(x+2)dx=\int(2-x)\cdot(2+x)dx=\int(4-x^2)dx=-\int(x^2-4)dx=-\int x^2dx+4\int dx=-\frac{x^3}{3}+4x+C$$

2. - Hallar $\int \frac{3x^2-4}{x^2}dx.$

Solución:

Resolviendo la integral.

$$I=\int\frac{3x^2-4}{x^2}dx=\int\left(\frac{3x^2}{x^2}-\frac{4}{x^2}\right)dx=\int\left(3-4x^{-2}\right)dx=\int 3\,dx-\int 4x^{-2}dx=3\int dx-4\int x^{-2}dx=3x+4x^{-1}+C=3x+\frac{4}{x}+C=\frac{3x^2+4}{x}+C$$

3. – Resuelva: $\int\left(x^{\frac{1}{2}}-\frac{2x}{3}\right)^2 dx.$

Solución:

Resolviendo la integral.

$$I=\int\left(x^{\frac{1}{2}}-\frac{2x}{3}\right)^2dx=\int\left(x-\frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}}+\frac{4}{9}x^2\right)dx=\int xdx-\int\frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}}dx+\int\frac{4}{9}x^2dx=\frac{1}{2}x^2-\frac{4}{3}\int x^{\frac{3}{2}}dx+\frac{4}{9}\int x^2dx+C=$$

$$=\frac{1}{2}x^2-\frac{4}{3}\cdot\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}+\frac{4}{9}\cdot\frac{1}{3}x^3+C=\frac{1}{2}x^2-\frac{8}{15}x^{\frac{5}{2}}+\frac{4}{27}x^3+C=\frac{1}{2}x^2-\frac{8}{15}\sqrt{x^5}+\frac{4}{27}x^3+C=\frac{1}{2}x^2-\frac{8}{15}x^2\sqrt{x}+\frac{4}{27}x^3+C$$

4.-Obtener $\int\left(x^{-3}+x^{\frac{2}{3}}-6x+\frac{\sqrt[3]{x}}{3}-\frac{2}{x}+\frac{4}{\sqrt{x}}\right)dx.$

<u>Solución</u>:

Resolviendo la integral.

$$I=\int\left(x^{-3}+x^{\frac{2}{3}}-6x+\frac{\sqrt[3]{x}}{3}-\frac{2}{x}+\frac{4}{\sqrt{x}}\right)dx=\int x^{-3}dx+\int x^{\frac{2}{3}}dx-\int 6xdx+\int\frac{x^{\frac{1}{3}}}{3}dx-\int\frac{2}{x}dx+\int 4x^{-\frac{1}{2}}dx=$$

$$=\frac{x^{-2}}{-2}+\frac{x^{\frac{5}{3}}}{\frac{5}{3}}-6\int xdx+\frac{1}{3}\int x^{\frac{1}{3}}dx-2\int\frac{dx}{x}+4\int x^{-\frac{1}{2}}dx+C=-\frac{1}{2x^2}+\frac{3}{5}\sqrt[3]{x^5}-\frac{6x^2}{2}+\frac{1}{3}\cdot\frac{x^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}}-2Ln|x|+\frac{4x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}+C=$$

$$=-\frac{1}{2x^2}+\frac{3}{5}\sqrt[3]{x^5}-3x^2+\frac{1}{4}\sqrt[3]{x^4}-Lnx^2+8\sqrt{x}+C$$

5. - Obtener $\int\frac{x^3-2\sqrt{x}+5\sqrt[3]{x^2}}{x}dx\cdot$

<u>Solución</u>:

Resolviendo la integral.

$$I=\int\frac{x^3-2\sqrt{x}+5\sqrt[3]{x^2}}{x}dx=\int\frac{x^3}{x}dx-2\int\frac{\sqrt{x}}{x}dx+5\int\frac{\sqrt[3]{x^2}}{x}dx=\int x^2dx-2\int\frac{x^{\frac{1}{2}}}{x}dx+5\int\frac{x^{\frac{2}{3}}}{x}dx=$$

$$=\frac{x^3}{3}-2\int x^{-\frac{1}{2}}dx+5\int x^{-\frac{1}{3}}dx+C=\frac{x^3}{3}-2\frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}+5\frac{x^{\frac{2}{3}}}{\frac{2}{3}}+C=\frac{x^3}{3}-4\sqrt{x}+\frac{15}{2}\sqrt[3]{x^2}+C$$

6.- Calcule: $\int\left(\sqrt{x}+1\right)\left(x-\sqrt{x}+1\right)dx.$

<u>Solución</u>:

Se resuelve la integral.

$$I=\int\left(\sqrt{x}+1\right)\left(x-\sqrt{x}+1\right)dx=\int\left(x\sqrt{x}-x+\sqrt{x}+x-\sqrt{x}+1\right)dx=\int\left(x\sqrt{x}+1\right)dx=\int x\sqrt{x}dx+\int dx=$$

$$=\int x\cdot x^{\frac{1}{2}}dx+x+C=\int x^{\frac{3}{2}}dx+x+C=\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}+x+C=\frac{2}{5}\sqrt{x^5}+x+C=\frac{2}{5}x^2\sqrt{x}+x+C$$

7.- Determine: $\int\frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{\sqrt{x}}dx.$

<u>Solución</u>:

Resolviendo la integral.

$$I=\int\frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{\sqrt{x}}dx=\int\left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}}-\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{x}}\right)dx=\int\left(1-\sqrt{a}\cdot x^{-\frac{1}{2}}\right)dx=\int dx-\sqrt{a}\int x^{-\frac{1}{2}}dx=x-\sqrt{a}\cdot 2x^{\frac{1}{2}}+C=x-2\sqrt{a}\cdot\sqrt{x}+C=x-2\sqrt{ax}+C$$

8.- Determinar $\int\frac{x^2+x+1}{\sqrt{x}}dx.$

<u>Solución</u>:

Resolviendo la integral.

$$I=\int\frac{x^2+x+1}{\sqrt{x}}dx=\int\left(\frac{x^2}{\sqrt{x}}+\frac{x}{\sqrt{x}}+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)dx=\int\left(\frac{x^2}{x^{\frac{1}{2}}}+\frac{x}{x^{\frac{1}{2}}}+\frac{1}{x^{\frac{1}{2}}}\right)dx=\int\left(x^2\cdot x^{-\frac{1}{2}}+x\cdot x^{-\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}}\right)dx=$$

$$=\int\left(x^{\frac{3}{2}}+x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}}\right)dx=\int x^{\frac{3}{2}}dx+\int x^{\frac{1}{2}}dx+\int x^{-\frac{1}{2}}dx=\frac{x^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}}+\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}+\frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}+C=\frac{2}{5}\sqrt{x^5}+\frac{2}{3}\sqrt{x^3}+2\sqrt{x}+C=$$

$$=\frac{2}{5}x^2\sqrt{x}+\frac{2}{3}x\sqrt{x}+2\sqrt{x}+C=\left(\frac{2}{5}x^2+\frac{2}{3}x+2\right)\cdot\sqrt{x}+C$$

9. - Calcular $\int\left(\sqrt{x}+\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)dx.$

Solución:

Resolviendo la integral.

$$I=\int\left(\sqrt{x}+\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)dx=\int\frac{2\sqrt{x^2}+1}{2\sqrt{x}}\,dx=\int\frac{2x+1}{2\sqrt{x}}\,dx=\int\left(\frac{2x}{2\sqrt{x}}+\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)dx=\int\left(\frac{x}{\sqrt{x}}+\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)dx=\int\left(\frac{x}{x^{\frac{1}{2}}}+\frac{1}{2x^{\frac{1}{2}}}\right)dx=$$

$$=\int\left(x\cdot x^{-\frac{1}{2}}+\frac{x^{-\frac{1}{2}}}{2}\right)dx=\int x^{\frac{1}{2}}dx+\frac{1}{2}\int x^{-\frac{1}{2}}dx=\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}+\frac{1}{2}\cdot\frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}+C=\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+x^{\frac{1}{2}}+C=\frac{2}{3}\sqrt{x^3}+\sqrt{x}+C=$$

$$=\frac{2}{3}x\sqrt{x}+\sqrt{x}+C=\left(\frac{2}{3}x+1\right)\sqrt{x}+C$$

10. - Evalúe: $\int\frac{3x^2(x^3+2)^2}{\sqrt[3]{x^2}}dx\cdot$

Solución:

Se resuelve la integral.

$$I=\int\frac{3x^2(x^3+2)^2}{\sqrt[3]{x^2}}dx=3\int\frac{x^2(x^6+4x^3+4)}{x^{\frac{2}{3}}}dx=3\int(x^8+4x^5+4x^2)\cdot x^{-\frac{2}{3}}dx=3\int(x^{\frac{22}{3}}+4x^{\frac{13}{3}}+4x^{\frac{4}{3}})dx=$$

$$=3\int x^{\frac{22}{3}}dx+12\int x^{\frac{13}{3}}dx+12\int x^{\frac{4}{3}}dx=3\cdot\frac{3}{25}x^{\frac{25}{3}}+12\cdot\frac{3}{16}x^{\frac{16}{3}}+12\cdot\frac{3}{7}x^{\frac{7}{3}}+C=$$

$$=\frac{9}{25}\sqrt[3]{x^{25}}+\frac{36}{16}\sqrt[3]{x^{16}}+\frac{36}{7}\sqrt[3]{x^{7}}+C=\frac{9}{25}x^8\cdot\sqrt[3]{x}+\frac{9}{4}x^5\cdot\sqrt[3]{x}+\frac{36}{7}x^2\cdot\sqrt[3]{x}+C=\left(\frac{9}{25}x^6+\frac{9}{4}x^3+\frac{36}{7}\right)\cdot x^2\cdot\sqrt[3]{x}+C$$

11.- Obtener: $\int\left(a^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{2}{3}}\right)^3dx\,.$

Solución:

Resolviendo la integral: El integrando presenta el cubo de una diferencia. Se procede a desarrollarlo.

$$I=\int\left(a^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{2}{3}}\right)^3dx=\int\left[\left(a^{\frac{2}{3}}\right)^3-3\cdot\left(a^{\frac{2}{3}}\right)\cdot x^{\frac{2}{3}}+3\cdot a^{\frac{2}{3}}\cdot\left(x^{\frac{2}{3}}\right)^2-\left(x^{\frac{2}{3}}\right)^3\right]dx=$$

$$=\int\left(a^2-3\cdot a^{\frac{4}{3}}\cdot x^{\frac{2}{3}}+3\cdot a^{\frac{2}{3}}\cdot x^{\frac{4}{3}}-x^2\right)dx=a^2\int dx-3a^{\frac{4}{3}}\int x^{\frac{2}{3}}dx+3a^{\frac{2}{3}}\int x^{\frac{4}{3}}dx-\int x^2dx=$$

$$=a^2x-3\cdot a^{\frac{4}{3}}\cdot\frac{x^{\frac{5}{3}}}{\frac{5}{3}}+3\cdot a^{\frac{2}{3}}\cdot\frac{x^{\frac{7}{3}}}{\frac{7}{3}}-\frac{x^3}{3}+C=a^2x-\frac{9}{5}\cdot\sqrt[3]{a^4}\cdot\sqrt[3]{x^5}+\frac{9}{7}\cdot\sqrt[3]{a^2}\cdot\sqrt[3]{x^7}-\frac{x^3}{3}+C=$$

$$=a^2x-\frac{9}{5}ax\cdot\sqrt[3]{ax^2}+\frac{9}{7}x^2\cdot\sqrt[3]{a^2x}-\frac{x^3}{3}+C=9x\cdot\left(\frac{a^2}{9}-\frac{a}{5}\cdot\sqrt[3]{ax^2}+\frac{x}{7}\cdot\sqrt[3]{a^2x}-\frac{x^2}{27}\right)+C=$$

$$=9x\cdot\left[\frac{a^2}{9}+\sqrt[3]{ax}\cdot\left(\frac{x}{7}\sqrt[3]{a}-\frac{a}{5}\sqrt[3]{x}\right)-\frac{x^2}{27}\right]+C=9x\cdot\left[\frac{3a^2-x^2}{27}+\sqrt[3]{ax}\cdot\left(\frac{x}{7}\sqrt[3]{a}-\frac{a}{5}\sqrt[3]{x}\right)\right]+C$$

12.- Obtenga: $\int\frac{3dx}{\sqrt{5-5x^2}}\,.$

Solución:

Resolviendo la integral.

$$I=\int\frac{3dx}{\sqrt{5-5x^2}}=3\int\frac{dx}{\sqrt{5\cdot(1-x^2)}}=3\int\frac{dx}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{1-x^2}}=\frac{3}{\sqrt{5}}\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\frac{3}{\sqrt{5}}\int d(ArcSenx)=\frac{3\sqrt{5}}{5}\cdot ArcSenx+C$$

13.- Resuelva: $\int (x^3+5)^6\,dx.$

Solución:

Una posibilidad de solución es considerar que al ser el integrando $(x^3+5)^6$ la potencia de un binomio, puede ser desarrollado aplicando el Binomio de Newton:

$$(x+y)^n = \binom{n}{0}x^n + \binom{n}{1}x^{n-1}\cdot y + \binom{n}{2}x^{n-2}\cdot y^2 + \cdots + \binom{n}{n-2}x^2\cdot y^{n-2} + \binom{n}{n-1}x\cdot y^{n-1} + \binom{n}{n}y^n$$

Entonces, desarrollando por el Binomio de Newton, se tiene:

$$(x^3+5)^6 = \binom{6}{0}x^{18} + \binom{6}{1}x^{15}\cdot 5 + \binom{6}{2}x^{12}\cdot 5^2 + \binom{6}{3}x^9\cdot 5^3 + \binom{6}{4}x^6\cdot 5^4 + \binom{6}{5}x^3\cdot 5^5 + \binom{6}{6}\cdot 5^6 =$$

$$= \binom{6}{0}x^{18} + \binom{6}{1}\cdot 5x^{15} + \binom{6}{2}\cdot 25x^{12} + \binom{6}{3}\cdot 125x^9 + \binom{6}{4}\cdot 625x^6 + \binom{6}{5}\cdot 3125x^3 + \binom{6}{6}\cdot 15625 = (*)$$

Los valores de los números combinatorios de cada término, se calculan utilizando el Triángulo de Tartaglia, también llamado Triángulo de Pascal:

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
 & & & & & & \binom{0}{0} & & & & & & \\
 & & & & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & & & & \\
 & & & & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & & & & \\
 & & & \binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3} & & & \\
 & & \binom{4}{0} & & \binom{4}{1} & & \binom{4}{2} & & \binom{4}{3} & & \binom{4}{4} & & \\
 & \binom{5}{0} & & \binom{5}{1} & & \binom{5}{2} & & \binom{5}{3} & & \binom{5}{4} & & \binom{5}{5} & \\
\binom{6}{0} & & \binom{6}{1} & & \binom{6}{2} & & \binom{6}{3} & & \binom{6}{4} & & \binom{6}{5} & & \binom{6}{6}
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
 & & & & & & 1 & & & & & & \\
 & & & & & 1 & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & \\
 & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & \\
1 & & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 & & 1
\end{array}$$

Cada número combinatorio en el triángulo se calcula por la fórmula:

$\binom{m}{n} = \frac{m!}{(m-n)!\,n!}$ *con* $m, n \in N$ donde para todo $k \in N \Rightarrow k! = (k-1)\cdot(k-2)\cdot(k-3)\cdots 3\cdot 2\cdot 1\cdot$

Los valores de la fila $n+1$ en el triángulo de la derecha, corresponden a los números combinatorios que forman parte de los coeficientes de los términos del binomio desarrollado en el ejercicio. Para el ejemplo es la séptima fila.
Sustituyendo los valores en (*), el desarrollo del binomio queda igual a:

$$(*) = 1\cdot x^{18} + 6\cdot 5x^{15} + 15\cdot 25x^{12} + 20\cdot 125x^9 + 15\cdot 625x^6 + 6\cdot 3125x^3 + 1\cdot 15625 =$$

$$= x^{18} + 30x^{15} + 375x^{12} + 2500x^9 + 9375x^6 + 18750x^3 + 15625$$

Luego, al resolver la integral:

$$I = \int (x^3+5)^6\,dx = \int (x^{18} + 30x^{15} + 375x^{12} + 2500x^9 + 9375x^6 + 18750x^3 + 15625)dx =$$

$$= \int x^{18}dx + \int 30x^{15}dx + \int 375x^{12}dx + \int 2500x^9dx + \int 9375x^6dx + \int 18750x^3dx + \int 15625dx =$$

$$= \frac{x^{19}}{19} + 30\int x^{15}dx + 375\int x^{12}dx + 2500\int x^9dx + 9375\int x^6dx + 18750\int x^3dx + 15625\int dx + C =$$

$$= \frac{x^{19}}{19} + \frac{30x^{16}}{16} + \frac{375x^{13}}{13} + \frac{2500x^{10}}{10} + \frac{9375x^7}{7} + \frac{18750x^4}{4} + 15625x + C =$$

$$= \frac{x^{19}}{19} + \frac{15x^{16}}{8} + \frac{375x^{13}}{13} + 250x^{10} + \frac{9375x^7}{7} + \frac{9375x^4}{2} + 15625x + C$$

14.- Evaluar: $\int \frac{4+\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{3-3x^2}}dx$.

Solución:

Se resuelve la integral.

$$I=\int \frac{4+\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{3-3x^2}}dx=\int \frac{4+\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{3\cdot(1-x^2)}}dx=\int \frac{4+\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{1-x^2}}dx=\frac{1}{\sqrt{3}}\int \frac{4+\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^2}}dx=\frac{1}{\sqrt{3}}\int\left[\frac{4}{\sqrt{1-x^2}}+\frac{\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^2}}\right]dx=\frac{\sqrt{3}}{3}\int\left[\frac{4}{\sqrt{1-x^2}}+1\right]dx=$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{3}\int\frac{4}{\sqrt{1-x^2}}dx+\frac{\sqrt{3}}{3}\int dx=\frac{4\sqrt{3}}{3}\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}+\frac{\sqrt{3}}{3}x+C=\frac{4\sqrt{3}}{3}\int d(ArcSenx)+\frac{\sqrt{3}}{3}x+C=\frac{4\sqrt{3}}{3}ArcSenx+\frac{\sqrt{3}}{3}x+C$$

15.- Determinar: $\int\left(\frac{4}{1+x^2}+4x+1\right)dx$.

