

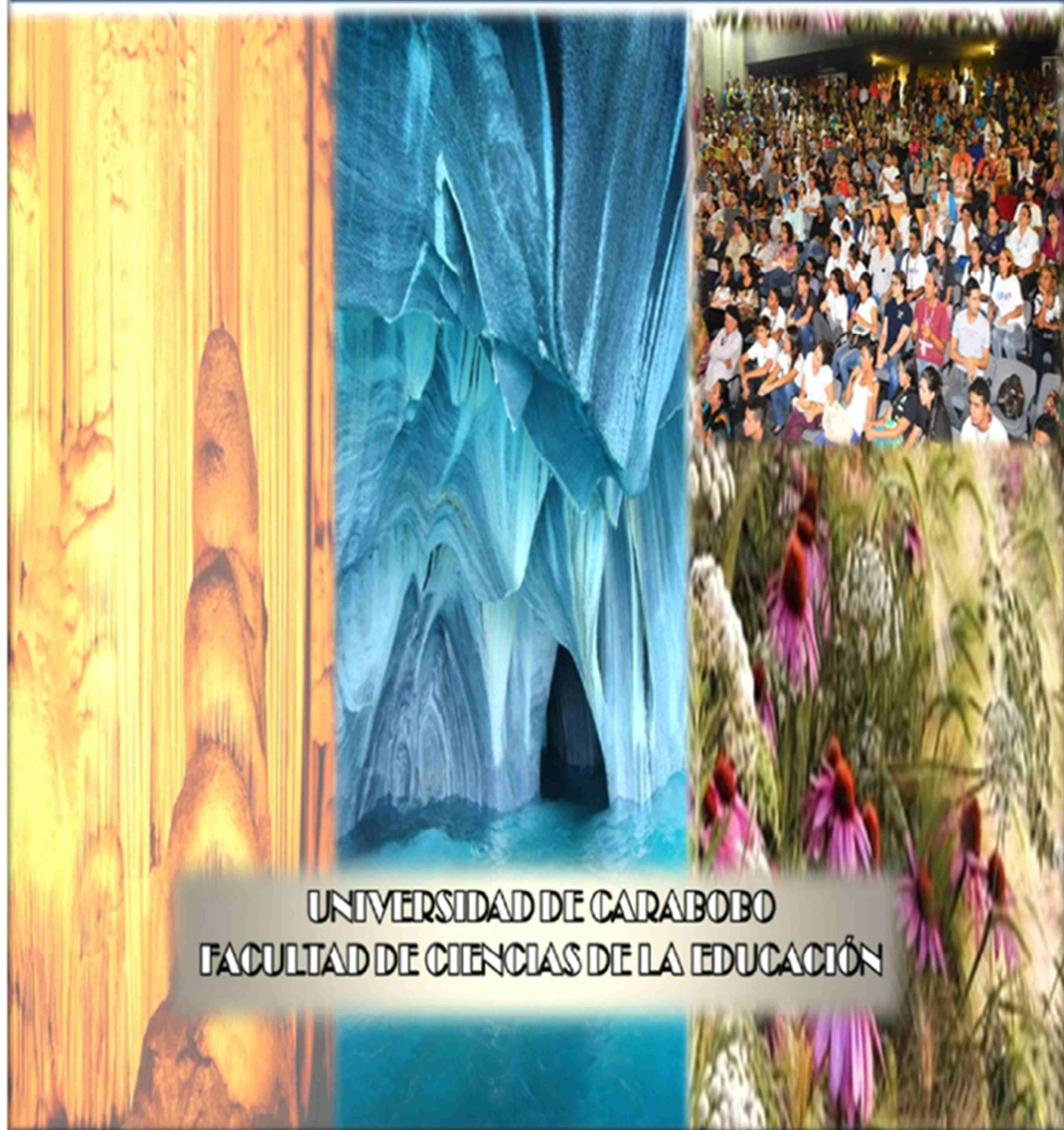
# HOMOTECIA



CÁTEDRA DE CÁLCULO - DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA y FÍSICA - FACULTAD DE CIENCIAS DE LA EDUCACIÓN - UNIVERSIDAD DE CARABOBO

© Rafael Ascanio H. - 2009. Hecho el Depósito de Ley. Depósito Legal: PPI2012024055 - I. S. N.: 2244-7385

E- mail: homotecia2002@gmail.com - N° 2 - AÑO 17 Valencia, Viernes 1º de Febrero de 2019



UNIVERSIDAD DE CARABOBO  
FACULTAD DE CIENCIAS DE LA EDUCACIÓN



# HOMOTECIA

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA Y FÍSICA - FACE - UC



CÁTEDRA DE CÁLCULO

## Índice

Editorial.....	1-2
Grandes Matemáticos: <b>TULLIO LEVI-CIVITA</b> .....	3-6
Aportes al conocimiento. Elementos Básicos del Cálculo Integral (7). Integral Indefinida. Las Técnicas de Integración. Resolución de Integrales de Funciones Trigonométricas. Estrategias para la utilización de algunas identidades trigonométricas. Criterios o Reglas útiles para la integración de funciones trigonométricas. Resolución de integrales de funciones trigonométricas utilizando la Fórmula de Euler. Integración de funciones racionales de Seno y de Coseno. Ejercicios resueltos. Ejercicios propuestos. Por: <b>Prof. Rafael Ascanio Hernández -Prof. Próspero González Méndez</b> .....	7-33
Físicos Notables: <b>EDWARD VICTOR APPLETON</b> .....	34
Tesla contra Edison: una rivalidad mitológica. Por: <b>Francisco Doménech</b> .....	35-36
Galileo y su telescopio. Los primeros ojos hacia el espacio. Por: <b>JOANA OLIVEIRA</b> .....	37-38
Químicos Destacados: <b>WILLIAM FRANCIS GIAUQUE</b> .....	39
Dactiloscopia: tras la huella del crimen. El origen de la dactiloscopia, la ciencia que compara las huellas dactilares. Por: <b>DORY GASCUEÑA</b> .....	40-41
Aquí se habla de ciencia. (Historia de una fotografía). Por: <b>MILAGROS SOCORRO</b> .....	42-44
Venezuela, personajes, anécdotas e historia. <b>JACINTO LARA</b> .....	45
Estudios podrían revelar cómo y cuándo fue escrita La Biblia. Por: <b>LUIGI SÁNCHEZ</b> .....	46
Galería: <b>CURTIS TRACY MCMULLEN</b> .....	47-49

LAS IDEAS Y OPINIONES DE LOS AUTORES DE LOS ARTÍCULOS QUE PUBLICAMOS EN HOMOTECIA SON RESPONSABILIDAD DE LOS MISMOS. SI ALGÚN LECTOR TIENE OBJECIONES SOBRE ÉSTAS, AGRADECEMOS NOS HAGA LLEGAR SUS COMENTARIOS A TRAVÉS DE NUESTRA DIRECCIÓN ELECTRÓNICA, [homotecia2002@gmail.com](mailto:homotecia2002@gmail.com).

Diseño de Portada y Montaje Gráfico: R. A. A. H.

La mayoría de las imágenes que aparecen en esta publicación, son obtenidas de Google, Facebook y MSN, vía Internet.

Para el acceso a todos los números publicados de la Revista HOMOTECIA, conectarse al enlace:  
<http://servicio.bc.uc.edu.ve/homotecia/index.htm> > Sección: MULTIDISCIPLINARIAS

Revista HOMOTECIA  
© Rafael Ascanio H. – 2009  
Hecho el Depósito de Ley.  
Depósito Legal:  
PPI2012024055  
I. S. S. N.: 2244-7385

e-mail:  
[homotecia2002@gmail.com](mailto:homotecia2002@gmail.com)

Publicación Mensual  
Revista de acceso libre

Publicada por:  
CÁTEDRA DE CÁLCULO  
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA Y FÍSICA  
FACULTAD DE CIENCIAS DE LA EDUCACIÓN  
UNIVERSIDAD DE CARABOBO

DIRECTOR–EDITOR:  
Profesor Rafael Ascanio Hernández

SUB-DIRECTOR:  
Profesor Próspero González Méndez

COORDINADORES DE PUBLICACIÓN:  
Profesor Rafael Ascanio Hernández  
Profesor Próspero González Méndez

COMISIÓN  
ARCHIVO Y REGISTRO HISTÓRICO  
Profesora María del Carmen Padrón  
Profesora Zoraida Villegas  
Profesora Ivel Páez

COMISIÓN REVISORA DE MATERIAL A PUBLICAR:

Profesora Elda Rosa Talavera de Vallejo  
Profesora Omaira Naveda de Fernández  
Profesor José Tadeo Morales

Nº 2 - AÑO 17 - Valencia, Viernes 1º de Febrero de 2019

## EDITORIAL

Comenzamos este editorial haciéndonos la siguiente pregunta: ¿el proceso educacional venezolano enmarcado en la estructura de nuestro sistema educativo permite la formación de ciudadanos competentes y eficientes? Esta pregunta no se hace teniendo un trasfondo político sino que tiene que ver con el desarrollo de una sociedad que en diferentes momentos de su devenir histórico ha sido afectada por factores internos y externos relacionados con lo social, lo económico y sumamente muy importante, por los factores tecnológicos, avances y logros, que afectan a la sociedad venezolana; situación que también ha afectado a otras sociedades del mundo, significando desarrollo para los países que pueden acceder a la tecnología y para las que no, estancamiento y atraso.

Los analistas teóricos que se han dedicado a estudiar este hecho social en Venezuela, tratan de hacerlo desde un punto de vista *objetivo crítico*, concluyendo que lo bueno o lo malo que pueda tener el proceso educativo nacional, radica en la práctica cultural que el ciudadano venezolano ha estado viviendo. Los analistas menos optimistas señalan que en Venezuela, sobre todo entre los jóvenes del país, se practican valores éticos y morales degradados, es decir solo sirven para mediar sobre los intereses personales. Por ello la cultura como vía para el crecimiento humano se ha deformado y se ha convertido en un camino que permite incorporarse a las *tribus ciudadanas*, que se caracterizan porque todo aquel que desee estar dentro de las mismas debe someterse y practicar las *conductas grupales* que los líderes de estos grupos imponen, aun sientan rechazo por las mismas.

Como muchos de estos analistas ya han pasado o están por pasar su etapa de juventud, se les califica de retrógrados. Ellos se defienden acotando que la mayoría de ellos vivió su juventud entre las décadas de los años cincuenta y la de los años sesenta del siglo XX, cuando a pesar de Venezuela vivir el inicio del esplendor de una creciente bonanza petrolera, lo más avanzado de la tecnología de la comunicación a lo que un joven de la época podía tener acceso, mayormente estaba constituido por un aparato de radio, un televisor a blanco y negro, un radio transistor portátil con audífonos, un equipo de sonido para discos de acetato, un equipo grabador reproductor de dos carretes para cintas, una grabadora reproductora de casetes, máquinas de escribir mecánicas o eléctricas de teclados simples, cámaras fotográficas sencillas, calculadoras para operaciones básicas; es decir los jóvenes venezolanos de esos tiempos solo utilizaban una tecnología comunicacional muy sencilla.

Como puede detallarse, con este tipo de equipos era poco frecuente ver en un joven una *conducta adictiva* en el uso de los mismos. Así se hizo costumbre entre ellos la *interacción persona a persona*, donde además de realizar actividades recreativas propias de su edad, realizaban entre ellos competencias de conocimientos sobre matemática, física, química, biología, literatura, historia, en sociales y se atrevían también a tratar de llevar conversaciones en inglés o en francés para medir cuánto dominaban de estos idiomas producto de su formación escolar. Estos hábitos complementaron la educación formal que recibían en las instituciones educativas a las que asistían, y luego al ingresar a los institutos universitarios para seguir una carrera o alguna otra institución para aprender un oficio, el bagaje cultural y académico que manejaban le hacían más fácil su transitar por esta etapa.

¿Podemos esperar en la actualidad estos mismos resultados con los ciudadanos que viven su juventud en estas primeras décadas del siglo XXI? Realmente no se puede decir que esta generación de jóvenes que creció desde los años medios del siglo XX produjo resultados óptimos. Sí puede afirmarse que resultaron ser buenos profesionales cuyo trabajo sirvió en su momento para satisfacer la estructura socioeconómica nacional. Aunque en el área de sociales y humanidades se considera haber alcanzado logros que se correspondían con la vanguardia mundial, su formación no condujo a lograr la profusión de genios creadores e innovadores que el país necesitaba en ciencias, tecnología e industria.

---

(VIENE DE LA PÁGINA ANTERIOR)

De hecho sí los hubo pero muy pocos y mayormente surgían por iniciativas y capacidades personales; pero en su propio país su significado e importancia no fueron considerados y tuvieron que marchar al exterior donde sí fueron apreciados y en donde se le dio aplicabilidad a sus aportes científicos. Así, al no disponer de un capital humano capacitado para ello, Venezuela ha estado bailando entre el *subdesarrollo* y el *desarrollo* pero al no poder resolver este *conflicto*, el país lo que ha estado padeciendo hasta los actuales momentos es un proceso de *antidesarrollo*. Es un acierto concluir que esto ha sucedido porque existen debilidades en nuestro sistema educativo y evidentemente tiene que ver con los diseños curriculares que se han aplicado.

¿Pero qué está pasando con nuestra juventud actual? Nuestras generaciones de jóvenes del siglo XXI, desde niños se encontraron con el vertiginoso crecimiento de una tecnología comunicacional que produjo y produce innovaciones espectaculares, pero existe una gravedad en el uso de los mismos, algo que no previnieron quienes se preocuparon por desarrollar alta tecnología (*tecnología de punta*). Desde equipos para video-juegos, películas, computadores de escritorio, laptops, hasta las últimas generaciones de teléfonos celulares que desplazaron rápidamente equipos similares que todavía pueden ser útiles. El complemento esencial de todo esto ha sido el desarrollo de la red electrónica, *Internet*, que así como ha permitido el exitoso crecimiento del mundo comunicacional, ha ayudado a fomentar *hábitos adictivos* entre nuestros jóvenes.

Ciertamente, el uso de Internet para obtener información sobre cualquier conocimiento disciplinario es confiable y además de gran amplitud. ¡Imagínense a los jóvenes de mediados del siglo XX con todas estas ventajas!, y actuando como lo hicieron en su época juvenil ¡cuánto hubieran logrado!

Hoy vemos que nuestros jóvenes actuales utilizan mayormente estas ventajas tecnológicas para acciones poco académicas: saben más de los chismes de la farándula de moda, saben y conocen los nombres y la vida de los artistas famosos, pero nada de historia, literatura o matemáticas, entre otras disciplinas. Hablan más o menos el español, tienen pésima ortografía, odian leer libros, no saben hacer operaciones con fracciones, son expertos en “copiarse” durante los exámenes y burlar normas ante los ojos de padres y educadores. Pasan más tiempo viendo y aprendiendo las frivolidades que circulan en la Internet, “clavados” frente al televisor viendo partidos de fútbol, beisbol o básquet, que estudiando y leyendo; son ineficaces para comprender lo que leen; hay casos en que esto los hace creer que un jugador de fútbol o beisbol es superior a un científico. Lo que citamos aquí, quizás es lo menos grave del asunto.

Son los llamados *homo-videos*, ya que no están socializados adecuadamente, solamente están alienados por el uso del iPhone y Android, las tablets, el skate, el facebook, Instagram, los chats, donde sólo hablan de las mismas tonterías enumeradas en el párrafo anterior o “pegado” a los juegos informáticos, en un claro aislamiento que se conoce como *autismo cibernético* y que atenta contra la libertad, la educación, contra su autoestima, autonomía, contra el respeto a sus padres o al prójimo, contra el medio ambiente, la solidaridad, la cultura, y promueven un egoísmo alarmante dejando una sociedad ciega y sin rumbo.

No somos contrarios al desarrollo y uso de la tecnología comunicacional. Pero nos oponemos al uso que se ha permitido que los jóvenes hagan de la misma. Vuelven a relucir las condiciones culturales y socioeconómicas que han moldeado a la sociedad venezolana desde hace mucho tiempo. De nuevo debemos volver la vista hacia nuestro sistema educativo y el diseño curricular que en este se maneja. Tenemos mucho trabajo por hacer.

---

## Reflexiones

*“En Latinoamérica debemos enfrentar constantemente la falta de sensibilidad de los funcionarios públicos, muchos de los cuales están lejos de comprender la importancia que tiene el impulsar programas culturales ambiciosos que benefician el desarrollo integral de nuestras comunidades. Pareciera que aún nos llevará mucho tiempo el que los políticos de turno entiendan que sin cultura, no hay desarrollo posible”.*

EDUARDO DI MAURO en “Mi pasión por los títeres. Memorias de un titiritero latinoamericano”. (2009). Pp. 94-95. Fundación Editorial El perro y la rana. Caracas-Venezuela.

---

## Los Grandes Matemáticos



**TULLIO LEVI-CIVITA**  
(1873-1941)

**Nació el 29 de marzo de 1873 en Padua, Veneto; y murió el 29 de diciembre de 1941 en Roma; ambas localidades en Italia.**

El padre de Tullio Levi-Civita fue Giacomo Levi-Civita, quien era abogado. De hecho Giacomo fue más tarde, en 1908, designado como senador italiano. Tullio, nacido en una familia judía, asistió a la escuela secundaria en Padua donde mostró sobresalientes habilidades. Luego estudió en la Facultad de Matemáticas de la Universidad de Padua donde se matriculó en 1890. Dos de sus maestros fueron Giuseppe Veronese y Ricci-Curbastro, y Levi-Civita más tarde realizó trabajos en colaboración con este último. Él escribió una disertación, que fue supervisada por Ricci-Curbastro, sobre invariantes absolutos pero esto también marca el comienzo de su uso del cálculo tensorial [30]:

*Reuniendo el algoritmo de Ricci-Curbastro con algunos resultados de la teoría de grupos de transformación de Lie, Levi-Civita extendió la teoría de invariantes absolutos a casos más generales a las consideradas por Ricci-Curbastro.*

Levi-Civita se graduó en 1892 y su disertación fue publicada al año siguiente después de haberle hecho algunos cambios menores. Obtuvo su certificación para enseñar en 1894 y el año siguiente fue nombrado profesor adjunto a la Facultad de Ciencias de la Universidad de Parvia.

Levi-Civita fue nombrado Jefe de la Cátedra de Mecánica Racional de Padua en 1898, un cargo en el que permaneció durante 20 años. Sin embargo varias veces durante estos veinte años se realizaron intentos para trasladarlo a Roma. En particular en 1909, Castelnuovo se esforzó bastante para trasladarlo, pero Levi-Civita estaba feliz permaneciendo en Padua. Levi-Civita era un pacifista con ideas socialista firmes y bien pudo haber sido que él sentía que Padua era adecuada a su personalidad mejor que Roma en aquel tiempo. Por supuesto fue un matemático excepcional con una impresionante reputación internacional por lo que era natural que la Universidad de Roma intentara atraerlo. Mientras enseñaba en Padua, Libera Trevisani fue una de sus alumnos y con ella se casó en 1914.

Después de terminada la I Guerra Mundial, la Universidad de Roma hizo grandes esfuerzos para fortalecer su enseñanza e investigación y muchos científicos fueron atraídos allí. Levi-Civita siempre fue muy internacional en sus expectativas y la capacidad de Roma para atraer estudiantes de calidad superior desde el extranjero debe haberle dado razones para ahora sí querer trasladarse allí. En 1918 fue nombrado Jefe de la Cátedra de Análisis Superior en Roma, y dos años más tarde fue nombrado Jefe de Cátedra e Mecánica.

Los años siguientes después de finalizada la Primera Guerra Mundial fueron difíciles para los científicos que querían prestar su colaboración en todos aquellos países en igualdad de condiciones. El Presidente de los Estados Unidos, Woodrow Wilson, formuló catorce puntos el 8 de enero de 1917 para darle fin a la Primera Guerra Mundial. Estos no habían sido discutidos y acordados con los aliados. El 4 de octubre de 1918, el gobierno alemán entró en contacto con Wilson para iniciar las negociaciones de paz y Wilson les presentó los catorce puntos. Después de casi tres semanas de negociaciones, sin que los otros aliados estuvieran involucrados, Alemania aceptó los catorce puntos el 23 de octubre. Los británicos y franceses estaban evidentemente descontentos con algunos de los catorce puntos y a esto le siguió un período difícil. En medio de todo, Wilson propuso otra idea a Gran Bretaña y a Francia, es decir, que una estructura se debía poner en marcha para restablecer la cooperación internacional en ciencia. Su propuesta fue establecer un Consejo de Investigación Internacional que sería organizado por rondas de Uniones Internacionales para cada una de las diversas materias científicas. Estas Uniones Internacionales operarían a través de comités nacionales en los países de las once Potencias Aliadas, con estos Comités Nacionales recibiendo apoyo de sus respectivas Academias Nacionales de Ciencias y Consejo Nacionales de Investigación. Las Uniones Internacionales tendrían el poder de invitar a países neutrales a unírseles, pero no invitarían aquellos países contra quienes las potencias aliadas lucharon en la guerra. La propuesta de Wilson fue aceptada y en 1919 se fundó el Consejo de Investigación Internacional. Alemania, Austria, Hungría y Bulgaria no podían ser miembros bajo los términos del Consejo de Investigación Internacional. Levi-Civita se opuso a esta decisión, razón por la cual escribió una carta en 1920 dirigida a Sommerfeld:

*Siempre he sido, y no sólo en la ciencia, un internacionalista convencido... estamos de acuerdo en un punto esencial - y me complace sobre él - que las relaciones científicas y las relaciones personales entre los científicos procedentes de diferentes países no deben ser perturbadas por contingencias o recuerdos de desacuerdos nacionales o estatales.*

Cuando Von Kármán se dirigió a Levi-Civita en 1922 para sugerirle una reunión científica sobre dinámica de los fluidos, sabía que esa reunión no podía ser un congreso oficial si científicos alemanes e italianos estaban involucrados por lo que propuso que fuera una reunión informal. Levi-Civita estaba entusiasmado pero cuando la reunión tuvo lugar en Innsbruck en septiembre de ese año, los únicos científicos presentes de las potencias aliadas fueron Levi-Civita y los miembros de su grupo de investigación. Esto, sin embargo, marcó el inicio de los Congresos Internacionales de Mecánica Aplicada con la decisión adoptada en la reunión de Innsbruck de incluir todas las áreas de la mecánica aplicada y el primer Congreso pleno tuvo lugar en Delft en 1924. El papel de Levi-Civita en su organización, es descrita en detalle por Battimelli en la referencia [10]. Él escribe:

*Tullio Levi-Civita fue uno de los protagonistas en la creación, en los años que siguieron a la Primera Guerra Mundial, de los Congresos Internacionales de Mecánica Aplicada y siguió siendo un miembro activo del Comité del congreso hasta el final de su vida. ... Levi-Civita [hizo una importante] contribución a la vida de los Congresos, desde los primeros días de la Conferencia de Innsbruck de 1922 hasta treinta años más tarde [con] su papel en la red internacional creada por la recién nacida institución...*

No fue sólo la situación internacional la que le dio problemas a Levi-Civita, sino también el efecto del totalitarismo y el antisemitismo sobre lo científico y la vida universitaria. Él encontró la situación nacional en Italia, con el ascenso del fascismo, cada vez más difícil. En 1931 se obligó a los profesores italianos firmar un juramento de lealtad al fascismo. Volterra se negó a tomar el juramento y fue despedido. Aunque se opuso profundamente a tales ideas, Levi-Civita preocupado por su familia y su escuela de investigación en Roma, tuvo que firmar a pesar de sus fuertes objeciones morales. Fue profesor en los Estados Unidos en 1933 y en Moscú y Kiev en 1935. En 1936 regresó a los Estados Unidos, como docente en Harvard, en Princeton y en el Instituto Rice. Mientras estaba en Houston, dio una entrevista que fue vista como una crítica a Italia y el cónsul italiano le pidió una aclaratoria. Se intentó revocarle la ciudadanía italiana pero debido a su estatus de líder internacional, el gobierno italiano prefirió no reaccionar demasiado fuerte. Más tarde, en 1936, se celebró el Congreso Internacional de Matemáticos en Oslo, capital de Noruega, pero a Levi-Civita y a todos los demás matemáticos italianos, les fue prohibido asistir por orden de su gobierno. A pesar de esto, Levi-Civita fue nombrado Miembro de la Comisión para el Otorgamiento de las Medallas Fields.

El 5 de septiembre de 1938 se aprobaron las leyes raciales según las cuales todas las personas de origen judío debían ser excluidas de las universidades, escuelas, academias y otras instituciones. Levi-Civita fue despedido de su cátedra, obligado a abandonar el Consejo Editorial de *Zentralblatt für Mathematik* y se le advirtió que no asistiera al 5º Congreso Internacional de Mecánica Aplicada en los Estados Unidos. Él escribió a un ex alumno en mayo de 1939 (leer referencia [30]):

*Vivo como una persona jubilada y no me muevo; excepto en verano, sin embargo, si mis condiciones personales me permiten avanzar. Como tal vez sepa, los judíos han sido expulsados completamente de la vida cultural italiana; en particular, yo no participaré en el "Congreso de Volta" y no estaré en Roma en septiembre.*

Los autores de la referencia [30] escriben:

*En los últimos años de su vida, a pesar de su depresión física y moral, Levi-Civita se mantuvo fiel a los ideales del internacionalismo científico y ayudó a colegas y estudiantes que fueron víctimas del antisemitismo; gracias a él, muchas de estas personas consiguieron trabajo en América del Sur o en los Estados Unidos.*

Levi-Civita tenía un gran dominio de las matemáticas puras, con una particularmente fuerte intuición geométrica que aplicó a una variedad de problemas de matemática aplicada. Uno de sus trabajos en 1895 mejoró el contorno de la fórmula integral de Riemann para los números primos en un intervalo dado. Sin embargo, él es mejor conocido por su trabajo sobre cálculo diferencial absoluto y sus aplicaciones a la teoría de la relatividad. En 1886 publicó un famoso libro en el que desarrolló el cálculo tensorial, siguiendo el trabajo de Christoffel, incluyendo la diferenciación de la covariante. En 1900 publicó junto con Ricci-Curbastro, la teoría de tensores en *Méthodes de calcul différentiel absolu et leurs applications* (Los métodos de cálculo el diferencial absoluto y las aplicaciones) en una forma la cual fue utilizada por Einstein 15 años más tarde. El documento fue solicitado por Klein cuando se reunió con Levi-Civita en Padua en 1899 y, siguiendo la voluntad de Klein, apareció en *Mathematische Annalen*.

Weyl tomó las ideas de Levi-Civita, las completó y las convirtió en una teoría unificada de la gravitación y el electromagnetismo. El trabajo de Levi-Civita fue de suma importancia en la teoría de la relatividad, y él produjo una serie de trabajos tratando elegantemente el problema de un campo gravitatorio estático. Este tema fue discutido en una correspondencia entre Einstein y Levi-Civita. Se puede leer en la referencia [15]:

... las principales cuestiones matemáticas y físicas discutidas por Einstein y Levi-Civita en su correspondencia durante 1915-1917: la formulación variacional de las ecuaciones de campo gravitacional y sus propiedades de la covarianza, y la definición de la energía gravitatoria y la existencia de ondas gravitacionales.

La dinámica analítica fue otro tema estudiado por Levi-Civita, muchos de sus trabajos examinan casos especiales del problema de los tres cuerpos. Él comenzó a publicar sus trabajos sobre el tema en 1903, otro trabajo importante lo publicó en 1906 que consolidó sus resultados anteriores. En 1920 publicó un compendio sobre el problema de los tres cuerpos en *Acta Mathematica*. Luego casi al final de su carrera se interesó por el problema de  $n$ -cuerpo. En 1950 (nueve años después de su muerte) un libro de Levi-Civita titulado *Le problème des  $n$ -corps en relativité générale* (El problema de  $n$ -cuerpo en la relatividad general) fue publicado. H. P. Robertson escribe en un informe:

*Esta excelente monografía sobre el problema de  $n$ -cuerpo en la teoría general de la relatividad fue preparada hace unos diez años, pero su aparición ahora es sumamente oportuna para quienes se han preocupado con uno u otro aspecto del problema. Sus logros más importantes son dos: una derivación de las ecuaciones de movimiento de  $n$  punto de masas, libre de los sutiles errores que asedian a la mayoría de los tratamientos normales; y una cuidadosa discusión de las posibles contribuciones, en la aproximación Einsteiniana, del tamaño finito y la constitución interna de los cuerpos implicados.*

También escribió sobre la teoría de sistemas de ecuaciones ordinarias y diferenciales parciales. En la referencia [18] los autores argumentan que Levi-Civita estaba interesado en la teoría de la estabilidad y análisis cualitativo de ecuaciones diferenciales ordinarias por tres razones: su interés por la geometría y los modelos geométricos; su interés por la mecánica clásica y la mecánica celeste, en particular, el problema de los tres cuerpos; y su interés en la estabilidad del movimiento en el dominio de la mecánica analítica. Él lo agregó a la teoría de Cauchy y Kovalevskaya y escribió sobre este trabajo en un excelente libro, escrito en 1931.

El interés de Levi-Civita en hidrodinámica comenzó temprano en su carrera con su trabajo *Note on the resistance of fluids* (Nota sobre la resistencia de los fluidos) que apareció en 1901. Él trabajó más adelante sobre ondas en un canal y su prueba de la existencia de ondas irracionales fue una contribución importante a una interrogante de larga data. En la referencia [33], el trabajo de Levi-Civita con su estudiante L. S. Da Rios sobre la dinámica del filamento de vórtice tridimensional se discute en detalle. Ricca escribe:

*Sus resultados incluyen la concepción de la aproximación de inducción localizada para la velocidad inducida de filamentos finos de vórtices, la derivación de las ecuaciones intrínsecas de movimiento, la teoría del potencial asintótico aplicada a los tubos de vórtice, la derivación de soluciones estacionarias en forma de vórtices helicoidales y configuraciones de vórtice generado por lazo y el análisis de estabilidad de los filamentos de vórtice circular. A la luz de los progresos modernos en mecánica de fluidos no lineal, su trabajo huelga de modernidad y de profundidad de los resultados. ... El trabajo de Levi-Civita sobre potencial asintótico para tubos delgados es el núcleo de la formulación matemática de la teoría del potencial y teoría de la capacidad.*

En 1933 Levi-Civita contribuyó a las ecuaciones de la teoría cuántica de Dirac.

La Real Sociedad le confirió la Medalla Sylvester a Levi-Civita en 1922, mientras que en 1930 fue elegido como Miembro Extranjero. Él también fue Miembro Honorario de la Sociedad Matemática de Londres, la Sociedad Real de Edimburgo y la Sociedad de Matemática de Edimburgo. Asistió al Coloquio de 1930 de la sociedad matemática de Edimburgo en Saint Andrews.

