

## Comprobación de la controlabilidad de un sistema no lineal mediante ANFIS

José Gregorio Díaz P.<sup>(1)</sup>, César Peraza<sup>(1)</sup>, Jorge Castellanos<sup>(1)</sup>, Francisco Arteaga<sup>(1)</sup>, Carlos Lameda<sup>(2)</sup>

<sup>(1)</sup> Centro de Investigación y Tecnología en Automatización, Electrónica y Control CITAEC, Facultad de Ingeniería, Universidad de Carabobo, Venezuela

<sup>(2)</sup> Universidad Experimental Politécnica Antonio J. De Sucre UNEXPO, Barquisimeto, Venezuela  
E-mail: jpdiazp@cantv.net, cperazam@gmail.com, farteaga20@gmail.com

### Resumen

Determinar la controlabilidad de un sistema no lineal por medios matemáticos exactos puede ser extremadamente difícil e incluso imposible. En el presente trabajo, se aplica un método aproximado, basado en técnicas neurodifusas (concretamente ANFIS), con el cual se puede tener una idea bastante aproximada de si el sistema resulta controlable o no, para una determinada entrada de referencia. Aún cuando se hace referencia a un único caso en particular, correspondiente a un sistema de tiempo discreto, el método desarrollado puede extenderse a cualquier otro sistema cuya dinámica pueda expresarse mediante una ecuación de estado en diferencias finitas o del cual se disponga de un conjunto de datos de entrada y salida. Como ventaja adicional, al verificar la controlabilidad se obtiene un controlador difuso aplicable a la planta.

**Palabras clave:** controlabilidad, sistema no lineal, ANFIS, neurodifuso.

## Verifying the controllability of a non linear system using ANFIS

### Abstract

Mathematically, determining whether a non linear system is controllable or not can be a very difficult task, even an impossible one. In this paper, an approximate method is used to check the controllability of a system, with a specific reference input. The method is based on neuro-fuzzy techniques (ANFIS, more specifically) and it proves to provide very good approximate results, useful to determine whether the system is controllable or not. Although the paper refers to a single case, concerning a discrete time system, the method explained can be applied to any other system whose dynamics can be described by means of a difference equation or whose input – output data have been previously collected. Additionally, when the checking procedure is completed, a fuzzy logic controller has also been developed.

**Keywords:** controllability, non linear system, ANFIS, neuro-fuzzy.

### I. INTRODUCCIÓN

El objetivo fundamental de cualquier sistema de control consiste en mejorar y a menudo optimizar el desempeño de un sistema dinámico determinado [1]. Ante esto, una pregunta que surge naturalmente es: ¿cómo se diseña el controlador apropiado que produzca tal efecto? Sin embargo, antes de responder a esta interrogante, el diseñador debería preguntarse: ¿realmente existirá ese controlador, apropiado para la función requerida? Con esto surge de manera natural la necesidad del concepto de controlabilidad de un sistema, como una cuestión fundamental dentro de la Teoría de Control.

En aquellos casos en los cuales se pueden utilizar ecuaciones de estado en el tiempo continuo para definir el comportamiento de un sistema dinámico, la controlabilidad del sistema implica la capacidad de transferir el estado completo del sistema desde un estado inicial  $x(t_0)$  a cualquier estado final  $x(t)$  en un intervalo de tiempo arbitrario  $t_f - t_0 > 0$ , mediante la aplicación de una entrada de control  $u(t)$  apropiada, definida sobre el mismo intervalo de tiempo [2]. Esta controlabilidad también se conoce como “controlabilidad de estado completo”.

El concepto de controlabilidad mencionado anteriormente se refiere a los estados y se le conoce también como controlabilidad de estado. La

controlabilidad también se puede definir para las salidas del sistema, de tal forma que existe una diferencia entre la controlabilidad del estado y la controlabilidad de la salida [3]. Sin embargo, en el presente trabajo sólo se trabajará con la primera de ellas.