Solución:

Resolviendo la integral.

$$I=\int\left(\frac{4}{1+x^2}+4x+1\right)dx=4\int\frac{dx}{1+x^2}+4\int xdx+\int dx=4\int d(ArcTgx)+2x^2+x+C=4ArcTgx+2x^2+x+C$$

16.- Obtenga $\int\sqrt{x^2+4x+4}\,dx$.

Solución:

Resolviendo la integral: El radicando en el radical es un cuadrado perfecto. Se factoriza.

$$I=\int\sqrt{x^2+4x+4}\,dx=\int\sqrt{(x+2)^2}\,dx=\int(x+2)\,dx=\int xdx+\int 2dx=\frac{x^2}{2}+2\int dx+C=\frac{x^2}{2}+2x+C$$

17.- Evalúe $\int\sqrt[3]{x^3-3x^2+3x-1}\,dx$.

Solución:

Resolviendo la integral. El radicando en el radical es el cubo de una diferencia. Se factoriza.

$$I=\int\sqrt[3]{x^3-3x^2+3x-1}\,dx=\int\sqrt[3]{(x-1)^3}\,dx=\int(x-1)\,dx=\int xdx-\int dx=\frac{x^2}{2}-x+C$$

18.- Hallar $\int e^{3x}dx$.

Solución:

Resolviendo la integral.

$$I=\int e^{3x}dx=\int\frac{3e^{3x}}{3}dx=\frac{1}{3}\int e^{3x}(3xdx)=\frac{1}{3}\int d(e^{3x})=\frac{1}{3}e^{3x}+C$$

Nota: El mismo resultado se obtiene cuando se usa el caso "a" de las Reglas útiles para el Cálculo Integral.

19.- Obtenga: $\int 3^x\cdot 2^{3x}\cdot 5^{2x}dx$.

Solución:
Resolviendo la integral: Se utiliza la propiedad potencia de un producto.

$$I=\int 3^x\cdot 2^{3x}\cdot 5^{2x}dx=\int\left(3\cdot 2^3\cdot 5^2\right)^x dx=\int 600^x dx=\frac{1}{Ln600}\cdot 600^x+C$$

20.- Obtenga la integral: $\int \frac{Ln\,2x}{Ln\,4x^2}dx$.

Solución:

Se resuelve la integral.

$$I=\int \frac{Ln\,2x}{Ln\,4x^2}dx=\int \frac{Ln\,2x}{Ln\,(2x)^2}dx=\int \frac{Ln\,2x}{2Ln\,2x}dx=\frac{1}{2}\int dx=\frac{1}{2}x+C$$

21.- Evalúe: $\int m^2\cdot e^{2Ln\,(4m+3)}dm$.

Solución:

Se resuelve la integral: En la potencia de base *e* si aplica la propiedad de la potenciación $x^y=e^{y\cdot Ln\,x}$.

$$I=\int m^2\cdot e^{2Ln\,(4m+3)}dm=\int m^2\cdot(4m+3)^2\,dm=\int m^2\cdot(16m^2+24m+9)\,dm=\int(16m^4+24m^3+9m^2)\,dm=$$

$$=16\int m^4dm+24\int m^3\,dm+9\int m^2dm=\frac{16}{5}m^5+6m^4+3m^3+C$$

22.- Calcule la integral: $\int \frac{3(2^x)+2(3^x)}{5^{x+1}}dx$.

Solución:

Resolviendo la integral:

$$I=\int \frac{3(2^x)+2(3^x)}{5^{x+1}}dx=\int\left(3\cdot\frac{2^x}{5\cdot 5^x}+2\cdot\frac{3^x}{5\cdot 5^x}\right)dx=\int\left[\frac{3}{5}\cdot\left(\tfrac{2}{5}\right)^x+\frac{2}{5}\cdot\left(\tfrac{3}{5}\right)^x\right]dx=\tfrac{3}{5}\int\left(\tfrac{2}{5}\right)^x dx+\tfrac{2}{5}\int\left(\tfrac{3}{5}\right)^x dx=$$

$$=\frac{3}{5Ln\left(\frac{2}{5}\right)}\left(\tfrac{2}{5}\right)^x+\frac{2}{5Ln\left(\frac{3}{5}\right)}\left(\tfrac{3}{5}\right)^x+C=\frac{3}{Ln\left(\frac{2}{5}\right)^5}\cdot\left(\tfrac{2}{5}\right)^x+\frac{2}{Ln\left(\frac{3}{5}\right)^5}\cdot\left(\tfrac{3}{5}\right)^x+C$$

23.- Obtenga: $\int \frac{dy}{y^2-10}$.

Solución:

Resolviendo la integral: La forma de la integral se corresponde con la fórmula elemental

$$\int \frac{du}{u^2-a^2}=\frac{1}{2a}Ln\left|\frac{u-a}{u+a}\right|+C;\quad a\neq 0\cdot$$

Luego:

$$I=\int \frac{dy}{y^2-10}=\int \frac{dy}{y^2-\sqrt{10}^2}=\frac{1}{2\sqrt{10}}\cdot Ln\left|\frac{y-\sqrt{10}}{y+\sqrt{10}}\right|+C$$

24.- Compruebe que $\int \frac{1}{v^2-a^2}dv=\frac{1}{2a}Ln\left|\frac{v-a}{v+a}\right|+C\cdot$

Comprobando:

La igualdad corresponde a una integral inmediata. Resulta interesante comprobar la certeza de la misma. Esto se puede realizar utilizando elementos matemáticos que ameritan se expliquen.

1º) Considérese $v^2-a^2=(v+a)(v-a)$, que corresponde al proceso de factorizar la diferencia de cuadrados y que se puede utilizar para la determinación del *mínimo común denominador* (*m. c. d.*) en la suma o resta de fracciones con diferentes denominadores e iguales a los factores suma y resta indicados.

2º) Si este es el *m. c. d.*, entonces $(v+a)$ y $(v-a)$ deben ser los denominadores de dos fracciones que deben tener numerador 1 y que se suman o se restan; conclusión a la que se llega por el numerador de la fracción que forma el integrando. Al realizar las sumas y restas posibles se puede determinar cuál es la conveniente:

i) $(v+a)+(v-a)=2v$

ii) $(v+a)-(v-a)=v+a-v+a=2a$

iii) $(v-a)+(v-a)=2v-2a$

iv) $(v-a)-(v+a)=v-a-v-a=-2a$

v) $(v+a)+(v+a)=2v+2a$

La opción más adecuada es la *(ii)* por aparecer *2a,* divisor en el miembro derecho de la igualdad propuesta para ser comprobada. Entonces, se procede de la siguiente manera utilizando un "1 *conveniente*" $\left(\frac{2a}{2a}=1\right)$ y un "0 *conveniente*" $(v-v=0)$:

$$\left[\frac{1}{(v+a)(v-a)}\right]=\frac{2a}{2a}\cdot\left[\frac{1}{(v-a)(v+a)}\right]=\frac{1}{2a}\cdot\left[\frac{2a}{(v-a)(v+a)}\right]=\frac{1}{2a}\cdot\left[\frac{a+a+v-v}{(v-a)(v+a)}\right]=\frac{1}{2a}\cdot\left[\frac{v+a-(v-a)}{(v-a)(v+a)}\right]=\frac{1}{2a}\cdot\left(\frac{1}{v-a}-\frac{1}{v+a}\right).$$

Al sustituir esta expresión resultante por el integrando de la integral, se consiguen dos integrales de solución inmediata:

$$I=\int\frac{1}{v^2-a^2}dv=\int\frac{1}{2a}\cdot\left(\frac{1}{v-a}-\frac{1}{v+a}\right)dv=\frac{1}{2a}\left(\int\frac{dv}{v-a}-\int\frac{dv}{v+a}\right)=\frac{1}{2a}\left[Ln|v-a|-Ln|v+a|\right]+C=\frac{1}{2a}Ln\left|\frac{v-a}{v+a}\right|+C$$

LO QUE SE QUERÍA COMPROBAR (L. Q. Q. C.)

25.- Resuelva: $\int\frac{dz}{z^2+7}$.

Solución:

Resolviendo la integral: La forma de la integral se corresponde con la fórmula elemental

$$\int\frac{du}{a^2+u^2}=\frac{1}{a}\cdot ArcTg\left(\frac{u}{a}\right)+C;\quad a\neq 0\cdot$$

Luego:

$$I=\int\frac{dz}{z^2+7}=\int\frac{dz}{7+z^2}=\int\frac{dz}{\sqrt{7}^2+z^2}=\frac{1}{\sqrt{7}}ArcTg\left(\frac{z}{\sqrt{7}}\right)+C$$

26.- Obtener $\int Sec^2(4x)dx\cdot$

Solución:

Resolviendo la integral:

$$I=\int Sec^2(4x)dx=\int\frac{4Sec^2(4x)}{4}dx=\frac{1}{4}\int Sec^2(4x)(4dx)=\frac{1}{4}\int d[Tg(4x)]=\frac{1}{4}Tg(4x)+C$$

27.- Obtenga $\int\frac{dx}{Sen^2x\cdot Cos^2x}$.

Solución:

Se resuelve la integral.

$$I=\int\frac{dx}{Sen^2x\cdot Cos^2x}=\int\frac{1\cdot dx}{Sen^2x\cdot Cos^2x}=\int\frac{(Sen^2x+Cos^2x)dx}{Sen^2x\cdot Cos^2x}=(*)$$

En *I*, se aplicó la identidad trigonométrica: $Sen^2x+Cos^2x=1$

$$(*)=\int\left(\frac{Sen^2x}{Sen^2x\cdot Cos^2x}+\frac{Cos^2x}{Sen^2x\cdot Cos^2x}\right)dx=\int\left(\frac{1}{Cos^2x}+\frac{1}{Sen^2x}\right)dx=\int\left(Sec^2x+Co\sec^2x\right)dx=$$

$$=\int Sec^2xdx+\int Co\sec^2xdx=\int d(Tgx)-\int d(Cotgx)=Tgx-Cotgx+C$$

28.- Calcule: $\int\frac{d\theta}{1+Sen\theta}$.

Solución:

Se multiplica numerador y denominador por la conjugada del denominador.

$$I=\int\frac{d\theta}{1+Sen\theta}=\int\left(\frac{1-Sen\theta}{1-Sen\theta}\right)\cdot\frac{d\theta}{1+Sen\theta}=\int\frac{(1-Sen\theta)d\theta}{1-Sen^2\theta}=\int\frac{(1-Sen\theta)d\theta}{Cos^2\theta}=\int\frac{d\theta}{Cos^2\theta}-\int\frac{Sen\theta}{Cos^2\theta}d\theta=$$

$$=\int Sec^2\theta d\theta-\int\left(\frac{Sen\theta}{Cos\theta}\cdot\frac{1}{Cos\theta}\right)d\theta=\int d(Tg\theta)-\int Tg\theta\cdot Sec\theta d\theta=Tg\theta-\int d(Sec\theta)+C=Tg\theta-Sec\theta+C$$

29.- Determine: $\int (Tg\,\theta + Cotg\,\theta)^2\, d\theta\cdot$

Solución:

Resolviendo la integral.

$$I = \int (Tg\,\theta + Cotg\,\theta)^2\, d\theta = \int \left(Tg^2\theta + 2Tg\,\theta\cdot Cotg\,\theta + Cotg^2\theta\right)d\theta = \int \left(Tg^2\theta + 2 + Cotg^2\theta\right)d\theta = \int \left[\left(Tg^2\theta + 1\right) + \left(Cotg^2\theta + 1\right)\right]d\theta$$

$$= \int \left(Sec^2\theta + Cosec^2\theta\right)d\theta = \int Sec^2\theta\, d\theta + \int Cosec^2\theta\, d\theta = \int d(Tg\,\theta) - \int d(Cotg\,\theta) = Tg\,\theta - Cotg\,\theta + C$$

30.- Determine: $\int \frac{Cosx}{2+Senx}dx\cdot$

Solución:

Resolviendo la integral.

$$I = \int \frac{Cosx}{2+Senx}dx = \int \frac{Cosx\,dx}{2+Senx} = \int \frac{d(2+Senx)}{2+Senx} = \int d\left[Ln\,(2+Senx)\right] = Ln\,(2+Senx) + C$$

31.- Halle la integral: $\int \frac{5dx}{7+7x^2}\cdot$

Solución:

Resolviendo la integral.

$$I = \int \frac{5\,dx}{7+7x^2} = 5\int \frac{dx}{7\cdot(1+x^2)} = \frac{5}{7}\int \frac{dx}{1+x^2} = \frac{5}{7}\int d(ArcTgx) = \frac{5}{7}\,ArcTg\,x + C$$

32.- Obtenga: $\int \frac{3dx}{\sqrt{5-5x^2}}\cdot$

Solución:

Resolviendo la integral.

$$I = \int \frac{3dx}{\sqrt{5-5x^2}} = 3\int \frac{dx}{\sqrt{5\cdot\left(1-x^2\right)}} = 3\int \frac{dx}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{1-x^2}} = \frac{3}{\sqrt{5}}\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{3}{\sqrt{5}}\int d(ArcSenx) = \frac{3\sqrt{5}}{5}\cdot ArcSenx + C$$

33.- Resolver: $\int \frac{\sqrt{2+x^2} - \sqrt{2-x^2}}{\sqrt{4-x^4}}\,dx\,\cdot$

Solución:

Resolviendo la integral: Separando en dos integrales. El radicando del radical en el denominador se factoriza como diferencia de cuadrados.

$$I = \int \frac{\sqrt{2+x^2} - \sqrt{2-x^2}}{\sqrt{4-x^4}}\,dx = \int \frac{\sqrt{2+x^2}}{\sqrt{2+x^2}\cdot\sqrt{2-x^2}}\,dx - \int \frac{\sqrt{2-x^2}}{\sqrt{2+x^2}\cdot\sqrt{2-x^2}}\,dx = \underbrace{\int \frac{dx}{\sqrt{2-x^2}}}_{(I_1)} - \underbrace{\int \frac{dx}{\sqrt{2+x^2}}}_{(I_2)} = (*)$$

Resolviendo a I_1: La forma de I_1 se corresponde con la fórmula elemental $\int \frac{du}{\sqrt{a^2-u^2}} = ArcSen\,\frac{u}{a} + C;\quad a \neq 0.$

Luego:

$$I_1 = \int \frac{dx}{\sqrt{2-x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{\sqrt{2}^2 - x^2}} = ArcSen\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) + C_1$$

Resolviendo a I_2: La forma de I_2 se corresponde con la fórmula elemental $\int \frac{du}{\sqrt{u^2+a^2}} = Ln\left|u + \sqrt{u^2+a^2}\right| + C$

Luego: $I_2 = \int \frac{dx}{\sqrt{2+x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{\sqrt{2}^2 + x^2}} = Ln\left|x + \sqrt{x^2+2}\right| + C_2$

Volviendo a (*): $I = ArcSen\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) - Ln\left|x + \sqrt{x^2+2}\right| + C$

34.- Obtenga $\int \frac{dx}{7x^2-8}$.

Solución:

Resolviendo la integral: La forma de la integral se corresponde con la fórmula elemental

$$\int \frac{du}{u^2-a^2} = \frac{1}{2a} Ln\left|\frac{u-a}{u+a}\right| + C; \quad a \neq 0.$$

Luego:

$$I = \int \frac{dx}{7x^2-8} = \int \frac{dx}{7\cdot\left(\frac{7x^2}{7}-\frac{8}{7}\right)} = \frac{1}{7}\int \frac{dx}{x^2-\frac{8}{7}} = \frac{1}{7}\int \frac{dx}{x^2-\sqrt{\frac{8}{7}}^2} = \frac{1}{7}\cdot\frac{1}{2\cdot\sqrt{\frac{8}{7}}}\cdot Ln\left|\frac{x-\sqrt{\frac{8}{7}}}{x+\sqrt{\frac{8}{7}}}\right| + C =$$

$$= \frac{\sqrt{7}}{14\sqrt{8}}\cdot Ln\left|\frac{x-\sqrt{\frac{8}{7}}}{x+\sqrt{\frac{8}{7}}}\right| + C = \frac{\sqrt{7}}{14\sqrt{8}}\cdot Ln\left|\frac{\sqrt{7}x-\sqrt{8}}{\sqrt{7}x+\sqrt{8}}\right| + C$$

35.- Compruebe si: $\int \frac{2x^2-3}{(x^2-10)\cdot(x^2+7)}\,dx = \frac{1}{2\sqrt{10}}\cdot Ln\left|\frac{x-\sqrt{10}}{x+\sqrt{10}}\right| + \frac{1}{\sqrt{7}} ArcTg\left(\frac{x}{\sqrt{7}}\right) + C$.

Comprobando:

Resolviendo la integral: Obsérvese que $(x^2-10)+(x^2+7) = 2x^2-3$, que se corresponde con el numerador de la fracción que conforma el integrando. Esto permite transformar la integral de la siguiente manera:

$$I = \int \frac{2x^2-3}{(x^2-10)\cdot(x^2+7)}\,dx = \int \frac{(x^2-10)+(x^2+7)}{(x^2-10)\cdot(x^2+7)}\,dx = \int\left(\frac{1}{x^2-10}+\frac{1}{x^2+7}\right)dx = \underbrace{\int \frac{1}{x^2-10}\,dx}_{(I_1)} + \underbrace{\int \frac{1}{x^2+7}\,dx}_{(I_2)} = (*)$$

Resolviendo a I_1: La forma de I_1 se corresponde con la fórmula elemental $\int \frac{du}{u^2-a^2} = \frac{1}{2a} Ln\left|\frac{u-a}{u+a}\right| + C; \quad a \neq 0.$

Luego: $I_1 = \int \frac{dx}{x^2-10} = \int \frac{dx}{x^2-\sqrt{10}^2} = \frac{1}{2\sqrt{10}}\cdot Ln\left|\frac{x-\sqrt{10}}{x+\sqrt{10}}\right| + C_1$

Resolviendo a I_2: La forma de I_2 se corresponde con la fórmula elemental $\int \frac{du}{a^2+u^2} = \frac{1}{a}\cdot ArcTg\left(\frac{u}{a}\right) + C; \quad a \neq 0.$

Luego: $I_2 = \int \frac{dx}{x^2+7} = \int \frac{dx}{7+x^2} = \int \frac{dx}{\sqrt{7}^2+x^2} = \frac{1}{\sqrt{7}} ArcTg\left(\frac{x}{\sqrt{7}}\right) + C_2$

Volviendo a (*): $I = \frac{1}{2\sqrt{10}}\cdot Ln\left|\frac{x-\sqrt{10}}{x+\sqrt{10}}\right| + \frac{1}{\sqrt{7}} ArcTg\left(\frac{x}{\sqrt{7}}\right) + C$

LO QUE SE QUERÍA COMPROBAR (L. Q. Q. C.)