Después de ser despedido de su cargo, este golpe afectó pronto su salud y desarrolló problemas cardíacos graves. Él murió de un derrame cerebral. Nastasi y Tazzioli escriben [30]:

*Fue uno de los profesores más eminentes de Italia durante 40 años y atrajo estudiantes procedentes de todos los países, que animó con paciencia y nobleza. Bondad y modestia eran manifestaciones de su alma. Muchas personas se beneficiaron de su bondad y conservan un recuerdo imborrable de su personalidad extraordinaria.*

---

#### REFERENCIAS.-

1. M Gliozzi, Biography in *Dictionary of Scientific Biography* (New York 1970-1990).  
<http://www.encyclopedia.com/doc/1G2-2830902594.html>
2. Biography in *Encyclopaedia Britannica*.  
<http://www.britannica.com/biography/Tullio-Levi-Civita>

#### LIBROS:

3. T Levi-Civita, *Opere matematiche. Memorie e note. Vol. I. 1893-1900, Pubblicate a cura dell'Accademia Nazionale dei Lincei* (Nicola Zanichelli Editore, Bologna, 1954).
  4. T Levi-Civita, *Opere matematiche. Memorie e note. Vol. II. 1901-1907, Pubblicate a cura dell'Accademia Nazionale dei Lincei* (Nicola Zanichelli Editore, Bologna, 1956).
-

5. T Levi-Civita, *Opere matematiche. Memorie e note. Vol. III. 1908-1916*, Pubblicate a cura dell'Accademia Nazionale dei Lincei (Nicola Zanichelli Editore, Bologna, 1957).
6. T Levi-Civita, *Opere matematiche. Memorie e note. Vol. IV. 1917-1928*, Pubblicate a cura dell'Accademia Nazionale dei Lincei (Nicola Zanichelli Editore, Bologna, 1960).
7. T Levi-Civita, *Opere matematiche. Memorie e note. Vol. V. 1929-1937*, Pubblicate a cura dell'Accademia Nazionale dei Lincei (Nicola Zanichelli Editore, Bologna, 1970).

## ARTÍCULOS:

8. C Agostinelli, Nel centenario della nascita di Tullio Levi-Civita, *Atti Accad. Sci. Torino Cl. Sci. Fis. Mat. Natur.* **108** (1974), 13-37.
9. U Amaldi, Commemorazione del socio Tullio Levi-Civita, *Atti Accad. Naz. Lincei. Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Nat.* (8) **1** (1946), 1130-1155.
10. G Battimelli, 'With no official connection': Tullio Levi-Civita and the International Congresses of Applied Mechanics, *Riv. Stor. Sci.* (2) **4** (1) (1996), 51-80.
11. U Bottazzini, Ricci and Levi-Civita: from differential invariants to general relativity, in *The symbolic universe, Milton Keynes, 1996* (Oxford Univ. Press, New York, 1999), 241-259.
12. A Buhl, Obituary: Tullio Levi-Civita, 1873-1941, *Enseignement Math.* **38** (1942), 350-351.
13. E Cartan, Notice sur M Tullio Levi-Civita, *C. R. Acad. Sci. Paris* **215** (1942), 233-235.
14. C Cattani, Levi-Civita's influence on Palatini's contribution to general relativity, in *The attraction of gravitation: new studies in the history of general relativity, Johnstown, PA, 1991* (Birkhäuser Boston, Boston, MA, 1993), 206-222.
15. C Cattani and M De Maria, Geniality and rigor: the Einstein - Levi-Civita correspondence (1915-1917), *Riv. Stor. Sci.* (2) **4** (1) (1996), 1-22.
16. C Cattani and M De Maria, Einstein's path toward the generally covariant formulation of gravitational field equations: the contribution of Tullio Levi-Civita, in *Proceedings of the fourth Marcel Grossmann meeting on general relativity, Part A, B, Rome, 1985* (North-Holland, Amsterdam, 1986), 1805-1826.
17. L Dell'Aglio, The role of applications in the works of Levi-Civita, *Riv. Stor. Sci.* (2) **4** (1) (1996), 23-50.
18. L Dell'Aglio and G Israel, The themes of stability and qualitative analysis in the works of Levi-Civita and Volterra (Italian), *Italian mathematics between the two world wars* (Pitagora, Bologna, 1987), 125-141.
19. L Dell'Aglio and G Israel, La théorie de la stabilité et l'analyse qualitative des équations différentielles ordinaires dans les mathématiques italiennes: le point de vue de Tullio Levi-Civita, in *Cahiers du Séminaire d'Histoire des Mathématiques* **10** (Univ. Paris VI, Paris, 1989), 283-321.
20. A Einstein, Tullio Levi-Civita, *Annuario della Pontificia Accademia delle Scienze* **1** (1936-37), 496-511.
21. D Galletto, Tullio Levi-Civita (1873-1941) (Italian), *Boll. Un. Mat. Ital.* (4) **8** (1973), 373-390.
22. W V D Hodge, Obituary: Tullio Levi-Civita, *J. London Math. Soc.* **18** (1943), 107-114.
23. W V D Hodge, Obituary: Tullio Levi-Civita. 1873-1941, *Obituary Notices of Fellows of the Royal Society of London* **4** (1942), 151-165.
24. G Krall, Tullio Levi-Civita nella meccanica del suo tempo, *Civiltà delle Macchine* **1** (4) (1953), 33-37.
25. G Krall, Tullio Levi-Civita e la relatività, *Civiltà delle Macchine* **1** (6) (1953), 42-48.
26. B Levi, Obituary: Tullio Levi-Civita (1873-1941) (Spanish), *Math. Notae* **2** (1942), 155-159.
27. A Masotti, Bibliografie di Tullio Levi-Civita e Vito Volterra, *Rend. Sem. Mat. Fis. Milano* **17** (1946), 16-61.
28. M Montagnana, Tullio Levi-Civita nel centenario della nascita, *Archimede* **25** (1973), 318-322.
29. P Nastasi, Aspects of Tullio Levi-Civita's life in Rome (1919-1941), *Riv. Stor. Sci.* (2) **4** (1) (1996), 81-142.
30. P Nastasi and R Tazzioli, Toward a scientific and personal biography of Tullio Levi-Civita (1873-1941), *Historia Math.* **32** (2) (2005), 203-236.
31. Obituary: Tullio Levi-Civita (Spanish), *Revista Ci., Lima* **43** (1941), 683-685.
32. Obituary: Tullio Levi-Civita, *Ann. Mat. Pura Appl.* (4) **25** (1946), iii-viii.
33. R Ricca, The contributions of Da Rios and Levi-Civita to asymptotic potential theory and vortex filament dynamics, *Fluid Dynam. Res.* **18** (5) (1996), 245-268.
34. L Roth, Tullio Levi-Civita, *Nature* **149** (1942), 266.
35. H S Ruse, Obituary: Tullio Levi-Civita, *Edinburgh Math. Notes 1943* **33** (1943), 19-24.
36. C Somigliana, Obituary: Tullio Levi-Civita e Vito Volterra, *Rend. Sem. Mat. Fis. Milano* **17** (1946), 1-15.
37. D J Struik, Schouten, Levi-Civita, and the emergence of tensor calculus, in *The history of modern mathematics, Vol. II, Poughkeepsie, NY, 1989* (Academic Press, Boston, MA, 1989), 99-105.
38. R Tazzioli, Gheorghe Vrănceanu's life and work in the correspondence Vrănceanu - Levi Civita, in *Proceedings of the Centennial 'G Vrănceanu', Part II, Bucharest, 2000, An. Univ. Bucuresti Mat. Inform.* **50** (2) (2001), 219-226.

Versión en español por R. Ascanio H. del artículo en inglés de J. J. O'Connor y E. F. Robertson sobre "Tullio Levi-Civita" (Agosto 2005).

FUENTE: MacTutor History of Mathematics. [<http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Levi-Civita.html>].



**Tullio Levi-Civita**

Imágenes obtenidas de:



**Aportes al conocimiento****Elementos Básicos del Cálculo Integral (8)**

Por: Prof. Rafael Ascanio Hernández - Prof. Próspero González Méndez

**ÍNDICE**

Integral Indefinida. Las Técnicas de Integración.

Resolución de Integrales de Funciones Trigonométricas.

Estrategias para la utilización de algunas identidades trigonométricas. Criterios o Reglas útiles para la integración de funciones trigonométricas.

Resolución de integrales de funciones trigonométricas utilizando la Fórmula de Euler Fórmula de Euler.

Integración de funciones racionales de Seno y de Coseno.

Ejercicios resueltos. Ejercicios propuestos

**INTEGRAL INDEFINIDA. LAS TÉCNICAS DE INTEGRACIÓN.****RESOLUCIÓN DE INTEGRALES DE FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS.**

Como se pudo observar en las tablas de fórmulas elementales de integración presentado en el artículo correspondiente a integrales de resolución inmediata, a cada regla de derivación de funciones trigonométricas le corresponde una de integración.

Pero al resolver integrales que en el integrando presentan funciones trigonométricas, es posible conseguir que muchas de éstas no se presenten de resolución inmediata. Es necesario, entonces, recurrir a la utilización de las *identidades y factorizaciones trigonométricas*, así como a criterios o reglas de sustitución adecuados.

**Estrategias para la utilización de identidades trigonométricas.-**

- Para integrales de la forma  $\int Tg^n u du$  o  $\int Cotg^n u du$ , si "n" es un número entero, se escribe el integrando de la siguiente manera:

$$(*) Tg^n u = Tg^{n-2} u \cdot Tg^2 u = Tg^{n-2} u \cdot (Sec^2 u - 1)$$

$$(*) Cotg^n u = Cotg^{n-2} u \cdot Cotg^2 u = Cotg^{n-2} u \cdot (Cosec^2 u - 1).$$

Esta estrategia conduce a que aparezca en el elemento de integración, el diferencial de la tangente o el de la cotangente; así es posible un cambio donde la nueva variable es la tangente o la cotangente. El procedimiento se repite tantas veces como sea necesario.

**Ejemplo.-**

$$\begin{aligned} I &= \int Tg^5 x dx = \int Tg^3 x \cdot Tg^2 x dx = \int Tg^3 x \cdot (Sec^2 x - 1) dx = \int (Tg^3 x \cdot Sec^2 x - Tg^3 x) dx = \int Tg^3 x \cdot Sec^2 x dx - \int Tg^3 x dx = \\ &= \int Tg^3 x \cdot Sec^2 x dx - \int Tg x \cdot Tg^2 x dx = \int Tg^3 x \cdot Sec^2 x dx - \int Tg x \cdot (Sec^2 x - 1) dx = \int Tg^3 x \cdot Sec^2 x dx - \int (Tg x \cdot Sec^2 x - Tg x) dx = \\ &= \int Tg^3 x \cdot Sec^2 x dx - \int Tg x \cdot Sec^2 x dx + \int Tg x dx = \dots \end{aligned}$$

- Para integrales de la forma  $\int Sec^n u du$  o  $\int Cosec^n u du$ , se considera lo siguiente:

a) Si "n" es un número entero positivo impar, se utiliza la integración por partes.

Siguiendo la fórmula para la integración por partes,  $\int u \cdot dv = u \cdot v - \int v \cdot du$ , el elemento de integración se arregla para obtener a "u" y a "dv".

**Ejemplo.-**

$$I = \int Sec^3 x dx = \int Sec x \cdot Sec^2 x dx = \int Sec x \cdot d(Tg x) dx = \int u \cdot dv = \dots$$

b) Si "n" es un número entero positivo par, se reescribe el integrando de la siguiente manera:

$$(*) Sec^n u = Sec^{n-2} u \cdot Sec^2 u = (\sqrt{1 + Tg^2 u})^{n-2} \cdot Sec^2 u = (1 + Tg^2 u)^{\frac{n-2}{2}} \cdot Sec^2 u$$

$$(*) Cosec^n u = Cosec^{n-2} u \cdot Cosec^2 u = (\sqrt{1 + Cotg^2 u})^{n-2} u \cdot Cosec^2 u = (1 + Cotg^2 u)^{\frac{n-2}{2}} \cdot Cosec^2 u.$$

Esta estrategia también conduce a que aparezca en el elemento de integración el diferencial de la tangente o de la cotangente; así es posible un cambio de variable donde la nueva variable es la tangente o la cotangente.

**Ejemplo.-**

$$I = \int Sec^6 x dx = \int Sec^4 x \cdot Sec^2 x dx = \int (\sqrt{1 + Tg^2 x})^4 \cdot d(Tg x) dx = \int (1 + Tg^2 x)^2 \cdot d(Tg x) dx = \dots$$

- Para integrales con algunas de las siguientes formas:

$$\int \text{Sen}(mu) \cdot \text{Cos}(nu) du, \quad \int \text{Sen}(mu) \cdot \text{Sen}(nu) du, \quad \int \text{Cos}(mu) \cdot \text{Cos}(nu) du \quad \text{con } m \neq n.$$

Los productos del integrando se pueden transformar en sumas mediante la aplicación de las fórmulas de Werner, que se muestran a continuación:

$$* \text{Sen}(mu) \cdot \text{Cos}(nu) = \frac{1}{2} [\text{Sen}(m-n)u + \text{Sen}(m+n)u]$$

$$* \text{Sen}(mu) \cdot \text{Sen}(nu) = \frac{1}{2} [\text{Cos}(m-n)u - \text{Cos}(m+n)u]$$

$$* \text{Cos}(mu) \cdot \text{Cos}(nu) = \frac{1}{2} [\text{Cos}(m-n)u + \text{Cos}(m+n)u]$$

Un detalle a considerar es que la función seno es impar y la función coseno es par; por lo que se cumple que:

$$\begin{cases} \text{Sen}(-\alpha) = -\text{Sen}\alpha \\ \text{Cos}(-\alpha) = \text{Cos}\alpha \end{cases}$$

### Ejemplos.-

$$a) I = \int \text{Sen}(3x) \cdot \text{Cos}(5x) dx = \int \frac{1}{2} [\text{Sen}(-2x) + \text{Sen}(8x)] dx = \frac{1}{2} \int [-\text{Sen}(2x) + \text{Sen}(8x)] dx = -\frac{1}{2} \int \text{Sen}(2x) dx + \frac{1}{2} \int \text{Sen}(8x) dx = \dots$$

$$b) I = \int \text{Sen}(4x) \cdot \text{Sen}(7x) dx = \int \frac{1}{2} [\text{Cos}(-3x) - \text{Cos}(11x)] dx = \frac{1}{2} \int [\text{Cos}(3x) - \text{Cos}(11x)] dx = \frac{1}{2} \int \text{Cos}(3x) dx - \frac{1}{2} \int \text{Cos}(11x) dx = \dots$$

### Criterios o Reglas útiles para la integración de funciones trigonométricas.-

**Caso 1)** Para integrales de la forma  $\int \text{Sen}^m v \cdot \text{Cos}^n v dv$ , si “m” es impar se sustituye  $\text{Cos} v = u$ . Si “n” es impar se sustituye  $\text{Sen} v = u$ .

### Ejemplos.-

$$a) \int \text{Sen}^3 x \cdot \text{Cos}^4 x dx = \int \text{Sen}^2 x \cdot \text{Sen} x \cdot \text{Cos}^4 x dx = \int (1 - \text{Cos}^2 x) \cdot \text{Cos}^4 x \cdot \text{Sen} x dx = \int (1 - u^2) \cdot u^4 [-du] = \dots$$

En este ejemplo, m es impar (m=3). Esta condición permite descomponer  $\text{Sen}^3 x$  en  $\text{Sen}^2 x \cdot \text{Sen} x$ ; es decir, se hace aparecer en el elemento de integración una expresión relacionada con el diferencial del coseno. Esta es la razón del cambio propuesto:  $\text{Cos} v = u$ .

$$b) \int \text{Sen}^4 x \cdot \text{Cos}^5 x dx = \int \text{Sen}^4 x \cdot \text{Cos} x \cdot \text{Cos}^4 x dx = \int \text{Sen}^4 x (1 - \text{Sen}^2 x)^2 \cdot \text{Cos} x dx = \int u^4 \cdot (1 - u^2)^2 du = \dots$$

En este ejemplo, n es impar (n=5). Esta condición permite descomponer  $\text{Cos}^5 x$  en  $\text{Cos}^4 x \cdot \text{Cos} x$ ; es decir, aparece en el elemento de integración el diferencial seno. Esta es la razón del cambio propuesto:  $\text{Sen} v = u$ .

¿Cuáles otras situaciones se pueden presentar? Primero, que ambos exponentes sean impares: si no está dada alguna sugerencia, obliga a escoger cuál cambio a utilizar. Segundo, que ambos exponentes sean pares: como esta situación no es contemplada en este caso, se recurre al uso de identidades o factorizaciones trigonométricas que permitan la modificación adecuada del integrando.

**Caso 2)** Para integrales de las formas  $\int \text{Tg}^m v \cdot \text{Sec}^n v dv$  ó  $\int \text{Cotg}^m v \cdot \text{Cosec}^n v dv$ , si “n” es par se sustituye  $\text{Tg} v = u$  ó  $\text{Cotg} v = u$ . Si “m” es impar, se sustituye  $\text{Sec} v = u$  ó  $\text{Cosec} v = u$ .

### Ejemplos.-

$$a) \int \text{Tg}^3 x \cdot \text{Sec}^4 x dx = \int \text{Tg}^2 x \cdot \text{Tg} x \cdot \text{Sec}^2 x \cdot \text{Sec}^2 x dx = \int \text{Tg}^2 x \cdot (1 + \text{Tg}^2 x)^2 \cdot x \cdot d(\text{Tg} x) = \int u^3 \cdot (1 + u^2)^2 du = \dots$$

En este ejemplo, n es par (n=4). Esta condición permite descomponer  $\text{Sec}^4 x$  en  $\text{Sec}^2 x \cdot \text{Sec}^2 x$ ; es decir, se hace aparecer en el elemento de integración el diferencial de la tangente. Esta es la razón del cambio propuesto:  $\text{Tg} v = u$ . Igualmente ocurre para la otra opción, cuando aparecen la cotangente y la cosecante.

$$b) \int \text{Tg}^3 x \cdot \text{Sec}^5 x dx = \int \text{Tg}^2 x \cdot \text{Tg} x \cdot \text{Sec}^4 x \cdot \text{Sec} x dx = \int \text{Tg}^2 x \cdot \text{Sec}^4 x \cdot \text{Sec} x \cdot \text{Tg} x dx = \int (\text{Sec}^2 x - 1) \cdot \text{Sec}^4 x \cdot d(\text{Sec} x) = \int (u^2 - 1) u^4 du = \dots$$

En este ejemplo, m es impar (m=5); n es impar pero al ser m impar, es indiferente el que n sea par o impar. Estas condiciones permiten descomponer  $\text{Tg}^3 x$  en  $\text{Tg}^2 x \cdot \text{Tg} x$ , y  $\text{Sec}^5 x$  en  $\text{Sec}^4 x \cdot \text{Sec} x$ , de tal manera que al arreglar el elemento de integración aparece  $\text{Sec} x \cdot \text{Tg} x dx$ , que es el diferencial de la secante. Así, la nueva variable por cambio será la secante:  $\text{Sec} v = u$ .

De manera similar se procede para la otra opción, cuando aparecen la cotangente y la cosecante.

**Ejercicios resueltos.-**

**1. - Hallar**  $\int \text{Sen}^2 x dx$ .

**Solución:**

Resolviendo la integral. Se corresponde con la fórmula fundamental:  $\int \text{Sen}^2 u \cdot du = \frac{1}{2}u - \frac{1}{4}\text{Sen}(2u) + C$ .

Pero el objetivo aquí es deducir esta fórmula.

Se comienza por utilizar en  $I$  la siguiente identidad:  $\text{Sen}^2 u = \frac{1}{2}[1 - \text{Cos}(2u)]$ .

$$I = \int \text{Sen}^2 x dx = \int \frac{1}{2}[1 - \text{Cos}(2x)] dx = \frac{1}{2} \int [1 - \text{Cos}(2x)] dx = \frac{1}{2} \int dx - \frac{1}{2} \int \text{Cos}(2x) dx = (*)$$

(I<sub>1</sub>)

Cambio de Variable en  $I_1$ :  $a = 2x \Rightarrow da = 2dx \Rightarrow \frac{da}{2} = dx$

Volviendo a (\*):

$$(*) = I = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} \int \text{Cosa} \cdot \frac{da}{2} + C = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4} \int \text{Cosa} \cdot da + C = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4} \text{Sen}(2x) + C$$

**2. - Obtener**  $\int \text{Cos}^2(3x) dx$ .

**Solución:**

Resolviendo la integral.

En  $I$  se utiliza la siguiente identidad:  $\text{Cos}^2 u = \frac{1}{2}[1 + \text{Cos}(2u)] \Rightarrow \text{Cos}^2(3x) = \frac{1}{2}[1 + \text{Cos}(6x)]$

Luego:

$$I = \int \text{Cos}^2(3x) dx = \int \frac{1}{2}[1 + \text{Cos}(6x)] dx = \frac{1}{2} \int [1 + \text{Cos}(6x)] dx = \frac{1}{2} \int dx + \frac{1}{2} \int \text{Cos}(6x) dx = (*)$$

(I<sub>1</sub>)

Cambio de Variable en  $I_1$ :  $a = 6x \Rightarrow da = 6dx \Rightarrow \frac{da}{6} = dx$

Volviendo a (\*):

$$(*) = I = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} \int \text{Cosa} \cdot \frac{da}{6} + C = \frac{1}{2}x + \frac{1}{12} \int \text{Cosa} \cdot da + C = \frac{1}{2}x + \frac{1}{12} \text{Sena} + C = \frac{1}{2}x + \frac{1}{12} \text{Sen}(6x) + C$$

**3.- Halle:**  $\int \text{Sen}^2 x \cdot \text{Sen}(7y) dy$ .

**Solución:**

Resolviendo la integral.

En esta integral  $\text{Sen}^2 x$  es una constante.

Cambio de Variable en  $I$ :  $u = 7y \Rightarrow du = 7dy \Rightarrow \frac{du}{7} = dy$

Luego:

$$I = \int \text{Sen}^2 x \cdot \text{Sen}(7y) dy = \text{Sen}^2 x \cdot \int \text{Sen}(7y) dy = \text{Sen}^2 x \cdot \int \text{Senu} \cdot \frac{du}{7} = \frac{\text{Sen}^2 x}{7} \cdot \int \text{Senu} du =$$

$$= -\frac{\text{Sen}^2 x \cdot \text{Cos}u}{7} + C = -\frac{\text{Sen}^2 x \cdot \text{Cos}(7y)}{7} + C$$

**4. - Determinar**  $\int \text{Sen}^3 x dx$ .

**Solución:**

Resolviendo la integral. Se factoriza el integrando.

$$I = \int \text{Sen}^3 x dx = \int \text{Sen}^2 x \cdot \text{Sen} x dx = (*)$$

Se utiliza la siguiente identidad en  $I$ :  $\text{Sen}^2 u = 1 - \text{Cos}^2 u$ .

Volviendo a (\*):

$$(*) = \int (1 - \text{Cos}^2 x) \cdot \text{Sen} x dx = \int \text{Sen} x dx - \int \text{Cos}^2 x \cdot \text{Sen} x dx = (**)$$

(I<sub>1</sub>)



**8.- Resuelva**  $\int \frac{\cos(2w)+1}{\text{Sen}^2(2w)} dw$ .

**Solución:**

Resolviendo la integral: Se deben considerar algunas identidades trigonométricas que permitan modificar el integrando y facilite la resolución.

Para el numerador del integrando:  $\cos w = \pm \sqrt{\frac{1+\cos(2w)}{2}} \Rightarrow 1+\cos(2w) = 2\cos^2 w$

Para el denominador:  $\text{Sen}(2w) = 2\text{Sen} w \cdot \cos w \Rightarrow \text{Sen}^2(2w) = 4\text{Sen}^2 w \cdot \cos^2 w$

Luego, en la integral se tiene:

$$I = \int \frac{\cos(2w)+1}{\text{Sen}^2(2w)} dw = \int \frac{2\cos^2 w}{4\text{Sen}^2 w \cdot \cos^2 w} dw = \frac{1}{2} \int \frac{dw}{\text{Sen}^2 w} = \frac{1}{2} \int \text{Cosec}^2 w dw = -\frac{1}{2} \text{Cotg} w + C$$

**9.- Verifique si**  $\int \sqrt{\frac{\cos^{-1}x}{1-x^2}} dx = -\frac{2}{3} \sqrt{(\cos^{-1}x)^3} + C$ .

**Verificando:**

Resolviendo la integral. En el integrando aparece  $\cos^{-1}x$ , equivalente a  $\text{ArcCos} x$ . Entonces la integral se puede expresar de la siguiente manera:

$$I = \int \sqrt{\frac{\cos^{-1}x}{1-x^2}} dx = \int \sqrt{\frac{\text{ArcCos} x}{1-x^2}} dx = (*)$$

Planteando el siguiente cambio de variable:  $u = \text{ArcCos} x \Rightarrow du = -\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \Rightarrow -du = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$

Volviendo a (\*) para aplicar el cambio:

$$I = \int \sqrt{\text{ArcCos} x} \cdot \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int (\text{ArcCos} x)^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int u^{\frac{1}{2}} \cdot (-du) = -\int u^{\frac{1}{2}} du = -\frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C = -\frac{2}{3} \sqrt{u^3} + C = -\frac{2}{3} \sqrt{(\text{ArcCos} x)^3} + C = -\frac{2}{3} \sqrt{(\cos^{-1}x)^3} + C$$

L. Q. Q. V.

**10.- Comprobar si**  $\int \frac{\cos^3 x}{\sqrt{\text{Sen} x}} dx = \frac{2}{5} \sqrt{\text{Sen} x} \cdot (4 + \cos^2 x) + C$ .

**Comprobando:**

Resolviendo la integral: Primero, se arregla el integrando.

$$I = \int \frac{\cos^3 x}{\sqrt{\text{Sen} x}} dx = \int \cos^2 x \cdot \text{Sen}^{-\frac{1}{2}} x dx = (*)$$

La integral modificada se corresponde con el Criterio Caso 1:  $n=3$ . Luego, se propone el siguiente cambio:

$$u = \text{Sen} x \Rightarrow du = \cos x dx$$

Volviendo a (\*) para aplicar el cambio:

$$(*) = I = \int \cos^2 x \cdot \cos x \cdot \text{Sen}^{-\frac{1}{2}} x dx = \int \cos^2 x \cdot \text{Sen}^{-\frac{1}{2}} x \cdot \cos x dx = \int (1 - \text{Sen}^2 x) \cdot \text{Sen}^{-\frac{1}{2}} x \cdot \cos x dx = \int (\text{Sen}^{-\frac{1}{2}} x - \text{Sen}^{\frac{3}{2}} x) \cdot \cos x dx = \int \text{Sen}^{-\frac{1}{2}} x \cdot \cos x dx - \int \text{Sen}^{\frac{3}{2}} x \cdot \cos x dx = \int u^{-\frac{1}{2}} du - \int u^{\frac{3}{2}} du = \frac{u^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} - \frac{u^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} + C = 2\sqrt{u} - \frac{2}{5} \sqrt{u^5} + C = 2\sqrt{u} - \frac{2}{5} u^2 \sqrt{u} + C = 2\sqrt{u} \cdot \left(1 - \frac{1}{5} u^2\right) + C = 2\sqrt{u} \cdot \left(\frac{5-u^2}{5}\right) + C = \frac{2}{5} \sqrt{u} \cdot (5-u^2) + C = \frac{2}{5} \sqrt{\text{Sen} x} \cdot (5 - \text{Sen}^2 x) + C = \frac{2}{5} \sqrt{\text{Sen} x} \cdot (4 + 1 - \text{Sen}^2 x) + C = \frac{2}{5} \sqrt{\text{Sen} x} \cdot (4 + \cos^2 x) + C$$

L. Q. Q. C.

**11.- Comprobar que**  $\int \frac{\text{Sen } x - \text{Cos } x}{\text{Sen } x + \text{Cos } x} dx = \text{Ln} \left| \frac{\sqrt{1 + \text{Sen}(2x)}}{1 + \text{Sen}(2x)} \right| + C.$

**Comprobando:**

Resolviendo la integral. Se racionaliza el integrando multiplicando y dividiendo por la conjugada del numerador. También se utilizan las siguientes identidades trigonométricas:

$$\begin{cases} * \text{Cos}(2x) = \text{Cos}^2 x - \text{Sen}^2 x \\ * \text{Sen}^2 x + \text{Cos}^2 x = 1 \end{cases}$$

Así que:

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{\text{Sen } x - \text{Cos } x}{\text{Sen } x + \text{Cos } x} dx = \int \frac{(\text{Sen } x - \text{Cos } x) \cdot (\text{Sen } x + \text{Cos } x)}{(\text{Sen } x + \text{Cos } x) \cdot (\text{Sen } x + \text{Cos } x)} dx = \int \frac{\text{Sen}^2 x - \text{Cos}^2 x}{(\text{Sen } x + \text{Cos } x)^2} dx = \int \frac{[-\text{Cos}(2x)]}{\text{Sen}^2 x + 2\text{Sen } x \cdot \text{Cos } x + \text{Cos}^2 x} dx = \\ &= -\int \frac{\text{Cos}(2x)}{(\text{Sen}^2 x + \text{Cos}^2 x) + 2\text{Sen } x \cdot \text{Cos } x} dx = -\int \frac{\text{Cos}(2x)}{1 + \text{Sen}(2x)} dx = (*) \end{aligned}$$

Cambio de variable:  $a = 1 + \text{Sen}(2x) \Rightarrow da = 2\text{Cos}(2x) dx \Rightarrow \frac{da}{2} = \text{Cos}(2x) dx$

Volviendo a (\*):

$$(*) = I = -\int \frac{\text{Cos}(2x)}{1 + \text{Sen}(2x)} dx = -\int \frac{\frac{da}{2}}{a} = -\frac{1}{2} \int \frac{da}{a} = -\frac{1}{2} \text{Ln}|a| + C = \text{Ln} 1 - \text{Ln}|\sqrt{a}| + C = \text{Ln} \left| \frac{1}{\sqrt{a}} \right| + C = \text{Ln} \left| \frac{\sqrt{a}}{a} \right| + C = \text{Ln} \left| \frac{\sqrt{1 + \text{Sen}(2x)}}{1 + \text{Sen}(2x)} \right| + C$$

L. Q. Q. C.

**12.- Obtener**  $\int x^{p-1} \cdot \text{Sen } x^p \cdot \text{Cos } x^p dx$

**Solución:**

Resolviendo la integral.

$$\begin{aligned} I &= \int x^{p-1} \cdot \text{Sen } x^p \cdot \text{Cos } x^p dx = \int \frac{2}{2} \cdot x^{p-1} \cdot \text{Sen } x^p \cdot \text{Cos } x^p dx = \frac{1}{2} \int x^{p-1} \cdot (2\text{Sen } x^p \cdot \text{Cos } x^p) dx = \\ &= \frac{1}{2} \int x^{p-1} \cdot \text{Sen}(2x^p) dx = \frac{1}{2} \int \text{Sen}(2x^p) x^{p-1} dx = (*) \quad [\text{Se utiliza la identidad trigonométrica } \text{Sen } 2\theta = 2\text{Sen } \theta \text{Cos } \theta] \end{aligned}$$

Cambio de variable en (\*):  $u = 2x^p \Rightarrow du = 2px^{p-1} dx \Rightarrow \frac{du}{2p} = x^{p-1} dx$

Volviendo a (\*):

$$(*) = I = \frac{1}{2} \int \text{Sen } u \cdot \frac{du}{2p} = \frac{1}{4p} \int \text{Sen } u du = -\frac{1}{4p} \text{Cos } u + C = -\frac{1}{4p} \text{Cos}(2x^p) + C = -\frac{1}{2p} \text{Sen } x^p \text{Cos } x^p + C$$

**13.- Compruebe si**  $\int \theta \cdot \text{Sen } \theta \cdot \text{Cos } \theta d\theta = -\frac{1}{4} \theta \cdot \text{Cos}(2\theta) + \frac{1}{8} \text{Sen}(2\theta) + C.$

**Comprobando:**

Resolviendo la integral: Esta integral puede ser resuelta por partes. Se elige la sustitución.

$$\begin{cases} u = \theta \Rightarrow du = d\theta \\ dv = \text{Sen } \theta \cdot \text{Cos } \theta d\theta \Rightarrow \int dv = \int \text{Sen } \theta \cdot \text{Cos } \theta d\theta \Rightarrow v = \frac{\text{Sen}^2 \theta}{2} + C \end{cases}$$

Aplicando la sustitución:

$$\begin{aligned} I &= \int \theta \cdot \text{Sen } \theta \cdot \text{Cos } \theta d\theta = u \cdot v - \int v \cdot du = \theta \cdot \frac{\text{Sen}^2 \theta}{2} - \frac{1}{2} \int \text{Sen}^2 \theta d\theta + C = \theta \cdot \frac{\text{Sen}^2 \theta}{2} - \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{2} \theta - \frac{1}{4} \text{Sen}(2\theta) \right] + C = \\ &= \frac{\theta}{2} \cdot \text{Sen}^2 \theta - \frac{1}{4} \theta + \frac{1}{8} \text{Sen}(2\theta) + C = \frac{\theta}{4} \cdot 2\text{Sen}^2 \theta - \frac{1}{4} \theta + \frac{1}{8} \text{Sen}(2\theta) + C = \frac{1}{4} \theta \cdot (2\text{Sen}^2 \theta - 1) + \frac{1}{8} \text{Sen}(2\theta) + C = \\ &= \frac{1}{4} \theta \cdot [-(\text{Cos}^2 \theta - \text{Sen}^2 \theta)] + \frac{1}{8} \text{Sen}(2\theta) + C = -\frac{1}{4} \theta \cdot \text{Cos}(2\theta) + \frac{1}{8} \text{Sen}(2\theta) + C \end{aligned}$$

L. Q. Q. C.

**14.- Compruebe que**  $\int \text{Sec}^5 x dx = \frac{1}{4} \text{Sec}^3 x \cdot \text{Tgx} + \frac{3}{8} \text{Sec} x \cdot \text{Tg} x + \frac{3}{8} \text{Ln}|\text{Sec}x + \text{Tgx}| + C$

**Comprobando:**

Resolviendo la integral.