La comprobación de si un sistema es controlable o no resulta particularmente sencilla en los casos en los cuales éste es lineal e invariante en el tiempo (sistema LTI). Para un sistema LTI de tiempo continuo, su descripción de estado toma la forma:

$$\frac{dx(t)}{dt} = A x(t) + B u(t) \quad (1)$$

$$y(t) = C x(t) + D u(t) \quad (2)$$

donde  $x(t)$  representa al vector de estado (de dimensiones  $n \times 1$ ),  $u(t)$  es el vector de la entrada de control ( $p \times 1$ ) y  $y(t)$  es el vector ( $q \times 1$ ) de la salida. Por su parte,  $A$ ,  $B$ ,  $C$  y  $D$  son matrices de elementos constantes y de dimensiones  $n \times n$ ,  $n \times p$ ,  $q \times n$  y  $q \times p$ , respectivamente.

Una de las formas de determinar si este sistema es controlable, parte de formar la llamada matriz de controlabilidad:  $S = [B \ AB \ A^2B \ \dots \ A^{n-1}B]$

Para que el sistema descrito por la ecuación de estado (1) sea de estado completamente controlable, es necesario y suficiente que la matriz de controlabilidad  $S$  (de dimensiones  $n \times n$ ) sea de rango igual a  $n$  [3].

Como se ve, siempre que las dimensiones de  $S$  no sean exageradamente grandes, la verificación en este caso es extremadamente sencilla y rápida de realizar, produciendo un resultado matemáticamente exacto.

Si se trata de un sistema LTI en el tiempo discreto, su descripción de estado toma la forma de ecuaciones en diferencias finitas:

$$x(k+1) = A x(k) + B u(k) \quad (3)$$

$$y(k) = C x(k) + D u(k) \quad (4)$$

en donde las dimensiones de los vectores y matrices involucrados son las mismas del caso anterior.

Nuevamente, se forma la matriz de controlabilidad  $S$ :  $S = [B \ AB \ A^2B \ \dots \ A^{n-1}B]$

Al igual que en el caso anterior, la condición necesaria y suficiente para que el sistema sea controlable es que el rango de  $S$  sea igual a  $n$  [4].

Ahora bien, cuando el sistema es no lineal, la comprobación matemática de su controlabilidad puede ser extremadamente difícil e incluso imposible. No obstante, esto no excluye la importancia de la prueba, ya que el control de sistemas no lineales cada día cobra mayor

interés [5]. Por esta razón, la presente investigación se ha orientado hacia el desarrollo de un método que permita obtener una idea razonablemente aproximada de la controlabilidad de un sistema no lineal, como paso previo al diseño de un controlador adaptado al mismo.

## 2. EL CONTROL NEURODIFUSO

Si el vector de control  $u(t)$  o  $u(k)$  de las ecuaciones 1, 2, 3 y 4 es generado a partir de una red neuronal artificial o de un sistema de inferencia difusa, se está en presencia de un sistema de control neuronal o difuso, respectivamente, con el cual se debería lograr que el sistema satisfaga las metas impuestas.

El término “control neurodifuso” se refiere, por su parte, a los métodos de diseño de controladores de lógica difusa que utilizan técnicas provenientes de las redes neuronales [6]. Uno de estos métodos (que ha recibido gran atención por parte de investigadores y usuarios de todo el mundo) es ANFIS (*Adaptive Neuro-Fuzzy Inference Systems*), desarrollado por Jang, Sun y Mizutani [6], siendo ésta la técnica empleada en la presente investigación.

## 3. APRENDIZAJE INVERSO

Cuando se utiliza el aprendizaje inverso en el diseño de controladores neurodifusos se deben seguir dos fases: aprendizaje y aplicación. En la primera de ellas se obtiene un modelo de la dinámica inversa de la planta. Teniendo este modelo, se pasa a la segunda etapa, en la cual el modelo sirve para generar las acciones de control.