36.- Compruebe si: $\int \frac{x^2+2}{(x^2+3)\cdot(x^2+1)}\,dx = \frac{\sqrt{3}}{6} ArcTg\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right) + \frac{1}{2} ArcTg\ x + C$.

Comprobando:

Resolviendo la integral: Obsérvese que $(x^2+3)+(x^2+1) = 2x^2+4$, que se corresponde con el numerador de la fracción que conforma el integrando pero multiplicado por 2. Esto permite transformar la integral de la siguiente manera:

$$I = \int \frac{x^2+2}{(x^2+3)\cdot(x^2+1)}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x^2+4}{(x^2+3)\cdot(x^2+1)}\,dx = \int \frac{(x^2+1)+(x^2+3)}{(x^2+3)\cdot(x^2+1)}\,dx = \int\left(\frac{1}{(x^2+3)}+\frac{1}{x^2+1}\right)dx = \underbrace{\int \frac{1}{x^2+3}dx}_{(I_1)} + \underbrace{\int \frac{1}{x^2+1}dx}_{(I_2)} = (*)$$

Resolviendo a I_1: La forma de esta integral se corresponde con la fórmula elemental

$$\int \frac{du}{u^2+a^2} = \frac{1}{a} ArcTg\left(\frac{u}{a}\right) + C; \quad a \neq 0.$$

Luego:

$$I_1 = \int \frac{dx}{x^2+3} = \int \frac{dx}{x^2+\sqrt{3}^2} = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot ArcTg\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right) + C_1 = \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot ArcTg\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right) + C_1$$

Resolviendo a I_2: La forma de esta integral se corresponde con la fórmula elemental $\int \frac{du}{1+u^2} = ArcTg\, u + C$

Luego: $I_2 = \int \frac{dx}{x^2+1} = \int \frac{dx}{1+x^2} = ArcTg\, x + C_2$

Volviendo a (*):

$$I = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot ArcTg\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right) + ArcTg\, x + C = \frac{\sqrt{3}}{6} \cdot ArcTg\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right) + ArcTg\, x + C$$

L. Q. Q. C.

37.- Verifique: $\int \frac{dx}{\sqrt{-2x^2+3x}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot ArcSen\left(\frac{4x-3}{3}\right) + C$.

<u>Verificando</u>:

Resolviendo la integral. Al aparecer en la propuesta de respuesta un arco seno, se puede asumir que la integral se corresponde con las fórmulas elementales siguientes:

$$\int \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = ArcSen u + C \quad \text{y} \quad \int \frac{du}{\sqrt{a^2-u^2}} = ArcSen\ \frac{u}{a} + C; \quad a \neq 0$$

Entonces se modifica el integrando para determinar cuál de las dos utilizar. Se comienza completando cuadrados en el radicando.

$$I = \int \frac{dx}{\sqrt{-2x^2+3x}} = \int \frac{dx}{\sqrt{-(2x^2-3x)}} = \int \frac{dx}{\sqrt{-\left[\left(\sqrt{2}x\right)^2-3x\right]}} = \int \frac{dx}{\sqrt{-\left[\left(\sqrt{2}x\right)^2-3x+\frac{9}{8}-\frac{9}{8}\right]}} = \int \frac{dx}{\sqrt{-\left[\left(\sqrt{2}x\right)^2-3x+\frac{9}{8}\right]+\frac{9}{8}}} =$$

$$= \int \frac{dx}{\sqrt{\frac{9}{8}-\left[\left(\sqrt{2}x\right)^2-3x+\frac{9}{8}\right]}} = \int \frac{dx}{\sqrt{\frac{9}{8}-\left(\sqrt{2}x-\frac{3}{2\sqrt{2}}\right)^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{\frac{9}{8}-\left(\frac{4x-3}{2\sqrt{2}}\right)^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{\frac{9}{8}-\frac{(4x-3)^2}{8}}} = \int \frac{dx}{\sqrt{\frac{9-(4x-3)^2}{8}}} =$$

$$= \int \frac{dx}{\frac{\sqrt{9-(4x-3)^2}}{\sqrt{8}}} = \sqrt{8} \cdot \int \frac{dx}{\sqrt{9-(4x-3)^2}} = \sqrt{8} \cdot \underbrace{\int \frac{dx}{\sqrt{3^2-(4x-3)^2}}}_{(I_1)} = (*)$$

Al llegar acá, la segunda fórmula elemental sugerida tiene una correspondencia más directa. Para continuar, se propone el siguiente cambio de variable en I_1: $u = 4x-3 \;\Rightarrow\; du = 4dx \;\Rightarrow\; dx = \frac{du}{4}$

Volviendo a (*):

$$(*) = I = \sqrt{8} \cdot \int \frac{\frac{du}{4}}{\sqrt{3^2-u^2}} = \frac{\sqrt{8}}{4} \cdot \int \frac{du}{\sqrt{3^2-u^2}} = \frac{\sqrt{8}}{4} \cdot ArcSen\left(\frac{u}{3}\right) + C = \frac{\sqrt{8}}{4} \cdot ArcSen\left(\frac{4x-3}{3}\right) + C =$$

$$= \frac{2\sqrt{2}}{4} \cdot ArcSen\left(\frac{4x-3}{3}\right) + C = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot ArcSen\left(\frac{4x-3}{3}\right) + C$$

38.- Comprobar si: $\int \frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x} dx = \sqrt{x^2-a^2} - a \cdot ArcSec\left(\frac{x}{a}\right) + C$.

<u>Comprobando</u>:

Se multiplica el numerador y el denominador por el numerador:

$$I = \int \frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x} dx = \int \frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x} \cdot \frac{\sqrt{x^2-a^2}}{\sqrt{x^2-a^2}} dx = \int \frac{x^2-a^2}{x\sqrt{x^2-a^2}} dx =$$

$$= \int \frac{x^2}{x\sqrt{x^2-a^2}} dx - \int \frac{a^2}{x\sqrt{x^2-a^2}} dx = \underbrace{\int \frac{x\,dx}{\sqrt{x^2-a^2}}}_{(I_1)} - a^2 \underbrace{\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-a^2}}}_{(I_2)} = (*)$$

Resolviendo por separado cada una de las integrales:

$$I_1=\int\frac{x\,dx}{\sqrt{x^2-a^2}}=\int\frac{2x\,dx}{2\sqrt{x^2-a^2}}=\frac{1}{2}\int\frac{2x\,dx}{\sqrt{x^2-a^2}}=\frac{1}{2}\int\frac{2x\,dx}{\left(x^2-a^2\right)^{\frac{1}{2}}}=$$

$$=\frac{1}{2}\int\left(x^2-a^2\right)^{-\frac{1}{2}}\cdot 2x\,dx=\frac{1}{2}\int d\left[2\left(x^2-a^2\right)^{\frac{1}{2}}\right]=\left(x^2-a^2\right)^{\frac{1}{2}}+C_1=\sqrt{x^2-a^2}+C_1$$

$$I_2=a^2\int\frac{dx}{x\sqrt{x^2-a^2}}=a^2\cdot\frac{1}{a}\,ArcSec\left(\frac{x}{a}\right)+C_2=a\cdot ArcSec\left(\frac{x}{a}\right)+C_2$$

Volviendo a (*):

$$I=I_1+I_2=\sqrt{x^2-a^2}-a\cdot ArcSec\left(\tfrac{x}{a}\right)+C=\sqrt{x^2-a^2}-a\cdot ArcSec\left(\tfrac{x}{a}\right)+C$$

Nota : $C_1+C_2=C$

LO QUE SE QUERÍA COMPROBAR (L. Q. Q. C.)

39.- Verifique que: $\displaystyle\int\frac{dx}{1+Cos\,x+Sen\,x\cdot\sqrt{\frac{1-Cos\,x}{1+Cos\,x}}}=\frac{1}{2}x+C$.

<u>Verificando</u>:

La verificación se realiza modificando el integrando con la utilización de identidades trigonométricas, producto de raíces de índices iguales, factorizaciones algebraicas, simplificaciones y propiedades de la radicación:

$$I=\int\frac{dx}{1+Cos\,x+Sen\,x\cdot\sqrt{\frac{1-Cos\,x}{1+Cos\,x}}}=\int\frac{dx}{1+Cos\,x+\sqrt{1-Cos^2x}\cdot\sqrt{\frac{1-Cos\,x}{1+Cos\,x}}}=\int\frac{dx}{1+Cos\,x+\sqrt{1-Cos^2x\cdot\frac{1-Cos\,x}{1+Cos\,x}}}=$$

$$=\int\frac{dx}{1+Cos\,x+\sqrt{(1+Cos\,x)(1-Cos\,x)\cdot\frac{1-Cos\,x}{1+Cos\,x}}}=\int\frac{dx}{1+Cos\,x+\sqrt{(1-Cos\,x)^2}}=\int\frac{dx}{1+Cos\,x+1-Cos\,x}=\int\frac{dx}{2}=\frac{1}{2}\int dx=\frac{1}{2}x+C$$

LO QUE SE QUERÍA VERIFICAR (L. Q. Q. V.)

40.- Compruebe que $\displaystyle\int\frac{dx}{\sqrt{a-bx^2}}=\frac{\sqrt{b}}{b}\cdot ArcSen\left(\sqrt{\frac{b}{a}}x\right)+C$

<u>Comprobando</u>:

Como la solución presenta una arco-seno, al revisar las fórmulas elementales se concluye que el argumento debe estar presente en el integrando. Como el argumento lo forma $\sqrt{\frac{b}{a}}x$, conviene dividir y multiplicar el radicando por a.

Luego:

$$I=\int\frac{dx}{\sqrt{a-bx^2}}=\int\frac{dx}{\sqrt{a\cdot\left(\frac{a}{a}-\frac{bx^2}{a}\right)}}=\int\frac{dx}{\sqrt{a}\cdot\sqrt{1-\frac{bx^2}{a}}}=\frac{1}{\sqrt{a}}\int\frac{dx}{\sqrt{1-\left(\sqrt{\frac{b}{a}}x\right)^2}}=\frac{1}{\sqrt{a}}\int\frac{\sqrt{\frac{b}{a}}\cdot dx}{\sqrt{\frac{b}{a}}\cdot\sqrt{1-\left(\sqrt{\frac{b}{a}}x\right)^2}}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{a}}\cdot\sqrt{\frac{a}{b}}\int\frac{\sqrt{\frac{b}{a}}\cdot dx}{\sqrt{1-\left(\sqrt{\frac{b}{a}}x\right)^2}}=\frac{1}{\sqrt{b}}\cdot\int\frac{d\left(\sqrt{\frac{b}{a}}x\right)}{\sqrt{1-\left(\sqrt{\frac{b}{a}}x\right)^2}}=\frac{\sqrt{b}}{b}\cdot ArcSen\left(\sqrt{\frac{b}{a}}x\right)+C$$

L. Q. Q. C.

41.- Determine si $\displaystyle\int \frac{dx}{a^2\cdot Cos^2x+b^2\cdot Sen^2x}=\frac{1}{ab}\cdot ArcTg\left(\frac{bTg\,x}{a}\right)+C$.

<u>Determinando</u>:

Como la propuesta de respuesta presenta una arco-tangente, una revisión de las fórmulas elementales permite concluir que el argumento debe estar presente en el integrando. Como el argumento lo forma $\dfrac{bTg\,x}{a}$, conviene dividir numerador y denominador por $a^2\cdot Cos^2x$ para obtener la tangente en el denominador. Así que:

$$I=\int\frac{dx}{a^2\cdot Cos^2x+b^2\cdot Sen^2x}=\int\frac{\dfrac{dx}{a^2\cdot Cos^2x}}{\dfrac{a^2\cdot Cos^2x}{a^2\cdot Cos^2x}+\dfrac{b^2\cdot Sen^2x}{a^2\cdot Cos^2x}}=\frac{1}{a^2}\int\frac{Sec^2x\,dx}{1+\dfrac{b^2Tg^2x}{a^2}}=\frac{1}{a^2}\int\frac{Sec^2x\,dx}{1+\left(\dfrac{bTg\ x}{a}\right)^2}=$$

$$=\frac{1}{a^2}\int\frac{\dfrac{b}{a}\cdot Sec^2x\,dx}{\dfrac{b}{a}\cdot\left[1+\left(\dfrac{bTg\ x}{a}\right)^2\right]}=\frac{1}{a^2\cdot\dfrac{b}{a}}\int\frac{\dfrac{b}{a}\cdot Sec^2x\,dx}{1+\left(\dfrac{bTg\ x}{a}\right)^2}=\frac{1}{ab}\int\frac{d\left(\dfrac{b\cdot Tg\ x}{a}\right)}{1+\left(\dfrac{b\cdot Tg\ x}{a}\right)^2}=\frac{1}{ab}\cdot ArcTg\left(\frac{b\cdot Tg\ x}{a}\right)+C$$

LA IGUALDAD ES CIERTA (L. I. E. C.)

42.- Determine si $\displaystyle\int \frac{dx}{a^2\cdot Cos^2x+b^2\cdot Sen^2x}=-\frac{1}{ab}\cdot ArcTg\left(\frac{aCotg\,x}{b}\right)+C$.

<u>Determinando</u>:

Similar al ejercicio anterior. En este caso, la propuesta de respuesta presenta un arco-cotangente. Una revisión de las fórmulas elementales permite concluir que el argumento debe estar presente en el integrando. Como el argumento lo forma $\dfrac{aCotg\,x}{b}$, conviene dividir numerador y denominador por $b^2\cdot Sen^2x$ para obtener la cotangente en el denominador.

Luego:

$$I=\int\frac{dx}{a^2\cdot Cos^2x+b^2\cdot Sen^2x}=\int\frac{\dfrac{dx}{b^2\cdot Sen^2x}}{\dfrac{a^2\cdot Cos^2x}{b^2\cdot Sen^2x}+\dfrac{b^2\cdot Sen^2x}{b^2\cdot Sen^2x}}=\frac{1}{b^2}\int\frac{Co\sec^2x\,dx}{\dfrac{a^2\cdot Cotg^2x}{b^2}+1}=\frac{1}{b^2}\int\frac{Cosec^2x\,dx}{\left(\dfrac{a\cdot Cotg\ x}{b}\right)^2+1}=$$

$$=\frac{1}{b^2}\int\frac{\dfrac{a}{b}\cdot Cosec^2x\,dx}{\dfrac{a}{b}\cdot\left[1+\left(\dfrac{a\cdot Cotg\ x}{b}\right)^2\right]}=\frac{1}{b^2\cdot\dfrac{a}{b}}\int\frac{\dfrac{a}{b}\cdot Cosec^2x\,dx}{1+\left(\dfrac{a\cdot Cotg\ x}{b}\right)^2}=\frac{1}{ab}\int\frac{d\left(-\dfrac{a\cdot Cotg\ x}{b}\right)}{1+\left(\dfrac{a\cdot Cotg\ x}{b}\right)^2}=-\frac{1}{ab}\cdot ArcTg\left(\frac{a\cdot Cotg\ x}{b}\right)+C$$

L. I. E. C.

43.- Comprobar si: $\displaystyle\int\frac{4^{-x+1}+5^{-x+2}}{3^{-x+1}}dx=-3^{x-1}\cdot100\cdot\left(\frac{4^{1-x}}{29}+\frac{5^{2-x}}{51}\right)+C.$

<u>Comprobando</u>:

Se resuelve la integral:

$$I=\int\frac{4^{-x+1}+5^{-x+2}}{3^{-x+1}}dx=\int\frac{4^{-x}\cdot4+5^{-x}\cdot5^2}{3^{-x}\cdot3}dx=\frac{4}{3}\int\frac{4^{-x}}{3^{-x}}dx+\frac{25}{3}\int\frac{5^{-x}}{3^{-x}}dx=\frac{4}{3}\int\left(\frac{3}{4}\right)^xdx+\frac{25}{3}\int\left(\frac{3}{5}\right)^xdx=$$

$$=\frac{4}{3}\cdot\frac{\left(\dfrac{3}{4}\right)^x}{Ln\left(\dfrac{3}{4}\right)}+\frac{25}{3}\cdot\frac{\left(\dfrac{3}{5}\right)^x}{Ln\left(\dfrac{3}{5}\right)}+C=\frac{4}{3}\cdot\frac{3^x}{4^x\cdot Ln\left(\dfrac{3}{4}\right)}+\frac{25}{3}\cdot\frac{3^x}{5^x\cdot Ln\left(\dfrac{3}{5}\right)}+C=\frac{4^{1-x}\cdot3^{x-1}}{-0{,}29}+\frac{5^{2-x}\cdot3^{x-1}}{-0{,}51}+C=$$

$$=\frac{4^{1-x}\cdot3^{x-1}}{-\dfrac{29}{100}}+\frac{5^{2-x}\cdot3^{x-1}}{-\dfrac{51}{100}}+C=-3^{x-1}\cdot100\cdot\left(\frac{4^{1-x}}{29}+\frac{5^{2-x}}{51}\right)+C$$

L. Q. Q. C.

44.- Verifique la siguiente igualdad:

$$\int \left(x+\sqrt{x}+2\right)^2 dx = \frac{x^3}{3} + x^2 \cdot \left(\frac{5}{2}+\frac{4\sqrt{x}}{5}\right) + 4x \cdot \left(\frac{2\sqrt{x}}{3}+1\right) + C.$$

Verificando:

Para resolver esta integral, se puede utilizar la siguiente potencia de una expresión polinómica:

$$(u+v+w)^2 = u^2+v^2+w^2+2uv+2uw+2vw.$$

Luego:

$$I = \int \left(x+\sqrt{x}+2\right)^2 dx = \int \left(x^2+x+4+2x\sqrt{x}+4x+4\sqrt{x}\right)dx = \int \left(x^2+5x+2x^{\frac{3}{2}}+4x^{\frac{1}{2}}+4\right)dx =$$

$$= \int x^2dx + 5\int xdx + 2\int x^{\frac{3}{2}}dx + 4\int x^{\frac{1}{2}}dx + 4\int dx = \frac{x^3}{3} + \frac{5x^2}{2} + \frac{4\sqrt{x^5}}{5} + \frac{8\sqrt{x^3}}{3} + 4x + C =$$

$$= \frac{x^3}{3} + \frac{5x^2}{2} + \frac{4x^2\sqrt{x}}{5} + \frac{8x\sqrt{x}}{3} + 4x + C = \frac{x^3}{3} + x^2 \cdot \left(\frac{5}{2}+\frac{4\sqrt{x}}{5}\right) + 4x \cdot \left(\frac{2\sqrt{x}}{3}+1\right) + C$$

L. Q. Q. V.

45.- Comprobar si $\int \frac{x^3}{x^2-1}dx = Ln\left|\sqrt{\left(x^2-1\right)\cdot e^{\left(x^2-1\right)}}\right| + C \quad con \quad x>1$

Comprobando:

Resolviendo la integral. Primero se realiza la división de polinomios:

$$\frac{x^3}{x^2-1} = x + \frac{x}{x^2-1}$$

Luego en la integral:

$$I = \int \left(x+\frac{x}{x^2-1}\right)dx = \int xdx + \int \frac{xdx}{x^2-1} = \frac{x^2}{2} + \int \frac{\frac{du}{2}}{u} + C = \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2}Ln\,u + C = \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}Ln\,u + C =$$

$$= \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cdot Ln\,u + \frac{1}{2} + C = \frac{1}{2}\cdot\left(x^2-1+Ln\,u\right) + C = \frac{1}{2}\cdot\left[Ln\,e^{x^2-1} + Ln\,u\right] + C = \frac{1}{2}\cdot Ln\left|e^{x^2-1}.\left(x^2-1\right)\right| + C =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot Ln\left|\left(x^2-1\right)\cdot e^{x^2-1}\right| + C = Ln\left|\sqrt{\left(x^2-1\right)\cdot e^{x^2-1}}\right| + C$$

L. Q. Q. C.

Es decir, al resultado obtenido le sumamos y restamos ½ (en segunda línea), consideramos el negativo y el positivo lo absorbe la constante general de integración.