En  $I$ ,  $n=5$  (impar). Entonces, se utiliza la integración por partes.

Por lo que:

$$I = \int \text{Sec}^5 x dx = \int \text{Sec}^3 x \cdot \text{Sec}^2 x dx = (*)$$

Sustitución:

$$\begin{cases} u = \text{Sec}^3 x \Rightarrow du = 3\text{Sec}^2 x \cdot \text{Sec} x \cdot \text{Tg} x dx \\ dv = \text{Sec}^2 x dx \Rightarrow \int dv = \int \text{Sec}^2 x dx \Rightarrow v = \text{Tgx} + C \end{cases}$$

Luego:

$$\begin{aligned} I &= \int \text{Sec}^5 x dx = \int \text{Sec}^3 x \cdot \text{Sec}^2 x dx = u \cdot v - \int v du = \text{Sec}^3 x \cdot \text{Tgx} - \int \text{Tgx} \cdot 3\text{Sec}^2 x \cdot \text{Sec} x \cdot \text{Tg} x dx + C = \\ &= \text{Sec}^3 x \cdot \text{Tgx} - 3 \int \text{Tg}^2 x \cdot \text{Sec}^3 x dx + C = \text{Sec}^3 x \cdot \text{Tgx} - 3 \int (\text{Sec}^2 x - 1) \cdot \text{Sec}^3 x dx + C = \\ &= \text{Sec}^3 x \cdot \text{Tgx} - 3 \int (\text{Sec}^5 x - \text{Sec}^3 x) dx + C = \text{Sec}^3 x \cdot \text{Tgx} - 3 \int \text{Sec}^5 x dx + 3 \int \text{Sec}^3 x dx + C = (**). \end{aligned}$$

(I)                      (I<sub>1</sub>)

$I_1$  fue resuelta cuando se trabajó la técnica de integración por partes (Revista HOMOTECIA Nº 1 – Año 17, Lunes, 7 de Enero de 2019, Ejercicio resuelto Nº 19, página 12). Utilizando ese resultado, se tiene que:

$$I_1 = \frac{1}{2} \text{Sec} x \cdot \text{Tgx} + \frac{1}{2} \text{Ln}|\text{Sec}x + \text{Tgx}| + C$$

Volviendo a (\*\*):

$$(**) = I = \text{Sec}^3 x \cdot \text{Tgx} - 3I + 3 \cdot \left[ \frac{1}{2} \text{Sec} x \cdot \text{Tgx} + \frac{1}{2} \text{Ln}|\text{Sec}x + \text{Tgx}| \right] + C = \text{Sec}^3 x \cdot \text{Tgx} - 3I + \frac{3}{2} \text{Sec} x \cdot \text{Tg} x + \frac{3}{2} \text{Ln}|\text{Sec}x + \text{Tgx}| + C$$

Luego, despejando a  $I$ :

$$I = \text{Sec}^3 x \cdot \text{Tgx} - 3I + \frac{3}{2} \text{Sec} x \cdot \text{Tg} x + \frac{3}{2} \text{Ln}|\text{Sec}x + \text{Tgx}| + C$$

$$I + 3I = \text{Sec}^3 x \cdot \text{Tgx} + \frac{3}{2} \text{Sec} x \cdot \text{Tg} x + \frac{3}{2} \text{Ln}|\text{Sec}x + \text{Tgx}| + C$$

$$4I = \text{Sec}^3 x \cdot \text{Tgx} + \frac{3}{2} \text{Sec} x \cdot \text{Tg} x + \frac{3}{2} \text{Ln}|\text{Sec}x + \text{Tgx}| + C$$

$$I = \frac{1}{4} \text{Sec}^3 x \cdot \text{Tgx} + \frac{3}{8} \text{Sec} x \cdot \text{Tg} x + \frac{3}{8} \text{Ln}|\text{Sec}x + \text{Tgx}| + C$$

$$\Rightarrow \boxed{\int \text{Sec}^5 x dx = \frac{1}{4} \text{Sec}^3 x \cdot \text{Tgx} + \frac{3}{8} \text{Sec} x \cdot \text{Tg} x + \frac{3}{8} \text{Ln}|\text{Sec}x + \text{Tgx}| + C}$$

L. Q. Q. C.

**15. – Hallar**  $\int \text{Sec}^4 x dx$ .

**Solución:**

Resolviendo la integral: Se factoriza el integrando y se utiliza identidad trigonométrica respectiva.

$$I = \int \text{Sec}^4 x dx = \int \text{Sec}^2 x \cdot \text{Sec}^2 x dx = \int (1 + \text{Tg}^2 x) \text{Sec}^2 x dx = (*)$$

En  $I$  se utiliza la identidad  $\text{Sec}^2 u = \text{Tg}^2 u + 1$ . Así que, volviendo a (\*):

$$(*) = I = \int \text{Sec}^2 x dx + \int \text{Tg}^2 x \cdot \text{Sec}^2 x dx = (**)$$

(I<sub>1</sub>)

En  $I_1$  se cumple Criterio Caso 2:  $n = 2$  ( $n$  par).

Sustitución:  $u = \text{Tgx} \Rightarrow du = \text{Sec}^2 x dx$ .

Volviendo a (\*\*):

$$(**) = I = \text{Tgx} + \int u^2 du + C = \text{Tgx} + \frac{u^3}{3} + C = \text{Tgx} + \frac{\text{Tg}^3 x}{3} + C$$

**16.- Resuelva:**  $\int \operatorname{Cosec}^5 x dx$ .**Solución:**

Resolviendo la integral. En  $I$ ,  $n=5$  (impar). Entonces, se utiliza la integración por partes.

$$I = \int \operatorname{Cosec}^5 x dx = \int \operatorname{Cosec}^3 x \cdot \operatorname{Cosec}^2 x dx = (*)$$

Sustitución:

$$\begin{cases} u = \operatorname{Cosec}^3 x \Rightarrow du = -3\operatorname{Cosec}^2 x \cdot \operatorname{Cosec} x \cdot \operatorname{Cotg} x dx \\ dv = \operatorname{Cosec}^2 x dx \Rightarrow \int dv = \int \operatorname{Cosec}^2 x dx \Rightarrow v = -\operatorname{Cotg} x + C \end{cases}$$

Luego:

$$\begin{aligned} I &= \int \operatorname{Cosec}^5 x dx = \int \operatorname{Cosec}^3 x \cdot \operatorname{Cosec}^2 x dx = u \cdot v - \int v du = \\ &= -\operatorname{Cosec}^3 x \cdot \operatorname{Cotg} x - \int \operatorname{Cotg} x \cdot 3\operatorname{Cosec}^2 x \cdot \operatorname{Cosec} x \cdot \operatorname{Cotg} x dx + C = \\ &= \operatorname{Cosec}^3 x \cdot \operatorname{Cotg} x - 3 \int \operatorname{Cotg}^2 x \cdot \operatorname{Cosec}^3 x dx + C = \operatorname{Cosec}^3 x \cdot \operatorname{Cotg} x - 3 \int (\operatorname{Cosec}^2 x - 1) \cdot \operatorname{Cosec}^3 x dx + C = \\ &= \operatorname{Cosec}^3 x \cdot \operatorname{Cotg} x - 3 \int (\operatorname{Cosec}^5 x - \operatorname{Cosec}^3 x) dx + C = \operatorname{Cosec}^3 x \cdot \operatorname{Cotg} x - 3 \int \operatorname{Cosec}^5 x dx + 3 \int \operatorname{Cosec}^3 x dx + C = \\ &= \operatorname{Cosec}^3 x \cdot \operatorname{Cotg} x - 3I + 3 \int \operatorname{Cosec}^3 x dx + C = (**). \end{aligned}$$

( $I_1$ )

Resolviendo a  $I_1$ . Se utiliza la integración por partes:

$$I_1 = \int \operatorname{Cosec}^3 x dx = \int \operatorname{Cosec} x \cdot \operatorname{Cosec}^2 x dx = u \cdot v - \int v \cdot du = (***)$$

Sustitución:

$$\begin{cases} u = \operatorname{Cosec} x \Rightarrow du = -\operatorname{Cosec} x \cdot \operatorname{Cotg} x dx \\ dv = \operatorname{Cosec}^2 x dx \Rightarrow \int dv = \int \operatorname{Cosec}^2 x dx \Rightarrow v = -\operatorname{Cotg} x + C \end{cases}$$

Volviendo a (\*\*\*):

$$\begin{aligned} (***) &= I_1 = u \cdot v - \int v \cdot du = -\operatorname{Cosec} x \cdot \operatorname{Cotg} x - \int \operatorname{Cotg} x \cdot \operatorname{Cosec} x \cdot \operatorname{Cotg} x dx + C_1 = \\ &= -\operatorname{Cosec} x \cdot \operatorname{Cotg} x - \int \operatorname{Cotg}^2 x \cdot \operatorname{Cosec} x dx + C_1 = -\operatorname{Cosec} x \cdot \operatorname{Cotg} x - \int (\operatorname{Cosec}^2 x - 1) \cdot \operatorname{Cosec} x dx + C_1 = \\ &= -\operatorname{Cosec} x \cdot \operatorname{Cotg} x - \int (\operatorname{Cosec}^3 x - \operatorname{Cosec} x) dx + C_1 = -\operatorname{Cosec} x \cdot \operatorname{Cotg} x - \int \operatorname{Cosec}^3 x dx + \int \operatorname{Cosec} x dx + C_1 = \\ &= -\operatorname{Cosec} x \cdot \operatorname{Cotg} x - I_1 + \operatorname{Ln}|\operatorname{Cosec} x - \operatorname{Cotg} x| + C_1 \end{aligned}$$

$I_1$  es cíclica.

Despejando a  $I_1$ :

$$I_1 = -\operatorname{Cosec} x \cdot \operatorname{Cotg} x - I_1 + \operatorname{Ln}|\operatorname{Cosec} x - \operatorname{Cotg} x| + C_1$$

$$2I_1 = -\operatorname{Cosec} x \cdot \operatorname{Cotg} x + \operatorname{Ln}|\operatorname{Cosec} x - \operatorname{Cotg} x| + C_1$$

$$I_1 = -\frac{1}{2} \operatorname{Cosec} x \cdot \operatorname{Cotg} x + \frac{1}{2} \operatorname{Ln}|\operatorname{Cosec} x - \operatorname{Cotg} x| + C_1$$

Volviendo a (\*\*):

$$\begin{aligned} (***) &= I = \operatorname{Cosec}^3 x \cdot \operatorname{Cotg} x - 3I + 3 \cdot \left[ -\frac{1}{2} \operatorname{Cosec} x \cdot \operatorname{Cotg} x + \frac{1}{2} \operatorname{Ln}|\operatorname{Cosec} x - \operatorname{Cotg} x| \right] + C = \\ &= \operatorname{Cosec}^3 x \cdot \operatorname{Cotg} x - 3I - \frac{3}{2} \operatorname{Cosec} x \cdot \operatorname{Cotg} x + \frac{3}{2} \operatorname{Ln}|\operatorname{Cosec} x - \operatorname{Cotg} x| + C \end{aligned}$$

La integral es cíclica.

Despejando a  $I$ :

$$I = \operatorname{Cosec}^3 x \cdot \operatorname{Cotg} x - 3I - \frac{3}{2} \operatorname{Cosec} x \cdot \operatorname{Cotg} x + \frac{3}{2} \operatorname{Ln}|\operatorname{Cosec} x - \operatorname{Cotg} x| + C$$

$$4I = \operatorname{Cosec}^3 x \cdot \operatorname{Cotg} x - \frac{3}{2} \operatorname{Cosec} x \cdot \operatorname{Cotg} x + \frac{3}{2} \operatorname{Ln}|\operatorname{Cosec} x - \operatorname{Cotg} x| + C$$

$$I = \frac{1}{4} \operatorname{Cosec}^3 x \cdot \operatorname{Cotg} x - \frac{3}{8} \operatorname{Cosec} x \cdot \operatorname{Cotg} x + \frac{3}{8} \operatorname{Ln}|\operatorname{Cosec} x - \operatorname{Cotg} x| + C$$

$$\Rightarrow \boxed{\int \operatorname{Cosec}^5 x dx = \frac{1}{4} \operatorname{Cosec}^3 x \cdot \operatorname{Cotg} x - \frac{3}{8} \operatorname{Cosec} x \cdot \operatorname{Cotg} x + \frac{3}{8} \operatorname{Ln}|\operatorname{Cosec} x - \operatorname{Cotg} x| + C}$$

**17.- Obtenga**  $\int \frac{3\operatorname{Cosec}^2 x + \operatorname{Tg}^2 x \cdot \operatorname{Cos}^4 x}{\operatorname{Sen}^4 x} dx.$

**Solución:**

Se resuelve la integral. Se aplican propiedades de las integrales indefinidas, identidades trigonométricas, propiedades y operaciones matemáticas conocidas así como algunas simplificaciones pertinentes.

Luego:

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{3\operatorname{Cosec}^2 x + \operatorname{Tg}^2 x \cdot \operatorname{Cos}^4 x}{\operatorname{Sen}^4 x} dx = 3 \int \frac{\operatorname{Cosec}^2 x}{\operatorname{Sen}^4 x} dx + \int \frac{\operatorname{Tg}^2 x \cdot \operatorname{Cos}^4 x}{\operatorname{Sen}^4 x} dx = 3 \int \operatorname{Cosec}^2 x \cdot \operatorname{Cosec}^4 x dx + \int \frac{\operatorname{Sen}^2 x}{\operatorname{Cos}^2 x} \cdot \frac{\operatorname{Cos}^4 x}{\operatorname{Sen}^4 x} dx = \\ &= 3 \int \operatorname{Cosec}^2 x \cdot (\operatorname{Cosec}^2 x)^2 dx + \int \frac{\operatorname{Cos}^2 x}{\operatorname{Sen}^2 x} dx = 3 \int \operatorname{Cosec}^2 x \cdot (\operatorname{Cotg}^2 x + 1) dx + \int \operatorname{Cotg}^2 x dx = \\ &= 3 \int \operatorname{Cosec}^2 x \cdot (\operatorname{Cotg}^4 x + 2\operatorname{Cotg}^2 x + 1) dx + \int (\operatorname{Cosec}^2 x - 1) dx = \\ &= 3 \int \operatorname{Cotg}^4 x \cdot \operatorname{Cosec}^2 x dx + 6 \int \operatorname{Cotg}^2 x \cdot \operatorname{Cosec}^2 x dx + 3 \int \operatorname{Cosec}^2 x dx + \int \operatorname{Cosec}^2 x dx - \int dx = \\ &= 3 \int \operatorname{Cotg}^4 x \cdot \operatorname{Cosec}^2 x dx + 6 \int \operatorname{Cotg}^2 x \cdot \operatorname{Cosec}^2 x dx + 4 \int \operatorname{Cosec}^2 x dx - \int dx = \\ &= 3 \int \operatorname{Cotg}^4 x \cdot \operatorname{Cosec}^2 x dx + 6 \int \operatorname{Cotg}^2 x \cdot \operatorname{Cosec}^2 x dx - 4\operatorname{Cotg} x - x + C = (*) \\ &\qquad\qquad\qquad (I_1) \qquad\qquad\qquad (I_2) \end{aligned}$$

Cambio de variable en  $I_1$  e  $I_2$ :  $u = \operatorname{Cotg} x \Rightarrow du = -\operatorname{Cosec}^2 x dx$

Volviendo a (\*):

$$I = -3 \int u^4 du - 6 \int u^2 du - 4\operatorname{Cotg} x - x + C = -\frac{3}{5}u^5 + 2u^3 - 4\operatorname{Cotg} x - x + C = -\frac{3}{5}\operatorname{Cotg}^5 x - 2\operatorname{Cotg}^3 x - 4\operatorname{Cotg} x - x + C$$

**18.- Determinar**  $\int \sqrt{1 - \operatorname{Cos} x} dx.$

**Solución:**

Resolviendo la integral. En  $I$  se utiliza la identidad:  $\operatorname{Sen} \frac{x}{2} = \sqrt{\frac{1 - \operatorname{Cos} x}{2}}$ .

$$I = \int \sqrt{1 - \operatorname{Cos} x} dx = \int \frac{\sqrt{2} \cdot \sqrt{1 - \operatorname{Cos} x}}{\sqrt{2}} dx = \sqrt{2} \cdot \int \sqrt{\frac{1 - \operatorname{Cos} x}{2}} dx = \sqrt{2} \cdot \int \operatorname{Sen} \left(\frac{x}{2}\right) \cdot dx = (*)$$

(I<sub>1</sub>)

Cambio de variable en  $I_1$ :  $\frac{x}{2} = u \Rightarrow \frac{dx}{2} = du \Rightarrow dx = 2du$

Volviendo a (\*):

$$(*) = I = \sqrt{2} \cdot \int \operatorname{Sen} u \cdot 2du = 2\sqrt{2} \cdot \int \operatorname{Sen} u \cdot du = 2\sqrt{2} \cdot (-\operatorname{Cos} u) + C = -2\sqrt{2} \cdot \operatorname{Cos} u + C = -2\sqrt{2} \cdot \operatorname{Cos} \left(\frac{x}{2}\right) + C$$

**19.- Obtenga**  $\int \operatorname{ArcSec} \theta d\theta.$

**Solución:**

Resolviendo la integral: Como en  $I$ ,  $\operatorname{ArcSec} \theta$  tiene derivada algebraica, se utiliza la integración por partes.

Sustitución:

$$\begin{cases} u = \operatorname{ArcSec} \theta \Rightarrow du = \frac{d\theta}{\theta\sqrt{\theta^2 - 1}} \\ dv = d\theta \Rightarrow \int dv = \int d\theta \Rightarrow v = \theta + C \end{cases}$$

Luego:

$$I = \int \operatorname{ArcSec} \theta d\theta = u \cdot v - \int v du = \theta \cdot \operatorname{ArcSec} \theta - \int \frac{d\theta}{\sqrt{\theta^2 - 1}} + C = \theta \cdot \operatorname{ArcSec} \theta - \operatorname{Ln} \left| \theta + \sqrt{\theta^2 - 1} \right| + C$$

**20. - Hallar**  $\int \operatorname{Sen}^4 x \operatorname{Cos}^3 x dx.$

**Solución:**

Resolviendo la integral:

$$I = \int \operatorname{Sen}^4 x \operatorname{Cos}^3 x dx = \int \operatorname{Sen}^4 x \cdot \operatorname{Cos}^2 x \cdot \operatorname{Cos} x dx = (*)$$

Se utiliza la siguiente identidad en  $I$ :  $\operatorname{Cos}^2 x = 1 - \operatorname{Sen}^2 x$

Además, en  $I$  se cumple Criterio Caso 1:  $n = 3$  (impar).

Sustitución:  $u = \text{Sen}x \Rightarrow du = \text{Cos}x dx$

Volviendo a (\*):

$$(*) = I = \int \text{Sen}^4 x \cdot (1 - \text{Sen}^2 x) \cdot \text{Cos}x dx = \int (\text{Sen}^4 x - \text{Sen}^6 x) \cdot \text{Cos}x dx = \int \text{Sen}^4 x \cdot \text{Cos}x dx - \int \text{Sen}^6 x \cdot \text{Cos}x dx + C =$$

$$= \int u^4 du - \int u^6 du = \frac{u^5}{5} - \frac{u^7}{7} + C = \frac{\text{Sen}^5 x}{5} - \frac{\text{Sen}^7 x}{7} + C$$

**21. - Comprobar que**  $\int \text{Sen}^2 x \cdot \text{Cos}^3 x dx = \frac{1}{3} \text{Sen}^3 x - \frac{1}{5} \text{Sen}^5 x + C.$

**Comprobando:**

Resolviendo la integral: Se inicia factorizando el integrando.

$$I = \int \text{Sen}^2 x \cdot \text{Cos}^3 x dx = \int \text{Sen}^2 x \cdot \text{Cos}^2 x \cdot \text{Cos}x dx = (*)$$

Se utiliza la siguiente identidad en  $I$ :  $\text{Cos}^2 x = 1 - \text{Sen}^2 x.$

En la integral original  $I$  se cumple Criterio Caso 1:  $n = 3$  ( $n$  impar).

Sustitución:  $u = \text{Sen}x \Rightarrow du = \text{Cos}x dx$

Volviendo a (\*) para aplicar la sustitución:

$$(*) = \int \text{Sen}^2 x \cdot (1 - \text{Sen}^2 x) \cdot \text{Cos}x dx = \int (\text{Sen}^2 x - \text{Sen}^4 x) \cdot \text{Cos}x dx = \int \text{Sen}^2 x \cdot \text{Cos}x dx - \int \text{Sen}^4 x \cdot \text{Cos}x dx =$$

$$= \int u^2 du - \int u^4 du = \frac{u^3}{3} - \frac{u^5}{5} + C = \frac{1}{3} \text{Sen}^3 x - \frac{1}{5} \text{Sen}^5 x + C$$

L. Q. Q. C.

**22.- Obtenga:**  $\int \text{Sen}^2 x \cdot \text{Cos}^2 x dx.$

**Solución:**

Resolviendo la integral. Como ambos exponentes son pares, no se puede utilizar el Criterio Caso 1. ¿Qué hacer?

Pueden ser consideradas las siguientes factorizaciones trigonométricas:

$$\begin{cases} \text{Sen}^2 x = \frac{1}{2} [1 - \text{Cos}(2x)] \\ \text{Cos}^2 x = \frac{1}{2} [1 + \text{Cos}(2x)] \end{cases}$$

Luego, utilizándolas en la integral, se tiene que:

$$I = \int \text{Sen}^2 x \cdot \text{Cos}^2 x dx = \int \frac{1}{2} [1 - \text{Cos}(2x)] \cdot \frac{1}{2} [1 + \text{Cos}(2x)] dx = \frac{1}{4} \int [1 - \text{Cos}^2(2x)] dx = \frac{1}{4} \int \text{Sen}^2(2x) dx =$$

$$= \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \left[ \frac{1}{2}(2x) - \frac{1}{4} \text{Sen}(4x) \right] + C = \frac{1}{8} x - \frac{1}{32} \text{Sen}(4x) + C$$

**23. - Hallar**  $\int \text{Sen}^3 x \cdot \text{Cos}^5 x dx.$

**Solución:**

Resolviendo la integral: En la integral original  $I$  se cumplen cualquiera de las dos opciones del Criterio Caso 1 para la integración de funciones trigonométricas. Considérese cuando  $n = 5$  (impar).

Sustitución:  $u = \text{Sen}x \Rightarrow du = \text{Cos}x dx.$

En  $I$  se utiliza la siguiente identidad:  $\text{Cos}^2 x = 1 - \text{Sen}^2 x.$

Luego:

$$I = \int \text{Sen}^3 x \cdot \text{Cos}^5 x dx = \int \text{Sen}^3 x \cdot \text{Cos}^4 x \cdot \text{Cos}x dx = \int \text{Sen}^3 x \cdot (\text{Cos}^2 x)^2 \cdot \text{Cos}x dx = \int \text{Sen}^3 x \cdot (1 - \text{Sen}^2 x)^2 \cdot \text{Cos}x dx =$$

$$= \int \text{Sen}^3 x \cdot (1 - 2\text{Sen}^2 x + \text{Sen}^4 x) \cdot \text{Cos}x dx = \int (\text{Sen}^3 x - 2\text{Sen}^5 x + \text{Sen}^7 x) \cdot \text{Cos}x dx = \int \text{Sen}^3 x \cdot \text{Cos}x dx - 2 \int \text{Sen}^5 x \cdot \text{Cos}x dx + \int \text{Sen}^7 x \cdot \text{Cos}x dx =$$

$$= \int u^3 du - 2 \int u^5 du + \int u^7 du = \frac{u^4}{4} - \frac{2}{6} u^6 + \frac{u^8}{8} + C = \frac{\text{Sen}^4 x}{4} - \frac{\text{Sen}^6 x}{3} + \frac{\text{Sen}^8 x}{8} + C$$

Sugerencia: Practique resolviendo este ejercicio aplicando la opción para cuando  $m = 3.$

**24.- Hallar**  $\int \text{Cos}^4(2x) \cdot \text{Sen}^3(2x) dx$ .

**Solución:**

Se resuelve la integral. Se utiliza la siguiente identidad en  $I$ :  $\text{Sen}^2(2x) = 1 - \text{Cos}^2(2x)$ .

Luego:

$$I = \int \text{Cos}^4(2x) \cdot \text{Sen}^3(2x) dx = \int \text{Cos}^4(2x) \cdot \text{Sen}^2(2x) \cdot \text{Sen}(2x) \cdot dx = \int \text{Cos}^4(2x) \cdot [1 - \text{Cos}^2(2x)] \cdot \text{Sen}(2x) dx =$$

$$= \int [\text{Cos}^4(2x) - \text{Cos}^6(2x)] \cdot \text{Sen}(2x) dx = \int \text{Cos}^4(2x) \cdot \text{Sen}(2x) dx - \int \text{Cos}^6(2x) \cdot \text{Sen}(2x) dx = (*)$$

(I<sub>1</sub>)
(I<sub>2</sub>)

Cambio de variable en  $I_1$  y en  $I_2$ :  $a = 2x \Rightarrow da = 2dx \Rightarrow \frac{da}{2} = dx$

Además, en  $I_1$  y en  $I_2$  se cumple Criterio Caso 1:  $m = 1$  (impar).

Sustitución en  $I_1$  y en  $I_2$ :  $u = \text{Cosa} \Rightarrow du = -\text{Sena} da$ .

Volviendo a (\*):

$$(*) = I = \frac{1}{2} \int \text{Cos}^4 a \cdot \text{Sena} \cdot da - \frac{1}{2} \int \text{Cos}^6 a \cdot \text{Sena} \cdot da = -\frac{1}{2} \int u^4 du + \frac{1}{2} \int u^6 du = -\frac{1}{10} u^5 + \frac{1}{14} u^7 + C =$$

$$= -\frac{1}{10} \text{Cos}^5 a + \frac{1}{14} \text{Cos}^7 a + C = -\frac{1}{10} \text{Cos}^5(2x) + \frac{1}{14} \text{Cos}^7(2x) + C$$

**25. - Resolver**  $\int \text{Sen}^3(3x) \cdot \text{Cos}^5(3x) \cdot dx$ .

**Solución:**

Se resuelve la integral. Similar al ejercicio Nº 23. Pero intentando otra forma de resolverlo, considérese la utilización de la siguiente identidad trigonométrica:  $\text{Sen}^2(3x) = 1 - \text{Cos}^2(3x)$

$$I = \int \text{Sen}^3(3x) \cdot \text{Cos}^5(3x) \cdot dx = \int \text{Sen}^2(3x) \cdot \text{Cos}^5(3x) \cdot \text{Sen}(3x) \cdot dx = \int \text{Sen}^2(3x) \cdot \text{Cos}^5(3x) \cdot \text{Sen}(3x) \cdot dx =$$

$$= \int [1 - \text{Cos}^2(3x)] \cdot \text{Cos}^5(3x) \cdot \text{Sen}(3x) \cdot dx = \int \text{Cos}^5(3x) \cdot \text{Sen}(3x) \cdot dx - \int \text{Cos}^7(3x) \cdot \text{Sen}(3x) \cdot dx = (*)$$

(I<sub>1</sub>)
(I<sub>2</sub>)

Cambio de variable en  $I_1$  y en  $I_2$ :  $a = 3x \Rightarrow da = 3dx \Rightarrow \frac{da}{3} = dx$

Además, también se cumple en  $I_1$  y en  $I_2$  Criterio Caso 1:  $m = 1$  (impar).