En el caso de un sistema no lineal de tiempo discreto, la ecuación de estado toma la forma:

$$x(k+1) = f(x(k), u(k)) \quad (5)$$

donde  $x(k+1)$  representa al vector de estado para el instante  $k + 1$  (de dimensiones  $n \times 1$ ),  $x(k)$  es el vector de estado en el tiempo  $k$ , también  $n \times 1$ ,  $u(k)$  es el vector de entrada en el instante  $k$  (dimensiones  $p \times 1$ ) y  $f$  es una función vectorial cualquiera.

Por supuesto, en el instante  $k + 2$ , se cumple que:

$$\begin{aligned} x(k+2) &= f(x(k+1), u(k+1)) \\ &= f(f(x(k), u(k)), u(k+1)) \end{aligned} \quad (6)$$

y, en general:

$$x(k+n) = F(x(k), U) \quad (7)$$

donde  $F$  es una función compuesta de  $f$  y  $U = [u(k) \ u(k+1) \ \dots \ u(k+n-1)]^T$ .

La ecuación 7 implica que, si la entrada de control  $u$  sigue la secuencia indicada por la matriz  $U$ , el vector de estado se moverá desde  $x(k)$  hasta  $x(k+n)$  en  $n$  muestreos. En algunos casos será posible encontrar una expresión para  $U$  como función explícita de los vectores  $k(k)$  y  $x(k+n)$ :

$$U = G(x(k), x(k+n)) \quad (8)$$

siendo esto lo que se conoce como la dinámica inversa de la planta. Como ya se ha dicho, si se aplica la secuencia  $U$  a la planta, ésta llegará al estado  $x(k+n)$  en, precisamente,  $n$  muestreos. Ahora bien, en muchos casos resultará muy difícil o incluso imposible el obtener esta función  $G$ . Es aquí donde los métodos de la Inteligencia Artificial pueden resultar muy útiles.

A fin de visualizar mejor la metodología seguida cuando se aplica el aprendizaje inverso, se recurrirá a las Figuras 1, 2 y 3. En la Figura 1 se muestra un resumen del modelo de estados en el tiempo discreto de una planta genérica de primer orden, la cual responde al modelo de estados de la ecuación 3, donde se supone que el estado  $x$  está disponible para ser realimentado.

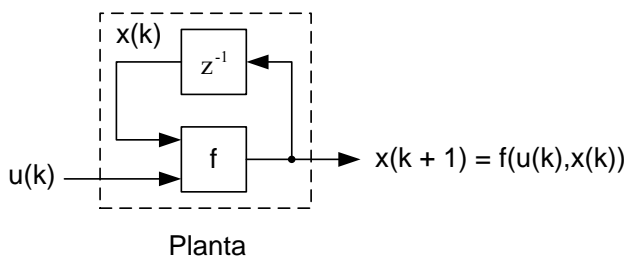


Figura 1. Modelo de la planta.

En la Figura 2 se ha dibujado el diagrama de bloques asociado a la etapa de entrenamiento del sistema neurodifuso. Las entradas del bloque ANFIS son los estados  $x(k)$  y  $x(k+1)$ .

En la gráfica se observa que el entrenamiento se hace comparando la entrada  $u(k)$  con la salida del identificador ANFIS, ajustándose iterativamente los parámetros de éste, de tal manera que esa diferencia se minimice. En otras palabras, se trata que el identificador asocie a cada pareja de estados  $x(k)$  y  $x(k+1)$  la entrada  $u(k)$  correspondiente o, lo que es lo mismo, se intenta encontrar una aproximación de la dinámica inversa de la planta.

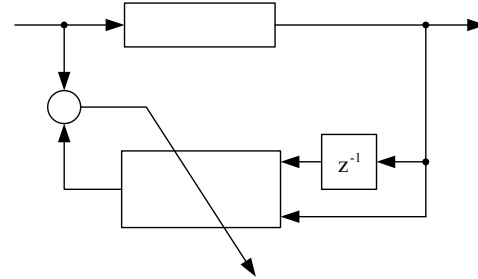


Figura 2. Etapa de entrenamiento.