46.- Comprobar si: $\int \frac{x^3}{x^2+1}dx = Ln\left|\sqrt{\frac{e^{x^2+1}}{x^2+1}}\right| + C.$

Comprobando:

Resolviendo la integral. Se resuelve muy similar a la anterior. Primero se realiza la división de polinomios:

$$\frac{x^3}{x^2+1} = x - \frac{x}{x^2+1}$$

Luego en la integral:

$$I = \int \left(x-\frac{x}{x^2+1}\right)dx = \int xdx - \int \frac{xdx}{x^2+1} = \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}\int \frac{2xdx}{x^2+1} + C = \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}\int d\left[Ln\left(x^2+1\right)\right] + C =$$

$$= \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}Ln\left(x^2+1\right) + C = \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} - \frac{1}{2}Ln\left(x^2+1\right) + C = \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cdot Ln\left(x^2+1\right) - \frac{1}{2} + C =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\left[\left(x^2+1\right) - Ln\left(x^2+1\right)\right] + C = \frac{1}{2}\cdot\left[Ln\,e^{x^2+1} - Ln\left(x^2+1\right)\right] + C = \frac{1}{2}\cdot Ln\left|\frac{e^{x^2+1}}{x^2+1}\right| + C = Ln\left|\sqrt{\frac{e^{x^2+1}}{x^2+1}}\right| + C$$

L. Q. Q. C.

47.- Compruebe si: $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+ax+b}} = Ln\left|x+\frac{a}{2}+\sqrt{x^2+ax+b}\right|+C; \qquad a \wedge b : constantes$

Comprobando:

Resolviendo la integral: Se procede a completar cuadrados en el radicando.

$$I=\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+ax+b}}=\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+ax+\frac{a^2}{4}-\frac{a^2}{4}+b}}=\int \frac{dx}{\sqrt{\left(x^2+ax+\frac{a^2}{4}\right)-\left(\frac{a^2}{4}-b\right)}}=\int \frac{dx}{\sqrt{\left(x+\frac{a}{2}\right)^2-\left(\frac{a^2}{4}-b\right)}}=$$

$$=\int \frac{dx}{\sqrt{\left(x+\frac{a}{2}\right)^2-\left(\sqrt{\frac{a^2}{4}-b}\right)^2}}=Ln\left|x+\frac{a}{2}+\sqrt{\left(x+\frac{a}{2}\right)^2-\left(\frac{a^2}{4}-b\right)}\right|+C=Ln\left|\,x+\frac{a}{2}+\sqrt{x^2+ax+b}\right|+C$$

L. Q. Q. C.

48.- Compruebe: $\int\left[\frac{1}{x-1}-\frac{1}{(1-x)^3}\right]dx = Ln|\,x-1|-\frac{1}{2\cdot(x-1)^2}+C$

Comprobando:

Resolviendo la integral.

$$I=\int\left[\frac{1}{x-1}-\frac{1}{[-(x-1)]^3}\right]dx=\int\left[\frac{1}{x-1}-\frac{1}{-(x-1)^3}\right]dx=\int\left[\frac{1}{x-1}+\frac{1}{(x-1)^3}\right]dx=\int\frac{dx}{x-1}+\int\frac{dx}{(x-1)^3}=$$

$$=Ln|\,x-1|+\int(x-1)^{-3}dx+C=Ln|\,x-1|+\frac{(x-1)^{-2}}{-2}+C=Ln|\,x-1|-\frac{1}{2\cdot(x-1)^2}+C$$

L. Q. Q. C.

49.- Obtener: $\int\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}dx.$

Solución:

Resolviendo la integral. Se multiplica numerador y denominador del radicando por la conjugada del numerador.

$$I=\int\sqrt{\frac{(1+x)(1+x)}{(1-x)(1+x)}}\,dx=\int\sqrt{\frac{(1+x)^2}{1-x^2}}\,dx=\int\frac{1+x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx=\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}+\int\frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}}=\int d\left(ArcSenx\right)+\frac{1}{2}\int\frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}}=$$

$$=ArcSenx-\frac{1}{2}\int\left(1-x^2\right)^{-\frac{1}{2}}\cdot(-2x)dx+C=ArcSenx-\frac{1}{2}\int\left(1-x^2\right)^{-\frac{1}{2}}\cdot d\left(1-x^2\right)+C=ArcSenx-\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{1-x^2}}{\frac{1}{2}}+C=$$

$$=ArcSenx-\sqrt{1-x^2}+C$$

50.- Comprobar si: $\int Sen(3x)Cos(2x)dx=-\frac{1}{10}Cos(5x)-\frac{1}{2}Cos\,x+C.$

Comprobando:

Resolviendo la integral. Al ser diferentes los argumentos de las funciones trigonométricas presentes en el integrando, no puede plantearse la integral del diferencial de una función $\left(\int du=u\right)$. Una posibilidad es recurrir a la siguiente identidad trigonométrica:

$$SenA+SenB=2Sen\left(\frac{A+B}{2}\right)\cdot Cos\left(\frac{A-B}{2}\right)$$

Pudiéndose observar una correspondencia del miembro derecho de esta igualdad con el integrando. Considerado esto, se procede de la siguiente manera:

$$\begin{cases}\frac{A+B}{2}=3x\\ \frac{A-B}{2}=2x\end{cases}$$

Al resolver el sistema de ecuaciones resultante, se tiene que:

$$\begin{cases}A=5x\\ B=x\end{cases}$$

Ahora se procede a arreglar la integral y aplicar la consideración anterior:

$$I=\frac{1}{2}\int 2Sen(3x)Cos(2x)dx=\frac{1}{2}\int\left[Sen(5x)+Sen\,x\right]dx=\frac{1}{2}\int Sen(5x)dx+\frac{1}{2}\int Sen\,x\,dx=-\frac{1}{10}Cos(5x)-\frac{1}{2}Cos\,x+C$$

L. Q. Q. C.

51.- Compruebe si: $\int \frac{1-Cosx}{1+Cosx}dx = -2Cotg\,x + \frac{2}{Sen\,x} - x + C.$

Comprobando:

Resolviendo la integral. Se multiplica numerador y denominador por la conjugada del numerador.

$$I = \int \frac{1-Cosx}{1+Cosx}dx = \int \frac{(1-Cosx)(1-Cosx)}{(1+Cosx)(1-Cosx)}dx = \int \frac{(1-Cosx)^2}{1-Cos^2x}dx = \int \frac{1-2Cosx+Cos^2x}{Sen^2x}dx =$$

$$= \int \frac{dx}{Sen^2x} - 2\int \frac{Cosx\,dx}{Sen^2x} + \int \frac{Cos^2x\,dx}{Sen^2x} = \int Co\sec^2 x\,dx - 2\int Cos\,x\,Sen^{-2}x\,dx + \int Cotg^2x\,dx =$$

$$= -Cotg\,x - 2\int Sen^{-2}x\,Cos\,x\,dx + \int \left[\left(1+Cotg^2x\right)-1\right]dx + C = -Cotg\,x - 2\int Sen^{-2}x\,d(Sen\,x) + \int \left(Co\sec^2 x - 1\right)dx + C =$$

$$= -Cotg\,x + \frac{2}{Sen\,x} + \int Co\sec^2 x\,dx - \int dx + C = -Cotg\,x + \frac{2}{Sen\,x} - Cotg\,x - x + C = -2Cotg\,x + \frac{2}{Sen\,x} - x + C$$

L. Q. Q. C.

52.- Compruebe si: $\int \frac{1+Senx}{1-Senx}dx = 2Tg\,x + \frac{2}{Cos\,x} - x + C.$

Comprobando:

Resolviendo la integral. Se multiplica numerador y denominador por la conjugada del numerador.

$$I = \int \frac{1+Senx}{1-Senx}dx = \int \frac{(1+Senx)(1+Senx)}{(1-Senx)(1+Senx)}dx = \int \frac{(1+Senx)^2}{1-Sen^2x}dx = \int \frac{1+2Senx+Sen^2x}{Cos^2x}dx =$$

$$= \int \frac{dx}{Cos^2x} - 2\int \frac{Senx\,dx}{Cos^2x} + \int \frac{Sen^2x\,dx}{Cos^2x} = \int Sec^2x\,dx - 2\int Cos^{-2}x\,Senx\,dx + \int Tg^2x\,dx =$$

$$= Tg\,x - 2\int Cos^{-2}x\,d(Cos\,x) + \int \left[\left(1+Tg^2x\right)-1\right]dx + C = Tg\,x + \frac{2}{Cos\,x} + \int \left(Sec^2x - 1\right)dx + C =$$

$$= Tg\,x + \frac{2}{Cos\,x} + \int Sec^2x\,dx - \int dx + C = Tg\,x + \frac{2}{Cos\,x} + Tg\,x - x + C = 2Tg\,x + \frac{2}{Cos\,x} - x + C$$

L. Q. Q. C.

53.- Resolver: $\int \frac{5}{x^2-4x+8}dx.$

Solución:

Resolviendo la integral. Se completa cuadrados en el denominador.

$$I = \int \frac{5}{x^2-4x+8}dx = 5\int \frac{dx}{x^2-4x+4+4} = 5\int \frac{dx}{(x-2)^2+4} = 5\int \frac{dx}{2^2+(x-2)^2} = 5\int \frac{d(x-2)}{2^2+(x-2)^2} = (*)$$

Se aplica la fórmula elemental: $\int \frac{du}{a^2+u^2} = \frac{1}{a}\cdot ArcTg\left(\frac{u}{a}\right) + C;\quad a \neq 0.$

Volviendo a (*):

$$(*) = I = 5\int \frac{d(x-2)}{2^2+(x-2)^2} = 5\cdot\frac{1}{2}\cdot ArcTg\left(\frac{x-2}{2}\right) + C = \frac{5}{2}\cdot ArcTg\left(\frac{x-2}{2}\right) + C$$

54.- Obtenga: $\int \frac{2x+5}{\sqrt{9-x^2}}dx.$

Solución:

Resolviendo la integral.

$$I = \int \frac{2x+5}{\sqrt{9-x^2}}dx = \int \frac{2x\,dx}{\sqrt{9-x^2}} + 5\int \frac{dx}{\sqrt{9-x^2}} = -\int \frac{(-2x)dx}{\sqrt{9-x^2}} + 5\int \frac{dx}{\sqrt{3^2-x^2}} =$$

$$= -\int \left(9-x^2\right)^{-\frac{1}{2}}\cdot d\left(9-x^2\right) + 5\int \frac{dx}{\sqrt{3^2-x^2}} = -2\sqrt{9-x^2} + 5\underbrace{\int \frac{dx}{\sqrt{3^2-x^2}}}_{(I_1)} + C = (*)$$

En I_1 Se aplica la fórmula elemental: $\int \frac{du}{\sqrt{a^2-u^2}} = ArcSen\frac{u}{a} + C;\quad a \neq 0.$

Volviendo a (*):

$$(*) = I = -2\sqrt{9-x^2} + 5\int \frac{dx}{\sqrt{3^2-x^2}} + C = -2\sqrt{9-x^2} + 5\cdot ArcSen\left(\frac{x}{3}\right) + C$$

55.- Resolver: $\int \frac{2^x}{\sqrt{1-4^x}}dx.$

Solución:

Se resuelve la integral.

$$I=\int \frac{2^x}{\sqrt{1-\left(2^x\right)^2}}dx=(*)$$

Al arreglar el integrando de esta manera, se puede pensar que es conveniente aplicar la fórmula elemental:

$$\int \frac{du}{\sqrt{1-u^2}}=ArcSenu+C$$

Pero para que pueda hacerse, es necesario que aparezca en el numerador el diferencial de 2^x, el cual es $Ln2\cdot 2^x dx$. Es decir, que es necesario multiplicar numerador y denominador por $Ln2$. Así que, volviendo a (*):

$$(*)=I=\int \frac{2^x}{\sqrt{1-\left(2^x\right)^2}}dx=\frac{1}{Ln2}\int \frac{Ln2\cdot 2^x dx}{\sqrt{1-\left(2^x\right)^2}}=\frac{1}{Ln2}\int \frac{d(2^x)}{\sqrt{1-\left(2^x\right)^2}}=\frac{1}{Ln2}ArcSen(2^x)+C$$

56.- Resolver: $\int \frac{x}{\sqrt{9-2x^4}}dx.$

Solución:

Resolviendo la integral.

Es posible arreglar el integrando para aplicar la fórmula elemental:

$$\int \frac{du}{\sqrt{1-u^2}}=ArcSenu+C$$

Se procede de la siguiente manera:

$$I=\int \frac{x}{\sqrt{9-2x^4}}dx=\int \frac{x}{\sqrt{9\left(1-\frac{2x^4}{9}\right)}}dx=\frac{1}{3}\int \frac{xdx}{\sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{2}x^2}{3}\right)^2}}=(*)$$

La fórmula elemental citada se puede aplicar si en el numerador se tuviera el diferencial del argumento; es decir: $d\left(\frac{\sqrt{2}x^2}{3}\right)=\frac{2\sqrt{2}x}{3}dx$

Esto obliga a multiplicar tanto al numerador como al denominador por: $\frac{2\sqrt{2}}{3}$.