Sustitución:  $u = \text{Cosa} \Rightarrow du = -\text{Sena} \cdot da \Rightarrow -du = \text{Sena} \cdot da$

Volviendo a (\*):

$$(*) = I = \frac{1}{3} \int \text{Cos}^5 a \cdot \text{Sena} \cdot da - \frac{1}{3} \int \text{Cos}^7 a \cdot \text{Sena} \cdot da = -\frac{1}{3} \int u^5 du + \frac{1}{3} \int u^7 du = -\frac{1}{18} u^6 + \frac{1}{24} u^8 + C =$$

$$= -\frac{1}{18} \text{Cos}^6 a + \frac{1}{24} \text{Cos}^8 a + C = -\frac{1}{18} \text{Cos}^6(3x) + \frac{1}{24} \text{Cos}^8(3x) + C$$

**26. - Hallar**  $\int \text{Tg}^6 x \cdot \text{Sec}^4 x dx$ .

**Solución:**

Resolviendo la integral.

En  $I$  se cumple Criterio Caso 2:  $n = 4$  (par)

Sustitución:  $u = \text{Tgx} \Rightarrow du = \text{Sec}^2 x dx$

En  $I$ , se utiliza la siguiente identidad:  $\text{Sec}^2 u = \text{Tg}^2 u + 1$ .

Entonces:

$$I = \int \text{Tg}^6 x \cdot \text{Sec}^4 x dx = \int \text{Tg}^6 x \cdot \text{Sec}^2 x \cdot \text{Sec}^2 x dx = \int \text{Tg}^6 x \cdot (\text{Tg}^2 x + 1) \cdot \text{Sec}^2 x dx = \int (\text{Tg}^8 x + \text{Tg}^6 x) \cdot \text{Sec}^2 x dx =$$

$$= \int \text{Tg}^8 x \cdot \text{Sec}^2 x dx + \int \text{Tg}^6 x \cdot \text{Sec}^2 x dx = \int u^8 du + \int u^6 du = \frac{u^9}{9} + \frac{u^7}{7} + C = \frac{\text{Tg}^9 x}{9} + \frac{\text{Tg}^7 x}{7} + C$$

**27.- Obtener**  $\int \text{Tg}^5 x \cdot \text{Sec}^3 x dx$ .

**Solución:**

Resolviendo la integral.

En  $I$  se cumple Criterio Caso 2:  $m=3$  (impar).

Sustitución:  $u = \text{Sec} x \Rightarrow du = \text{Sec} x \cdot \text{Tg} x dx$

En  $I$  se utiliza la identidad:  $\text{Sec}^2 x - 1 = \text{Tg}^2 x$ .

Luego:

$$\begin{aligned} I &= \int \text{Tg}^5 x \cdot \text{Sec}^3 x dx = \int \text{Tg}^4 x \cdot \text{Tg} x \cdot \text{Sec}^2 x \cdot \text{Sec} x dx = \int (\text{Tg}^2 x)^2 \text{Tg} x \cdot \text{Sec}^2 x \cdot \text{Sec} x dx = \int (\text{Sec}^2 x - 1)^2 \cdot \text{Tg} x \cdot \text{Sec}^2 x \cdot \text{Sec} x dx = \\ &= \int (\text{Sec}^4 x - 2\text{Sec}^2 x + 1) \cdot \text{Sec}^2 x \cdot \text{Tg} x \cdot \text{Sec} x dx = \int (\text{Sec}^6 x - 2\text{Sec}^4 x + \text{Sec}^2 x) \cdot \text{Tg} x \cdot \text{Sec} x dx = \\ &= \int \text{Sec}^6 x \cdot \text{Tg} x \cdot \text{Sec} x dx - 2 \int \text{Sec}^4 x \cdot \text{Tg} x \cdot \text{Sec} x dx + \int \text{Sec}^2 x \cdot \text{Tg} x \cdot \text{Sec} x dx = \\ &= \int u^6 du - 2 \int u^4 du + \int u^2 du = \frac{u^7}{7} - \frac{2}{5} u^5 + \frac{u^3}{3} + C = \frac{1}{7} \text{Sec}^7 x - \frac{2}{5} \text{Sec}^5 x + \frac{1}{3} \text{Sec}^3 x + C \end{aligned}$$

**28. - Evaluar**  $\int \text{Tg}^3(3x) \cdot \text{Sec}^4(3x) dx$ .

**Solución:**

Resolviendo la integral. Cambio de variable en  $I$ :  $a = 3x \Rightarrow da = 3dx \Rightarrow \frac{da}{3} = dx$ .

En  $I$  se utiliza la identidad:  $\text{Sec}^2 a = \text{Tg}^2 a + 1$ .

En  $I$  se cumple Criterio Caso 2:  $n = 4$  (par).

Sustitución:  $u = \text{Tg} a \Rightarrow du = \text{Sec}^2 a da$ .

Luego:

$$\begin{aligned} I &= \int \text{Tg}^3(3x) \cdot \text{Sec}^4(3x) dx = \int \text{Tg}^3 a \cdot \text{Sec}^4 a \cdot \frac{da}{3} = \frac{1}{3} \int \text{Tg}^3 a \cdot \text{Sec}^2 a \cdot \text{Sec}^2 a \cdot da = \frac{1}{3} \int \text{Tg}^3 a \cdot (\text{Tg}^2 a + 1) \cdot \text{Sec}^2 a da = \\ &= \frac{1}{3} \int (\text{Tg}^3 a + \text{Tg}^5 a) \cdot \text{Sec}^2 a da = \frac{1}{3} \int \text{Tg}^3 a \cdot \text{Sec}^2 a da + \frac{1}{3} \int \text{Tg}^5 a \cdot \text{Sec}^2 a da = \\ &= \frac{1}{3} \int u^3 da + \frac{1}{3} \int u^5 du = \frac{1}{3} \cdot \frac{u^4}{4} + \frac{1}{3} \cdot \frac{u^6}{6} + C = \frac{1}{12} u^4 + \frac{1}{18} u^6 + C = \frac{1}{12} \text{Tg}^4 a + \frac{1}{18} \text{Tg}^6 a + C = \frac{1}{12} \text{Tg}^4(3x) + \frac{1}{18} \text{Tg}^6(3x) + C \end{aligned}$$

**29. - Determinar**  $\int \text{Tg}^2 x \cdot \text{Sec}^6 x dx$ .

**Solución:**

Resolviendo la integral:  $I = \int \text{Tg}^2 x \cdot \text{Sec}^6 x dx = \int \text{Tg}^2 x \cdot \text{Sec}^4 x \cdot \text{Sec}^2 x dx = \int \text{Tg}^2 x \cdot (\text{Sec}^2 x)^2 \cdot \text{Sec}^2 x dx = (*)$

En  $I$  se utiliza la identidad:  $\text{Sec}^2 x = \text{Tg}^2 x + 1$ .

En  $I$  se cumple Criterio Caso 2:  $n = 6$  (par).

Sustitución:  $u = \text{Tg} x \Rightarrow du = \text{Sec}^2 x dx$ .

Volviendo a (\*):

$$\begin{aligned} (*) &= I = \int \text{Tg}^2 x \cdot (\text{Tg}^2 x + 1)^2 \cdot \text{Sec}^2 x dx = \int \text{Tg}^2 x \cdot (\text{Tg}^4 x + 2\text{Tg}^2 x + 1) \cdot \text{Sec}^2 x dx = \\ &= \int (\text{Tg}^6 x + 2\text{Tg}^4 x + \text{Tg}^2 x) \cdot \text{Sec}^2 x dx = \int \text{Tg}^6 x \cdot \text{Sec}^2 x dx + 2 \int \text{Tg}^4 x \cdot \text{Sec}^2 x dx + \int \text{Tg}^2 x \cdot \text{Sec}^2 x dx = \\ &= \int u^6 du + 2 \int u^4 du + \int u^2 du = \frac{1}{7} u^7 + \frac{2}{5} u^5 + \frac{1}{3} u^3 + C = \frac{1}{7} \text{Tg}^7 x + \frac{2}{5} \text{Tg}^5 x + \frac{1}{3} \text{Tg}^3 x + C \end{aligned}$$

**30. - Determinar**  $\int \text{Sec}^5 x \cdot \text{Tg}^3 x dx$ .

**Solución:**

Resolviendo la integral.

$$I = \int \text{Sec}^5 x \cdot \text{Tg}^3 x dx = \int \text{Sec}^4 x \cdot \text{Sec} x \cdot \text{Tg}^2 x \cdot \text{Tg} x dx = \int \text{Sec}^4 x \cdot \text{Tg}^2 x \cdot \text{Sec} x \cdot \text{Tg} x dx = (*)$$



Luego:

$$I = \int \text{Sen}(2x) \cdot \text{Cos}(4x) dx = \int \frac{1}{2} [\text{Sen}(-2x) + \text{Sen}(6x)] dx = \frac{1}{2} \int (-\text{Sen}2x) dx + \frac{1}{2} \int \text{Sen}(6x) dx = -\frac{1}{2} \int \text{Sen}(2x) dx + \frac{1}{2} \int \text{Sen}(6x) dx = (*)$$

$(I_1)$                        $(I_2)$

Cambio en  $I_1$ :  $u = 2x \Rightarrow du = 2dx \Rightarrow dx = \frac{du}{2}$ .

Cambio en  $I_2$ :  $v = 6x \Rightarrow dv = 6dx \Rightarrow dx = \frac{dv}{6}$ .

Volviendo a (\*):

$$(*) = -\frac{1}{2} \int \text{Sen}u \cdot \frac{du}{2} + \frac{1}{2} \int \text{Sen}v \cdot \frac{dv}{6} = -\frac{1}{4} \int \text{Sen}u du + \frac{1}{12} \int \text{Sen}v dv = \frac{1}{4} \text{Cos}u - \frac{1}{12} \text{Cos}v + C = \frac{1}{4} \text{Cos}(2x) - \frac{1}{12} \text{Cos}(6x) + C$$

**34.- Obtenga  $\int \text{Sen } x \cdot \text{Sen}(2x) \cdot \text{Sen}(3x) dx$ .**

**Solución:**

Evidentemente en esta integral se pueden aplicar las Fórmulas de Werner. En el ejercicio anterior, con el producto de dos funciones se aplicó una vez. En éste, al tener un producto de tres, se supone que se aplicarán dos veces.

Generalizando, si el producto de funciones trigonométricas senos, cosenos o senos y cosenos con diferentes argumentos, en el integrando implica *n factores*, entonces las Fórmulas de Werner se aplicarán *n-1* veces.

Resolviendo la integral. Es conveniente que la primera aplicación se haga con los factores cuyos argumentos parezcan más complicados; por lo que el procedimiento se puede iniciar agrupándolos de la siguiente manera:

$$I = \int \text{Sen } x \cdot \text{Sen}(2x) \cdot \text{Sen}(3x) dx = \int \text{Sen } x \cdot [\text{Sen}(2x) \cdot \text{Sen}(3x)] dx = (*)$$

En  $I$  se aplica la siguiente Fórmula de Werner:  $\text{Sen}(mx) \cdot \text{Sen}(nx) = \frac{1}{2} [\text{Cos}(m-n)x - \text{Cos}(m+n)x]$ .

Volviendo a (\*):

$$(*) = \int \text{Sen } x \cdot \frac{1}{2} \cdot [\text{Cos}((2-3)x) - \text{Cos}((2+3)x)] dx = \int \text{Sen } x \cdot \frac{1}{2} \cdot [\text{Cos}(-x) - \text{Cos}(5x)] dx = \frac{1}{2} \cdot \int \text{Sen } x \cdot [\text{Cos } x - \text{Cos}(5x)] dx =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \int \text{Sen } x \cdot \text{Cos } x dx - \frac{1}{2} \cdot \int \text{Sen } x \cdot \text{Cos}(5x) dx = \frac{\text{Sen}^2 x}{4} - \frac{1}{2} \cdot \int \text{Sen } x \cdot \text{Cos}(5x) dx = (**)$$

$(I_1)$

Se hizo  $\text{Cos}(-x) = \text{Cos } x$  porque la función coseno es función par.

En  $I_1$  se aplica la Fórmula de Werner:  $\text{Sen}(mx) \cdot \text{Cos}(nx) = \frac{1}{2} [\text{Sen}(m-n)x + \text{Sen}(m+n)x]$ .

Volviendo a (\*\*):

$$(**) = \frac{\text{Sen}^2 x}{4} - \frac{1}{2} \cdot \int \frac{1}{2} \cdot [\text{Sen}((1-5)x) + \text{Sen}((1+5)x)] dx = \frac{\text{Sen}^2 x}{4} - \frac{1}{4} \cdot \int [\text{Sen}(-4x) + \text{Sen}(6x)] dx =$$

$$= \frac{\text{Sen}^2 x}{4} - \frac{1}{4} \cdot \int \text{Sen}(-4x) dx - \frac{1}{4} \cdot \int \text{Sen}(6x) dx = \frac{\text{Sen}^2 x}{4} + \frac{1}{4} \cdot \int \text{Sen}(4x) dx + \frac{1}{4} \cdot \int \text{Sen}(6x) dx = \frac{\text{Sen}^2 x}{4} - \frac{1}{16} \cdot \text{Cos}(4x) - \frac{1}{24} \cdot \text{Cos}(6x) + C$$

En esta parte final del ejercicio, se aplicaron las Reglas Útiles para la resolución de integrales indefinidas revisadas en la edición de la Revista HOMOTECIA Nº 8, Año 16 del miércoles 1º de agosto de 2018, pág. 7.

**35.- Compruebe si  $\int \text{Sec } x dx = \text{Ln}|\text{Sec } x + \text{Tg } x| + C$ .**

**Comprobación:**

Resolviendo la integral. La integral se corresponde con una fórmula elemental (Resolución Inmediata), pero el objetivo es comprobar su certeza. Al considerar que “la solución propuesta” corresponde a un logaritmo neperiano, esto da a entender que la integral debería ser de la forma  $\int \frac{du}{u}$ . Es decir, que en el denominador debe aparecer el argumento del logaritmo. Se procede entonces a multiplicar y dividir al integrando por  $\text{Sec } x + \text{Tg } x$ :

$$I = \int \text{Sec } x \cdot \frac{\text{Sec } x + \text{Tg } x}{\text{Sec } x + \text{Tg } x} dx = \int \frac{\text{Sec}^2 x + \text{Sec } x \cdot \text{Tg } x}{\text{Sec } x + \text{Tg } x} dx = (*)$$

Se propone el siguiente cambio de variable:  $u = \text{Sec } x + \text{Tg } x \Rightarrow du = (\text{Sec } x \cdot \text{Tg } x + \text{Sec}^2 x) dx = (\text{Sec}^2 x + \text{Sec } x \cdot \text{Tg } x) dx$

Volviendo a para aplicar el cambio (\*):

$$(*) = I = \int \frac{du}{u} = \text{Ln}|u| + C = \text{Ln}|\text{Sec } x + \text{Tg } x| + C$$

$\text{L. Q. Q. C.}$

**36.- Obtenga**  $\int \text{Sen}(mx) \text{Cos}(nx) dx$

**Solución:**

Se resuelve aplicando la respectiva Fórmula de Werner:

$$I = \int \text{Sen}(mx) \text{Cos}(nx) dx = \int \frac{1}{2} \{ \text{Sen}(m-n)x + \text{Sen}(m+n)x \} dx = \frac{1}{2} \int \text{Sen}[(m-n)x] dx + \frac{1}{2} \int \text{Sen}[(m+n)x] dx =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \left[ -\frac{1}{m-n} \cdot \text{Cos}[(m-n)x] - \frac{1}{m+n} \cdot \text{Cos}[(m+n)x] \right] + C$$

**37.- Comprobar si:**

$$\int \text{Sen}(2ax) \cdot \text{Cos}(3bx) dx = \frac{1}{2(9b^2 - 4a^2)} \cdot [4a \cdot \text{Cos}(3bx) \cdot \text{Cos}(2ax) + 6b \cdot \text{Sen}(3bx) \cdot \text{Sen}(2ax)] + C; \quad a < b$$

**Comprobando:**

Resolviendo la integral. Se utiliza la fórmula de Werner:  $\text{Sen}(mx) \cdot \text{Cos}(nx) = \frac{1}{2} [\text{Sen}(m-n)x + \text{Sen}(m+n)x]$ .

Luego:

$$I = \int \text{Sen}(2ax) \cdot \text{Cos}(3bx) dx = \int \frac{1}{2} [\text{Sen}(2ax - 3bx) + \text{Sen}(2ax + 3bx)] dx = \frac{1}{2} \int \{ \text{Sen}[(2a - 3b)x] + \text{Sen}[(2a + 3b)x] \} dx =$$

$$= \frac{1}{2} \int \{ \text{Sen}[-(3b - 2a)x] + \text{Sen}[(2a + 3b)x] \} dx = \frac{1}{2} \int \{ -\text{Sen}[(3b - 2a)x] + \text{Sen}[(2a + 3b)x] \} dx =$$

$$= -\frac{1}{2} \int \text{Sen}[(3b - 2a)x] dx + \frac{1}{2} \int \text{Sen}[(2a + 3b)x] dx = \frac{1}{2(3b - 2a)} \cdot \text{Cos}[(3b - 2a)x] - \frac{1}{2(2a + 3b)} \cdot \text{Cos}[(2a + 3b)x] + C =$$

$$= \frac{1}{2(3b - 2a)} \cdot [\text{Cos}(3bx) \cdot \text{Cos}(2ax) + \text{Sen}(3bx) \cdot \text{Sen}(2ax)] - \frac{1}{2(2a + 3b)} \cdot [\text{Cos}(2ax) \cdot \text{Cos}(3bx) - \text{Sen}(2ax) \cdot \text{Sen}(3bx)] + C =$$

$$= \frac{1}{2(3b - 2a)} \cdot \text{Cos}(3bx) \cdot \text{Cos}(2ax) + \frac{1}{2(3b - 2a)} \cdot \text{Sen}(3bx) \cdot \text{Sen}(2ax) - \frac{1}{2(2a + 3b)} \cdot \text{Cos}(2ax) \cdot \text{Cos}(3bx) + \frac{1}{2(2a + 3b)} \cdot \text{Sen}(2ax) \cdot \text{Sen}(3bx) + C =$$

$$= \frac{1}{2(3b - 2a)} \cdot \text{Cos}(3bx) \cdot \text{Cos}(2ax) + \frac{1}{2(3b - 2a)} \cdot \text{Sen}(3bx) \cdot \text{Sen}(2ax) - \frac{1}{2(2a + 3b)} \cdot \text{Cos}(3bx) \cdot \text{Cos}(2ax) + \frac{1}{2(2a + 3b)} \cdot \text{Sen}(3bx) \cdot \text{Sen}(2ax) + C =$$

$$= \left[ \frac{1}{2(3b - 2a)} - \frac{1}{2(2a + 3b)} \right] \cdot \text{Cos}(3bx) \cdot \text{Cos}(2ax) + \left[ \frac{1}{2(3b - 2a)} + \frac{1}{2(2a + 3b)} \right] \cdot \text{Sen}(3bx) \cdot \text{Sen}(2ax) + C =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \left[ \frac{3b + 2a - 3b + 2a}{9b^2 - 4a^2} \right] \cdot \text{Cos}(3bx) \cdot \text{Cos}(2ax) + \frac{1}{2} \cdot \left[ \frac{3b + 2a + 3b - 2a}{9b^2 - 4a^2} \right] \cdot \text{Sen}(3bx) \cdot \text{Sen}(2ax) + C =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \left[ \frac{4a}{9b^2 - 4a^2} \right] \cdot \text{Cos}(3bx) \cdot \text{Cos}(2ax) + \frac{1}{2} \cdot \left[ \frac{6b}{9b^2 - 4a^2} \right] \cdot \text{Sen}(3bx) \cdot \text{Sen}(2ax) + C =$$

$$= \frac{1}{2(9b^2 - 4a^2)} \cdot [4a \cdot \text{Cos}(3bx) \cdot \text{Cos}(2ax) + 6b \cdot \text{Sen}(3bx) \cdot \text{Sen}(2ax)] + C$$

L. Q. Q. C.

**38.- Resolver la siguiente integral:**  $\int \text{Sec}^3 x \cdot \text{Cosec}^3 x dx$ .

**Solución:**

Resolviendo la integral. Se factoriza el integrando.

$$I = \int \text{Sec}x \cdot \text{Cosec}^3 x \cdot \text{Sec}^2 dx = (*)$$

Como  $Sec^2 dx = d(Tg x)$ , es conveniente expresar a  $Sec x$  y a  $Cosec x$  en función de la  $Tg x$ . Para ello se utilizan las siguientes identidades trigonométricas:

$$Sec x = \sqrt{1 + Tg^2 x}$$

$$Cosec x = \frac{\sqrt{1 + Tg^2 x}}{Tg x}$$

Luego, volviendo a (\*):

$$\begin{aligned} (*) &= I = \int \sqrt{1 + Tg^2 x} \cdot \frac{\sqrt{(1 + Tg^2 x)^3}}{Tg^3 x} \cdot Sec^2 dx = \int \frac{\sqrt{(1 + Tg^2 x)^4}}{Tg^3 x} \cdot Sec^2 dx = \int \frac{(1 + Tg^2 x)^2}{Tg^3 x} \cdot Sec^2 dx = \\ &= \int \frac{1 + 2Tg^2 x + Tg^4 x}{Tg^3 x} \cdot Sec^2 dx = \int [Tg^{-3} x + 2(Tg x)^{-1} + Tg x] \cdot Sec^2 dx = (**) \end{aligned}$$

Cambio de variable a aplicar:  $u = Tg x \rightarrow du = Sec^2 dx$

Volviendo a (\*\*):

$$(**) = I = \int (u^{-3} + 2u^{-1} + u) du = \frac{u^{-2}}{-2} + 2Ln|u| + \frac{u^2}{2} + C = -\frac{2}{u^2} + Ln u^2 + \frac{u^2}{2} + C = -\frac{2}{Tg^2 x} + Ln(Tg^2 x) + \frac{Tg^2 x}{2} + C$$

**39.- Obtenga la siguiente integral:  $\int (t^2 - 1) \cdot Cotg t dt$ .**

**Solución:**

Resolviendo la integral. Se resuelve por Partes.

Cambio:

$$\begin{cases} u = t^2 - 1 \Rightarrow du = 2tdt \\ dv = Cotg t dt \Rightarrow v = -Ln|Cosec t| + C \end{cases}$$

Luego:

$$\begin{aligned} I &= \int (t^2 - 1) \cdot Cotg t dt = u \cdot v - \int v du = -(t^2 - 1) \cdot Ln|Cosec t| + \int Ln|Cosec t| \cdot 2t dt + C = \\ &= -(t^2 - 1) \cdot Ln|Cosec t| + 2 \int t \cdot Ln|Cosec t| dt + C = (*) \end{aligned}$$

(I<sub>1</sub>)

I<sub>1</sub>: Se resuelve por Partes.

Cambio:

$$\begin{cases} u = Ln|Cosec t| \Rightarrow du = -Cotg t dt \\ dv = t dt \Rightarrow v = \frac{t^2}{2} + C \end{cases}$$

Luego:

$$I_1 = \int t \cdot Ln|Cosec t| dt = u \cdot v - \int v \cdot du = \frac{t^2}{2} \cdot Ln|Cosec t| + \frac{1}{2} \int t^2 \cdot Cotg t dt + C_1 = (**)$$

(I<sub>2</sub>)

I<sub>2</sub>: Se resuelve por Partes.

Cambio:

$$\begin{cases} u = t^2 \Rightarrow du = 2t dt \\ dv = Cotg t dt \Rightarrow v = -Ln|Cosec t| + C \end{cases}$$

Luego:

$$\begin{aligned} I_2 &= \int t^2 \cdot Cotg t dt = u \cdot v - \int v \cdot du = -t^2 \cdot Ln|Cosec t| + 2 \int Ln|Cosec t| \cdot t dt + C_2 = \\ &= -t^2 \cdot Ln|Cosec t| + 2 \int t \cdot Ln|Cosec t| dt + C_2 = -t^2 \cdot Ln|Cosec t| + 2I_1 + C_2 \end{aligned}$$



Volviendo a (\*\*):

$$I_1 = \frac{1}{2} \text{ArcTg}^2 a \cdot \text{Ln} |1+a^2| - (\text{Ln} |1+a^2| \cdot \text{ArcTg}^2 a - 2I_1) + C_1 = \frac{1}{2} \text{ArcTg}^2 a \cdot \text{Ln} |1+a^2| - \text{Ln} |1+a^2| \cdot \text{ArcTg}^2 a + 2I_1 + C_1 =$$

$$= \frac{1}{2} \text{ArcTg}^2 a \cdot \text{Ln} |1+a^2| - \text{ArcTg}^2 a \cdot \text{Ln} |1+a^2| + 2I_1 + C_1 = -\frac{1}{2} \text{ArcTg}^2 a \cdot \text{Ln} |1+a^2| + 2I_1 + C_1 \cdot$$

Como  $I_1$  es cíclica, se procede de la siguiente manera:

$$I_1 = -\frac{1}{2} \text{ArcTg}^2 a \cdot \text{Ln} |1+a^2| + 2I_1 + C_1$$

$$-I_1 = -\frac{1}{2} \text{ArcTg}^2 a \cdot \text{Ln} |1+a^2| + C_1$$

$$I_1 = \frac{1}{2} \text{ArcTg}^2 a \cdot \text{Ln} |1+a^2| + C_1$$

Resolviendo a  $I_2$ :

$$I_2 = \int \frac{a da}{1+a^2} = \frac{1}{2} \int \frac{2a da}{1+a^2} = \frac{1}{2} \int \frac{d(1+a^2)}{1+a^2} = \frac{1}{2} \text{Ln} |1+a^2| + C_2$$

Volviendo a (\*):

$$I = I_1 + I_2 = \frac{1}{2} \text{ArcTg}^2 a \cdot \text{Ln} |1+a^2| + \frac{1}{2} \text{Ln} |1+a^2| + C = \frac{1}{2} \text{Ln} |1+a^2| \cdot (\text{ArcTg}^2 a + 1) + C$$

Devolviendo el cambio inicial:

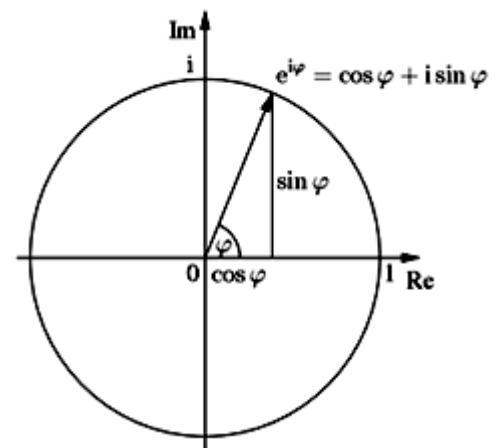
$$I = \frac{1}{2} \text{Ln} |1+\text{Tg}^2 x| \cdot (x^2 + 1) + C$$

L. Q. Q. C.

### Resolución de integrales de funciones trigonométricas utilizando la Fórmula de Euler

**Fórmula de Euler:** Esta fórmula, atribuida al matemático suizo Leonhard Euler (1707-1783), establece que  $e^{ix} = \cos x + i \text{sen} x$  para todo número real  $x$ , donde  $e$  es la base de los logaritmos naturales,  $i$  es la unidad imaginaria,  $\text{sen}$  (seno) y  $\cos$  (coseno) son las conocidas funciones trigonométricas o funciones circulares. La misma contiene dos tipos de simetrías: una par y la otra impar. Coseno es igual tanto para valores positivos y negativos de la variable  $x$  por lo que se dice que esta función tiene simetría par. Seno varía en signo de acuerdo con el signo de la variable  $x$  por lo que se dice que tiene simetría impar.

La fórmula puede interpretarse geoméricamente como una circunferencia de radio uno en el plano complejo, dibujada por la función  $e^{ix}$  al variar  $x$  sobre los números reales. Así,  $x$  es el ángulo de una recta que conecta el origen del plano y un punto sobre la circunferencia unitaria, con el eje positivo real, medido en sentido contrario a las agujas del reloj y en radianes. La fórmula sólo es válida si también el seno y el coseno tienen sus argumentos en radianes.



LA FÓRMULA DE EULER ILUSTRADA EN EL PLANO COMPLEJO

Esta fórmula fue demostrada por primera vez en el año en 1714 por el matemático inglés Roger Cotes (1682-1716), y luego redescubierta y popularizada por Euler en 1748 (a esto se debe el que se le atribuya). Es de hacer notar que ninguno de estos dos matemáticos conoció la interpretación geométrica antes señalada, puesto que considerar los números complejos como puntos en el plano surgió aproximadamente cincuenta años después de este periodo.

De las siguientes reglas sobre exponentes  $e^{a+b} = e^a \cdot e^b$  y  $(e^a)^b = e^{a \cdot b}$  (válidas para todo par de números complejos  $a$  y  $b$ ), se pueden derivar varias identidades trigonométricas, así como la fórmula de De Moivre.

La fórmula de Euler también permite interpretar las funciones seno y coseno como variaciones de la función exponencial:

$$\text{Cos} x = \frac{e^{aix} + e^{-aix}}{2} \quad \text{y} \quad \text{Sen} x = \frac{e^{aix} - e^{-aix}}{2i}$$

Estas fórmulas sirven para definir las funciones trigonométricas para argumentos complejos  $x$ . Las dos ecuaciones anteriores se obtienen simplemente resolviendo las fórmulas  $e^{aix} = \text{Cos} x + i \cdot \text{Sen} x$  y  $e^{-aix} = \text{Cos} x - i \cdot \text{Sen} x$  para el seno y el coseno.

**Resolviendo integrales.-**

Para resolver integrales con funciones trigonométricas, se utilizan las fórmulas  $Cos x = \frac{e^{aix} + e^{-aix}}{2}$  y  $Sen x = \frac{e^{aix} - e^{-aix}}{2i}$

**Ejemplos:**

**1.- Determinar  $\int Sen(3x) \cdot Cos(2x) dx$ .**

**Solución:**

Resolviendo la integral. Se sustituye el coseno y el seno aplicando las fórmulas.

$$\begin{aligned}
 I &= \int Sen(3x) \cdot Cos(2x) dx = \int \frac{e^{3ix} - e^{-3ix}}{2i} \cdot \frac{e^{2ix} + e^{-2ix}}{2} dx = \int \frac{e^{5ix} + e^{ix} - e^{-ix} - e^{-5ix}}{4i} dx = \\
 &= \int \left[ \frac{e^{5ix} - e^{-5ix}}{4i} + \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{4i} \right] dx = \frac{1}{2} \int \frac{e^{5ix} - e^{-5ix}}{2i} dx + \frac{1}{2} \int \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} dx = \\
 &= \frac{1}{2} \int Sen(5x) dx + \frac{1}{2} \int Sen x dx = -\frac{1}{10} Cos(5x) - \frac{1}{2} Cos x + C
 \end{aligned}$$

**2.- Obtenga la siguiente integral:  $\int Sen^2(7w) \cdot Cos^3(4w) dw$ .**

**Solución:**

Resolviendo la integral. Se sustituye el coseno y el seno aplicando las fórmulas.

$$\begin{aligned}
 I &= \int Sen^2(7w) \cdot Cos^3(4w) dw = \int \left( \frac{e^{7iw} - e^{-7iw}}{2i} \right)^2 \cdot \left( \frac{e^{4iw} + e^{-4iw}}{2} \right)^3 dw = \\
 &= \int \left[ \frac{(e^{7iw})^2 - 2 \cdot e^{7iw} \cdot e^{-7iw} + (e^{-7iw})^2}{4i^2} \right] \cdot \left[ \frac{(e^{4iw})^3 + 3 \cdot (e^{4iw})^2 \cdot e^{-4iw} + 3 \cdot e^{4iw} \cdot (e^{-4iw})^2 + (e^{-4iw})^3}{8} \right] dw = \\
 &= \int \left[ \frac{e^{14iw} - 2 + e^{-14iw}}{4 \cdot (-1)} \right] \cdot \left[ \frac{e^{12iw} + 3e^{4iw} + 3e^{-4iw} + e^{-12iw}}{8} \right] dw = \int \frac{(e^{14iw} - 2 + e^{-14iw}) \cdot (e^{12iw} + 3e^{4iw} + 3e^{-4iw} + e^{-12iw})}{-32} dw = \\
 &= \int \frac{(e^{26iw} + 3e^{18iw} + 3e^{10iw} + e^{2iw} - 2e^{12iw} - 6e^{4iw} - 6e^{-4iw} - 2e^{-12iw} + e^{-2iw} + 3e^{-10iw} + 3e^{-18iw} + e^{-26iw})}{-32} dw = \\
 &= \int \left( \frac{e^{26iw} + e^{-26iw}}{-32} + \frac{3e^{18iw} + 3e^{-18iw}}{-32} + \frac{3e^{10iw} + 3e^{-10iw}}{-32} + \frac{e^{2iw} + e^{-2iw}}{-32} - \frac{2e^{12iw} + 2e^{-12iw}}{-32} - \frac{6e^{4iw} + 6e^{-4iw}}{-32} \right) dw = \\
 &= -\frac{1}{16} \int \frac{e^{26iw} + e^{-26iw}}{2} dw - \frac{3}{16} \int \frac{e^{18iw} + e^{-18iw}}{2} dw - \frac{3}{16} \int \frac{e^{10iw} + e^{-10iw}}{2} dw - \frac{1}{16} \int \frac{e^{2iw} + e^{-2iw}}{2} dw + \frac{1}{8} \int \frac{e^{12iw} + e^{-12iw}}{2} dw + \frac{3}{8} \int \frac{e^{4iw} + e^{-4iw}}{2} dw = \\
 &= -\frac{1}{16} \int Cos(26w) dw - \frac{3}{16} \int Cos(18w) dw - \frac{3}{16} \int Cos(10w) dw - \frac{1}{16} \int Cos(2w) dw + \frac{1}{8} \int Cos(12w) dw + \frac{3}{8} \int Cos(4w) dw = \\
 &= -\frac{1}{416} Sen(26w) - \frac{1}{96} Sen(18w) - \frac{3}{160} Sen(10w) - \frac{1}{32} Sen(2w) + \frac{1}{96} Sen(12w) + \frac{3}{32} Sen(4w) + C
 \end{aligned}$$

**Resolución de Integrales de Funciones Racionales de Seno y de Coseno**

Si se tienen integrales con funciones racionales de  $Senx$  y  $Cosx$ , se sugiere la sustitución  $x = 2 \cdot ArcTgz$  para convertirlas en funciones racionales de  $z$ . Solo falta determinar cuáles serán las sustituciones para  $dx, Cosx$  y  $Senx$ .

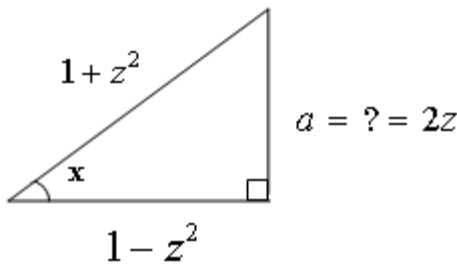
Considerando que:  $x = 2 \cdot ArcTgz \Rightarrow \boxed{dx = \frac{2dz}{1+z^2}}$

También se tiene que sí:  $x = 2 \cdot ArcTgz \Rightarrow \boxed{z = Tg\left(\frac{x}{2}\right)}$

Pero con base en las fórmulas de las razones trigonométricas del ángulo mitad:

$$z = \operatorname{Tg}\left(\frac{x}{2}\right) = \sqrt{\frac{1 - \operatorname{Cos}x}{1 + \operatorname{Cos}x}} \Rightarrow z^2 = \frac{1 - \operatorname{Cos}x}{1 + \operatorname{Cos}x} \Rightarrow \boxed{\operatorname{Cos}x = \frac{1 - z^2}{1 + z^2}}$$

Como en todo triángulo rectángulo se tiene que  $\operatorname{Cos}x = \frac{\text{Cateto Adyacente}}{\text{Hipotenusa}}$ , entonces considérese lo siguiente:



Por Teorema de Pitágoras:

$$a = \sqrt{(1 + z^2)^2 - (1 - z^2)^2} = \sqrt{4z^2} = 2z$$

$$\Rightarrow \boxed{\operatorname{Sen}x = \frac{2z}{1 + z^2}}$$

**EJERCICIOS RESUELTOS.-**

Conocidas las sustituciones a realizar en la integración de funciones racionales de seno y coseno, en los ejemplos que a continuación se presentan, se han de asumir estas sustituciones directamente durante el procedimiento de resolución.

**1. - Determinar**  $\int \frac{dx}{5 + 4\operatorname{Cos}x}$ .

**Solución:**

$$I = \int \frac{dx}{5 + 4\operatorname{Cos}x} = \int \frac{\frac{2dz}{1+z^2}}{5 + 4 \cdot \frac{1-z^2}{1+z^2}} = \int \frac{\frac{2dz}{1+z^2}}{\frac{5+5z^2+4-4z^2}{1+z^2}} = \int \frac{2dz}{9+z^2} = 2 \int \frac{dz}{3^2+z^2} = \frac{2}{3} \operatorname{ArcTg}\left(\frac{z}{3}\right) + C = \frac{2}{3} \operatorname{ArcTg}\left(\frac{\operatorname{Tg}\left(\frac{x}{2}\right)}{3}\right) + C$$

**2. - Hallar**  $\int \frac{dx}{2 + \operatorname{Cos}x}$ .

**Solución:**

$$I = \int \frac{dx}{2 + \operatorname{Cos}x} = \int \frac{\frac{2dz}{1+z^2}}{2 + \frac{1-z^2}{1+z^2}} = \int \frac{\frac{2dz}{1+z^2}}{\frac{2+2z^2+1-z^2}{1+z^2}} = 2 \int \frac{dz}{3+z^2} = 2 \int \frac{dz}{(\sqrt{3})^2+z^2} = \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{ArcTg}\left(\frac{z}{\sqrt{3}}\right) + C = \frac{2\sqrt{3}}{3} \operatorname{ArcTg}\left(\frac{\sqrt{3}z}{3}\right) + C = \frac{2\sqrt{3}}{3} \operatorname{ArcTg}\left(\frac{\sqrt{3}}{3} \operatorname{Tg}\left(\frac{x}{2}\right)\right) + C$$

**3. - Obtener**  $\int \operatorname{Sec}x dx$ .

**Solución:**

$$I = \int \operatorname{Sec}x dx = \int \frac{1+z^2}{1-z^2} \cdot \frac{2dz}{1+z^2} = 2 \int \frac{dz}{1-z^2} = 2 \cdot \frac{1}{2} \operatorname{Ln} \left| \frac{z-1}{z+1} \right| + C = \operatorname{Ln} \left| \frac{\operatorname{Tg}\left(\frac{x}{2}\right) - 1}{\operatorname{Tg}\left(\frac{x}{2}\right) + 1} \right| + C$$

4. - Evaluar  $\int \frac{dx}{5+4\text{Sen}x}$ .

**Solución:**

$$I = \int \frac{dx}{5+4\text{Sen}x} = \int \frac{\frac{2dz}{1+z^2}}{5+4 \cdot \frac{2z}{1+z^2}} = 2 \int \frac{\frac{dz}{1+z^2}}{\frac{5+5z^2+8z}{1+z^2}} = 2 \int \frac{dz}{5+5z^2+8z} = 2 \int \frac{dz}{5\left(1+z^2+\frac{8}{5}z\right)}$$

$$= \frac{2}{5} \int \frac{dz}{\left(z^2+\frac{8}{5}z+\frac{16}{25}\right)+1-\frac{16}{25}} = \frac{2}{5} \int \frac{dz}{\left(z+\frac{4}{5}\right)^2+\frac{9}{25}} = \frac{2}{5} \int \frac{dz}{\left(z+\frac{4}{5}\right)^2+\left(\frac{3}{5}\right)^2} =$$

$$= \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{\frac{3}{5}} \cdot \text{ArcTg} \left( \frac{z+\frac{4}{5}}{\frac{3}{5}} \right) + C = \frac{2}{5} \cdot \frac{5}{3} \cdot \text{ArcTg} \left( \frac{5z+4}{3} \right) + C = \frac{2}{3} \cdot \text{ArcTg} \left( \frac{5\text{Tg}\left(\frac{x}{2}\right)+4}{3} \right) + C$$

5. - Encontrar  $\int \frac{dx}{3-2\text{Cos}x}$ .

**Solución:**

$$I = \int \frac{dx}{3-2\text{Cos}x} = \int \frac{\frac{2dz}{1+z^2}}{3-2 \cdot \frac{1-z}{1+z^2}} = 2 \int \frac{\frac{dz}{1+z^2}}{\frac{3+3z^2-2+2z^2}{1+z^2}} = 2 \int \frac{dz}{1+5z^2} = 2 \int \frac{dz}{5\left(\frac{1}{5}+z^2\right)} = \frac{2}{5} \int \frac{dz}{\frac{1}{5}+z^2} = \frac{2}{5} \int \frac{dz}{\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2+z^2} =$$

$$= \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{5}}} \text{ArcTg} \left( \frac{z}{\frac{1}{\sqrt{5}}} \right) + C = \frac{2\sqrt{5}}{5} \cdot \text{ArcTg} (\sqrt{5}z) + C = \frac{2\sqrt{5}}{5} \cdot \text{ArcTg} \left[ \sqrt{5} \cdot \text{Tg} \left( \frac{x}{2} \right) \right] + C$$

6. - Hallar  $\int \frac{dx}{\text{Sen}x - \text{Cos}x - 1}$ .

**Solución:**

$$I = \int \frac{dx}{\text{Sen}x - \text{Cos}x - 1} = \int \frac{\frac{2dz}{1+z^2}}{\frac{2z}{1+z^2} - \frac{1-z^2}{1+z^2} - 1} = 2 \int \frac{\frac{dz}{1+z^2}}{\frac{2z-1+z^2-1-z^2}{1+z^2}} = 2 \int \frac{dz}{2z-2} = \int \frac{dz}{z-1} = \text{Ln} |z-1| + C = \text{Ln} \left| \text{Tg} \frac{x}{2} - 1 \right| + C$$

7. - Hallar  $\int \frac{dx}{5+4\text{Sen}x}$ .

**Solución:**

$$I = \int \frac{dx}{5+4\text{Sen}x} = \int \frac{\frac{2dz}{1+z^2}}{5+4 \cdot \frac{2z}{1+z^2}} = 2 \int \frac{\frac{dz}{1+z^2}}{\frac{5+5z^2+8z}{1+z^2}} = 2 \int \frac{dz}{5+5z^2+8z} = 2 \int \frac{dz}{5 \cdot \left(1+z^2+\frac{8}{5}z\right)} = \frac{2}{5} \int \frac{dz}{1+z^2+\frac{8}{5}z} = \frac{2}{5} \int \frac{dz}{z^2+\frac{8}{5}z+1}$$

(Extrayendo a 5 como factor común)

$$= \frac{2}{5} \int \frac{dz}{\left(z^2+\frac{8}{5}z\right)+1} = \frac{2}{5} \int \frac{dz}{\left(z^2+\frac{8}{5}z+\frac{16}{25}\right)+1-\frac{16}{25}} = \frac{2}{5} \int \frac{dz}{\left(z+\frac{4}{5}\right)^2+\frac{9}{25}} = \frac{2}{5} \int \frac{dz}{\left(z+\frac{4}{5}\right)^2+\left(\frac{3}{5}\right)^2} = \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{\frac{3}{5}} \cdot \text{ArcTg} \left( \frac{z+\frac{4}{5}}{\frac{3}{5}} \right) + C =$$

(Completando cuadrados)

$$= \frac{2}{5} \cdot \frac{5}{3} \cdot \text{ArcTg} \left( \frac{5z+4}{3} \right) + C = \frac{2}{3} \cdot \text{ArcTg} \left( \frac{5z+4}{3} \right) + C = \frac{2}{3} \cdot \text{ArcTg} \left( \frac{5\text{Tg}\left(\frac{x}{2}\right)+4}{3} \right) + C$$

8.- Halle la integral:  $\int \frac{\text{Sen } x}{1 - \text{Sen } x} dx$ .

Solución:

$$I = \int \frac{\text{Sen } x}{1 - \text{Sen } x} dx = \int \frac{\frac{2z}{1+z^2}}{1 - \frac{2z}{1+z^2}} \cdot \frac{2dz}{1+z^2} = \int \frac{\frac{2z}{1+z^2}}{\frac{1+z^2-2z}{1+z^2}} \cdot \frac{2dz}{1+z^2} = \int \frac{2z}{(z-1)^2} \cdot \frac{2dz}{1+z^2} = 2 \int \frac{2z dz}{(1+z^2) \cdot (z-1)^2} = -2 \int \left( \frac{1}{1+z^2} - \frac{1}{(z-1)^2} \right) dz =$$

$$= -2 \int \frac{1}{1+z^2} dz + 2 \int \frac{1}{(z-1)^2} dz = -2 \cdot \text{ArcTg } z - \frac{2}{z-1} + C = -2 \cdot \text{ArcTg} \left[ \text{Tg} \left( \frac{x}{2} \right) \right] - \frac{2}{\text{Tg} \left( \frac{x}{2} \right) - 1} + C = -x - \frac{2}{\text{Tg} \left( \frac{x}{2} \right) - 1} + C$$

9.- Obtenga la integral:  $\int \frac{\text{Cos } x}{1 - \text{Cos } x} dx$ .

Solución:

$$I = \int \frac{\text{Cos } x}{1 - \text{Cos } x} dx = \int \frac{\frac{1-z^2}{1+z^2}}{1 + \frac{1-z^2}{1+z^2}} \cdot \frac{2dz}{1+z^2} = \int \frac{\frac{1-z^2}{1+z^2}}{\frac{1+z^2+1-z^2}{1+z^2}} \cdot \frac{2dz}{1+z^2} = \int \frac{1-z^2}{2} \cdot \frac{2dz}{1+z^2} = \int \frac{1-z^2}{1+z^2} dz =$$

$$= \int \frac{dz}{1+z^2} - \int \frac{z^2}{1+z^2} dz = \text{ArcTg } z - \int \left( 1 - \frac{1}{1+z^2} \right) dz + C = \text{ArcTg} \left[ \text{Tg} \left( \frac{x}{2} \right) \right] - \int dz + \int \frac{dz}{1+z^2} + C =$$

$$= \frac{x}{2} - z + \text{ArcTg } z + C = \frac{x}{2} - \text{Tg} \left( \frac{x}{2} \right) + \text{ArcTg} \left[ \text{Tg} \left( \frac{x}{2} \right) \right] + C = \frac{x}{2} - \text{Tg} \left( \frac{x}{2} \right) + \frac{x}{2} + C = x - \text{Tg} \left( \frac{x}{2} \right) + C$$

**EJERCICIOS PROPUESTOS.-**

I.- Comprobar si:

- 1)  $\int 3\text{Tg}(3x) dx = -\text{Ln} \text{Cos}(3x) + C \quad \vee \quad \text{Ln} |\text{Sec}(3x)| + C$
- 2)  $\int 2\text{Tg}(8x) dx = -\frac{1}{4} \text{Ln} |\text{Cos}(8x)| + C$
- 3)  $\int e^{x^2} \text{Tg}(e^{x^2}) dx = -\frac{1}{2} \text{Ln} |\text{Cos}(e^{x^2})| + C$
- 4)  $\int \frac{2\text{Cotg}(3bx)}{5} dx = \frac{2}{15b} \text{Ln} |\text{Sen}(3bx)| + C$
- 5)  $\int \text{Sec}(2x) dx = \frac{1}{2} \text{Ln} |\text{Sec}(2x) + \text{Tg}(2x)| + C$
- 6)  $\int 3\text{Cosec}(4x) dx = \frac{3}{4} \text{Ln} |\text{Cosec}(4x) - \text{Cotg}(4x)| + C$
- 7)  $\int x^2 \text{Tg } x^3 dx = -\frac{1}{3} \text{Ln} |\text{Cos } x^3| + C$
- 8)  $\int \text{Tg} \left( \frac{x}{2} \right) dx = -2 \text{Ln} |\text{Cos} \left( \frac{x}{2} \right)| + C$
- 9)  $\int 3\text{Cotg}(2x) dx = \frac{3}{2} \text{Ln} |\text{Sen}(2x)| + C$
- 10)  $\int \frac{1}{3} \text{Cotg}(4x) dx = \frac{1}{12} \text{Ln} |\text{Sen}(4x)| + C$
- 11)  $\int \frac{\text{Cotg } \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx = 2 \text{Ln} |\text{Sen } \sqrt{x}| + C$
- 12)  $\int e^{\frac{x}{2}} \cdot \text{Cotg} \left( e^{\frac{x}{2}} \right) dx = 2 \text{Ln} \left| \text{Sen} \left( e^{\frac{x}{2}} \right) \right| + C$
- 3)  $\int x \cdot \text{Sec} \frac{x^2}{3} dx = \frac{3}{2} \text{Ln} \left| \text{Sec} \frac{x^2}{3} + \text{Tg} \frac{x^2}{3} \right| + C$
- 14)  $\int [-\text{Sec}(3-2x)] dx = \frac{1}{2} \text{Ln} |\text{Sec}(3-2x) + \text{Tg}(3-2x)| + C$

- 15)  $\int a^x \cdot \text{Sec } a^x dx = \frac{1}{\text{Ln } a} \cdot \text{Ln} |\text{Sec } a^x + \text{Tg } a^x| + C$
- 16)  $\int 2x^2 \text{Cosec}(5x^3) dx = \frac{2}{15} \text{Ln} |\text{Cosec}(5x^3) - \text{Cotg}(5x^3)| + C$
- 17)  $\int [-\text{Cosec}(3-2x)] dx = \text{Ln} |\text{Cosec}(3-2x) - \text{Cotg}(3-2x)| + C$
- 18)  $\int 6a \text{Cosec} \left( \frac{2x}{5} \right) dx = 15a \text{Ln} |\text{Cosec} \left( \frac{2x}{5} \right) - \text{Cotg} \left( \frac{2x}{5} \right)| + C$
- 19)  $\int \left[ \text{Sec} \left( \frac{x}{2} \right) - \text{Tg} \left( \frac{x}{2} \right) \right] dx = 2 \text{Ln} \left| \text{Sec} \left( \frac{x}{2} \right) + \text{Tg} \left( \frac{x}{2} \right) \right| + 2 \text{Ln} \left| \text{Cos} \left( \frac{x}{2} \right) \right| + C$
- 20)  $\int \frac{\text{Sen } x + \text{Cos } x}{\text{Sen } x} dx = x + \text{Ln} |\text{Sen } x| + C$
- 21)  $\int \frac{2\text{Sec}^2(2x) dx}{\text{Tg}(2x)} = \text{Ln} |\text{Tg}(2x)| + C$
- 22)  $\int \frac{4\text{Cos}(5x) dx}{\text{Sen}(5x)} = \frac{4}{5} \text{Ln} |\text{Sen}(5x)| + C$
- 23)  $\int \frac{x \text{Cosec}(x^2) dx}{\text{Cotg}(x^2)} = -\frac{1}{2} \text{Ln} |\text{Cotg}(x^2)| + C$
- 24)  $\int \frac{2\text{Sec}(9x) \cdot \text{Tg}(9x) dx}{\text{Sec}(9x)} = \frac{2}{9} \text{Ln} |\text{Sec}(9x)| + C$
- 25)  $\int \frac{\text{Sec}^2 x}{3\text{Tg } x} dx = \frac{1}{3} \text{Ln} |\text{Tg } x| + C$
- 26)  $\int \frac{\text{Sen}(2x) dx}{3 + \text{Cos}(2x)} = -\frac{1}{2} \text{Ln} |3 + \text{Cos}(2x)| + C$
- 27)  $\int \frac{\text{Cosec } t \cdot \text{Cotg } t}{5 - 4\text{Cosec } t} dt = \frac{1}{4} \text{Ln} |5 - 4\text{Cosec } t| + C$
- 28)  $\int \frac{\text{Cosec}^2 u}{3 - \text{Cotg } u} du = \text{Ln} |3 - \text{Cotg } u| + C$

$$29) \int \frac{\operatorname{Cosec} x \cdot \operatorname{Cotg} x}{a - b \operatorname{Cosec} x} dx = \frac{1}{b} \operatorname{Ln} |a - b \operatorname{Cosec} x| + C$$

$$30) \int \frac{5 dx}{\operatorname{Tg}(5x)} = \operatorname{Ln} |\operatorname{Sen}(5x)| + C$$

$$31) \int \frac{3 dx}{\operatorname{Sen}(5x)} = \frac{3}{5} \operatorname{Ln} |\operatorname{Sec}(5x) - \operatorname{Cotg}(5x)| + C$$

$$32) \int \frac{x dx}{\operatorname{Tg}(8x^2)} = \frac{1}{16} \operatorname{Ln} |\operatorname{Sen}(8x^2)| + C$$

$$33) \int [\operatorname{Cosec}^2(2x) - \operatorname{Tg}(3x)] dx = \frac{1}{2} \operatorname{Cotg}(2x) + \frac{1}{3} \operatorname{Ln} |\operatorname{Cos}(3x)| + C$$

$$34) \int \left[ \operatorname{Sen}(4y) - \operatorname{Tg}\left(\frac{y}{2}\right) + \operatorname{Sec}^2 y \right] dy = -\frac{1}{4} \operatorname{Cos}(4y) + 2 \operatorname{Ln} \left| \operatorname{Cos}\left(\frac{y}{2}\right) \right| + \operatorname{Tg} y + C$$

$$35) \int [\operatorname{Sec}(2\theta) - \operatorname{Sec}(2\theta) \operatorname{Tg}(2\theta)] d\theta = \frac{1}{2} \operatorname{Ln} |\operatorname{Sec}(2\theta) + \operatorname{Tg}(2\theta)| - \frac{1}{2} \operatorname{Sec}(2\theta) + C$$

$$36) \int \frac{a dy}{\operatorname{Cos}(by)} = \frac{a}{b} \operatorname{Ln} |\operatorname{Sec}(by) + \operatorname{Tg}(by)| + C$$

$$37) \int \frac{a dx}{\sqrt{x} \cdot \operatorname{Sen} \sqrt{x}} = 2a \operatorname{Ln} |\operatorname{Cosec} \sqrt{x} - \operatorname{Cotg} \sqrt{x}| + C$$

$$38) \int \frac{b dt}{\operatorname{Cotg}(a - bt)} = \operatorname{Ln} |\operatorname{Cos}(a - bt)| + C$$

$$39) \int (\operatorname{Sec} x + 1)^2 dx = \operatorname{Tg} x + 2 \operatorname{Ln} |\operatorname{Sec} x + \operatorname{Tg} x| + C$$

$$40) \int 2 \operatorname{Cos}(1 - bx) dx = -\frac{2}{b} \operatorname{Sen}(1 - bx) + C$$

$$41) \int x \operatorname{Cos}(1 - x^2) dx = -\frac{1}{2} \operatorname{Sen}(1 - x^2) + C$$

$$42) \int \frac{3 \operatorname{Sen} \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx = -6 \operatorname{Cos} \sqrt{x} + C$$

$$43) \int \frac{2}{3} \operatorname{Sen}\left(a - \frac{x}{2}\right) dx = \frac{4}{3} \operatorname{Cos}\left(a - \frac{x}{2}\right) + C$$

$$44) \int \left[ -\operatorname{Sec}^2\left(\frac{4x}{3}\right) \right] dx - \frac{3}{4} \operatorname{Tg}\left(\frac{4x}{3}\right) + C$$

$$45) \int \frac{\operatorname{Cosec}^2(1 - \sqrt{x})}{\sqrt{x}} dx = 2 \operatorname{Cotg}(1 - \sqrt{x}) + C$$

$$46) \int 2 \operatorname{Sen}(a^2 x) \operatorname{Tg}(a^2 x) dx = \frac{2}{a^2} \operatorname{Sec}(a^2 x) + C$$

$$47) \int e^{-x} \operatorname{Sec}(e^{-x}) \operatorname{Tg}(e^{-x}) dx = -\operatorname{Sec}(e^{-x}) + C$$

$$48) \int \frac{e^{\sqrt{y}} \cdot \operatorname{Cosec}(e^{\sqrt{y}}) \operatorname{Cotg}(e^{\sqrt{y}})}{\sqrt{y}} dy = -2 \operatorname{Cosec}(e^{\sqrt{y}}) + C$$

$$49) \int \frac{e^{2x} dx}{\operatorname{Tg}(e^{2x})} = \frac{1}{2} \operatorname{Ln} |\operatorname{Sen}(e^{2x})| + C$$

$$50) \int \frac{x e^{x^2} dx}{\operatorname{Cotg}(e^{x^2})} = \frac{1}{2} \operatorname{Ln} |\operatorname{Sec}(e^{x^2})| + C$$

$$51) \int \frac{dx}{1 + \operatorname{Cos} x} = -\operatorname{Cotg} x + \operatorname{Cosec} x + C$$

$$52) \int \frac{dt}{1 - \operatorname{Sen} t} = \operatorname{Tg} t + \operatorname{Sec} t + C$$

$$53) \int \frac{du}{1 - \operatorname{Cos} u} = -\operatorname{Cotg} u - \operatorname{Cosec} u + C$$

$$54) \int \frac{2 dx}{1 - \operatorname{Cos}(2x)} = -\operatorname{Cotg}(2x) - \operatorname{Cosec}(2x) + C$$

$$55) \int \frac{dx}{1 + \operatorname{Sen}(2x)} = \frac{1}{2} \operatorname{Tg}(2x) - \frac{1}{2} \operatorname{Sec}(2x) + C$$

$$56) \int \frac{dx}{1 - \operatorname{Sen}(2x)} = \frac{5}{6} \operatorname{Tg}(6x) + \frac{5}{6} \operatorname{Sec}(6x) + C$$

$$57) \int \frac{2 dv}{1 + \operatorname{Sen}\left(\frac{v}{2}\right)} = 4 \operatorname{Tg}\left(\frac{v}{2}\right) - 4 \operatorname{Sec}\left(\frac{v}{2}\right) + C$$

**II.- Comprobar que:**

$$1) \int \operatorname{Cos}^3\left(\frac{x}{3}\right) dx = 3 \operatorname{Sen}\left(\frac{x}{3}\right) - \operatorname{Sen}^3\left(\frac{x}{3}\right) + C$$

$$2) \int \operatorname{Sen}^4 x dx = \frac{3}{8} x - \frac{1}{4} \operatorname{Sen}(2x) + \frac{1}{32} \operatorname{Sen}(4x) + C$$

$$3) \int \operatorname{Sen}^4(3x) \operatorname{Cos}^2(3x) dx = \frac{1}{16} x - \frac{1}{192} \operatorname{Sen}(12x) - \frac{1}{144} \operatorname{Sen}^3(6x) + C$$

$$4) \int \operatorname{Tg}^3(2x) \operatorname{Sec}^3(2x) dx = \frac{1}{10} \operatorname{Sec}^5(2x) + \frac{1}{6} \operatorname{Sec}^3(2x) + C$$

$$5) \int \operatorname{Cotg}^3(2x) dx = -\frac{1}{4} \operatorname{Cotg}^2(2x) + \frac{1}{2} \operatorname{Ln} |\operatorname{Cosec}(2x)| + C$$

$$6) \int \operatorname{Cosec}^6 x dx = -\operatorname{Cotg} x - \frac{2}{3} \operatorname{Cotg}^3 x - \frac{1}{3} \operatorname{Cotg}^5 x + C$$

$$7) \int \operatorname{Cotg}(3x) \operatorname{Cosec}^4(3x) dx = -\frac{1}{6} \operatorname{Cotg}^2(3x) - \frac{1}{12} \operatorname{Cotg}^4(3x) + C$$

$$8) \int \operatorname{Cotg}^3 x \operatorname{Cosec}^5 x dx = -\frac{1}{7} \operatorname{Cosec}^7 x + \frac{1}{5} \operatorname{Cosec}^5 x + C$$

$$9) \int \operatorname{Sen}^2 x \operatorname{Cos}^5 x dx = \frac{1}{3} \operatorname{Sen}^3 x - \frac{2}{5} \operatorname{Sen}^5 x + \frac{1}{7} \operatorname{Sen}^7 x + C$$

$$10) \int \operatorname{Sen}^3 x \operatorname{Cos}^2 x dx = \frac{1}{5} \operatorname{Cos}^5 x - \frac{1}{3} \operatorname{Cos}^3 x + C$$

$$11) \int \operatorname{Cos}^5(5x) \cdot \operatorname{Sen}^5(5x) dx = \frac{1}{30} \operatorname{Cos}^6(5x) - \frac{1}{20} \operatorname{Cos}^8(5x) + \frac{1}{10} \operatorname{Cos}^{10}(5x) + C$$

$$12) \int \operatorname{Sen}^2 x \cdot \operatorname{Cos}^2 x dx = \frac{x}{8} - \frac{1}{32} \operatorname{Sen}(4x) + C$$

$$13) \int \frac{1}{\operatorname{Cos}^6 x} dx = \operatorname{Tg} x + \frac{2 \operatorname{Tg}^3 x}{3} + \frac{\operatorname{Tg}^5 x}{5} + C$$

$$14) \int \frac{\operatorname{Sen}\left(x + \frac{\pi}{4}\right)}{\operatorname{Sen} x \cdot \operatorname{Cos} x} dx = \operatorname{Ln} \left| \sqrt{[(\operatorname{Sec} x - 1) \cdot (\operatorname{Cosec} x + 1)]^{\sqrt{2}}} \right| + C$$

$$15) \int \operatorname{Cos}\left(\frac{x}{3}\right) \cdot \operatorname{Cos}\left(\frac{x}{3}\right) dx = 3 \operatorname{Sen}\left(\frac{x}{6}\right) + \frac{3}{5} \operatorname{Sen}\left(\frac{5x}{6}\right) + C$$

$$16) \int \operatorname{Sen}(10x) \cdot \operatorname{Sen}(15x) dx = \frac{\operatorname{Sen}(5x)}{10} - \frac{\operatorname{Sen}(25x)}{50} + C$$

$$17) \int \operatorname{Sen}^5 x \cdot \operatorname{Cos}^2 x dx = -\frac{\operatorname{Cos}^3 x}{5} + \frac{2}{5} \operatorname{Cos}^5 x - \frac{\operatorname{Cos}^7 x}{7} + C$$

$$18) \int \operatorname{Sen}^2 x \cdot \operatorname{Cos}^2 x dx = -\frac{1}{4} x + \frac{1}{4} \operatorname{Sen}(2x) + C$$

$$19) \int \operatorname{Sen}^3(2x) dx = -\frac{1}{2} \operatorname{Cos}(2x) + \frac{1}{6} \operatorname{Cos}^3(2x) + C$$

$$20) \int \frac{\operatorname{Tg}^3 x}{\sqrt{\operatorname{Sec} x}} dx = \frac{2 \cdot \operatorname{Sec}^2 x + 6}{3 \cdot \sqrt{\operatorname{Sec} x}} + C$$

$$21) \int \operatorname{Tg}^5 x dx = \frac{\operatorname{Tg}^4 x}{4} - \frac{\operatorname{Tg}^2 x}{2} - \operatorname{Ln} |\operatorname{Sec} x| + C$$

$$22) \int \frac{\operatorname{Cos}^5 x}{\operatorname{Sen}^3 x} dx = -\frac{1}{2 \operatorname{Sen}^2 x} - 2 \operatorname{Ln} |\operatorname{Sen} x| + \frac{\operatorname{Sen}^2 x}{2} + C$$