Volviendo a (*):

$$(*)=I=\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{2\sqrt{2}}\int \frac{\frac{2\sqrt{2}}{3}xdx}{\sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{2}x^2}{3}\right)^2}}=\frac{1}{2\sqrt{2}}\int \frac{d\left(\frac{\sqrt{2}x^2}{3}\right)}{\sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{2}x^2}{3}\right)^2}}=\frac{1}{2\sqrt{2}}ArcSen\left(\frac{\sqrt{2}x^2}{3}\right)+C$$

Ejercicios Propuestos.-

I.- Comprobar que:

1) $\int (x^4+5x-6)dx=\frac{x^5}{5}+\frac{5}{2}x^2-6x+C$

2) $\int (x^3-2x^2+4x-2)dx=\frac{x^4}{4}-\frac{2}{3}x^3+2x^2-2x+C$

3) $\int (x^{\frac{2}{3}}-5x^{\frac{2}{5}}+\frac{5}{3})dx=\frac{3}{5}x^{\frac{5}{3}}-\frac{25}{7}x^{\frac{7}{5}}+\frac{5}{3}x+C$

4) $\int (x^4+2)dx=\frac{x^5}{5}+2x+C$

5) $\int \left(x^{-3}-2x^{-4}-6\right)dx=-\frac{1}{2x^2}+\frac{2}{3x^3}-6x+C$

6) $\int \left(\frac{1}{x^4}+\frac{1}{\sqrt[4]{x}}\right)dx=-\frac{1}{3x^3}+\frac{4}{3}\sqrt[4]{x^3}+C$

7) $\int \left(\dfrac{4x^2 - 2\sqrt{x}}{x} \right) dx = 2x^2 - 4\sqrt{x} + C$

8) $\int \dfrac{t^2 - 5t - 2 \cdot \sqrt[5]{t}}{t^2} dt = t - 5\,Ln\,|t| + \dfrac{5}{4\sqrt[5]{t^4}} + C$

9) $\int Sen\,3x dx = -\dfrac{1}{3} Cos\,3x + C$

10) $\int (3x^2 + 7\sqrt{x} + 12) = x^3 + \frac{14}{3} x^{\frac{3}{2}} + 12x + C$

11) $\int \dfrac{(2+3x)^2}{x} dx = \dfrac{9}{2} x^2 + 12x + 4Ln|x| + C$

12) $\int Tg^2 x dx = Tgx - x + C$

13) $\int \dfrac{(x + \sqrt{1-x^2})^2}{\sqrt{1-x^2}} dx = x^2 + ArcSenx + C$

14) $\int \dfrac{3x^3 \cdot (1+x)^2 - 6x^4 + 2}{5 + 5x^2} dx = \dfrac{3}{20} x^4 + \dfrac{2}{5} ArcTgx + C$

15) $\int \dfrac{d\theta}{Cos\theta + 1} = Co\sec\theta - Cotg\theta + C$

16) $\int z^2 (1 + \sqrt{z})\, dz = \frac{1}{3} z^3 + \frac{2}{7} \sqrt{z^7} + C$

17) $\int \dfrac{(z-2)^2 + z^4}{\sqrt[3]{z^2}} dz = \frac{3}{13} \cdot \sqrt[3]{z^{13}} - \frac{3}{7} \cdot \sqrt[3]{z^7} - 3\sqrt[3]{z^4} + 12\sqrt[3]{z} + C$

18) $\int \sqrt{16x^2 + 24x + 9}\, dx = 2x^2 + 3x + C$

19) $\int \sqrt{25x^4 - 10x^2 + 1}\, dx = \frac{5}{3} x^3 - x + C$

20) $\int \sqrt[3]{8x^9 + 12x^6 + 6x^3 + 1}\, dx = \frac{1}{2} x^4 + x + C$

21) $\int \sqrt[3]{343x^3 - 294x^2 + 84x - 8}\, dx = \frac{7}{2} x^2 - 2x + C$

22) $\int \sqrt[3]{\frac{1}{8} x^3 - \frac{1}{4} x^2 + \frac{1}{6} x - \frac{1}{27}}\, dx = x^2 - \frac{1}{3} x + C$

23) $\int (5 - y) \cdot (-y - 5)\, dy = \dfrac{y^3}{3} - 25y + C$

24) $\int (-3 + 2x^2) \cdot (2x^2 + 3)\, dx = \frac{4}{5} x^5 - 9x + C$

25) $\int [(1 + Cosx) \cdot (Cosx - 1) + (1 + Senx) \cdot (Senx - 1)] dx = -x + C$

26) $\int (\sqrt{x} + 1)(x - \sqrt{x+1}) dx = \dfrac{2}{5} x^2 \cdot \sqrt{x} + x + C$

27) $\int \dfrac{(x^2 + 1)(x^2 - 2)}{\sqrt[3]{x^2}} dx = \left(\dfrac{3}{13} x^4 - \dfrac{3}{7} x^2 - 6 \right) \cdot \sqrt[3]{x} + C$

28) $\int \dfrac{x^3 + x + 1}{x^2 + 1}\, dx = \dfrac{x^2}{2} + ArcTg\,x + C$

29) $\int \left(Sen\frac{x}{2} + Cos\frac{x}{2}\right)^2 dx = x - Cos\,x + C$

30) $\int \dfrac{1 + \sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^2}} dx = x + ArcSen\,x + C$

31) $\int e^{Ln\left|\frac{1 - Cos}{2}\right|} dx = \dfrac{1}{2} x - \dfrac{1}{2} Sen\,x + C$

32) $\int \dfrac{dx}{x\sqrt{3x^2 - 1}} = ArcSec\left[\sqrt{3}\,x\right] + C$

33) $\int \dfrac{dx}{x\sqrt{x^2 - 12}} = \dfrac{\sqrt{3}}{6} ArcSen\left(\dfrac{\sqrt{3x}}{6} \right) + C$

34) $\int \left(1 + \sqrt{x} + x\right)^2 dx = x + \dfrac{4}{3} x\sqrt{x} + \dfrac{3}{2} x^2 + \dfrac{4}{5} x^2\sqrt{x} + \dfrac{1}{3} x^3 + C$

35) $\int \frac{dx}{\sqrt{16x^4+256x^2}} = \frac{1}{16} Ln\left|\frac{x}{4+\sqrt{x^2+16}}\right| + C$

36) $\int \frac{(z-2)^2+z^4}{\sqrt[3]{z^2}} dz = \frac{3}{13}\cdot z^4\sqrt[3]{z} - \frac{3}{7}\cdot z^2\cdot\sqrt[3]{z} - 3z\cdot\sqrt[3]{z} + 12\sqrt[3]{z} + C$

37) $\int \frac{du}{u^2+u+1} = \frac{2\sqrt{3}}{3} ArcTg\ \frac{2u+1}{\sqrt{3}} + C$

38) $\int (4 - \sqrt[3]{x} + 2^x + \frac{5}{x})\, dx = 4x - \frac{3}{4}x\sqrt[3]{x} + \frac{2^x}{Ln\ 2} + 5Ln|x| + C.$

39) $\int \frac{2^{x+1} - 5^{x-1}}{10^x} dx = \frac{1}{5Ln\,2}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^x - \frac{2}{Ln\,5}\cdot\left(\frac{1}{5}\right)^x + C.$

40) $\int \frac{dx}{\sqrt{x-a}+\sqrt{x-b}} = \frac{2}{3(b-a)}\cdot\left[(x-a)\cdot\sqrt{x-a} - (x-b)\cdot\sqrt{x-b}\right] + C$

41) $\int \frac{(a^x-b^x)^2}{a^x b^x} dx = \frac{1}{Ln\,a - Ln\,b}\cdot\left(\frac{a^{2x}-b^{2x}}{a^x b^x}\right) - 2x + C$

42) $\int \frac{dx}{(a+b)-(a-b)x^2} = -\frac{1}{2\sqrt{a^2-b^2}}\cdot Ln\left|\frac{\sqrt{a-b}\,x - \sqrt{a+b}}{\sqrt{a-b}x + \sqrt{a+b}}\right| + C \qquad (0 < b < a)$

43) $\int \frac{dx}{(a+b)+(a-b)x^2} = \frac{1}{\sqrt{a^2-b^2}}\cdot ArcTg\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}\,x + C \qquad (0 < b < a)$

44) $\int \frac{(x^2-x)dx}{x^2+x+1} = x - Ln\left|x^2+x+1\right| + C$

45) $\int\left(\frac{ax+b}{a^2x^2+b^2}\right)dx = \frac{1}{2a}Ln\left(a^2x^2+b^2\right) + \frac{1}{a}ArcTg\left(\frac{ax}{b}\right) + C$

46) $\int \frac{z^2+2}{(z^2+3)\cdot(z^2+1)} dz = \frac{\sqrt{3}}{6}\cdot ArcTg\left(\frac{z}{\sqrt{3}}\right) + \frac{1}{2}\cdot ArcTg\ z + C.$

47) $\int \frac{5\,dx}{x^2 - 4x + 8} = \frac{5}{2} ArcTg\left(\frac{x-2}{2}\right) + C$

48) $\int \frac{(2x+5)dx}{\sqrt{9-x^2}} = -2\sqrt{9-x^2} + 5\,ArcSen\left(\frac{x}{3}\right) + C$

49) $\int \frac{xdx}{\sqrt{9-2x^4}} = \frac{1}{2\sqrt{2}} ArcSen\left(\frac{\sqrt{2}}{3}x^2\right) + C$

II.- Obtener las siguientes integrales:

1) $\int \frac{dx}{\sqrt{x}} =$

2) $\int (2+x)dx =$

3) $\int (x^2+2x+1)dx =$

4) $\int (x^4-3x^2+5) =$

5) $\int \frac{dx}{x^{\frac{3}{2}}} =$

6) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^{-5}}} =$

7) $\int \frac{4x^2-2\sqrt{x}}{x}dx =$

8) $\int Tg(2x)dx =$

9) $\int Sec^2(3x)dx =$

10) $\int 3a\cdot y^2dy =$

11) $\int (2x^5-x^3+x-6)dx =$

12) $\int Tgxdx =$

13) $\int \sqrt{x}(3x-2)dx =$

14) $\int\left(\frac{x^2}{2}-\frac{2}{x^2}\right)dx =$

15) $\int\left(\frac{2x}{x^2+1}+\frac{6x^5}{x^6+1}\right)dx =$

16) $\int (e^x+1)dx =$

17) $\int \frac{x^2+1}{x^2}dx =$

18) $\int \left(\sqrt[4]{x^3}+1\right)dx =$

19) $\int \sqrt[3]{x}(x-4)dx =$

20) $\int (1+3x)x^2dx =$

21) $\int (\frac{1}{5}x^2-2)^7dx =$

22) $\int \frac{x^2dx}{x^2+3} =$

23) $\int \frac{dx}{\sqrt{7+8x^2}} =$

24) $\int\left(e^{\frac{\pi}{2}}+2^{-\frac{\pi}{2}}\right)^2dx =$

25) $\int (2^x+x^2)dx =$

26) $\int \frac{4^{-x+1}+5^{-x+2}}{3^{-x-1}}dx =$

27) $\int Cosec\,\theta\cdot Cotg\,\theta\,d\theta =$

28 $\int \frac{2w^3-\sqrt{w^5}+w}{\sqrt{w^7}}dw =$

29) $\int \left(x^e+e^x\right)dx =$

30) $\int \left(2-\sqrt[3]{y}\right)^3dy =$

31) $\int e^{Ln(z^2+11)}dz =$

32) $\int Ln\left(e^{2q}-3\right)dq =$

33) $\int (2r+Ln5)dr =$

34) $\int (Cosv+Cos4)dv =$

35) $\int \left(\frac{2}{3}e^p+\sqrt[3]{5}\right)dp =$

36) $\int\left(e^3t^3+\frac{1}{\sqrt{t}}\right)dt =$

37) $\int \left(Sen2+\pi^e+e^\pi\right)dy =$

38) $\int \sqrt[3]{8q}\,dq =$

39) $\int x^2e^{Ln(4x+3)}dx =$

40) $\int \sqrt[3]{u}\cdot(u+1)\cdot(u+3)du =$

41) $\int \frac{Ln\sqrt[3]{s}}{Ln\,s}ds =$

42) $\int\left(\frac{Ln53}{v}-Ln6v^e\right)dv =$

43) $\int \frac{x^3-3x-2}{x^2+2x+1}dx =$

44) $\int \frac{\left(a^n-b^n\right)^2}{a^nb^n}dn =$

45) $\int \left(x^e+e^x\right)^3dx =$

Escritos del Postgrado

CONTEXTO ACADÉMICO:
ENSEÑANZA DE LA MATEMÁTICA
"Una visión holística desde el paradigma de la complejidad".

ENSAYO
"DIDÁCTICA Y EVALUACIÓN DIFERENCIADA"

Por: **LUIS ALVES – C. I. Nº:** 18.468.153 **> Abril 2016**
Cel.: 0424-4296262 E-mail: luismith9@hotmail.com
MAESTRÍA EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA – FACE - UC

Basado en la ponencia: *"Didáctica Diferenciada y Evaluación Diferenciada: Educar por y para la vida"*. (FACE-UC, 13-02-2016).
PONENTE: *Magister María Laura Ascanio Rojas.*

RESUMEN

Entre los procesos que componen el acto educativo, tanto en el aspecto legal como didáctico, los de mayor dificultad son seguramente la planificación y la evaluación. Si bien, muchos de los docentes dentro del campo de las ciencias hacemos alarde de cuántos ejercicios resolvemos en cada clase y del grado de dificultad con los que luego se evalúa a los estudiantes, realmente muy pocas veces tomamos en cuenta las necesidades individuales, las condiciones en que enseñamos y mucho menos situaciones que pueden influir en estos procesos antes mencionados. Por esta razón en el presente escrito se muestra una perspectiva de la importancia de la didáctica y la evaluación diferenciada, aspecto clave en la formación de educadores en este mundo, donde sus individuos cada vez son más diversos (social, física, psicológica y culturalmente) pero al mismo tiempo la globalización demanda una integración. El principal obstáculo de dicha integración en el proceso educativo, desde la opinión de quien escribe, es la poca capacidad de los docentes de establecer diferencias entre "igualdad" y "equidad".

DESARROLLO

Se acerca el fin de un lapso y, como docente que imparte física del 4to año del Ciclo Diversificado en un colegio reconocido de la ciudad de Valencia, contaba con el material y las instalaciones para ser creativo y productivo en prácticas de laboratorio, por lo que decidí cerrar el contenido de Dinámica con una actividad distinta. Utilizaría pesas y barras del departamento de Educación Física (tomando en cuenta que contaba con el apoyo del profesor de educación física y aprobación de la directora), seguro de contar con una barra y pesas para cada estudiante, así cada uno de ellos comenzó a comprobar cómo se sentían las fuerzas que actuaban en el movimiento de un levantamiento.

Todo marchó bien en la primera sección, el apoyo del coordinador de deportes fue de gran ayuda. Sin embargo, en la siguiente sección no tomamos en cuenta a una de las estudiantes más brillantes de la clase, quien por causas mayores, había nacido sin ambos brazos, ese día fue exitoso y un fracaso al mismo tiempo, pues aunque todos tuvieron experiencias distintas a una clase normal, esa estudiante no participó, aun cuando el material para ella estaba dispuesto. ¿Fuimos verdaderamente planificadores en ese momento? He aquí la diferencia entre igualdad y equidad.

Cuando se busca la igualdad se lleva a cabo un proceso que busca que cada estudiante tenga las mismas oportunidades bajo los mismos derechos, aunque suene sencillo de aplicar, no es fácil, cada caso es distinto y el docente por múltiples razones puede promover la desigualdad. Por otro lado, la equidad abarca ese conjunto de oportunidades que se brindan al estudiante sean en función de sus necesidades, existiendo un equilibrio que evite favorecer a uno mientras se perjudica a otro. En el caso anterior, se promovió la igualdad y no la equidad. Al darle a cada estudiante los materiales para la experiencia los tratamos por igual, otorgándole su derecho a la participación, sin embargo, no fuimos equitativos porque un estudiante no logró realizar la actividad por una condición que ella no puede manejar, aunque tenía las herramientas sus necesidades en este caso eran distintas.

De estas necesidades es de donde nace la importancia de una didáctica diferenciada. Ciertamente el docente debe prepararse para aprender a manejar estas diferencias, siendo equitativo además de promover la igualdad. Parte de esta preparación consiste en la adaptación. Si el docente comprende y estudia lo diverso que hay a su alrededor y lo acepta ya está un paso más cerca de convertirse en educador. No es un secreto que la conexión global que han generado las nuevas tecnologías ha hecho que, de alguna forma, las diferencias culturales, sociales, políticas y/o religiosas no sean un impedimento para la comunicación y el aprendizaje. Así la práctica docente que hoy conocemos sobrevivirá a los cambios solo si se adapta a ellos (Ascanio R., M. L., 13-02-2016)

Así mismo, la didáctica debe estar dirigida a un proceso de inclusión, donde no solo se atiendan las diferencias. La UNESCO define inclusión como

> “El proceso de identificar y responder a la diversidad de las necesidades de todos los estudiantes a través de la mayor participación en el aprendizaje, las culturas y las comunidades, y reduciendo la exclusión en la educación. Involucra cambios y modificaciones en contenidos, aproximaciones, estructuras y estrategias, con una visión común que incluye a todos los niño/as del rango de edad apropiado y la convicción de que es la responsabilidad del sistema regular, educar a todos los niño/as”. (p.6)

Así mismo, en la práctica hay que evitar el error de integrar creyendo que se incluye al estudiante, no se trata de rellenar un salón con cada individuo, se trata de hacer que cada uno sea parte del aprendizaje. En muchos casos solo se intenta cumplir con leyes y normas, integrando a uno o más estudiantes con alguna diferencia, pero es un proceso que trasciende el compromiso. Una didáctica diferenciada no puede dejar al margen a los estudiantes por sus necesidades, los hace parte del proceso a través de la adaptación de los distintos aspectos que componen al aprendizaje.

Ante todo lo antes expuesto el docente de matemática tiene la tarea de hacer un trabajo didáctico completo con tres dimensiones. La primera es la que lo hace responsable del acto didáctico que considera el método, los contenidos que serán la base del conocimiento y el trabajo del estudiante. La segunda es la asociada con el contenido, por ejemplo debe estudiar una didáctica especial para la matemática y por último atender a los estudiantes poseedores de una característica (distinta que debe tomarse como algo común) que condiciona la planificación y el proceso instructivo, profundizando en una didáctica diferenciada.

REFERENCIAS

- Ascanio R., M. L. (2016). *Educar Para y Por la Vida*. Conferencia, 13-02-2016. Enseñanza de la Matemática II. Universidad de Carabobo.
- UNESCO, (2003). *Superar la exclusión mediante planteamientos integradores en la educación.* Francia.

OTRO MATERIAL BIBLIOGRÁFICO REVISADO:

- Ascanio H., R. (2016). Escritos (Parte II): *La Conciencia Epistemológica del Docente de Matemática sobre su propio conocimiento profesional*. Postgrado de la Facultad de Ciencias de la Educación. Universidad de Carabobo.

DATOS DEL AUTOR:

Licenciado en Educación Mención Matemática, egresado de la Universidad de Carabobo en el año 2009. Distinguido con la mención Cum Laude al recibir el título de Licenciado. 2016: Estudios de Postgrado en el Programa de Maestría en Educación Matemática de la Universidad de Carabobo.

FÍSICOS NOTABLES

Ernest Orlando Lawrence

Nació el 8 de agosto de 1901 en Canton, Dakota del Sur, y murió el 27 de agosto de 1958 en Palo Alto, California; ambas localidades en EE. UU.

Ganador en 1939 del Premio Nobel en Física

Por su trabajo en el ciclotrón y sus aplicaciones.

Fuente: Biografiasyvidas - Wikipedia.

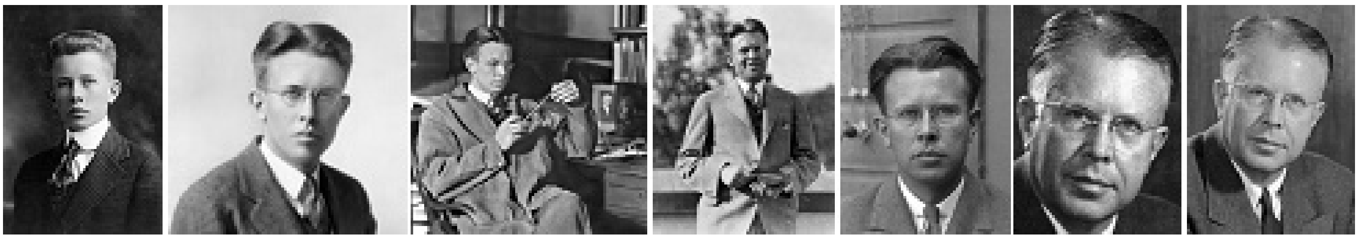
ERNEST ORLANDO LAWRENCE (1901-1958)

Físico, el primero en concebir un acelerador de partículas. En 1925 se doctoró en física por la Universidad de Yale, donde fue profesor asistente de 1927 a 1928, fecha en que se trasladó a la Universidad de Berkeley, donde ocupó una plaza de residente antes de ser nombrado profesor en 1930.