- 23)  $\int \cos^3 x \cdot \operatorname{Sen}^6 x dx = \frac{\operatorname{Sen}^7 x}{7} - \frac{\operatorname{Sen}^9 x}{9} + C$
- 24)  $\int \operatorname{Sen}^4(3x) \cdot \operatorname{Cos}^2(3x) dx = \frac{1}{16} x - \frac{1}{192} \operatorname{Sen}(12x) - \frac{1}{144} \operatorname{Sen}^3(6x) + C$
- 25)  $\int \operatorname{Cosec}^6(2x) dx = -\frac{1}{6} \operatorname{Cotg}^3(2x) - \frac{1}{2} \operatorname{Cotg}(2x) + C$
- 26)  $\int \frac{\operatorname{Sen}^5 x}{\sqrt[3]{\operatorname{Cos}^2 x}} dx = -\frac{5}{3} \operatorname{Cos}^{\frac{2}{3}} x + \frac{10}{13} \operatorname{Cos}^{\frac{13}{3}} x - \frac{5}{23} \operatorname{Cos}^{\frac{23}{3}} x + C$
- 27)  $\int \operatorname{Cotg}^3 x \cdot \operatorname{Cosec}^4 x dx = -\frac{1}{6} \operatorname{Cotg}^6 x - \frac{1}{4} \operatorname{Cotg}^4 x + C$
- 28)  $\int \frac{\operatorname{Sec}^2 x}{\operatorname{Cotg}^3 x} dx = \frac{\operatorname{Tg}^4 x}{4} + C$
- 29)  $\int \sqrt{\operatorname{Tg}^3(2x) \cdot \operatorname{Sec}^8(2x)} dx = \frac{1}{2} \operatorname{Tg}^{\frac{5}{2}}(2x) + \frac{1}{2} \operatorname{Tg}^{\frac{3}{2}}(2x) + C$
- 30)  $\int \operatorname{Cotg}^6 x dx = -\frac{\operatorname{Cotg}^5 x}{5} + \frac{\operatorname{Cotg}^3 x}{3} + \operatorname{Cotg} x + x + C$
- 31)  $\int \left( \frac{\operatorname{Tg} x}{\operatorname{Sec} x} \right)^2 dx = \frac{1}{2} x - \frac{1}{4} \operatorname{Sen}(2x) + C$
- 32)  $\int \frac{\operatorname{Cotg}^2 x + \operatorname{Cosec}^2 x}{1 - \operatorname{Cos}^2 x} dx = -\frac{2}{3} \operatorname{Cotg}^3 x - \operatorname{Cotg} x + C$
- 33)  $\int \frac{\operatorname{Cotg}^5 x}{\operatorname{Cosec}^4 x} dx = \operatorname{Ln}|\operatorname{Sen} x| - \frac{2}{3} \operatorname{Sen}^3 x + \frac{1}{5} \operatorname{Sen}^5 x + C$
- 34)  $\int \frac{\operatorname{Cos}^6 x}{\operatorname{Sen} x} dx = \operatorname{Ln}|\operatorname{Cosec} x - \operatorname{Cotg} x| + \frac{5}{3} \operatorname{Cos}^3 x + \operatorname{Cos} x + \frac{\operatorname{Cos}^5 x}{5} + C$
- 35)  $\int \operatorname{Sec}^5(n) dn = \frac{1}{4} \operatorname{Sec}^3(n) \cdot \operatorname{Tg}(n) - \frac{3}{8} \operatorname{Sec}(n) \cdot \operatorname{Tg}(n) - \frac{3}{8} \operatorname{Ln}|\operatorname{Sec}(n) + \operatorname{Tg}(n)| + C$
- 36)  $\int \frac{3 \operatorname{Cosec}^2 x + \operatorname{Tg}^2 x \cdot \operatorname{Cos}^4 x}{\operatorname{Sen}^4 x} dx = -\frac{3}{2} \operatorname{Cotg}^5 x + 2 \operatorname{Cotg}^3 x - 4 \operatorname{Cotg} x - x + C$
- 37)  $\int \frac{7}{\operatorname{Cosec} x \cdot \operatorname{Cotg} x} dx = 7 \operatorname{Ln}|\operatorname{Sec} x + \operatorname{Tg} x| - 7 \operatorname{Sen} x + C$
- 38)  $\int \frac{\operatorname{Cotg}^2 x}{\operatorname{Sen}^2(2x)} dx = -\frac{1}{16} \operatorname{Cotg}^4 x - \frac{3}{4} \operatorname{Cotg} x + C$
- 39)  $\int \frac{\operatorname{Sen}^2 x}{\operatorname{Cos}^5 x - \operatorname{Cos}^7 x} dx = \frac{1}{4} \operatorname{Sec}^3 x \cdot \operatorname{Tg} x - \frac{3}{8} \operatorname{Sec} x \cdot \operatorname{Tg} x - \frac{3}{8} \operatorname{Ln}|\operatorname{Sec} x + \operatorname{Tg} x| + C$
- 40)  $\int \operatorname{Cosec}^3 x dx = -\frac{1}{2} \operatorname{Cosec} x \cdot \operatorname{Cotg} x - \frac{1}{2} \operatorname{Ln}|\operatorname{Cosec} x - \operatorname{Cotg} x| + C$
- 41)  $\int \sqrt{1 - \operatorname{Sen} x} dx = 2\sqrt{1 - \operatorname{Sen} x} + C$
- 42)  $\int \sqrt{1 + 3 \operatorname{Cos}^2 x} \cdot \operatorname{Sen}(2x) dx = -\frac{2}{9} \cdot \sqrt{(1 + 3 \operatorname{Cos}^2 x)^3} + C$
- 43)  $\int \frac{dx}{\operatorname{Sec}(2x) - \operatorname{Tg}(2x)} = \operatorname{Ln} \left| \frac{\sqrt{1 - \operatorname{Sen}(2x)}}{1 - \operatorname{Sen}(2x)} \right| + C$

**III.- Verifique los siguientes resultados aplicando las Fórmulas de Werner. Usted debe escoger la forma de agrupar:**

- 1)  $\int \operatorname{Sen}(3x) \operatorname{Cos}(4x) \operatorname{Cos}(6x) dx = -\frac{1}{20} \operatorname{Cos}(5x) + \frac{1}{28} \operatorname{Cos}(7x) - \frac{1}{4} \operatorname{Cos} x - \frac{1}{52} \operatorname{Cos}(13x) + C$
- 2)  $\int \operatorname{Sen}(4x) \operatorname{Sen}(6x) \operatorname{Cos}(5x) dx = \frac{1}{12} \operatorname{Sen}(3x) + \frac{1}{28} \operatorname{Sen}(7x) - \frac{1}{20} \operatorname{Sen}(5x) - \frac{1}{60} \operatorname{Sen}(15x) + C$
- 3)  $\int \operatorname{Cos}(3x) \operatorname{Cos}(7x) \operatorname{Cos}(9x) dx = \frac{1}{20} \operatorname{Sen}(5x) + \frac{1}{52} \operatorname{Sen}(13x) + \frac{1}{4} \operatorname{Sen} x + \frac{1}{76} \operatorname{Sen}(19x) + C$
- 4)  $\int [\operatorname{Cos}(2x) \cdot \operatorname{Sen}(3x) \cdot \operatorname{Cos}(5x) \cdot \operatorname{Cos}(-7x)] dx = \frac{1}{88} \operatorname{Cos}(11x) - \frac{1}{104} \operatorname{Cos}(13x) + \frac{1}{8} \operatorname{Cos} x - \frac{1}{12} \operatorname{Cos}(3x) - \frac{1}{136} \operatorname{Cos}(17x) + C$

**IV.- Resuelva los siguientes ejercicios aplicando las Fórmulas de Werner:**

- 1)  $\int \operatorname{Sen}(3x) \operatorname{Cos}(4x) dx$
- 2)  $\int \operatorname{Sen}(2x) \operatorname{Cos}(8x) dx$
- 3)  $\int \operatorname{Sen}(4x) \operatorname{Sen}(7x) dx$
- 4)  $\int \operatorname{Cos}(3x) \operatorname{Cos}(7x) dx$
- 5)  $\int \operatorname{Sen}(-2x) \operatorname{Sen}(6x) dx$
- 6)  $\int \operatorname{Cos}(4x) \operatorname{Cos}(-8x) dx$
- 7)  $\int \operatorname{Sen} x \operatorname{Sen}(2x) \operatorname{Sen}(3x) dx$

**V.- Obtenga las siguientes integrales aplicando las fórmulas de Euler:**

- |   |   |
|---|---|
| 1) $\int \cos x \cdot \sin(2x) \cdot \cos(3x) dx$ | 6) $\int \cos^4(2\theta) \cdot \sin^3(\frac{1}{2}\theta) d\theta$ |
| 2) $\int \sin x \cdot \cos(2x) dx$                | 7) $\int \cos^4(5y) \cdot \sin^2(3y) dy$                          |
| 3) $\int \sin^2(3x) \cdot \cos x dx$              | 8) $\int \cos^2(5u) \cdot \cos^3(2u) du$                          |
| 4) $\int \sin(5t) \cdot \cos(7t) dt$              | 9) $\int \sin^2 x \cdot \cos^2 x dx$                              |
| 5) $\int \cos^5(3\phi) \cdot \sin^4(7\phi) d\phi$ | 10) $\int \sin^2(4x) \cdot \cos^3(7x) dx$                         |

**VI.- Calcule:**

- |  |  |
|--|--|
| 1) $\int \sqrt[3]{1+Tgy} \cdot \sec^2 y dy$  | 24) $\int \operatorname{Sen} w \operatorname{Cos} w \operatorname{Cosec}(\operatorname{Sen}^2 w + 1) \operatorname{Cotg}(\operatorname{Sen}^2 w + 1) dw$           |
| 2) $\int \frac{\operatorname{ArcTg}(2q+3)}{1+(2q+3)^2} dq$   | 25) $\int \operatorname{Tgz} \operatorname{Sec}^2 z \operatorname{Cosec}^2(\operatorname{Tg}^2 z + 1) dz$  |
| 3) $\int \frac{\operatorname{Cosec}(\frac{7}{w^2}) \operatorname{Cotg}(\frac{7}{w^2})}{w^3} dw$  | 26) $\int [\operatorname{Sen}^3(\sqrt{3}+1) + e^{\frac{1}{2}}] d\theta$  |
| 4) $\int [1 - 5\operatorname{Cos}(\frac{u}{4})]^6 \operatorname{Sen}(\frac{u}{4}) du$  | 27) $\int [e^{1-\sqrt{z}} + \operatorname{Sec}^2(3v-1)] dv$  |
| 5) $\int \frac{\operatorname{Cos}(\operatorname{Ln} x)}{x \operatorname{Sen}^2(\operatorname{Ln} x)} dx$   | 28) $\int \frac{\operatorname{Cos}(\operatorname{Ln} 5y)}{4y} dy$  |
| 6) $\int \operatorname{Sec}(\operatorname{Sen}^2 x) \operatorname{Tg}(\operatorname{Sen}^2 x) \operatorname{Sen} x \operatorname{Cos} x dx$                              | 29) $\int \frac{e^{2z} \operatorname{Cosec}^2(e^{2z})}{\operatorname{Cotg}(e^{2z})} dz$  |
| 7) $\int \frac{\operatorname{Sen}(\operatorname{Ln} 2z)}{4z} dz$   | 30) $\int \frac{\operatorname{ArcTg} \theta - 3\theta}{\theta^2 + 1} d\theta$  |
| 8) $\int \frac{\operatorname{Sec}^2 t}{3\operatorname{Tg}^2 t + 5} dt$   | 31) $\int \operatorname{Sen}^3 2w dw$  |
| 9) $\int \frac{\operatorname{Sec}(e^w + 3)}{e^{-w}} dw$  | 32) $\int \operatorname{Tg}^4 \theta d\theta$  |
| 10) $\int \frac{\operatorname{Cosec}(1+p^{-1})}{p^2} dp$   | 33) $\int \frac{\operatorname{Cos}^3 2t}{\operatorname{Sen}^3 2t} dt$  |
| 11) $\int \frac{u^2}{3} \operatorname{Cosec}^2(u^3 + 8) du$  | 34) $\int \frac{\operatorname{Sen}^3 2t}{\sqrt{\operatorname{Cos} 2t}} dt$   |
| 12) $\int \frac{2\operatorname{Sen}\sqrt{q}}{5\sqrt{q}} dq$  | 35) $\int \operatorname{Cos}^3 2t \cdot \operatorname{Cosec}^2 2t dt$  |
| 13) $\int \frac{x \cdot \operatorname{ArcSen}^2 x^2}{\sqrt{1-x^4}} dx$   | 36) $\int \operatorname{Sec} \theta d\theta$   |
| 14) $\int \operatorname{Tg} 2\theta \operatorname{Cosec}(\operatorname{Sec} 2\theta) \operatorname{Sec} 2\theta \operatorname{Cotg}(\operatorname{Sec} 2\theta) d\theta$ | <i>Sugerencia: Multiplique y divida el integrando por <math>\operatorname{Sec} \theta + \operatorname{Tg} \theta</math></i>  |
| 15) $\int \frac{\operatorname{ArcSen}(2r)}{\sqrt{1-4r^2}} dr$  | 37) $\int \operatorname{Cosec} \beta d\beta$   |
| 16) $\int e^{\operatorname{Sen}(\frac{u}{7})} \operatorname{Cos}(\frac{u}{7}) du$  | <i>Sugerencia: Multiplique y divida el integrando por <math>\operatorname{Cosec} \beta - \operatorname{Cotg} \beta</math></i>                                      |
| 17) $\int \frac{\operatorname{Cosec}^2(\frac{1}{q})}{q^2 e^{\operatorname{Cotg}(\frac{1}{q})}} dq$   | 38) $\int \operatorname{Sen} 2x \cdot \operatorname{Cos} 3x dx$  |
| 18) $\int \operatorname{Cos} 7\theta \sqrt[3]{\operatorname{Sen}(7\theta) + 2} d\theta$  | <i>Sugerencia: Utilice la identidad <math>\operatorname{Sen} A \cdot \operatorname{Cos} B = \frac{\operatorname{Sen}(A+B) + \operatorname{Sen}(A-B)}{2}</math></i> |
| 19) $\int \frac{\operatorname{Ln}(\operatorname{Sen} 4v)}{\operatorname{Cosec} 4v} dv$   | 39) $\int \operatorname{Cos}(5x) \cdot \operatorname{Cos}(7x) dx$  |
| 20) $\int \operatorname{Sen}^3(\operatorname{ArcSen} 2y) dy$   | <i>Sugerencia: Utilice la identidad <math>\operatorname{Cos} A \cdot \operatorname{Cos} B = \frac{\operatorname{Cos}(A+B) + \operatorname{Cos}(A-B)}{2}</math></i> |
| 21) $\int \frac{\frac{1}{\operatorname{Sen} t + 2} + \operatorname{Ln} 2}{\operatorname{Cost}(\operatorname{Sen} t + 2)^2} dt$   | 40) $\int \operatorname{Sen}(4x) \cdot \operatorname{Sen}(10)x dx$   |
| 22) $\int e^{\operatorname{Cos} 2u} \operatorname{Sen} 2u \operatorname{Sen}(2e^{\operatorname{Cos} 2u}) du$   | <i>Sugerencia: Utilice la identidad <math>\operatorname{Sen} A \cdot \operatorname{Sen} B = \frac{\operatorname{Cos}(A-B) - \operatorname{Cos}(A+B)}{2}</math></i> |
| 23) $\int \frac{d\theta}{\operatorname{Sec} \theta (\operatorname{Sen} \theta + 7)}$   | 41) $\int \frac{\operatorname{Sen}^3 2t}{\operatorname{Sec} 2t} dt$  |
|  | 42) $\int \operatorname{Cos}^4 2y dy$  |
|  | 43) $\int \operatorname{Sen}^6 2y dy$  |
|  | 44) $\int (1 + \operatorname{Tg} v)^2 \operatorname{Sec}^2 v dv$   |
|  | 45) $\int \frac{dw}{3\operatorname{Cos}^2 2w}$   |
|  | 46) $\int \frac{\operatorname{Cotg} 3p}{\operatorname{Sen}^2 3p} dp$   |

- 47)  $\int \frac{\text{Sen } 5\theta}{(3 + \text{Cos } 5\theta)^2} d\theta$
- 48)  $\int \frac{dt}{\text{Cos}^2 t \cdot \sqrt{\text{Tg}^2 t + 5}}$
- 49)  $\int y \text{Sec}^2 y dy$
- 50)  $\int 7x^3 \text{Sen}(1 + x^2) dx$
- 51)  $\int e^{-z} \text{Sen} z dz$
- 52)  $\int \text{Sen}(\text{Ln } x) dx$
- 53)  $\int p^2 \text{Cos}(2p) dp$
- 54)  $\int \text{ArcSen}\left(\frac{t}{3}\right) dt$
- 55)  $\int \text{ArcTg}(2q) dq$
- 56)  $\int e^{3w} \text{Cos}(3 - 5w) dw$
- 57)  $\int ze^{2z^3} \text{Cos}(-5z^2) dz$
- 58)  $\int \text{Sec}^3(7\theta) d\theta$
- 59)  $\int \text{Cotg}^3 \theta \cdot \text{Cosec}^2 \theta d\theta$
- 60)  $\int \text{Cos}^3 t \text{Sen} 2t dt$
- 61)  $\int \text{Sen } p \text{Cos}^3 p dp$
- 62)  $\int \text{Cotg}^3(5\theta + 1) \text{Cosec}^2(5\theta + 1) d\theta$
- 63)  $\int \text{Cos}^3(2t) \text{Sen}(2t) dt$
- 64)  $\int \text{Cos}(2t) \text{Sen}^3(2t) dt$
- 65)  $\int \text{Cos}^3(2t) \text{Sen}^3(2t) dt$
- 66)  $\int \text{Cos}^3(2t) \text{Sen}^{-2}(2t) dt$
- 67)  $\int \text{Cos}^2(2t) \text{Sen}^2(2t) dt$
- 68)  $\int \sqrt[4]{\text{Cos}(2t)} \text{Sen}^3(2t) dt$
- 69)  $\int \text{Sen}^2(2x) \text{Cos}^4(2x) dx$
- 70)  $\int \text{Sen}(2x) \text{Cos}(4x) dx$
- 71)  $\int \text{Sen}(3x) \text{Sen}(2x) dx$
- 72)  $\int \text{Cos}(4x) \text{Cos}(3x) dx$
- 73)  $\int (\text{Sen}^2 \phi + \text{Cos} \phi)^2 d\phi$
- 74)  $\int \text{Sen}^2(ax) \cdot \text{Cos}^2(ax) dx$
- 75)  $\int \text{Sen}^4\left(\frac{\theta}{2}\right) \text{Cos}^2\left(\frac{\theta}{2}\right) d\theta$
- 76)  $\int \text{Sen}^4(2\alpha) \cdot \text{Cos}^4(2\alpha) d\alpha$
- 77)  $\int \text{Sen}^2 x \text{Cos}^6 x dx$
- 78)  $\int (\text{Sen}(2x) - \text{Sen}(3x))^2 dx$
- 79)  $\int (\sqrt{\text{Sen}(2\theta)} - \text{Cos}(2\theta))^2 d\theta$
- 80)  $\int (\sqrt{\text{Cos} \theta} - 2 \text{Sen} \theta)^2 d\theta$
- 81)  $\int \text{Sen} x + \text{Cos}(2x))^2 dx$
- 82)  $\int (\text{Cos} x + 2 \text{Cos}(2x))^2 dx$
- 83)  $\int (1 + \text{Cos} x)^3 dx$
- 84)  $\int \text{Sen}^3(6x) \text{Cos}^2(6x) dx$
- 85)  $\int \sqrt[3]{\text{Sen}^2 x} \cdot \text{Cos} x dx$
- 86)  $\int \text{Sen}(10x) \cdot \text{Sen}(8x) dx$
- 87)  $\int \text{Tg}^5 x \text{Sec}^4 x dx$
- 88)  $\int \text{Sen}^5 x \text{Cos}^4 x dx$
- 89)  $\int \text{Cos}^2 t \text{Sen}^3 t dt$
- 90)  $\int \text{Tg}^4 u \text{Sec}^2 u du$
- 91)  $\int \text{Sen}^3 x \text{Cos} x dx$
- 92)  $\int \text{Sen}^3 x \text{Cos}^2 x dx$
- 93)  $\int \text{Sen}^3(3x) \cdot \text{Cos}^3(3x) dx$
- 94)  $\int \text{Sen}(4x) \text{Cos}^3(4x) dx$
- 95)  $\int \text{Sen}^2(2x) \text{Cos}^3(2x) dx$
- 96)  $\int \text{Sen}(2x) \text{Cos} x dx$
- 97)  $\int \text{Sen}(2x) \text{Sen} x dx$
- 98)  $\int \text{Cos}(2x) \text{Sen} x dx$
- 99)  $\int \text{Cos}(2x) \text{Cos} x dx$
- 100)  $\int \text{Sen}(2x) \text{Cos}(2x) dx$
- 101)  $\int \text{Sen}^2(2x) \text{Cos} x dx$
- 102)  $\int \text{Sen}^2(3x) dx$
- 103)  $\int \text{Cos}^4(2x) dx$
- 104)  $\int \text{Sen}^2(3x) \text{Cos}^2(3x) dx$
- 105)  $\int \text{Sen}^4(2x) \text{Cos}^4(2x) dx$
- 106)  $\int \text{Sen}^2 x \text{Cos}^2 x dx$
- 107)  $\int \text{Sen}^6 x dx$
- 108)  $\int \text{Cos}^6 x dx$
- 109)  $\int (2 - 3 \text{Sen} x)^2 dx$
- 110)  $\int \text{Sen}^3(2x) \text{Cos}^2(3x) dx$
- 111)  $\int \text{Cosec}^3\left(\frac{r}{8}\right) dr$
- 112)  $\int v \text{arcTg} v dv$
- 113)  $\int e^{-15q} \text{Cos}(1 + 4q) dq$
- 114)  $\int p^2 \text{Sen}^3 p dp$
- 115)  $\int \text{ArcSen}(2z) dz$
- 116)  $\int \text{ArcSen}(3t + 6) dz$
- 117)  $\int 4s \text{ArcSec } 3s ds$
- 118)  $\int \frac{w}{2} \text{ArcCotg } 8w dw$
- 119)  $\int w^{11} \text{Cos}(1 - w^6) dw$
- 120)  $\int \frac{z}{3} \text{Sec}(7z - 1) \text{Tg}(7z - 1) dz$
- 121)  $\int (3p + 11) \text{Cosec}\left(\frac{p}{10}\right) \text{Cotg}\left(\frac{p}{10}\right) dp$
- 122)  $\int \text{Cos} \sqrt{t} dt$
- 123)  $\int \text{ArcTg} \sqrt{y} dy$
- 124)  $\int \text{ArcSec} \sqrt{p} dp \quad (p > 0)$
- 125)  $\int \text{Sen} \theta \cdot \text{Ln}(\text{Cos} \theta) d\theta$

VII. – Comprobar, considerando como funciones racionales de seno y coseno, si:

$$1) \int \frac{dx}{2+Senx} = \frac{2}{\sqrt{3}} \text{ArcTg} \left( \frac{2Tg\left(\frac{x}{2}\right)+1}{\sqrt{3}} \right) + C$$

$$2) \int \frac{dx}{1-2Senx} = \frac{\sqrt{3}}{3} \text{Ln} \left| \frac{Tg\left(\frac{x}{2}\right)-2-\sqrt{3}}{Tg\left(\frac{x}{2}\right)-2+\sqrt{3}} \right| + C$$

$$3) \int \frac{dx}{5+3Senx} = \frac{1}{2} \text{ArcTg} \left( \frac{5Tg\left(\frac{x}{2}\right)+3}{4} \right) + C$$

$$4) \int \frac{dx}{1+Senx+Cosx} = \text{Ln} \left| 1+Tg\left(\frac{x}{2}\right) \right| + C$$

$$5) \int \frac{dx}{2-Cosx} = \frac{2\cdot\sqrt{3}}{3} \cdot \text{ArcTg} \sqrt{3} \cdot Tg\left(\frac{x}{2}\right) + C$$

$$6) \int \frac{dx}{2-Senx} = \frac{2\cdot\sqrt{3}}{3} \cdot \text{ArcTg} \left( \frac{2\cdot Tg\left(\frac{x}{2}\right)-1}{\sqrt{3}} \right) + C$$

$$7) \int \frac{d\theta}{4-5Cos\theta} = \frac{1}{3} \cdot \text{Ln} \left| \frac{3\cdot Tg\left(\frac{\theta}{2}\right)-1}{3\cdot Tg\left(\frac{\theta}{2}\right)+1} \right| + C$$

$$8) \int \frac{d\theta}{3Cos\theta+4Sen\theta} = -\frac{1}{5} \cdot \text{Ln} \left| \frac{3\cdot Tg\left(\frac{\theta}{2}\right)-9}{3\cdot Tg\left(\frac{\theta}{2}\right)+1} \right| + C$$

$$9) \int \frac{d\theta}{3+2Cos\theta+2Sen\theta} = 2\text{ArcTg} \left[ Tg\left(\frac{\theta}{2}\right)+2 \right] + C$$

$$10) \int \frac{d\theta}{Tg\theta-Sen\theta} = -\frac{1}{4} \text{Cotg}^2\left(\frac{\theta}{2}\right) - \frac{1}{2} \text{Ln} \left| Tg\left(\frac{\theta}{2}\right) \right| + C$$

$$11) \int \frac{dx}{2+Senx} = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \text{ArcTg} \left( \frac{2\cdot Tg\left(\frac{x}{2}\right)+1}{\sqrt{3}} \right) + C$$

$$12) \int \frac{Cosx dx}{1+Cosx} = -Tg\left(\frac{x}{2}\right) + x + C$$

$$13) \int \frac{dx}{1+Senx+Cosx} = \text{Ln} \left| Tg\left(\frac{x}{2}\right)+1 \right| + C$$

$$14) \int \frac{dx}{Cosx+2Senx+3} = \text{ArcTg} \left[ Tg\left(\frac{x}{2}\right)+1 \right] + C$$

$$15) \int \frac{Senx dx}{1+Sen^2x} = \frac{\sqrt{2}}{4} \cdot \text{Ln} \left| \frac{Tg^2\left(\frac{x}{2}\right)+3-2\sqrt{2}}{Tg^2\left(\frac{x}{2}\right)+3+2\sqrt{2}} \right| + C$$

VIII. - Obtener:

$$1) \int Sen \sqrt{x} dx$$

$$2) \int \frac{Senx dx}{1+Sen^2x}$$

$$3) \int \frac{dx}{2-Cosx}$$

$$4) \int \frac{Secx dx}{Secx+2Tgx-1}$$

$$5) \int \frac{dx}{Senx+Cosx}$$

$$6) \int \frac{dx}{1-Cosx+Senx}$$

$$7) \int \frac{dx}{8-4Senx+7Cosx}$$

$$8) \int \frac{dx}{1+Cosx}$$

$$9) \int \frac{Senx dx}{1+Cosx}$$

$$10) \int \frac{dx}{1-Cosx}$$

$$11) \int \frac{Cosx dx}{2-Cosx}$$

$$12) \int \frac{d\theta}{5-4Cos\theta}$$

$$13) \int \frac{d\theta}{Cos\theta+Cotg\theta}$$

$$14) \int \frac{Sen\phi d\phi}{Cos^2\phi-Cos\phi-2}$$

$$15) \int \frac{Cos\phi d\phi}{5+4Cos\phi}$$

$$16) \int \frac{dx}{Cosx-Cosa}$$

$$17) \int \frac{dx}{3+2Cosx}$$

$$18) \int \frac{dx}{3+2Cosx}$$

$$19) \int \frac{dx}{Senx+Cosx}$$

$$20) \int \frac{Tgx dx}{1+Cosx}$$

$$21) \int \frac{dx}{a+bCosx}$$

$$22) \int \frac{dx}{1+Senx}$$

$$23) \int \frac{dx}{1+2Cosx}$$

$$24) \int \frac{2-Senx}{2+Senx} dx$$

$$25) \int \frac{dx}{Cos^3x}$$

# FÍSICOS NOTABLES

## Edward Victor Appleton

Nació el 6 de septiembre de 1892 en Bradford, y murió el 21 de abril de 1965 en Edimburgo; ambas localidades en el Reino Unido.

**Ganador en 1947 del Premio Nobel en Física.**

*Por sus contribuciones al conocimiento de la ionosfera, que condujo al desarrollo del radar.*

Fuente: buscabiografias.com - Wikipedia



EDWARD VICTOR APPLETON  
(1892-1965)

**Sir Edward Victor Appleton.** Nació el 6 de septiembre de 1892 en Bradford, Yorkshire. Cursó estudios en el Saint John's College de la Universidad de Cambridge. Posteriormente sirvió en el ejército, donde fue capitán en el Cuerpo de Transmisiones durante la I Guerra Mundial.

De 1918 a 1939 fue profesor de física en Cambridge y en la Universidad de Londres, donde inició una serie de experimentos con las ondas radioeléctricas que le llevaron a su descubrimiento de la capa atmosférica de Appleton.

En 1924, utilizó el eco de las ondas de radio para averiguar la altura de la ionosfera, una capa ionizada de la atmósfera más alta capaz de reflejar las ondas de radio más largas. Al año siguiente, los físicos estadounidenses Gregory Breit y Merle Antony Tuve llegaron de forma independiente a los mismos valores para la ionosfera al usar la técnica de radioimpulsos, que más tarde se incorporó a todos los sistemas de radar. Su desarrollo no fue posible hasta la década de 1930, cuando se perfeccionaron las técnicas y equipos electrónicos.

De 1939 a 1949 fue secretario de Estado para la investigación científica, el cargo le dio una responsabilidad total en el campo de la investigación británica durante la II Guerra Mundial y le llevó a trabajar con los científicos de Estados Unidos, sobre todo en el tema del desarrollo del radar. Por este trabajo recibió la medalla del mérito de este país.

Fue Premio Nobel de Física en 1947 por el descubrimiento de la capa atmosférica de Appleton de la ionosfera que refleja las ondas radioeléctricas de alta frecuencia.

Edward Víctor Appleton falleció en Edimburgo el 21 de abril de 1965.



EDWARD VICTOR APPLETON

Imágenes obtenidas de:



# Tesla contra Edison: una rivalidad mitológica

Francisco Doménech (@fucolin), para Ventana al conocimiento  
Elaborado por Materia para OpenMind



NIKOLA TESLA FRENTE A SU BOBINA, EN 1896.  
CRÉDITO FOTO: ELECTRICAL REVIEW.

La figura de científico loco, de genio excéntrico, ya no es patrimonio de Einstein. En las dos últimas décadas la fascinación por la figura de **Nikola Tesla** ha ido agrandando un mito que supera los incuestionables logros de este gran inventor serbio. En la cultura popular se impone la visión de Tesla como un héroe ignorado, cuyos méritos no fueron suficientemente reconocidos. Y en ese relato mitológico aparece un codicioso villano llamado **Thomas Edison**, que hizo lo posible por evitar primero el éxito de Tesla y luego su reconocimiento.

Sin embargo, la realidad documentada es diferente. Los logros de Nikola Tesla (1856–1943) fueron inmediatamente reconocidos y fue una figura venerada desde joven hasta sus últimos años, tanto por sus colegas como por la opinión pública. Ya en 1896, el *gran caballero* de la física, Lord Kelvin, afirmó que “*Tesla ha contribuido más que nadie a la ciencia de la electricidad*”. Y lo cierto es que el premio más importante que recibió Tesla fue la medalla Edison, cosa que su supuesto enemigo podría haber evitado fácilmente, pues era una distinción creada y concedida por un comité en el que había buenos amigos de Thomas Edison.

El 18 de mayo de 1917 el Instituto Americano de Ingenieros Eléctricos (el actual IEEE) rindió homenaje a Nikola Tesla y se vistió de gala para entregarle la medalla Edison. Aquel día se cumplían 29 años exactos de la publicación de un artículo científico (el 18 de mayo de 1888) en el que Tesla detallaba su mayor éxito como inventor: un motor de inducción que funcionaba con un sistema polifásico de corriente alterna.

Nikola Tesla ya había ganado el 1 de mayo de 1888 varias patentes relacionadas con el motor de inducción y el sistema polifásico; y como Edison había rechazado sus propuestas, Tesla las puso al servicio de la empresa Westinghouse Electric. Con esa tecnología de corriente alterna Westinghouse ganó la llamada “guerra de las corrientes” a Edison y a General Electric, que apostaban por la corriente continua. Fue una dura batalla técnica, comercial y legal, en la que Edison jugó con el miedo de los ciudadanos a las descargas eléctricas y electrocutó animales en público para demostrar los peligros de la corriente alterna. En esa época Edison minusvaloró a Tesla: “*es un poeta de la ciencia, sus ideas son maravillosas pero nada prácticas*”.



TESLA EN SU LABORATORIO DE COLORADO SPRINGS.  
CRÉDITO FOTO: DICKENSON V. ALLEY, CENTURY MAGAZINE.

## EL GRAN HOMENAJE A TESLA.

En 1917 el hacha de aquella guerra entre grandes corporaciones estaba enterrada. La medalla Edison reconocía la gran idea de Tesla, cuya tecnología se había impuesto no solo para iluminar las ciudades sino como “*el medio casi universal para transformar la energía eléctrica en energía mecánica*”. En su discurso de aquella noche Bernard A. Behrend añadió: “*Si eliminásemos los trabajos de Tesla, las ruedas de la industria dejarían de girar, nuestros coches y coches y trenes eléctricos se pararían, las ciudades se quedarían a oscuras*”.

**Nikola Tesla** agradeció el premio y dedicó estas palabras a Edison, elogiando su visión práctica: “*Cuando llegué a América, conocí a Edison y su efecto en mí fue extraordinario. Vi como este hombre maravilloso, que no tenía formación teórica, lo hacía todo por sí mismo. Y pensé que había desperdiciado mis mejores años estudiando una docena de idiomas y leyendo todo tipo de cosas que caían en mis manos*”. Tesla recordó su primer año en EEUU, cuando trabajaba sin descanso para Edison y este le reconocía admirado su resistencia.

Esa tenacidad y dedicación al trabajo era lo único en lo que coincidía con Edison, quiso recalcar Tesla: “*No necesitaba modelos ni esquemas ni experimentos, lo hacía todo en mi mente. La manera en que inconscientemente desarrollé un nuevo método de materializar inventos e ideas es exactamente opuesta al método experimental puro, del que sin ninguna duda Edison es el mayor y más exitoso exponente*”. Aquel discurso de 1917 no revelaba más que una distancia profesional entre Edison y Tesla.

## DEL ELOGIO A LA CRÍTICA.

Y así pasaron los años y las décadas hasta que en 1931 Thomas Edison murió y al día siguiente el *New York Times* publicó estas declaraciones de Tesla: “*Si tuviera que buscar una aguja en un pajar, Edison nunca se pararía a razonar donde sería más probable encontrarla: procedería con la fervorosa diligencia de una abeja a examinar una a una cada paja hasta encontrar lo que buscaba [...] Su método era extremadamente ineficiente. Fui un triste testigo de esos procedimientos, sabiendo que un poco de teoría y de cálculo le podría haber ahorrado el 90% de su trabajo*”.

“*A la vista de esto, sus logros son casi un milagro. No es probable que se repita un fenómeno como Edison [...] Ocupará un lugar único en la historia de su país, que debería estar orgulloso de su gran genio y de sus logros inmortales en beneficio de la humanidad*”, añadía Tesla en aquel artículo en el que destacaba también la falta de hobbies y el poco aprecio por la higiene personal de su primer jefe en EEUU.

Esas críticas a iconos de la ciencia no eran extrañas en Tesla, que seguía recibiendo elogios. En el mismo año de la muerte de Edison, Nikola Tesla cumplió 75 y la revista *Time* le dedicó entera su portada del 20 de julio de 1931, con el título de “*Todo el mundo es su central eléctrica*”. También el mismísimo Albert Einstein felicitó a Tesla por su 75 aniversario: “*A un eminente pionero en el desarrollo de las corrientes de alta frecuencia [...] Le felicito por los grandes éxitos de su carrera*”.

Por su parte, Tesla nunca aceptó la física cuántica ni la teoría de la relatividad: “*El trabajo de Einstein es un atuendo matemático brillante que fascina y camufla sus errores. Su teoría es como un mendigo vestido de púrpura, al que los ignorantes confunden con un rey. Sus exponentes son hombres brillantes, pero son metafísicos más que científicos*”, declaraba en 1935 al *New York Times* un Tesla que rechazaba públicamente la dualidad onda-partícula, la curvatura del espacio y afirmaba a la prensa que él podía hacer viajar la electricidad más rápido que la luz.



PORTADA DEDICADA A  
TESLA EN SU 75  
CUMPLEAÑOS.  
CRÉDITO FOTO: TIME  
MAGAZINE.

Tesla pasó sus últimos años investigando un arma para lograr la paz mundial, a la que llamaba el “rayo de la muerte”. El elegante y espigado serbio que había encandilado a la sociedad neoyorkina de finales del siglo XIX era ahora un anciano excéntrico, sin apenas recursos económicos, que vivía solo en la habitación de un hotel y que se desvivía por alimentar y cuidar a las palomas en las calles de la Gran Manzana.

Así murió en 1943, a los 86 años. Y al año siguiente un periodista muy cercano a Tesla en sus últimos tiempos, John J. O’Neill, publicó la primera biografía del gran inventor: “*Prodigal genius; the life of Nikola Tesla*”. En este libro se comenzó a forjar el papel de villano de Edison, remontándose a un desencuentro cuando Tesla aún trabajaba para él, muchos años antes. El viejo Tesla contó a O’Neill que en 1885 Edison le había prometido 50.000 dólares si lograba rediseñar unas máquinas de su empresa, muy poco eficientes. Y además aseguraba que cuando por fin lo consiguió, Edison se negó a recompensarle y se mofó de él.

Para historiadores como Jill Jonnes, autora de “*Empires of Light*”, es poco creíble que Edison ofreciera a un trabajador novato una suma tan grande, que equivalía al capital inicial de su empresa y a 53 años de salario del joven Tesla. Ya fuera ese el motivo, o que su supervisor no quiso subirle el sueldo de 18 a 25 dólares semanales (como apuntan otras fuentes), lo cierto es que Tesla dejó su trabajo después de menos de un año en la empresa de Edison y montó su propia compañía en 1885 para apostar por la corriente alterna.

## UNA VERSIÓN MÁS NOVELADA.

Pero Tesla nunca olvidó aquel desencuentro, según relata su primer biógrafo. En el capítulo dedicado a la entrega de la medalla Edison, O’Neill retrata a un Nikola Tesla que primero quiso rechazar el premio y luego desapareció de la gala en su honor en el momento clave. Había salido a alimentar a las palomas. Su amigo Behrend lo encontró en la calle “*con dos palomas formando una corona en su cabeza y con una docena más posadas sobre sus brazos. En cada mano abierta había otro pájaro y unos cientos más en el suelo, formando una alfombra viviente*”.

Según ese detallado relato, Tesla hizo un gesto con el que los pájaros comenzaron a volar desde sus brazos a los de su atónito amigo; y en esas páginas se cuenta también que Tesla volvió a la sala y dio un discurso largo e improvisado, del que no se conserva registro. La primera biografía de Tesla omitió así la escena en la que el protagonista elogió en público la figura de Edison. Pero el discurso sí se conserva, fue publicado una semana después por la revista *Electrical Review and Western Electrician*.

Con este halo de misterio y excentricidad, pero sin rigor documental, el libro “*Prodigal genius; the life of Nikola Tesla*” (O’Neill, 1944) difundió la idea de un exacerbado antagonismo entre Edison y Tesla, que fue calando en la cultura popular a medida que sucesivos biógrafos fueron repitiendo la versión de John J. O’Neill, incluida la cinematográfica escena de las palomas. Puede que la historia de Tesla sea así más fascinante, con un Edison en la sombra. Pero como quedó patente en aquel homenaje de 1917 y en tantos otros reconocimientos, no era necesario un villano para ensalzar las hazañas del gran héroe de la electricidad.

## Galileo y su telescopio. Los primeros ojos hacia el espacio

Por: JOANA OLIVEIRA - @joanaoliv

Elaborado por  Materia para  OpenMind



El 25 de agosto de 1609, Galileo Galilei presentó su telescopio.

**Mucho antes que el Hubble, Galileo y su telescopio fueron los primeros en profundizar en los secretos del espacio. Así vio cosas que no gustaron a la Iglesia Católica. Tuvo que renegar de sus ideas, pero nadie pudo quitarle el título de padre de la astronomía moderna: por abrirnos los ojos a un nuevo universo.**

En 1990, el ser humano colocó en el espacio el ojo más preciso para mirar el universo, el telescopio espacial *Hubble*. Pero eso no hubiese sido posible sin un invento menos tecnológico, pero igualmente revolucionario: **el telescopio presentado por Galileo Galilei el 25 de agosto de 1609**. Aquel instrumento de refracción — de 1,27 metros de largo, con una lente convexa delante y otra lente ocular cóncava— permitió al físico italiano convertirse en **el padre de la astronomía moderna**.

Gracias a ese aparato, Galileo vio que el Sol, considerado hasta entonces símbolo de perfección, tenía manchas. El astrónomo realizó observaciones directas de la estrella, aprovechando cuando las nubes se interponían al disco solar, o en las mañanas y atardeceres, cuando la intensidad luminosa era más soportable, una práctica que le dejó totalmente ciego al final de su vida.



REPRESENTACIÓN DE GALILEO GALILEI PRESENTANDO SU TELESCOPIO EN VENEZIA. AUTOR: H. J. DETOUCHE.

La Luna tampoco era perfecta. Galileo vio lo que consideró montañas y cráteres, pruebas de que el satélite natural, al igual que nuestro planeta, era un cuerpo rocoso y lleno de irregularidades en su superficie y no una esfera impecable hecha de éter, como se sostenía en aquel entonces. **Esas observaciones pusieron en entredicho las tesis aristotélicas tradicionales sobre la perfección del mundo celeste**, que residía en la completa esfericidad de los astros.

El astrónomo, nacido en Pisa, también notó que Saturno tenía unos apéndices extraños, que describió como similares a dos asas. Esos “apéndices” intriguaron a los astrónomos durante medio siglo hasta 1659, cuando el matemático, físico y astrónomo holandés Christiaan Huygens utilizó telescopios más potentes para desvendar el misterio sobre la cambiante morfología del segundo mayor planeta del sistema solar: esas asas eran en realidad sus anillos.

Lo más curioso, sin embargo, que Galileo pudo observar con aquel telescopio de ocho aumentos que él mismo construyó (se cree que el primer tubo utilizado provenía de un órgano) fue que **Júpiter estaba rodeado de lunas y constituía un sistema parecido a lo que debería ser el sistema solar**. El astrónomo observó por primera vez los satélites galileanos —denominados así en su honor— el 7 de enero de 1610 y en un principio pensó que se trataba de tres estrellas cercanas al planeta, que formaban una línea que lo atravesaba. La segunda noche le llamó la atención el hecho de que esos cuerpos parecían haberse movido en otra dirección.

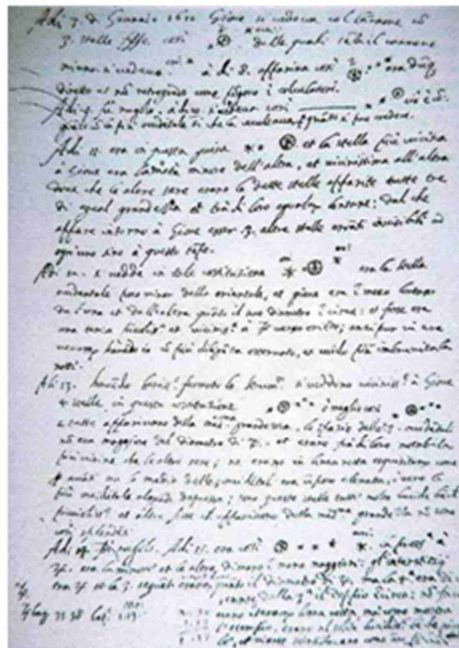


JUPITER Y LOS SATÉLITES GALILEANOS.  
CRÉDITO IMAGEN: NASA/JPL.

El 11 de enero apareció una cuarta estrella y, después de una semana de observación, él había visto que los cuatro cuerpos celestes nunca abandonaban la vecindad de Júpiter y parecían moverse con él, cambiando su posición respecto a las otras “estrellas” y al planeta.

Finalmente, Galileo determinó que lo que había estado observando no eran estrellas, sino satélites planetarios y publicó sus conclusiones en *Siderius Nuncius*, en marzo del mismo año. **Galileo llamó originalmente a las lunas de Júpiter “Planetas Medicianos”**, en honor de la familia Medici, y se refirió a ellas con los números I, II, III y IV. Ese sistema se emplearía durante dos siglos, hasta que se adoptó la denominación dada por el astrónomo alemán Simon Marius, quien decía haberlas observado antes que Galileo:

*“Júpiter es mucho más culpado por los poetas debido a sus irregulares amores. Tres doncellas son mencionadas especialmente por haber sido cortejadas clandestinamente por Júpiter de forma exitosa: Io, hija del Río, Calisto de Lycaon, Europa de Agenor. Luego fue Ganímedes, el guapo hijo del Rey Tros, a quien Júpiter, habiendo tomado la forma de un águila, transportó en su lomo hasta los cielos, tal como los poetas narran de una forma fabulosa”,* escribió Marius en 1614 —en una sorprendente sintonía con el escritor Cervantes, que en un poema anterior había llamado “pequeñuelos Ganímedes” a los cuatro satélites jovianos.



OBSERVACIONES DE GALILEO SOBRE LAS LUNAS DE JÚPITER.  
CRÉDITO IMAGEN: NASA/JPL.

Las observaciones sobre los satélites de Júpiter y la constatación de que Venus pasa por fases similares a las de la Luna terrestre confirmaron la validez del sistema heliocéntrico de Copérnico, que defendía que **la Tierra no es el centro del sistema solar**. Galileo publicó en 1632 el *Diálogo sobre los dos grandes sistemas del mundo*, un ensayo sobre los méritos relativos de los sistemas ptolemaico y copernicano, con todas las pruebas que las observaciones con telescopio habían aportado a este último. Su militancia científica le valió la persecución y la condena de la Iglesia Católica, y Galileo Galilei murió preso y ciego, cerca de Florencia, en 1642. Tuvo que renegar de sus ideas, pero nadie pudo quitarle el título de padre de la astronomía moderna, por abrir los ojos de la humanidad a un nuevo universo.



RETRATO DE GALILEO GALILEI.  
AUTOR: JUSTUS SUSTERMANS.

## QUÍMICOS DESTACADOS

### *William Francis Giaque*

Nació el 12 de mayo de 1895 en Niágara Falls, Ontario, Canadá, y murió el 28 de marzo de 1982 en Berkeley, California, EE. UU.

**Ganador del Premio Nobel en Química en 1949.**

*Por sus estudios en termodinámica, especialmente por sus investigaciones sobre las propiedades de las sustancias a bajas temperaturas (la búsqueda del cero absoluto).*

FUENTES: Biografiasyvidas - Wikipedia

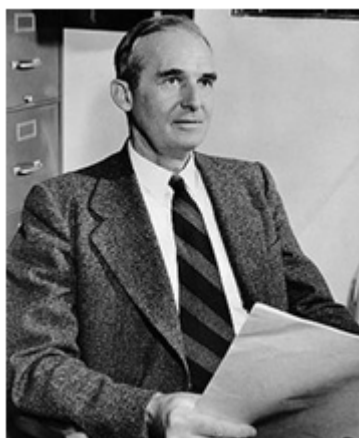


WILLIAM FRANCIS GIAUQUE  
(1895-1982)

Físico químico nacido en Canadá pero de nacionalidad norteamericana. Desde 1922 fue profesor de la Universidad de California. Junto a H. L. Johnston, descubrió los dos isótopos pesados del oxígeno en la atmósfera terrestre. Gracias a este descubrimiento, se llegó al del deuterio. Al mismo tiempo que Debye, en 1924, preconizó el método de producción de frío que permite alcanzar las temperaturas próximas al cero absoluto.

En 1925, propuso un método conocido como la demagnetización adiabática, concebida para alcanzar temperaturas inferiores a 1 K, meta que no se había conseguido alcanzar hasta entonces. El método consiste en colocar un recipiente con una sustancia paramagnética en su interior, a la menor temperatura posible, en el radio de acción de un campo magnético muy fuerte. Éste provoca la alineación de los iones de la sustancia, que presentan una naturaleza magnética elemental.

Una vez que se ha desconectado el campo magnético, los iones magnéticos elementales tienden a aumentar su entropía al alinearse de forma aleatoria, pero, como este proceso requiere energía, la temperatura desciende. En 1933, Giaque consiguió alcanzar la temperatura de 0,1 K. Por sus aportaciones a la termodinámica química, en especial por sus investigaciones acerca de las propiedades a temperaturas extremadamente bajas, recibió el premio Nobel de Química en 1949.



WILLIAM FRANCIS GIAUQUE

Imágenes obtenidas de:



# Dactiloscopia: tras la huella del crimen

El origen de la dactiloscopia, la ciencia que compara las huellas dactilares

**¿Cuándo se usó por primera vez una huella dactilar para demostrar la culpabilidad de una persona en un asesinato? La dactiloscopia recorrió un camino de muchos siglos, de la antigua China a Argentina, hasta llegar a ser una de las herramientas indispensables de la criminología.**

Por: DORY GASCUEÑA (@dorygascu) para OpenMind - 20 julio 2017

Aunque la ciencia siga desentramando los misterios químicos, genéticos y fisiológicos que permiten el milagro de **nuestras huellas dactilares**, lo cierto es que la sociedad sí ha sacado partido a esas marcas en ámbitos como la criminología desde hace siglos, pues aunque no supiéramos por qué, sí sabíamos que esas marcas eran especiales.

En la historia de “El constructor de Norwood” (1903) **Sherlock Holmes utiliza por primera vez las huellas dactilares para resolver un crimen**, algo muy poco frecuente en la época (es un relato ambientado en el año 1894).



IMAGEN: MARTIN FREEMAN Y BENEDICT CUMBERBATCH EN “SHERLOCK” (2010). CRÉDITOS: HARTSWOOD FILMS Y BBC WALES / FUENTE: IMDB.

¿Quién descubrió por primera vez que una huella dactilar era un método válido para demostrar la culpabilidad de una persona en un asesinato? ¿Qué método científico permitió determinar con exactitud que existe la correspondencia entre dos huellas? La historia de la **dactiloscopia**, la ciencia que se encarga de estudiar la comparación entre huellas dactilares, comenzó hace varios siglos, cuando **en la antigua China, alrededor del año 300 d.C. se usaban las huellas de la mano como evidencia en los juicios por robo.**

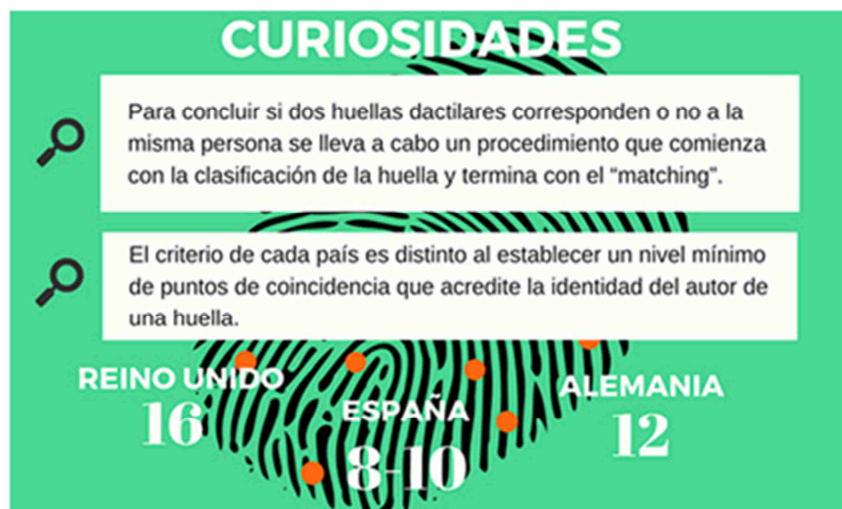


IMAGEN: OPENMIND / DATOS: CONFILEGAL

## UNA COLECCIÓN DE PEQUEÑOS PASOS

Después de la invención del papel en China (105 d. C.), en esta misma región se convirtió en práctica habitual estampar con tinta una marca del dedo o la palma de la mano en todas las hojas de un documento oficial. La dactiloscopia ha recorrido desde entonces un largo camino de oriente a occidente, una trayectoria guiada por los descubrimientos de distintos protagonistas que aportaron su propio “granito de arena” a la consolidación de esta ciencia:

- **Sir William James Herschel**, considerado el primer europeo que percibió el potencial de las huellas dactilares para la identificación de individuos, era oficial del ejército británico en la India, cuando **en 1850 comenzó a incluir huellas dactilares en los contratos**.
- **Henry Faulds**, por su parte, participaba en una misión como médico en Japón cuando empezó a **coleccionar muestras de las huellas dactilares de humanos y monos**. En 1880 y tras llevar a cabo su particular estudio, envió una carta al famoso naturalista **Charles Darwin**, en la que sugería que las huellas dactilares eran únicas además de clasificables y permanentes. Ese mismo año, Herschel se convertiría en la primera persona en publicar en una revista científica el valor de las huellas dactilares como instrumento de identificación.
- **Alphonse Bertillon** era policía cuando desarrolló el método de identificación antropométrico o método Bertillon. La **antropometría** utiliza las medidas corporales de un individuo para identificarlo, dando por hecho que es imposible encontrar dos personas con un conjunto de medidas idéntico. Sin embargo, con el tiempo se desacreditó la fiabilidad de este método, a pesar de que Bertillon llegó a ser nombrado Jefe del Departamento de Identidad Judicial.
- **Sir Francis Galton** fue otro de los eminentes científicos que aportó su granito de arena para resolver el misterio de las huellas dactilares. Primo del famoso Charles Darwin, su investigación estaba centrada en las cuestiones hereditarias. Encontró varios **coeficientes de correlación** (medidas que se corresponden entre sí) en el cuerpo humano a través de la antropometría. En cuanto a la dactiloscopia, ha pasado a la historia por ser el primer autor en publicar un libro sobre huellas dactilares **“Fingerprints” 1892**, donde demostraba que las figuras de las huellas dactilares son únicas e irremplazables.

## LA PRUEBA DE FUEGO

De origen croata pero nacionalizado argentino, **Juan Vucetich** trabajaba en el Departamento Central de Policía de La Plata cuando se interesó por el trabajo que había publicado Francis Galton, tras lo que ideó personalmente un método para comprobar la correspondencia entre huellas dactilares, que en 1891 decidió poner en práctica recogiendo muestras de las huellas dactilares de 23 presos.

Corría el año 1892 cuando el asesinato de dos niños llevó a Vucetich a trabajar con la policía bonaerense. Las primeras investigaciones apuntaban a un hombre relacionado con la madre de los críos, pero los investigadores no eran capaces de hacerle confesar, a pesar de haber utilizado diferentes métodos de tortura. En la escena del crimen habían hallado una huella dactilar, manchada de sangre. **Vucetich comprobó que pertenecía a la madre de los niños**, Francisca de Rojas, quien ante la evidencia confesó, derrumbada, el doble homicidio.

Tan solo 6 años después de que Vucetich pusiese en práctica el primer sistema eficaz de identificación mediante huellas dactilares, **la Academia de Ciencias de París** lo reconoció públicamente como el método más eficaz utilizado hasta el momento en la identificación de personas.

En la actualidad, las huellas dactilares han trascendido el ámbito criminal para convertirse en **un método de identificación cotidiano**, tanto que puede ser que lo utilices hasta para desbloquear la pantalla de tu *smartphone*. Las nuevas tecnologías facilitan el proceso de comparación y a pesar de la existencia de herramientas cada vez más precisas, la ciencia sigue corroborando la singularidad de estas marcas personales e inalterables. Las cifras pueden ayudar a entender la relevancia que tienen hoy las huellas dactilares en el sistema de organización de muchas sociedades. En Estados Unidos, el **IAFIS (Integrated Automated Fingerprint Identification System)**, procesa una media de 63.000 huellas diarias, según sus fuentes oficiales. La verificación de antecedentes penales a la hora de conseguir un empleo y la posibilidad de poseer un arma de fuego en algunos estados de Estados Unidos obliga a los ciudadanos a registrar sus huellas de forma permanente en el sistema nacional. Paradójicamente, las nuevas tecnologías han dado pie a que la identidad que corroboran las huellas se convierta en sí misma en moneda de cambio para el cibercrimen. Incluso se alerta del uso de las fotos en redes sociales en las que se pueden apreciar estas marcas. ¿Tenemos que empezar a proteger nuestras huellas con más cuidado?



ILUSTRACIÓN: SISTEMA PATENTADO POR JUAN VUCETICH.  
IMAGEN: INSTITUTO ARGENTINO DE CRIMINALÍSTICA.

## *Aquí se habla de ciencia* (Historia de una fotografía)

Por: MILAGROS SOCORRO | 3 de septiembre, 2017

Copiado de:

<http://prodavinci.com/blogs/aqui-se-habla-de-ciencia-por-milagros-socorro-unafotountexto/>



ARÍSTIDES BASTIDAS, MARCEL ROCHE Y CARLOS MARTÍNEZ TORRES.  
IMAGEN DEL ARCHIVO: FOTOGRAFÍA URBANA. LÍNEA TEMPORAL DE LA FOTO: ENTRE 1961 Y 1962.

### ARÍSTIDES BASTIDAS.



NACIÓ EL 12 DE MARZO DE 1924, EN EL ESTADO YARACUAY. FALLECIÓ EL 23 DE SEPTIEMBRE DE 1992, EN CARACAS. VENEZUELA.

La libreta, en la mano de Bastidas, anuncia la situación. Un doctor (la bata blanca lo indica) se apoya en una diapositiva para hacer gráfica su explicación, mientras un tercero observa. No sabemos quién tomó la foto, pero sabemos quiénes son los tres hombres, de qué pueden estar hablando y cuándo pudo ser captada la imagen. La gran pista la ofrece esa libreta de reportero indicadora de que esta situación no es de aula sino de prensa.

El primero, de izquierda a derecha, es el periodista Arístides Bastidas. La foto fue hecha por el reportero gráfico que lo acompañó a hacer la entrevista. Arístides Bastidas nació en San Pablo, población del estado Yaracuy, el 12 de marzo de 1924. A los 12 años, en 1936, se mudó con su familia a Caracas. Aunque tenía gran avidez de aprender y era alumno regular del liceo Fermín Toro, no pasó del primer año de bachillerato. Las estrecheces económicas de la familia marcaron ese límite. Tendría que aprender como autodidacta. Y es, por cierto, lo que hizo.

En 1945, tras desempeñarse como vendedor de empanadas, entre otros oficios, ingresó a Últimas Noticias como reportero policial y político, y se inició también como sindicalista y gremialista. Cuatro años después, en 1949, cuando pasó a El Nacional, se convertiría en pionero del periodismo científico moderno en Venezuela.

Arístides bastidas escribió más de veinte libros y llegó a ser una figura tan importante y respetada en el ámbito de la divulgación de la ciencia que, aunque no cursó ni un día de estudios superiores, la Universidad Central de Venezuela lo honró con el nombramiento de profesor honoris causa de la Facultad de Humanidades.

No sería ni de lejos la única institución en reconocer los méritos de Bastidas cuya contribución al desarrollo del periodismo científico fue reconocida con el premio Kalinga (París, 1982), otorgado por la Unesco.

Y pocos días antes de su muerte, acaecida el 23 septiembre de 1992, fue distinguido por la Universidad de Florencia con el “Premio Capire para un Futuro Creativo”, reservado a quienes hacen aportes excepcionales a la educación para la creatividad.