Lawrence concibió la idea del ciclotrón el año 1929. Uno de sus alumnos, M. Stanley Livingstone, se apropió de su idea y construyó un artefacto capaz de acelerar protones hasta suministrarles una energía de 13.000 electrón-voltios (eV). Animado por el éxito de su alumno, Lawrence diseñó otro ciclotrón, capaz de comunicar a las partículas subatómicas una energía de hasta 1.200.000 eV, energía suficiente para provocar la desintegración del núcleo atómico.

Para continuar con el proyecto, promovió la fundación del Radiation Laboratory de Berkeley, del que fue nombrado director (1936) y que actualmente lleva su nombre. En uno de sus ciclotrones, consiguió aislar por primera vez el tecnecio, el primer elemento no presente en la naturaleza obtenido de forma artificial. Con el ciclotrón también obtuvo fósforo radiactivo y otros isótopos para uso médico; así mismo advirtió la utilidad de los haces de neutrones en el tratamiento de enfermedades cancerígenas.

Durante la Segunda Guerra Mundial trabajó en el Proyecto Manhattan como jefe del departamento encargado del proceso electromagnético de separación del isótopo 235 del uranio para la bomba atómica. En 1957 fue galardonado con el Premio Fermi. Aparte de su labor estrictamente teórica, Lawrence patentó un modelo de tubo catódico para televisores en color. En reconocimiento a su labor, se denomina laurencio el elemento 103 de la tabla periódica.



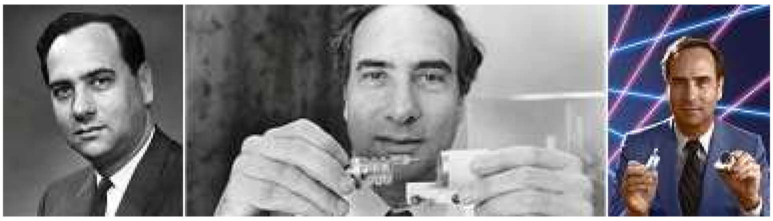
ERNEST ORLANDO LAWRENCE

Imágenes obtenidas de:

Google

El rayo que surgió de la guerra fría

Enviado por José Agustín González "Pepe", vía Facebook



THEODORE MAIMAN, EL GANADOR DE LA CARRERA DEL LASER

Theodore Harold Maiman fue un físico norteamericano a quien se le acredita haber construido el primer láser en 1960. Al principio nadie dio importancia a su logro, pero Maiman no sé rindió y al final se publicó en la revista Nature. Hoy se le reconoce como el ganador de la carrera científica por el láser, aunque el Nobel por este logro no se le concedió a él, sino a sus precursores.

Maiman nació el 11 de julio de 1927 en Los Ángeles, California, EE. UU., y murió el 5 de mayo de 2007 a los 79 años de edad, en Vancouver, Columbia Británica, Canadá. Sus padres fueron Abraham Maiman y Rose Abramson. Asistió a la Universidad de Colorado y obtuvo un grado (B.S.) en Ingeniería Física en 1949, entonces siguió estudios hasta graduarse en 1955 en la Universidad de Stanford. En su carrera recibió el Premio Wolf en Física y el premio Japón.

La historia…

Aunque todavía suene a arma de ciencia ficción, el láser es un hijo de la física cuántica, tan sofisticado como de uso cotidiano: en los lectores de la caja del supermercado, en los reproductores de CD o DVD y también en las operaciones para corregir la miopía. Su fundamento teórico fue apuntado por Einstein, pero el camino de la teoría a la práctica no fue una línea recta: tuvieron que pasar décadas hasta que un cúmulo de aciertos y despropósitos, de colaboraciones y rivalidades, de ciencia pura e intereses militares, hicieron realidad el láser.

El máser (o láser de microondas) primer dispositivo de este tipo, fue patentado el 24 de marzo de 1959 por Charles Townes y Arthur Schawlow, a pesar de que su empresa no le veía una aplicación clara a aquel invento. La idea para amplificar ondas de la misma frecuencia (longitud de onda) la plasmó Albert Einstein en dos artículos del mismo Einstein escritos en 1916. Sin embargo, su realización práctica, con todos los nuevos elementos teóricos y experimentales que ello conllevó, no llegó hasta la década de 1950. Los responsables de este logro fueron, de manera independiente, los físicos soviéticos Aleksandr Prokhorov y Nikolai Basov, y el estadounidense Charles Townes. Y, al margen de quién fue primero y de la lucha entre las dos superpotencias de la Guerra Fría, esta vez los tres compartieron el reconocimiento, al recibir el Premio Nobel de Física de 1964).

CHARLES TOWNES CON EL PRIMER PROTOTIPO DE MÁSER.
CRÉDITO FOTO: DAN RUBIN.

En mayo de 1952, durante una conferencia sobre radio-espectroscopía en la Academia de Ciencias de la URSS, Basov y Prokhorov describieron el principio del máser, aunque no publicaron nada hasta dos años después (Basov y Prokhorov 1954).

Y no sólo describieron su principio, sino que también Basov construyó uno como parte de su tesis doctoral, unos pocos meses después de que Townes hiciese lo propio.

Merece la pena resumir cómo Townes llegó por su parte a la misma idea del máser, ya que ilustra acerca de lo muy diversos que pueden ser los elementos que forman parte de los procesos de descubrimiento científico. Tras permanecer en los laboratorios Bell entre 1939 y 1947, en donde se ocupó, entre otros temas, de la investigación relacionada con el radar, Townes pasó al Radiation Laboratory de la Universidad de Columbia, creado durante la Segunda Guerra Mundial para desarrollar radares, esenciales para el desarrollo de la guerra.

Al igual que otras instituciones, este laboratorio continuó recibiendo dinero de los militares después de la contienda, dedicando el 80% de su presupuesto al desarrollo de tubos que generasen microondas. En la primavera de 1950, Townes organizó en Columbia para la Oficina de Investigación de la Marina un comité asesor para considerar nuevas formas de generar microondas de menos de un centímetro. Tras un año de considerar la cuestión, se le ocurrió un nuevo enfoque antes de asistir a una de las sesiones de su comité: era la idea de máser. Cuando logró, en 1954 y en colaboración con un joven doctor, Herbert J. Zeiger, y un doctorando, James P. Gordon, hacer realidad operacional esa idea utilizando un gas de moléculas de amoniaco, resultó que las oscilaciones producidas por el máser se caracterizaban no sólo por su alta frecuencia y potencia, sino también por su uniformidad. El máser, en efecto, produce una emisión coherente de microondas; esto es, radiación altamente concentrada, de una única longitud de onda.

Incluso antes de que los máseres empezasen a proliferar, algunos físicos comenzaron a intentar extender su idea a otras longitudes de onda. Entre ellos se encontraba el propio Townes (también Basov y Prokhorov), quien a partir del otoño de 1957 inició trabajos para ir desde las microondas a la luz visible, colaborando con su cuñado, Arthur Schawlow, un físico de los laboratorios Bell. Fruto de sus esfuerzos fue un artículo básico, en el que mostraban cómo se podría construir un láser, al que todavía denominaban “máser óptico”. No está de más mencionar que los abogados de los laboratorios Bell, para los que trabajaba Schawlow y con los que Townes tenía un contrato de asesor, pensaron que la idea del láser no tenía interés suficiente como para ser patentada; únicamente lo hicieron ante la insistencia de Townes.

La carrera por construir un láser se intensificó a partir de entonces. Aunque la historia posterior no siempre ha sido lo suficientemente clara en este punto, el primero que tuvo éxito fue Theodore Maiman, que consiguió poner en funcionamiento un láser de rubí el 16 de mayo de 1960 en los Hughes Research Laboratories.

Maiman envió a la entonces recién establecida *Physical Review Letters* un manuscrito con sus resultados, pero fue rechazado como «sólo otro artículo sobre el máser». Así que lo intentó en *Nature*, en cuyo número del 6 de agosto de 1960 consiguió publicar el resultado de su trabajo. Poco después, Schawlow anunciaba en *Physical Review Letters* (su artículo sí fue aceptado) que había puesto en funcionamiento otro láser, también de rubí y considerablemente más grande y potente que el de Maiman.

La teoría de Einstein sobre la existencia de Dios

POR: **Lourdes Baeza**
FUENTE: E **EL PAÍS**

ASISTENTES A LA SUBASTA DE LAS CARTAS DE ALBERT EINSTEIN.
CRÉDITO IMAGEN: © GIL COHEN-MAGEN

Que el padre de la ciencia moderna reflexione sobre la existencia de Dios como creador del universo suscita interés. Así lo demuestra la subasta de unas cartas de Albert Einstein, anunciada desde hace semanas por la almoneda Winners en Jerusalén, que este martes superó todas las expectativas. Las ocho misivas del autor de la teoría de la relatividad, escritas en inglés entre 1951 y 1954, partieron con una tasación inicial de unos 40.000 euros el lote, una cifra muy inferior a los más de 200.000 euros obtenidos en el remate final mediante una puja en Internet. “Ha pulverizado nuestras previsiones más optimistas. Incluso después de más de 60 años, interesa mucho todo lo que dijo Einstein”, aseguraba Gal Wiener, dueño de la casa de subastas.

Las ocho cartas tenían como destinatario al reputado físico David Bohm, colega y amigo de Einstein, con el que trabajó en la Universidad de Princeton, en Estados Unidos. De ellas, la que más interés suscitó —rematada en casi 80.000 euros— fue una datada en 1954 en la que el físico y matemático teorizaba sobre la existencia de Dios en un tono irónico, casi sarcástico. “Si Dios creó el mundo, su preocupación principal ciertamente fue hacer que no fuese fácilmente comprensible para nosotros”, escribió el científico a Bohm, quien por aquel entonces vivía en São Paulo.

Wiener precisa que las cartas tratan sobre temas muy diversos, como teorías físicas o planes personales y familiares que Einstein comparte con su amigo. “Está claro que a la gente le interesa especialmente lo que decía a propósito de la existencia de Dios”, explica el titular de la casa de subastas. El secreto profesional le impide desvelar la identidad del comprador, pero revela que no ha habido instituciones de por medio y que las cartas se han vendido por separado a coleccionistas privados. Los que más dinero han desembolsado han sido un europeo, un estadounidense y un israelí.

“Son las ventajas de haber organizado la puja *online*”. El público pudo seguirla en tiempo real desde cualquier parte del mundo hasta que se cerró, a última hora del día”, puntualiza Wiener. Desde su despacho en el barrio jerosolimitano de Givat Shaul, explica que las cartas subastadas habían permanecido en poder de la viuda de Bohm, fallecida hace un año sin dejar descendencia. Los familiares que las heredaron decidieron sacarlas a la venta en la almoneda Winners.

Einstein estuvo muy ligado a la Ciudad Santa. Sobre todo cuando, cumpliendo con su última voluntad, su hijastra Margot entregó hace tres décadas a la Universidad Hebrea las 1.400 misivas del científico que conservaba. La correspondencia y las notas han permitido conocer con bastante detalle la vida personal del Nobel.

En la Universidad que el científico de origen alemán ayudó a fundar —y que además controla los derechos de explotación de su nombre e imagen—, se conserva gran parte de su legado, formado por unos 80.000 documentos. Desde 2012 ya no es necesario desplazarse hasta el campus Edmond J. Safra del centro de Jerusalén, donde se custodian los textos y ecuaciones originales de Einstein, incluida su famosa fórmula $E=mc^2$. Todo el archivo se puede consultar ahora a través de la Red al haber sido digitalizado tras casi un decenio de trabajo.

NOTA DEL EDITOR: Podemos encontrar escritos donde Albert Einstein expone algunas de sus ideas y opiniones sobre aspectos religiosos. En el Libro “Cuestiones Cuánticas”, compendio editado por Ken Wilber (Editorial Kairós, 4ª Edición, Barcelona, Abril 1994), se pueden leer dos artículos de su autoría: “El sentimiento cósmico religioso” (Pp. 156-160) y “Ciencia y religión” (Pp. 161-170).

QUÍMICOS DESTACADOS

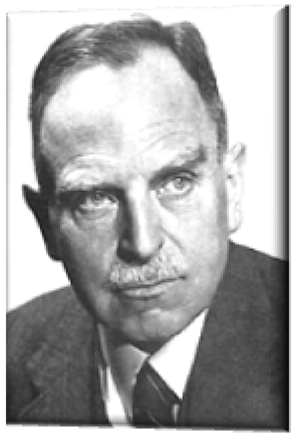
Otto Hahn

Nació el 8 de marzo de 1879 en Fráncfort del Meno y murió el 28 de julio de 1968 en Gotinga; ambas localidades en Alemania.

Ganador del Premio Nobel en Química en 1944.

Por el descubrimiento de la fisión nuclear del uranio y del torio.
Hahn puede considerarse el padre de la energía nuclear.

FUENTE: Biografiasyvidas - Wikipedia



OTTO HAHN
(1879-1968)

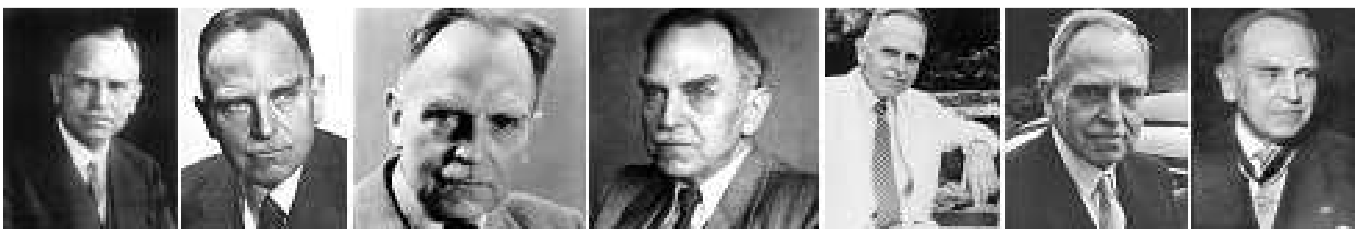
SÍNTESIS BIOGRÁFICA

Químico alemán, descubridor de la fisión nuclear. Estudió química en la Universidad de Marburgo, en la que se doctoró en 1901. Tres años más tarde se trasladó a Londres, donde colaboró con sir William Ramsay en investigaciones relacionadas con los fenómenos radiactivos. Ya en esta época, al intentar purificar una muestra de radio, identificó la presencia de una nueva sustancia radiactiva a la que denominó radiotorio. Animado por este descubrimiento, viajó hasta Montreal (donde trabó amistad con Ernest Rutherford) para ampliar sus conocimientos sobre la radiactividad.

A su regreso a Alemania, en 1906, trabajó con la física austriaca Lise Meitner, con la que se trasladó al nuevo Instituto Químico Káiser Guillermo de Berlín, cinco años más tarde, para dirigir el departamento de radioquímica. Tras la Primera Guerra Mundial, Hahn y Meitner estuvieron entre los primeros en aislar el isótopo 231 del protactinio, uno de los últimos elementos radiactivos naturales descubiertos.

En 1934, el físico italoestadounidense Enrico Fermi observó que, tras bombardear con neutrones el uranio, proceso en el que se libera una ingente cantidad de energía, se forman una serie de productos radiactivos. A finales de 1938, Hahn, en colaboración con el joven Fritz Strassman, pues Meitner se vio obligada a huir de Alemania a causa de la persecución nazi contra los judíos, concluyó, en contra de las expectativas iniciales, que uno de los productos de la desintegración del uranio es un isótopo radiactivo de un elemento de mucho menor peso, el bario, lo cual indujo a pensar que el átomo de uranio se divide en dos átomos más ligeros tras el proceso de bombardeo con neutrones.

El fenómeno, que fue bautizado con el nombre de fisión nuclear, le supuso a su descubridor el Premio Nobel de Química de 1944. Después de haber abandonado Alemania durante los años de la Segunda Guerra Mundial para instalarse en el Reino Unido, regresó a su país convertido en una figura de relieve social, comprometido con la causa vinculada al desarme nuclear.



OTTO HAHN

Imágenes obtenidas de:
Google

Stanislav Petrov:

El hombre que salvó al mundo de una guerra nuclear

26 de septiembre de 1983: El Incidente "Equinoccio de otoño"

FUENTE: BBC Mundo
TOMADO DE: ***MSN***

STANISLAV PETROV (1939-2017)

Imágenes obtenidas de:
Google

Stanislav Yevgrafovich Petrov. Nació el 9 de septiembre de 1939 y falleció a los 77 años, el 19 de mayo de 2017; ambos momentos en Rusia. Recibió el crédito por evitar un probable desastre nuclear ocasionado por un posible enfrentamiento entre la Unión Soviética y los Estados Unidos de América, en uno de los momentos más álgido de la Guerra Fría.

Era el oficial del ejército soviético encargado del centro de advertencia primaria, ubicado en el búnker Serpukhov-15, a unos cien kilómetros de la ciudad de Moscú, cuando ocurrió el trascendental incidente. Este era en ese tiempo, un centro de mando de la inteligencia militar soviética desde donde se coordinaba la defensa aeroespacial rusa. Su misión era verificar y alertar de cualquier ataque a sus superiores, con lo que se iniciaría el proceso para contraatacar con armamento nuclear cualquier ataque de los Estados Unidos.

En la mañana del 26 de septiembre de 1983, catorce minutos después de medianoche, todas las alarmas sonaron, las computadoras del centro detectaron el lanzamiento de un misil balístico intercontinental estadounidense desde la base de Malmstrom (Montana, Estados Unidos) y en 20 minutos alcanzaría la Unión Soviética. Resultó que el sol, la tierra y el satélite OKO se habían alineado de tal forma que éste último confundió la luz solar reflejada en las nubes con el lanzamiento de un misil. El incidente, silenciado por la URSS, ha pasado a la historia como el "Equinoccio de otoño", aunque la hazaña y su protagonista apenas son conocidos.

En ese momento. Petrov tomó la decisión de que se trataba de una falsa alarma porque no tenía sentido que los estadounidenses atacaran con un único misil; y aunque más tarde las computadoras indicaron que cuatro misiles más habían sido lanzados, mantuvo su decisión puesto que consideró serían pocos para un ataque cuando los EE. UU. tenían miles; y en una negligencia en el cumplimiento del deber, no lo reportó a los superiores. Su acción avergonzó a los altos cargos soviéticos y con base en la disciplina militar que debió seguir, consideraron que el teniente coronel Petrov se había equivocado en su decisión ya que su deber era comunicar la situación a sus superiores, y dejar que ellos decidieran si era un error o no. Sin embargo, dadas las circunstancias en cuanto a que su comportamiento permitió salvar al mundo, no lo castigaron, pero Petrov fue degradado, reasignado a un puesto inferior y decidieron ocultar el incidente. Petrov se retiró del ejército, yendo a vivir como pensionado en Friázino, Rusia.

Hoy el mundo le agradece que por sus nervios de acero, se haya podido contar lo ocurrido luego de transcurrido más de treinta años. Su acción posiblemente salvó al mundo de una guerra nuclear, ya que como respuesta al inminente ataque, el protocolo del ejército soviético habría sido tomar represalias con un ataque nuclear.

LA UNIÓN SOVIÉTICA Y ESTADOS UNIDOS TENÍAN ENORMES ARSENALES NUCLEARES DISPUESTOS DURANTE LA GUERRA FRÍA.
CRÉDITO IMAGEN: © GETTY IMAGES

Petrov murió en su casa en Moscú el 19 de mayo de 2017, pero la noticia de su muerte se hizo pública, gracias a una llamada telefónica casual.

El director de cine alemán Karl Schumacher, quien llevó la historia del oficial soviético a la audiencia internacional, lo llamó para desearle un feliz cumpleaños el 7 de septiembre de 2017.

Entonces fue informado que había fallecido por su hijo, Dmitry Petrov.

Schumacher dio a conocer la noticia en Internet y de ahí llegó a los medios de comunicación.

EL DÍA QUE SE PUDO DESENCADENAR UNA GUERRA NUCLEAR

En una entrevista con la BBC en 2013, 30 años después del incidente, Petrov contó lo ocurrido en las primeras horas del 26 de septiembre de 1983.

Los reportes que recibió en su computadora sugerían que varios misiles estadounidenses habían sido lanzados.

"Tenía todos los datos (para sugerir que había un ataque con misiles en curso). Si hubiera enviado mi informe a la cadena de mando, nadie habría dicho nada en contra", explicó al servicio ruso de la BBC.

"Todo lo que tenía que hacer era alcanzar el teléfono para llamar por la línea directa a nuestros altos mandos, pero yo no pude moverme. Me sentí como si estuviera sentado en una sartén caliente".

El protocolo decía, muy claramente, que la decisión tenía que ser sobre la base de las lecturas de la computadora. Y esa decisión correspondía a él, el oficial de guardia.

Pero en lugar de eso, Petrov reportó una falla en el sistema.

Si él hubiera estado equivocado, la primera explosión nuclear habría ocurrido minutos después.

"Veintitrés minutos más tarde me di cuenta de que no había pasado nada. Si hubiera habido un ataque real, entonces yo lo hubiera sabido. Fue un gran alivio", dijo a la BBC.

Una investigación posterior concluyó que los satélites soviéticos habían identificado erróneamente la luz solar reflejándose en las nubes como los motores de misiles balísticos intercontinentales.

Petrov se mantuvo en silencio 10 años, hasta que después del colapso de la URSS la historia se dio a conocer.

"Pensé que era una vergüenza para el ejército soviético que nuestro sistema fallara de esa manera", dijo en la entrevista con la BBC.

Petrov recibió varios premios internacionales, pero él nunca se consideró un héroe: *"Ese era mi trabajo"*, dijo.

Sin embargo, aun él no considerándose un héroe por lo que hizo, la humanidad le ha otorgado los siguientes reconocimientos:

- La Asociación de Ciudadanos del Mundo le otorgó el Premio Ciudadano del Mundo el 21 de mayo de 2004, que consta de un trofeo y 1000 dólares estadounidenses, por evitar lo que podría haber sido un desastre mundial.
- Las Naciones Unidas en 2006 lo homenajeó con la entrega de un segundo premio de la Asociación de Ciudadanos del Mundo. Para recibirlo, Petrov viajó a los Estados Unidos.
- El Senado australiano lo premió el 23 de junio de 2004.
- En Alemania, en 2011, le dieron el Premio Alemán de Medios, que reconoce a personas que han hecho contribuciones significativas a la Paz Mundial, por haber evitado una potencial guerra nuclear.
- Fue Premiado en Baden-Baden el 24 de febrero de 2012.
- Galardonado con el Premio Dresden en 2013.
- El reconocido actor Kevin Costner realizó el documental "El Botón Rojo" en su honor.

James Lind y el escorbuto: ¿El primer ensayo clínico de la historia?

Por: Javier Yanes (@yanes68) para Ventana al Conocimiento

Enviado por José Agustín González "Pepe", vía Facebook.

Descubrió que unas simples frutas curaban la gran amenaza de la exploración marítima.

James Lind suele recibir el crédito de ser el autor del primer ensayo clínico de la historia, un experimento controlado en el que evaluó la eficacia de las frutas cítricas contra el escorbuto. Pero ¿es realmente así?

Todo el que hasta hace un par de siglos se embarcaba en un largo viaje por mar sabía que se exponía a una fatal dolencia que le pudriría las encías, le abriría llagas en la piel y le dejaría postrado antes de provocarle la muerte. Y no había manera de evitarlo, ya que se debía, según el pensamiento de la época, a las condiciones propias de las travesías, como la mala dieta, el agua sucia, el trabajo duro y el alojamiento insalubre.

"El escorbuto era conocido desde la era hipocrática", señala a OpenMind el especialista en historia de la medicina de la Universidad de Atenas (Grecia) Emmanouil Magiorkinis. Esta enfermedad era un enemigo temible para las flotas de todo el mundo. Algunas fuentes afirman que mató a millones de marineros durante la edad dorada de la exploración marítima, aunque según Magiorkinis "no podemos tener una estimación precisa de las muertes".

EL GRAN ENEMIGO DE LA EXPLORACIÓN MARÍTIMA.

Para el escritor Stephen R. Bown, autor de *Escorbuto: Cómo un médico, un navegante y un caballero resolvieron el misterio de la peste de las naos* (Juventud, 2005), "es probable que la mayoría [de las muertes] no hayan quedado registradas", aunque "hay muchos, muchos registros que detallan horrendas epidemias de escorbuto a bordo de los barcos", cuenta a OpenMind.

En los relatos de la era de la navegación "el escorbuto siempre se menciona y deja empequeñecidas a otras causas de muerte", dice Bown.

En el siglo XVIII, Gran Bretaña se encontraba enzarzada en la Guerra de Sucesión Austríaca contra Francia y España. Y fue entonces cuando un cirujano escocés llamado James Lind (4 de octubre de 1716 – 13 de julio de 1794) comenzó a desentrañar los secretos del escorbuto. Nacido en Edimburgo, Lind ingresó en la marina como aprendiz de médico aún sin titulación. En marzo de 1747 fue asignado como cirujano al *HMS Salisbury*, una nave de 50 cañones encargada de patrullar el Canal de la Mancha.

RECONSTRUCCIÓN DE LA NAVE HMS SALISBURY.
CRÉDITO IMAGEN: JOURNAL OF THE ROYAL SOCIETY OF MEDICINE.

EL REMEDIO: NARANJAS Y LIMONES.

Tras ocho semanas en el mar, y cuando el escorbuto comenzó a hacer mella en la tripulación, Lind decidió poner a prueba su idea de que la putrefacción del cuerpo provocada por la enfermedad podía prevenirse con ácidos. El 20 de mayo dividió a 12 marineros enfermos en seis parejas, y a cada una de ellas le suministró un suplemento diferente en su dieta: sidra, elixir vitriólico (ácido sulfúrico diluido), vinagre, agua de mar, dos naranjas y un limón, o una mezcla purgante.

Como resultado del que algunos han considerado el primer ensayo clínico de la historia, sólo los dos marineros que tomaron la fruta mejoraron, a pesar de que las naranjas y los limones se acabaron a los seis días. "Los buenos efectos más repentinos y visibles se observaron con el uso de naranjas y limones", escribiría Lind en 1753 en su histórica obra *A treatise of the Scurvy*. "Uno de los que los tomaron estaba apto para el servicio a los seis días; el otro fue el más recuperado de todos en su condición, y estando ya bastante bien, fue asignado como enfermero del resto".

Con tales observaciones, parece obvio que Lind debería haber establecido una conexión evidente entre los cítricos y el escorbuto, y que la Marina debería haber adoptado medidas inmediatas. Pero no ocurrió ni una cosa ni la otra. En cuanto a lo primero, y pese a que Lind concluía que las frutas cítricas tenían una “ventaja peculiar”, continuó defendiendo que el escorbuto era el producto de múltiples causas: “dieta inadecuada, aire y confinamiento”. En opinión de Bown, tal vez Lind dudó de su propio experimento cuando posteriormente trató de concentrar el zumo de los cítricos mediante cocción para facilitar el transporte y el almacenamiento. Pero con ello destruía la vitamina C, el ingrediente activo aún entonces desconocido, y el producto hervido no funcionaba.

Y ello a pesar de que el vínculo entre cítricos y escorbuto tampoco era una novedad: “los cítricos como cura para el escorbuto se conocían desde más de un siglo antes”, apunta Bown. De hecho, el remedio había sido reconocido en 1497 por el portugués Vasco de Gama, en 1593 por el inglés Richard Hawkins y en 1614 por el también inglés John Woodall, que en su manual *The Surgeon’s Mate* recomendaba consumir naranjas, limones, limas y tamarindos.

Respecto a lo segundo, y debido probablemente a la tibieza de las conclusiones de Lind en las ediciones posteriores de su obra, tuvieron que transcurrir 42 años desde la publicación del trabajo hasta que en 1795 el almirantazgo británico impuso los cítricos en la dieta de los marineros. Lind había fallecido el año anterior.

CONTROLAR LAS VARIABLES DEL EXPERIMENTO.

La importancia del estudio de Lind estriba en que acertó al controlar las variables del experimento de modo que todos los sujetos estuvieran en similares condiciones: comparar igual con igual. Según su propio relato, el escocés eligió a pacientes con síntomas parecidos, los mantuvo en el mismo lugar y les suministró una dieta común, aparte de los suplementos, aunque sin un grupo de control.

En realidad, otros antes que Lind ya habían avanzado tales planteamientos, comenzando con el médico persa Al-Razi, que en el siglo IX sangró a un grupo de pacientes y no a otro para comprobar los resultados. Un siglo antes que Lind, otros como el flamenco Jan Baptist van Helmont, el inglés George Starkey o el alemán Franz Anton Mesmer ya habían ensayado la comparación de igual con igual. El diseño primitivo de aquellos ensayos no evolucionaría hasta el siglo XIX con la introducción del **doble ciego** y el XX con la inclusión de **placebos**.

PÁGINA DEL DIARIO DE HENRY WALSH MAHON (1841) MOSTRANDO LOS FECTOS DEL ESCORBUTO.
CRÉDITO IMAGEN: THE NATIONAL ARCHIVES UK.

Pero más allá de que el ensayo de Lind tal vez no fuera el primero, hay quienes incluso dudan de que realmente tal ensayo existiera. En 2003, un estudio reveló que las bitácoras del *HMS Salisbury* apenas registraban casos de escorbuto hasta que el navío atracó en Plymouth en junio. Su autor, Graham Sutton, sugería que la cultura de la Royal Navy tendía a negar las enfermedades a bordo: “Si los registros de la Marina se toman al pie de la letra, Lind nunca curó el escorbuto en el *Salisbury*, porque allí no había enfermedad que tratar”, escribía Sutton. Magiorkinis subraya que la Marina británica tendía a minimizar la enfermedad “porque consideraban que las muertes por escorbuto eran una desgracia atribuida a la mala organización”.

Esto ha llevado a la hipótesis de que tal vez el ensayo nunca tuvo lugar: “No hay pruebas de que Lind llevara a cabo el ensayo que dijo”, escribía el gastroenterólogo Jeremy Hugh Baron, fallecido en 2015. Lo cual ha inspirado un revisionismo de la figura del escocés por autores como Iain Milne, Sibbald Librarian del Real Colegio de Médicos de Edimburgo y tal vez la mayor autoridad mundial en James Lind, para quien hoy “Lind es importante porque su tratado contiene una descripción de un ensayo justo muy temprano”, dice a OpenMind; pero sobre todo, prosigue, la historia de Lind es “una útil herramienta de marketing para promover la importancia vital de los tests justos en medicina”.

No obstante y según Bown, esto no oscurece su aportación: “Incluso si se lo inventó, fue el hecho de que otros lo leyeran lo que tuvo impacto en la investigación del escorbuto”. El escritor destaca que el también escocés Gilbert Blane, que finalmente convenció al almirantazgo para incluir zumo de lima en la dieta de los marineros, se basó en la obra de Lind. “Así que, lo que Lind hizo o no hizo es irrelevante”, concluye Bown; “situó a otros investigadores en el camino hacia una cura práctica del escorbuto”.

Martín Lutero

PADRE DE LA REFORMA PROTESTANTE E INSPIRADOR DE LA DOCTRINA RELIGIOSA CONOCIDA COMO LUTERANISMO

Información base tomada de: Wikipedia

Martín Lutero, nació el 10 de noviembre de 1483 y murió el 18 de febrero de 1546, próximo a cumplir los 63 años. Ambos momento en Eisleben, Electorado de Sajonia, Sacro Imperio Romano Germánico. Sus padres fueron Hans Luther y Margarethe Luther.

Nació llamándose Martin Luder pero después lo cambió por Martin Luther, siendo el nombre por el cual se le conoce en alemán. Fue un teólogo y fraile católico agustino que comenzó e impulsó la reforma religiosa en Alemania, y en cuyas enseñanzas se inspiró la Reforma Protestante y la doctrina teológica y cultural denominada luteranismo.

Luego de un breve paso por la Facultad de Derecho de la Universidad de Erfurt, y contrariando el deseo de su padre, Lutero ingresó en el monasterio agustino de esa misma ciudad. En 1507, dos años después de haber ingresado al monasterio, fue ordenado sacerdote, y un año más tarde comenzó a enseñar teología en la Universidad de Wittenberg.

Sus críticas a la Iglesia católica se basaban principalmente en la frivolidad que caracterizaba a gran parte del clero y en la venta de indulgencias. A pesar de las presiones de la Iglesia, Lutero se negaba a retractarse de sus ideas, e incluso rechazó la autoridad del Papa. En 1920 fue excomulgado y declarado hereje por el Papa León X, pero Lutero ya contaba con apoyo de gran parte del pueblo alemán. Poniéndose a la cabeza de la Reforma, conformó la primera Iglesia Protestante, basada en su doctrina.

Lutero se caracterizó por exhortar a que la Iglesia cristiana regresara a las enseñanzas originales de la Biblia, impulsando con ello una reestructuración de las iglesias cristianas en Europa. La reacción de la Iglesia católica ante la reforma protestante fue la Contrarreforma.

Sus contribuciones a la civilización occidental se llegan a considerar más allá del ámbito religioso, ya que sus traducciones de la Biblia ayudaron a desarrollar una versión estándar de la lengua alemana y se convirtieron en un modelo en el arte de la traducción. Su matrimonio con Catalina de Bora el 13 de junio de 1525 inició un movimiento de apoyo al matrimonio sacerdotal dentro de muchas corrientes cristianas. Con su esposa procreó seis hijos, a saber: Magdalena Luther, Margarete von Kunheim, Elisabeth Luther, Paul Luther, Johannes Luther y Martin Luther.

MARTÍN LUTERO

Imágenes obtenidas de:

Google

Venezuela, personajes, anécdotas e historia.

16 DE FEBRERO DE 1816

Batalla de Mata de la Miel

Por: **Simone Monasterio Acosta**

TOMADO DE: El carabobeño.com - 16 de febrero de 2017

El 16 de febrero de 1816, José Antonio Páez derrotó a los españoles en el sitio conocido como Mata de la Miel (Estado Apure). Haciendo de nuevo derroche de valor y sobreponiéndose a la inferioridad de sus fuerzas, Páez, al frente de sus lanceros, dio una carga impetuosa sobre las tropas realistas mientras prendía con fuego la sabana, como acostumbraba a hacer para sembrar el terror entre sus enemigos.

Para ese entonces, Páez al mando de una fuerza integrada por 500 hombres de caballería se encontraba en Guasdualito dándole protección a este poblado. Pero llegaron noticias que el ejército realista bajo el mando del Coronel Francisco López se encontraba en Mata la Miel con una fuerza que pasaban del millar de hombres, entre los cuales habían más de 400 de caballería. Contra la opinión de sus oficiales, Páez se prepara y va en busca del enemigo.

Alcanzada la tarde, Páez se propone lanzar un ataque a los realistas y al efecto forma su tropa en dos líneas, la primera al mando del Comandante Nonato Pérez y la segunda al mando del Comandante Genaro Vásquez. Avanzaron los Patriotas hasta reabrir fuego de artillería y fusilaría enemiga y cargó entonces con tanto ímpetu la primera línea que puso en fuga más de la segunda y tercera parte de la caballería realista.

No tuvo la misma suerte Genaro Vásquez pues apenas avanzó fue rechazado, intervino Páez y logró que los jinetes volvieran y acometieran. Tan ruda fue la carga que la caballería de López no pudo resistir y fue lanceada con bravura, el enemigo dejó en el campo 500 prisioneros y 400 muertos, 3.345 caballos y gran cantidad de lanzas y fusiles.

La victoria le valió que el Libertador Simón Bolívar lo ascendiera a teniente coronel y felicitara a sus tropas.