Arístides Bastidas fue un hombre excepcional por muchas cosas. Naturalmente, destacó por su sensibilidad frente a la naturaleza y al hecho científico. “La ciencia y la tecnología”, decía, “tienen la misma procedencia que la poesía y el arte”. Y está en la historia del periodismo venezolano por la nitidez y gracia de su prosa, así como por su compromiso con asuntos nacionales cuya fundamental relevancia supo ver y defender, como la defensa del medio ambiente y la vigencia imperturbable de la agricultura. Pero también estaba fuera de grupo por la heroica circunstancia que le impusieron sus diversas enfermedades y el estoicismo con que las vivió y superó.

Este hombre singular -escribió Hugo Álvarez Pifano- padeció de artritis, sufrió psoriasis, diabetes, glaucoma, parálisis y muchas enfermedades más que solo conocen sus médicos. Al final de su vida perdió casi por completo la vista.

Ese deterioro lo llevó a agudizar sus facultades hasta el punto de que, cuando las múltiples limitaciones le impidieron tomar apuntes, como lo vemos hacer en esta imagen, se entrenó para tomar notas mentales. Pero nunca dejó de trabajar.

“En su silla de ruedas, –lo describe José Pulido, en ‘Periodistas en su tinta’, de Petruvska Simne– con las manos convertidas en dos puños que ya no podían abrirse para teclear la máquina. El periódico le buscaba pasantes que aprendían con él, al mismo tiempo que transcribían las notas que Arístides dictaba. A veces hacía una entrevista, sin anotar nada y sin grabador. Y luego le dictaba al pasante o a la pasante de turno y la entrevista aparecía íntegra, frase a frase, sin que el entrevistad dijera lo que no había dicho. La memoria de Arístides bastidas era tan portentosa que tenía su guía telefónica personal en la mente: recordaba los teléfonos de todos sus amigos y colegas”.

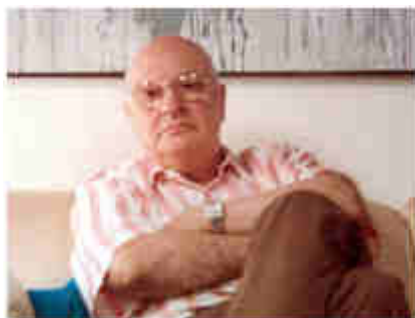
Una de esas pasantes fue la periodista Mara Comerlati, quien asegura que esta foto debió ser tomada alrededor de 1965.

“En 1975, cuando llegué a El Nacional ya él estaba incapacitado, a causa de un accidente de tránsito en el que se partió las piernas; y, debido a las altas dosis de cortisona que tomaba para combatir la artritis y la psoriasis, nunca se le consolidaron las fracturas. El medicamento también le afectó la vista y quedó ciego. En la foto no tiene las placas de psoriasis que le cubrían el cuero cabelludo y le afectaban también el rostro y las manos. Aquí estaba bastante joven y plenamente activo”.

Para glosar el perfil de este gran periodista, recordemos la descripción que de él hiciera el escritor José Santos Urriola: “...bajito, regordete, asertivo y ruidoso, moreno de pelo lacio y de rasgos menudos –la sonrisa potente y pesados los anteojos oscuros–, yaracuyano y comunista: Arístides Bastidas. Quienes lo conocían afirmaban que llegaría a ser una notable figura del periodismo. Algunos le pronosticaban una brillante carrera política. Todos reconocían el talento y la probidad de su empaque de breve obispo rojo. Pero nadie podía adivinar entonces que en Arístides Bastidas se darían, en una sola pieza –que me perdonen los *gentlemen* de la contención literaria–, el sabio, el héroe y el santo, sobre una silla de ruedas”.

Murió en Caracas, el 23 de septiembre de 1992.

## MARCEL ROCHE.



**NACIÓ EL 15 DE AGOSTO DE 1920, EN CARACAS, VENEZUELA. FALLECIÓ EL 3 DE MAYO DE 2003 EN MIAMI, FLORIDA, EE. UU.**

En la mitad de la foto, como deidad tutelar que encabeza una trinidad, está Marcel Roche Dugand, uno de los hombres más fascinantes del siglo XX venezolano. Científico, médico, fundador y gerente de instituciones científicas, escritor, director de coros, conductor de televisión en programas de divulgación científica... no sigamos. Marcel Roche era lo que se llama un humanista, pero limitémonos a los talentos y cargos que lo pusieron este día en esta imagen.

Marcel Roche nació en Caracas, el 15 de agosto de 1920. Por la información recopilada por Yajaira Freitas, del Departamento de Estudio de la Ciencia, IVIC, sabemos que fue el hijo mayor del urbanista Luis Roche, cuyos ascendientes habían venido a Venezuela a mediados del siglo XIX, y de la francesa Beatrice Dugand.

Tras vivir los primeros años de infancia en Caracas, a los 9 años es enviado con sus abuelos paternos a Francia, donde ingresa al College Sainte Croix de Neuilly, donde había estudiado su padre.

Decidido a estudiar Medicina en París, en 1938, los aires de guerra lo llevan a dirigirse más bien a Filadelfia, Estados Unidos, donde obtiene un título, en 1942, en Biología y Química. Luego va a la Escuela de Medicina de la Universidad de Johns Hopkins (Baltimore, Maryland), donde se gradúa de médico en 1946. En los cinco años siguientes permanece en los Estados Unidos y se forma como investigador en varias universidades. En Harvard, donde estuvo entre 1948 y 1949, formó parte de equipos de investigación en las áreas de endocrinología, diabetología y nutrición.

En 1951 regresa a Venezuela e inmediatamente empieza a trabajar en el consultorio del doctor Francisco De Venanzi, quien también lo integra a la Cátedra de Fisiopatología de la Universidad Central de Venezuela (UCV), y al ejercicio de la medicina en el Hospital Vargas.

Entre 1952 y 1958, fundó y condujo el Instituto de Investigaciones Médicas, Fundación Luis Roche, donde investigaba sobre anquilostomiasis, bocio endémico y diabetes.

Roche fue director del Instituto Venezolano de Neurología e Investigaciones Cerebrales (IVNIC), que dio origen al Instituto Venezolano de Investigaciones Científicas (IVIC), que dirigió durante diez años. El IVIC tendría una estructura más amplia que su antecesor, puesto abarcaba desde las ciencias básicas (matemáticas, física, química y biología) hasta medicina y ciencias sociales (antropología, arqueología y sociología e historia de la ciencia). En el grupo fundador se contaron, además de Marcel Roche, los médicos Luis Carbonell, Miguel Layrisse, María Luisa Gallango, Tulio Arends y Carlos Martínez Torres (el tercero en esta gráfica), entre otros. Roche fue también, entre sus muchas y notables iniciativas, fundador del Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Tecnológicas (CONICIT).

Murió en Miami, el 3 de mayo de 2003. No sin haberse hecho acreedor, en 1987, del premio Kalinga que cinco años antes le había entregado la Unesco a Arístides Bastidas.

### CARLOS MARTÍNEZ TORRES.



Muy sobrio, con camisa blanca, corbata, pisacorbata y un flux varias tallas más grande, observa la escena el científico Carlos Martínez Torres.

El doctor Carlos Martínez se había iniciado –explica la doctora Gioconda San Blas, presidenta de la Academia de Ciencias Físicas, Matemáticas y Naturales de Venezuela– en la Fundación Luis Roche trabajando con Marcel Roche y Miguel Layrisse en hematología.

“Cuando se fundó el IVIC, los tres pasaron a formar parte de su plantel de investigación. Martínez Torres quedó trabajando con Layrisse, (porque Roche se había encargado de la dirección del IVIC) con quien estudió las relaciones entre hierro y anemias. Con esos datos y otros más, Layrisse y Roche propusieron al gobierno nacional suplementar la harina de maíz con hierro y otros suplementos, lo cual fue aprobado en los años 80.

Esa sencilla acción de política pública en salud hizo posible una reducción notable en las anemias que azotaban a la población venezolana. Hoy, la Harina Pan sigue manteniendo los suplementos de hierro, vitamina A y tiamina ordenados en aquel decreto de los 80, como puede leerse en la información nutricional del empaque de la Harina Pan”.

Es posible, pues, que la fotografía recoja el instante en que Marcel Roche apela a un recurso pedagógico para exponerle al periodista pormenores del estudio del Anquilostomo, para lo cual diseñaron un aparato que permitía la observación y filmación del gusano que expolia la sangre de los pacientes. En el marco de este trabajo produjeron el documental “In vitro Studies of Ancylostoma caninum”, que en 1961 obtuvo la medalla de oro en la primera reseña de películas de documentación científica médico sanitaria del Centro Cultural Cinematográfico Italiano (Pavia).

Quién sabe si Arístides Bastidas fue a entrevistar a Marcel Roche y a Carlos Martínez Torres a propósito de este premio internacional a la película cuyo protagonista era el gusano causante de anemias en el medio rural venezolano. En este caso, la foto dataría de 1961 o 62.

No tenemos la fecha del fallecimiento del doctor Carlos Martínez Torres, lo que sí pudimos comprobar es que su nombre aparece citado en numerosas ocasiones en contenidos científicos sobre hematología en inglés. Quizá es otro gran venezolano olvidado por nosotros y recordado con respeto en otras latitudes.

Venezuela, personajes, anécdotas e historia.

# Jacinto Lara



Nació el 5 de agosto de 1777 en Carora y falleció en Barquisimeto el 25 de febrero de 1859, en el hoy llamado en su honor, estado Lara. Fue nombrado así a partir de 1881.

Fue comerciante, ganadero, militar, alcanzando el grado de General de División del ejército de Venezuela en la Guerra de Independencia. Participó en numerosas batallas luchando por la libertad de Colombia, Perú y Venezuela. También se destacó en funciones de administración pública, donde se caracterizó por su honestidad y el impulso a la educación y a los servicios públicos.

Uno de los importantes reconocimientos que recibió durante su carrera fue la Orden de Los Libertadores. Se incorporó a la gesta emancipadora venezolana en 1810, siendo nombrado comandante de las milicias de Araure y Ospino. Integró la Sociedad Patriótica. En 1811 participó junto al general Francisco de Miranda, en las operaciones contra los insurrectos de la ciudad de Valencia.

Fue próspero comerciante y ganadero, lo que le permitió adquirir dos hatos llamados uno “La Cabra” y el otro “Quediches”.

Luego del proceso que llevó a la separación de Venezuela de la Gran Colombia, el General Jacinto Lara se retiró de la vida pública aunque tiempo después regresó a la misma para desempeñarse como Gobernador de la provincia de Barquisimeto en el periodo comprendido entre los años 1843 y 1847.

Dio muestra de su alto espíritu cívico cuando en el transcurso de sus últimos años de vida, tuvo un pleito legal por los límites de su Hato Quediches con los del hato de uno de sus vecinos. El tribunal que llevaba el caso, decidió en su contra pero a él no se le ocurrió recurrir a sus glorias militares para imponerse por la fuerza o revertir la sentencia, sencillamente la acató.

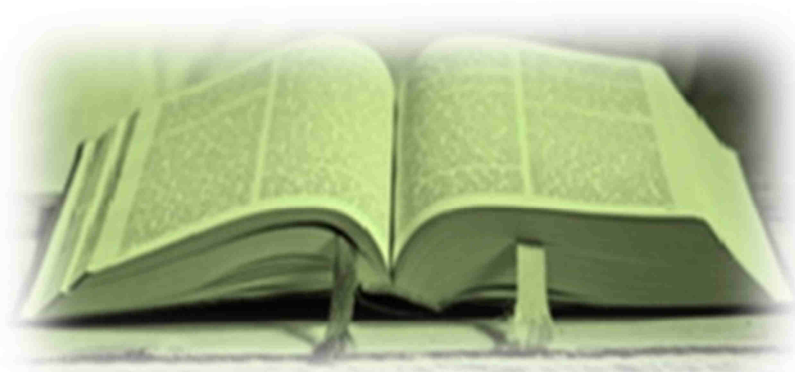
Jacinto Lara murió a los 81 años. En 1881 se le reconoció como héroe nacional y a partir del 24 de julio de 1911 sus restos reposan en el Panteón Nacional.

## ESTUDIOS PODRÍAN REVELAR CÓMO Y CUÁNDO FUE ESCRITA

# La Biblia

Por: Luigi Sánchez

TOMADO DE: El Carabobeño.com, 3 de Julio de 2017



Estudios realizados recientemente concuerdan con las teorías modernas, que explican como La Sagrada Biblia, se escribió en hebreo.

Inscripciones realizadas en fragmentos de cerámica fueron analizadas, por la Universidad de Tel Aviv y han sugerido que hace más de 2.600 años era bastante habitual la alfabetización en el Reino de los Judaítas. La página web norteamericana de la Academia Nacional de Ciencias publicó los resultados de este estudio. Los fragmentos, también conocidos como Ostraca, fueron hallados durante una serie de excavaciones realizados en la fortaleza Israelí de Arad, durante los años 60, en el desierto y al Oeste del Mar Muerto.

Las escrituras fueron hechas en hebreo antiguo, sobre cerámica y realizadas en tinta. Israel Finkelstein, profesor de la Universidad israelí de Tel Aviv, fue quien dirigió la investigación y afirmó que el hallazgo contaba con las órdenes militares del ejército de Judá.

Usando el proceso de imágenes computarizadas, los expertos, descubrieron que las 16 inscripciones halladas, fueron realizadas, por mínimo, 6 autores diferentes. Asimismo, la lectura y la escritura entre los militantes del ejército judaíta eran habituales y se usaban como una manera de brindar órdenes y así poder registrar la información. Es por tal motivo, que los resultados arrojados por este estudio, apoyan rotundamente las teorías actuales, que afirman que La Biblia, fue escrita en el idioma hebreo.

Durante muchos años, se creyó que las Sagradas Escrituras fueron escritas en tiempo real, a medida que acontecían los eventos. Aunque, según los expertos científicos, La Palabra de Dios, podría estar compuesta por una masiva elaboración de textos, realizados por muchos autores, y no tratarse de una obra completa de un solo autor.

Finkelstein, afirmó al periódico británico de Daily Mail que “nuestra investigación y trabajo han podido demostrar, que el reinado de Judá (año 600 a.C.), contaba con una infraestructura educativa muy avanzada y adepta para la compilación de escrituras y el uso de textos para poder transmitir mensajes ideológicos”.

# GALERÍA



## Curtis Tracy McMullen Ganador de la Medalla Fields en 1998

Imágenes obtenidas de:



Nació el 21 de Mayo de 1958 en Bertkeley, California, EE. UU.

**Curtis McMullen** (también conocido como Curt) se estuvo mudando a varios sitios de los Estados Unidos mientras crecía, aunque básicamente su lugar de crianza fue Charlotte, Vermont. Primero asistió a la escuela primaria de Windermere en Upper Arlington, cerca de Columbus, Ohio, luego a la Charlotte Central School, en Charlotte, Vermont, antes de estudiar en la Champlain Valley Union High School en Hinesburg, Vermont, a sólo unos 12 km de Charlotte. Ingresó en el Williams College, Williamstown, Massachusetts Occidental, en 1976. En la referencia [6] McMullen habla de sus años en la Universidad de Williams:

*... Fui a Stanford por un año y tomé un curso de análisis real con Benjamin Weiss quien fue profesor visitante venido de Jerusalén. Y realmente me emocionó por el análisis. Luego volví a Williams y trabajé con Bill Oliver. Fue muy influyente en mi educación matemática; fue de él que aprendí primero esta idea de utilizar diccionarios matemáticos para utilizar como una especie de analogía entre diferentes campos o diferentes desarrollos teóricos para intentar guiar mi trabajo.*

Se graduó en el Williams College con una licenciatura en 1980 como un Valedictorian, o Summa Cum Laude, con los más altos honores en matemáticas y una concentración adicional en física. Obtuvo una beca Herchel Smith para estudiar en la Universidad de Cambridge en Inglaterra y permaneció el año académico 1980-1981 en el Emmanuel College, Cambridge. Ocupó el primer lugar en la parte II de los Tripos Matemáticos. Luego regresó a los Estados Unidos para iniciar una investigación en 1981 en la Universidad de Harvard. En la referencia [6] explica cómo logró obtener un doctorado de Harvard con Dennis Sullivan como su tutor de tesis, aunque Sullivan no trabajaba en Harvard:

*Yo había estado haciendo un trabajo en la computadora con David Mumford sobre grupos kleinianos antes de graduarme, y me interesé en el tema. Pero realmente terminé escribiendo mi tesis con Dennis Sullivan, quien por aquel entonces era profesor de la Universidad de la ciudad de Nueva York y del Institut des Hautes Études Scientifiques en Francia. Así que tuve mucha suerte que David Mumford me lo presentara en el último año de mi carrera de postgrado, ya que en ese momento no tenía tutor y ningún tema para hacer la tesis. Y fui a Francia y trabajé con Sullivan en el Institut des Hautes Études Scientifiques por un semestre, y me reuní allí con Steve Smale quien me dio este problema de tesis agradable sobre resolución de ecuaciones polinómicas por iteración.*

Durante cada uno de los veranos de 1980 a 1985, McMullen emprendió una investigación sobre combinatoria y programación en el Centro de Investigación Watson de IBM, Yorktown Heights, Nueva York. Su trabajo allí implicaba problemas de diseño VLSI: teoría de grafos, síntesis lógica, minimización booleana y elaboración de matriz de esparsamiento. En Yorktown Heights [6]:

*... Mandelbrot y Mumford estaban trabajando en colaboración; Mandelbrot equipaba el acceso a las computadoras en Yorktown Heights para Mumford, quien estaba dibujando hermosas fotos sobre juegos de límite de grupos Kleinianos. Como alguien que está familiarizado con el mundo de la informática en Yorktown, comencé a trabajar para él como su programador, ayudándole a sacar estas fotos y así sucesivamente.*

Como el mencionó en la cita anterior, McMullen pasó el otoño de 1984 como visitante en el Institut des Hautes Études Scientifiques, Bures-sur-Yvette, cerca de París. Su primer trabajo *The Hausdorff dimension of general Sierpinski carpets* (La dimensión Hausdorff en las alfombras de Sierpinski generales) fue publicado en 1984, antes de que él presentara su tesis. En el año académico 1984-1985 disfrutó de una Beca de Disertación Doctoral Alfred P. Sloan. Presentó su tesis *Families of Rational Maps and Iterative Root-Finding Algorithms* (Familias de mapas racionales y algoritmos de búsqueda iterativa de la raíz) en la Universidad de Harvard y obtuvo su doctorado en junio de 1985.

Los problemas que McMullen consideró en su tesis, habían sido por mucho tiempo importantes. Una vez que se logró una comprensión adecuada de que podían resolverse ecuaciones polinómicas por radicales, quedaba el problema de encontrar las raíces de una ecuación polinomial por un procedimiento iterativo para aquellos para los cuales no existía ninguna fórmula. Newton había producido tal método y su procedimiento iterativo converge generalmente para todos los polinomios cuadráticos y puntos iniciales, pero este no era el caso de las ecuaciones polinómicas de grado tres. Stephen Smale se había preguntado si, para cada  $n$ , existe un procedimiento iterativo al que generalmente convergen todos los puntos iniciales. En su tesis McMullen produjo tal procedimiento para polinomios de grado tres, pero demostró que para un grado mayor que tres tal procedimiento iterativo no existe.

Después de obtener su doctorado, McMullen pasó el año académico 1985-1986 en el Massachusetts Institute of Technology, tras ser nombrado C. L. E. Moore Instructor en Matemáticas. Presentó otros trabajos para su publicación y *Area and Hausdorff dimension of Julia sets of entire functions* (Área y dimensión de Hausdorff de los conjuntos de Julia de funciones enteras) se publicó en 1987. Un trabajo con el mismo título de su tesis también apareció en 1987. Permaneció el año 1986-1987 como miembro del Instituto para Estudio Avanzado en Princeton, luego en 1987 fue nombrado Profesor Asistente en la Universidad de Princeton y galardonado con una Beca Postdoctoral de la NSF. Esta beca funcionó hasta 1990 pero también recibió una Beca Alfred P. Sloan en 1988 y fue Investigador Joven Presidencial de 1988 a 1993. En 1990 fue ascendido a Profesor Titular en Princeton pero, en el mismo año, aceptó una Cátedra a Tiempo Completo en la Universidad de California, de Berkeley.

El Premio Salem, fundado por la viuda de Raphael Salem, es otorgado cada año a un joven matemático que haya hecho excelentes trabajos en campo en el que Salem estuvo interesado, es decir, el Análisis. McMullen explica en la referencia [6] que:

*... en 1991, gané el Premio Salem, que es un premio en Análisis; tuve el placer de ser reconocido de esa manera porque me encanta el campo, fue mi primero, como matemático. De hecho, había escrito mi tesis menor como estudiante graduado sobre Números de Salem, y este premio es en honor a Raphael Salem, por lo que tiene un significado especial para mí. Nunca esperé obtener un reconocimiento de este tipo...*

En 1994 fue nombrado Profesor Miller en Berkeley y se había mantenido en la Cátedra Canciller en Berkeley durante 1996-1998. Dejó Berkeley en 1998 cuando fue designado para una Cátedra en la Universidad de Harvard. En 2001 fue nombrado Profesor Maria Moors Cabot en Harvard, un cargo que sigue manteniendo. En cada uno de los veranos entre 2001 y 2007 ocupó el cargo de Profesor Visitante en el Instituto Max-Planck für Mathematik en Bonn.

Se pueden mencionar dos monografías escritas por McMullen. *Complex dynamics and renormalization* (Dinámicas complejas y renormalización) (1994) fue revisado por Gregory T. Buzzard que comienza su informe como sigue:

*Este libro ofrece una presentación muy clara y legible de muchas de las ideas principales y las técnicas utilizadas en el estudio de la dinámica compleja en una variable.*

Después de dar detalles del contenido de cada capítulo, termina su informe:

*Este libro presenta muy claramente muchas grandes ideas y debe llegar a ser una adición valiosa para la literatura sobre dinámica compleja.*

En 1996 McMullen publicó *Renormalization and 3-manifolds which fiber over the circle* (Renormalización y las 3-dimensiones de fibra sobre el círculo) que fue revisado por Athanase Papadopoulos:

*En esta monografía, el autor presenta un estudio amplio de una teoría que pone en paralelo dos teoremas recientes y muy profundos, que involucra a la geometría y a la dinámica. Estos son el teorema de Thurston sobre la existencia de métricas hiperbólicas de 3-dimensiones de fibra sobre el círculo con monodromía pseudo-Anosov y el Teorema de Sullivan sobre la convergencia del mapa de renormalización para mapeos cuadráticos reales. Las pruebas que se dan aquí son nuevas y utilizan diversas discusiones de Thurston y respectivamente las pruebas originales de Sullivan. La relación entre los dos teoremas es difícil indicar en forma concisa, pero por lo menos, una cosa que se puede decir es que ambos teoremas pueden ser pensados como teoremas de punto fijos.*

En 1998 McMullen recibió una Medalla Fields en el Congreso Internacional de Matemáticos en Berlín. Además de la temática en su tesis que se ha descrito anteriormente, la cita menciona el trabajo sobre el Conjunto de Mandelbrot (leer referencia [2]):

*Este conjunto describe sistemas dinámicos los cuales pueden utilizarse para modelar fenómenos naturales complicados como el clima o el flujo de fluido. El punto de interés es donde un sistema se aparta y cuáles puntos se mueven hacia los centros de equilibrio. La frontera entre estos dos extremos es llamada Conjunto de Julia, nombrado así por el matemático francés Gaston Julia, quien sentó las bases para la teoría de los sistemas dinámicos a principios de siglo XX. El Conjunto de Mandelbrot muestra los parámetros para que el Conjunto de Julia esté conectado, es decir, para que sea matemáticamente atractivo. Esta descripción es muy tosca, pero una mejor característica del conjunto límite no estaba disponible. Curtis T. McMullen hizo un gran avance, sin embargo, cuando él demostró que es posible decidir en parte sobre la base del Conjunto de Mandelbrot el cual asociado a un sistema dinámico es "hiperbólico" y por lo tanto se puede describir con más detalle. Para estos sistemas existe una teoría bien desarrollada. Los resultados de McMullen lo supusieron ya en los años sesenta, pero anteriormente nadie había sido capaz de demostrar esta caracterización exacta del Conjunto de Julia.*

En la referencia [6] relata una bonita historia sobre la Medalla Fields:

*Tengo una historia acerca de cuando estaba volviendo de Berlín. La guardia de seguridad en el aeropuerto hizo funcionar el detector de metales; me detuvo cuando al pasar mi mochila por la máquina. Ella dijo, "Disculpe, ¿qué tiene en su mochila?" Dije, "Es una medalla de oro". Ella dijo, un poco dudosamente, "Mmm hmm". Así que saqué mi paquete. Le disgustó un poco, pero ella dijo "Oh, muy bonito; ¿es tuya? Dije "Mmm hmm!"*

El trabajo de la referencia [1] enlista las áreas en las que McMullen hizo aportes:

*Ha hecho importantes contribuciones a diversas ramas de la teoría de sistemas dinámicos, como el estudio algorítmico de ecuaciones polinómicas, el estudio de la distribución de los puntos de una red de un grupo de Lie, geometría hiperbólica, dinámica holomorfa y la renormalización de mapas del intervalo.*

Además del Premio Salem en 1991 y la Medalla Fields otorgada en 1998, McMullen ha recibido un gran número de otros reconocimientos por sus contribuciones excepcionales. Entre ellos, en 1998 fue elegido a Miembro de la Academia Americana de Artes y Ciencias, un Doctorado Honorario en Ciencias por el Williams College en 1999 y fue elegido Miembro de la Academia Nacional de Ciencias en 2007.

También ha sido invitado a dar conferencias especiales (desde 2000) tales como: Coloquio Nevanlinna, Helsinki (2000); Conferencias Coloquios de Sociedad Matemática Americana, Washington DC (2000); Serie de Conferencias Distinguidas, en la Universidad Brown (2001); Conferencia Ross de la Sociedad Matemática Americana, Boston (2002); Conferencias de Namboodiri, Universidad de Chicago (2003); Conferencia Alaoglu, Instituto de Tecnología, Pasadena (2003); Mathematische Arbeitstagung, Max-Planck-Institut de Bonn (2003); Conferencias Bowen, Universidad de California, Berkeley (2004); Conferencia Kolchin, Universidad de Columbia, Nueva York (2005); Conferencias Hopf, Eidgenössische Technische Hochschule, Zúrich (2005); Mathematische Arbeitstagung, Max-Planck-Institut de Bonn (2007); Conferencias Ziwet, Universidad de Michigan, Ann Arbor (2008) y Conferencia Nielsen, CTQM, Aarhus, Dinamarca (2008).

A pesar de sus impresionantes aportaciones a las últimas investigaciones matemáticas, McMullen ha dado excelentes conferencias a escolares como por ejemplo la Conferencia Arnold Ross dio en el 2002 sobre *From Triangles to Infinity* (De triángulos al infinito). Aquí está un informe de esta Conferencia:

*McMullen motivó la charla preguntándole a la audiencia qué camino debe tomar un león para captar a un ser humano, si ambos están en un anillo cerrado. Poco después, en la charla, pidió a los estudiantes en la audiencia armar poliedros con triángulos que encajaban, dando la restricción de tener un número fijo de triángulos en cada vértice. Como sugiere el título de la charla, allí se trataron muchas de las diferentes áreas de las matemáticas tocadas por McMullen, incluyendo: Último Teorema de Fermat, Paradojas de Zenón, Geometría Hiperbólica y Esférica, Serie armónica y entejado. Cerca del final de su charla, McMullen mostró el camino que un humano podía tomar para eludir al león y utilizó resultados sobre series infinitas para demostrar lo eficaz de la ruta. Los profesores y los estudiantes que asistían al Auditorio del Museo de Boston de Ciencia disfrutaron bien el tema de la charla y la manera en que fue desarrollada. Muchos estudiantes buscaban a McMullen después de su charla para hacer preguntas y algunos incluso pidieron su autógrafa.*

Más recientemente, dio la conferencia *The Geometry of 3-Manifolds* (La geometría de 3 dimensiones) en la reunión anual de la Asociación Americana para el Avance de la Ciencia en Boston en febrero de 2008:

*En esta conferencia tópica, McMullen dio una descripción maravillosa de la conjetura de Poincaré... McMullen explicó muchas ideas topológicas de la conjetura, cómo se relaciona con la forma del universo y dio un panorama de prueba de la conjetura por parte de Grigori Perelman.*

Para terminar, citando palabras de Stephen Smale en la referencia [10]:

*... Me gustaría hacer hincapié en cuanto a que el trabajo de McMullen ha abarcado el gran r de la clase de matemáticas que se encuentra en la sección transversal de muchos caminos de nuestra rica cultura. McMullen no es un dinamicista, no es un analista ni un geómetra. Es un matemático.*

## Referencias.-

### Artículos:

1. A Douady and J-P Otal, Les travaux de Curtis McMullen, *Gaz. Math.* **80** (1999), 19-30.
2. Fields Medal Prize Winners (1998): Curtis Tracy McMullen (born 21 May 1958). <http://www.icm2002.org.cn/general/prize/medal/1998.htm>
3. A Jackson, Borchers, Gowers, Kontsevich, and McMullen Receive Fields Medals, *Notices Amer. Math. Soc.* **45** (10) (1998), 1358-1360.
4. J Lepowsky, J Lindenstrauss, Y I Manin, and J Milnor, The Mathematical Work of the 1998 Fields Medalists, *Notices Amer. Math. Soc.* **46** (1) (1999), 17-26.
5. K Matsuzaki, Y Takahashi and M Kato, Introducing two of the Fields medalists: the work of C T McMullen and W T Gowers (Japanese), *Sugaku* **51** (2) (1999), 186-191.
6. A-M Oreskovich and D Sagalovskiy, Harvard University Math Club Interview with Professor Curtis McMullen (Harvard University, 1999). <http://www.math.harvard.edu/~ctm/expositions/interview.html>
7. Prize Winners at the 1998 International Congress of Mathematicians, *American Mathematical Society Feature Columns* (September 1998). <http://www.ams.org/featurecolumn/archive/index.html>
8. A Quiros, The Fields Medals [of 1998] (Spanish), *Gac. R. Soc. Mat. Esp.* **1** (3) (1998), 439-446.
9. C S Rajan, R Bhatia, T R Ramadas and N A Shah, The work of the Fields medalists: 1998, *Current Sci.* **75** (12) (1998), 1290-1295.
10. S Smale, The work of Curtis T McMullen, in Proceedings of the International Congress of Mathematicians I, Berlin, 1998, *Doc. Math. J. DMV* (1998), 127-132.
11. S Smale, The work of [Fields medalist] Curtis T McMullen, *Mitt. Dtsch. Math.-Ver.* **1998** (3) (1998), 48-51.

Versión en español por R. Ascanio H. del artículo en inglés de J. J. O'Connor y E. F. Robertson sobre "Curtis Tracy McMullen" (Julio 2009).

Fuente: MacTutor History of Mathematics [<http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/McMullen.html>].