GALERÍA

ANDREI ANDREEVICH BOLIBRUKH

Imágenes obtenidas de:

Nació el 30 de Enero de 1950 y murió el 11 de Noviembre de 2003, ambos momentos en Moscú, Rusia.

El padre de **Andrei Andreevich Bolibrukh**, Andrei Vlas'evich Bolibrukh, fue un soldado que llegó al rango de mayor al final de la II Guerra Mundial. Su servicio en la guerra lo llevó a sufrir cinco heridas y a recibir siete premios. Continuó sirviendo en el ejército, alcanzando el rango de teniente general. La madre de Andrei Andreevich, Tat'yana Ivanovna Pimanikhina, mostró un talento para las matemáticas y entró a la universidad antes de casarse a los diecinueve años y se dedicara a la crianza de su hijo y su hermana Tat'yana. Andrei Vlas'evich envió correspondencia a diversos lugares del país como Andrei Andreevich mientras crecía y, como consecuencia, el muchacho asistió a diversas escuelas en diferentes partes del país, principalmente en Moscú, Tallin y Kaliningrado. Cuando tenía seis años de edad, la familia vivía en un bosque de Bielorrusia y el padre de Andrei decidió prepararlo para comenzar su escolarización. Bolibrukh explicó lo sucedido (leer referencia [1]):

> *Cuando tenía seis años mi padre decidió prepararme para la escuela. Podía leer, escribir y sumar números. Mi padre decidió enseñarme matemáticas. En particular trató de explicarme cómo calcular ¡el área de un círculo! Y recuerdo muy bien que no le entendía. Me dijo: "el área del círculo es igual a pi r al cuadrado. ¿Entiendes?" No, respondí, dices escribir números, pero ¿qué es un área? ... ahora entiendo que él no era un matemático y no podía decir que el área es un funcional en el conjunto de cifras medibles con las siguientes propiedades, etc.....*

Aunque Andrei vio comparativamente poco a su padre porque la mayor parte del tiempo estaba ocupado trabajando, recordaba los felices días de vacaciones haciendo viajes en coche o en tren a lugares de interés en los estados bálticos. También hacían viajes alrededor de Kaliningrado y a Crimea, donde él pasaba el tiempo pescando. Sus primeros intereses fueron por la literatura y amaba el teatro escolar donde estuvo entre los once y catorce años de edad, y por cierto ganó premios por recitar. Un buen profesor de matemáticas hizo crecer en él su interés por esta asignatura a la edad de doce años. A los catorce años estaba realizando estudios profundos de matemáticas. En 1965 ganó el premio de la Olimpiada de Matemática de la URSS, competencia organizada para escolares. A continuación se fue a un colegio creado especialmente para educar a niños con talento científico. Esta escuela, el Colegio de Física Matemática Nº 45, anexa a la Universidad Estatal de Leningrado y era atendida por maestros excelentes. Bolibrukh escribe sobre sus recuerdos de los profesores, compañeros y la excelente organización de la escuela en la referencia [10]. Las matemáticas no era su único amor, sin embargo y en esta escuela también desarrolló un amor por el arte moderno, la poesía y continuó su amor por el teatro. Se graduó en la escuela en 1967, ganó la medalla de oro y entró en el Departamento de Mecánica y Matemática de la Universidad Estatal de Moscú. Esta universidad fue, según escribe en la referencia [1]:

> *... tal vez el mejor lugar para el estudio de las matemáticas a lo largo de todo el mundo.*

Volodya Leksin escribe en la referencia [13] sobre los años en pregrado con Bolibrukh:

> *Andrei y yo fuimos compañeros en el Departamento de Mecánica y Matemáticas desde 1967 a 1972. De nuestro tercer año allí (es decir, otoño 1969) estábamos en un grupo conformado principalmente por estudiantes que trabajaban en geometría superior y topología. El supervisor de nuestra investigación fue Mikhail Mikhailovich Postnikov. En esos años dio conferencias espléndidas para el curso obligatorio en álgebra lineal, y cuando en el otoño de 1968 ofreció el seminario especializado "topología algebraica y sus aplicaciones" (que empezó como un grupo de estudio y luego se convirtió en un grupo de investigación...), muchos estudiantes se unieron a este seminario. ... Andrei mantuvo un bajo perfil entre sus extrovertidos y ruidosos contemporáneos. En un principio atribuí esto a su manera muy cortés y considerada. Pero después de un poco de contacto con él durante nuestros estudios, me di cuenta que era un hombre de muy fuerte disciplina interna, responsabilidad y precisión. Por ejemplo, escribiría en su cuaderno en la fecha pertinente cualquier obligación que había emprendido (para la mayoría de los estudiantes esto era inusual y sorprendente) y la cumpliría al pie de la letra.*

Bolibrukh se graduó con diploma de honor (equivalente a una maestría) en 1972, después de haber escrito una tesis sobre los cálculos del cobordismo de variedades con ciertas relaciones sobre las clases características de sus empaquetamientos de las tangentes. Luego comenzó a trabajar para obtener el Grado de Candidato (equivalente a un doctorado) con Postnikov como su asesor. Estudiantes de investigación de Postnikov se unieron al seminario de L. V. Keldysh y [13]:

> *... comenzamos a organizar nuestros talleres sistemáticamente en diversas partes de la campiña de Moscú, la combinación de topología, fútbol o esquí dependiendo de la temporada, anécdotas, conversaciones serias sobre la vida y así sucesivamente.*

Alexei Chernavskii recuerda en la referencia [13] que Bolibrukh realmente no era tan exitoso como uno podría haber esperado:

> *Andrei fue un participante activo y alegre. Puso su corazón en todo lo que intentó hacer y actuó - es difícil pensar que otra palabra mejor - con precisión. [Daba la] impresión de ser un muy animado enérgico y agradable joven, a veces de repente parecía algo más maduro de lo que a primera vista habría sugerido. No tengo ninguna duda que Andrei era un superdotado lingüístico: resolvía fácilmente varios rompecabezas de palabra... [pero su] trabajo matemático no era muy acertado, aunque su conocimiento y comprensión no era menor que la de los otros estudiantes. Puedo decir ahora que el mundo de la topología pura no era su mundo, contenía algo disonante con su personalidad muy independiente.*

Bolibrukh había comenzado a interesarse en temas de matemática fuera del ámbito de la investigación que llevaba a cabo para la obtención del Grado de Candidato, asistiendo a un seminario informal organizado por A. V. Chernavskii para estudiar el problema multidimensional de Riemann-Hilbert. Como consecuencia de ello sus estudios de doctorado cambiaron de dirección, influenciado por Chernavskii, y completó la investigación para su tesis *On the Fundamental Matrix of a Pfaffian System of Fuchsian Type* (Sobre la Matriz Fundamental de un Sistema de Pfaffian de Tipo Fuchsian) en 1975. Comenzó a trabajar en el Instituto de Física y Tecnología de Moscú pero, algo sorprendente, fue dos años después de terminar la investigación para su tesis que Bolibrukh había defendió en la Universidad Estatal de Moscú y obtuvo el Grado de Candidato.

Sin duda su carrera se movía menos rápidamente de lo que uno podría haber esperado. Dmitrii Viktorovich Anosov escribe en [7] sobre los años siguientes:

> *No estoy seguro de que incluso sus amigos más cercanos sabían realmente sobre su crecimiento interno durante unos 10 años después de defender su tesis doctoral; más por lo que desde ese momento dedicó mucha atención a cosas totalmente distintas - por ejemplo, tribología, es decir, el estudio de la influencia de varios tipos de fricción en el trabajo de los sistemas mecánicos. Se trataba de una actividad útil relacionada con la orientación aplicada del Instituto de Física y Tecnología de Moscú que requieren una cierta cualificación, pero no tenía nada que ver con ecuaciones diferenciales en el dominio complejo. Le conocí en varias ocasiones durante ese tiempo y debo confesar que él entonces no causó una fuerte impresión en mí.*

Durante estos años la familia formada por Andrei y su esposa Nina comenzó a crecer al nacer su hijo, también llamado Andrei, y su hija llamada Ekaterina.

Lo que parecía convertirse en una carrera algo ordinaria para Bolibrukh cambió radicalmente en 1989 cuando él solucionó el problema 21 de Hilbert, también conocido como el problema de Riemann-Hilbert. Este problema, el 21 en la famosa lista que Hilbert presentó en 1900 para fijar los retos de la matemática para el siglo XX, es el siguiente:

> *¿Existe un sistema Fuchsiano de ecuaciones diferenciales ordinarias lineales en el dominio complejo teniendo prescrito singularidades y un grupo monodrómico?*

Hilbert creyó que la pregunta tenía una solución positiva y el problema apareció resuelto en 1908 cuando Josip Plemelj lo demostró dando una reducción del problema a un resultado conocido. Sin embargo, en 1980, Golubeva, Leksin y otros descubrieron que hubo un error en la reducción de Plemelj. Todavía se creía que lo que se requería era una corrección en el método de Plemelj para dar la respuesta positiva esperada pero Bolibrukh produjo una sorpresa mayor cuando él demostró en 1989 ciertas condiciones prescritas en las singularidades que condujeron a una solución negativa. Este brillante trabajo constituyó la tesis doctoral de Bolibrukh (equivalente a un doctorado o habilitación), otorgado en 1991, y de repente pasó de ser un matemático algo ordinario a ser una verdadera estrella. Debemos dejar claro que no era simplemente que Bolibrukh había pulsado suerte con uno de los resultados. Algo de este tiempo lo llevó a producir resultados de alta calidad. Es sorprendente y difícil de entender, ver florecer inusualmente a una edad avanzada un genio matemático.

A Bolibrukh le fueron dados rápidamente honores por su extraordinario trabajo. Fue profesor invitado en el Congreso Internacional de Matemáticos celebrado en Zúrich en 1994 dando la Conferencia *The Riemann-Hilbert problem and Fuchsian differential equations on the Riemann sphere* (El problema de Riemann-Hilbert y ecuaciones diferenciales fuchsiana sobre la esfera de Riemann). Desde 1990 su trabajo principal se realizó en el Instituto Matemático Steklov, y llegó a ser director adjunto del Instituto en 1996. En 1994 fue elegido Miembro Correspondiente de la Academia Rusa de Ciencias, convirtiéndose en un Miembro Pleno tres años más tarde. La Academia de Ciencias de Rusia le concedió el Premio Lyapunov en 1995 y en 2001 recibió el Premio Estatal de la Federación Rusa. La Universidad Estatal de Moscú lo honró en 1999 con el título de Profesor Honorario.

Los honores no se limitaban a Rusia. Fue invitado como Profesor Visitante por la Universidad de Niza entre 1995 y 1997, e invitaciones similares tuvo entre 1998 y 2002 por la Universidad de Estrasburgo. En 2002 se convirtió en miembro del Comité Ejecutivo de la Unión Internacional de Matemáticos. Fue orador invitado en numerosos congresos internacionales, a menudo como conferencista plenario. Durante un período de cinco años dio charlas en conferencias internacionales, nada menos que 31 y, aún más notable, cada charla era sobre un tema diferente. Lamentablemente, sin embargo, su salud se deterioró y fue diagnosticado con cáncer. Fue tratado en un hospital durante varios meses, pero cuando su salud parecía mejorar algo dejó hospital y asistió a una conferencia para celebrar el centenario del nacimiento de Andrei Nikolaevich Kolmogorov [7]:

> *... él era optimista, mezcla de buen humor con los participantes, hizo planes para sus futuras investigaciones (negociaciones sobre tratamiento médico en Francia estaban a punto de finalizar), dio su charla brillante como de costumbre e inmediatamente después asistió a la develación de un busto conmemorativo de L. S. Pontryagin en avenida Lenin.*

Lamentablemente la mejora fue de corta duración y fue hospitalizado otra vez. Sin embargo, mientras estaba en el hospital terminó de escribir su último trabajo de investigación, escribió las memorias (referencia [11]) y continuó asesorando a sus estudiantes en el Instituto Matemático Steklov. Un año después de su muerte, se organizó una conferencia en su honor en Estrasburgo, Francia.

Otros aspectos de la carrera de Bolibrukh: Butuzov M, V'yugin, Gontsov R y V Poberezhnyi escriben en la referencia [13] sobre Bolibrukh como docente:

> *Todos nosotros, en diferentes momentos, conocimos a Andrei durante nuestro segundo año en el Departamento de Mecánica y Matemáticas. En esos años impartió el curso de lecciones especializadas de la teoría analítica de las ecuaciones diferenciales, empaquetamiento de vectores y el problema de Riemann-Hilbert. Andrei fue un profesor maravilloso. Su estilo de presentación era preciso y riguroso pero accesible, y destacaba los puntos más importantes y bellos. Preparaba sus clases bien, y uno de sus cursos fue publicado como libro: Fuchsian differential equations and holomorphic bundles (Ecuaciones diferenciales fuchsiana y paquetes holomórficos), el cual es un buen ejemplo de su estilo. Después de cada clase, Andrei preguntaba al más joven de los miembros de su audiencia, lo que nosotros no habíamos entendido y nos quedamos en la sala, a veces durante una hora, recibiendo no sólo respuestas a nuestras preguntas sino también improvisadas conferencias sobre temas generales. Él disertaba con gran pasión, dejándose arrastrar por el material que impartía. Una vez durante una clase, rasgó su camisa por accidente. Su comportamiento se ganó a la audiencia e hizo que prestaran mucha atención a su exposición. Por lo tanto, cuando tuvimos que elegir un asesor de investigación nos acercamos a Andrei. Aceptó y se unió al grupo de trabajo sobre ecuaciones diferenciales y más tarde, junto con él, nos unimos al grupo recién formado de sistemas dinámicos.*

Fuera de las matemáticas, Bolibrukh siempre se interesó por el tenis, la literatura, la pintura y el teatro.

Referencias.-

Libros:

1. B Yandell, *The honors class: Hilbert's problems and their solvers* (A K Peters, 2002).

Artículos:

2. Andrei Andreevich Bolibrukh (December 30, 1950-November 11, 2003) (Russian), *Sovrem. Mat. Prilozh. No.* **10** (2003), 3.
3. Andrei Andreevich Bolibrukh (December 30, 1950-November 11, 2003), *J. Math. Sci. (N. Y.)* **129** (1) (2005), 3517.
4. D V Anosov, V I Arnol'd, V M Bukhshtaber, V A Golubeva, A A Gonchar, A B Zhizhchenko, Yu S Il'yashenko, V V Kozlov, S P Konovalov, L D Kudryavtsev, V P Leksin, O B Lupanov, A A Mal'tsev, E F Mishchenko, S P Novikov, Yu S Osipov, M M Postnikov, V A Sadovnichii, A G Sergeev, L D Faddeev and A V Chernavskii, Andrei Andreevich Bolibrukh (obituary) (Russian), *Uspekhi Mat. Nauk* **58** (6) (2003), 139-142.
5. D V Anosov, V I Arnol'd, V M Bukhshtaber, V A Golubeva, A A Gonchar, A B Zhizhchenko, Yu S Il'yashenko, V V Kozlov, S P Konovalov, L D Kudryavtsev, V P Leksin, O B Lupanov, A A Mal'tsev, E F Mishchenko, S P Novikov, Yu S Osipov, M M Postnikov, V A Sadovnichii, A G Sergeev, L D Faddeev, A V Chernavskii and Andrei Andreevich Bolibrukh (obituary), *Russian Math. Surveys* **58** (6) (2003), 1185-1189.
6. D V Anosov and V P Leksin, Andrei Andreevich Bolibrukh in life and science (Russian), *Uspekhi Mat Nauk* **59** (6)(360) (2004), 3-22.
7. D V Anosov and V P Leksin, Andrei Andreevich Bolibrukh in life and science, *Russian Math. Surveys* **59** (6) (2004), 1009-1028.
8. D V Anosov and E F Mishchenko, In Memory of Andrei Andreevich Bolibrukh (Russian), Dynamical systems and related problems of geometry, Collected papers. Dedicated to the memory of academician Andrei Andreevich Bolibrukh, *Tr. Mat. Inst. Steklova* **244** (Nauka, Moscow, 2004), 5.
9. D V Anosov and E F Mishchenko, In Memory of Andrei Andreevich Bolibrukh, *Proc. Steklov Inst. Math.* (1) (244) (2004), 1.
10. A A Bolibrukh, Some memories of Boarding School no. 45, *Amer. Math. Soc. Transl.* (2) **174** (1996), 1-5.
11. A A Bolibrukh, Reminiscences and reflections on times long past (Russian) (Moscow, 2003).
12. A V Chernavskii, V P Leksin, M Butuzov, I V'yugin, R Gontsov, V Poberezhnyi, Yu S Il'yashenko, A.G. Sergeev and S P Konovalov, Reminiscences about Andrei Andreevich Bolibrukh (Russian), *Uspekhi Mat. Nauk* **59** (6)(360) (2004), 207-215.
13. A V Chernavskii, V P Leksin, M Butuzov, I V'yugin, R Gontsov, V Poberezhnyi, Yu S Il'yashenko, A.G. Sergeev and S P Konovalov, Reminiscences about Andrei Andreevich Bolibrukh, *Russian Math. Surveys* **59** (6) (2004), 1213-1224.
14. V P Leksin, The works of A A Bolibrukh on multidimensional regular and Fuchsian systems (Russian), *Uspekhi Mat. Nauk* **59** (6)(360) (2004), 151-160.
15. V P Leksin, The works of A A Bolibrukh on multidimensional regular and Fuchsian systems, *Russian Math. Surveys* **59** (6) (2004), 1155-1164.
16. C Mitschi and C Sabbah, Andrei Bolibroukh, un mathématicien, un ami, *Gaz. Math. No.* **100** (2004), 20-31.
17. C Mitschi and C Sabbah, Preface, *Differential equations and quantum groups, IRMA Lect. Math. Theor. Phys.* **9** (Eur. Math. Soc., Zürich, 2007), v-vi.
18. C Sabbah, The work of Andrey Bolibrukh on isomonodromic deformations, in *Differential equations and quantum groups* (Eur. Math. Soc., Zürich, 2007), 9-25.

Versión en español por R. Ascanio H. del artículo en inglés de J. J. O'Connor y E. F. Robertson sobre "Andrei Andreevich Bolibrukh" (Marzo 2011).
Fuente: MacTutor History of Mathematics [http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Bolibrukh.html].