Una vez que se ha completado satisfactoriamente la etapa de entrenamiento, el sistema neurodifuso encontrado puede utilizarse como controlador, tal como se ve en la Figura 3. En este caso, el valor deseado para el próximo estado se introduce al sistema neurodifuso, junto con el estado actual de la planta. Dado que el sistema ya fue entrenado, el controlador es capaz de generar la entrada  $u(k)$  que requiere la planta para dirigirse al estado deseado. Esto lo logrará en el siguiente muestreo (dado que el caso presentado es de primer orden).

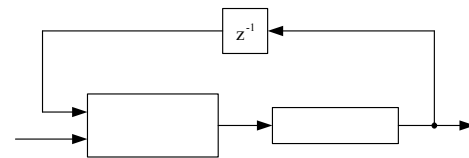


Figura 3. Etapa de aplicación.

En el caso de verificación de la controlabilidad que nos ocupa, el procedimiento consistiría en tratar de hallar el controlador ANFIS que permite que la planta llegue a un cierto estado deseado. Para ello, se siguen los pasos anteriores y se comprueba si el error de seguimiento del sistema con respecto a una señal de referencia dada es lo suficientemente pequeño.

#### 4. CASO ESTUDIO

Del libro de Jang, Sun y Mizutani [6] se tomó el caso estudiado a continuación, en el cual la planta se describe mediante la siguiente ecuación de diferencias finitas:

$$y(k+1) = \frac{y(k) u(k)}{1 + y^2(k)} - \tan[u(k)] \quad (9)$$

donde  $y(k)$  es el estado de la planta y  $u(k)$  es su entrada, ambos en el instante  $k$ . Se desea saber si la planta es controlable.

A fin de entrenar el sistema neurodifuso, se generan de forma aleatoria cien valores diferentes de  $u$ ,

comprendidos en el intervalo  $[-1, 1]$ , con los cuales se forma la matriz de entrenamiento del sistema ANFIS. Esta matriz es de la forma  $[y(k) \ y(k+1) \ u(k)]$ .

Una vez completado el entrenamiento, se verifica si el error del sistema neurodifuso es lo suficientemente pequeño. Al demostrarse que sí lo es, se hace que el mismo trate de seguir a una cierta entrada especificada, que en el presente caso tiene la forma:

$$y_d(k) = 0.6\text{sen}(2\pi k/250) + 0.2\text{sen}(2\pi k/50) \quad (10)$$

Por último, se compara la trayectoria seguida por la salida de la planta, con respecto a la señal de referencia.

## 5. PROGRAMA UTILIZADO

Para el desarrollo de la investigación se utilizó el lenguaje de programación MATLAB de The MathWorks, Inc., junto con su toolbox de Fuzzy Logic (Figura 4).

```
% Prueba de la controlabilidad de un sistema no lineal de primer orden
% mediante ANFIS
%
% Generacion del vector de entrada
u = -1 + 2*rand(1,101);
k = [1:101];
% Inicializacion del vector de salida
y = zeros(1,101); % (la condicion inicial es nula)
% Calculo de los valores de salida a partir de k = 2
for i=1:100
    y(i+1)=(y(i)*u(i))/(1+y(i)*y(i))-tan(u(i));
end
for i=1:100
    y_mas_1(i)=y(i+1);
end
% Se hace que todos los vectores sean de tamaño igual a 100
k(101) = [];
y(101) = [];
u(101) = [];
% Preparacion del ANFIS
% Numero de funciones de membresia, tipo de estas funciones y tipo de salida
nfm = 7;
tipofm = 'gbellmf';
tiposalida = 'linear';
% Numero de epoch
nepoch=60;
% Datos de entrenamiento
data = [y_mas_1; y; u]';
trndata = data;
% Datos de verificacion (iguales a los de entrenamiento)
chkdata = data;
fismat = genfis1(trndata,nfm,tipofm);
[jang,error1,ss,fismat2,error2] = anfis(trndata,fismat,nepoch,[],chkdata);
trndatarecorte = trndata;
chkdatarecorte = chkdata;
trndatarecorte(:,3) = [];
chkdatarecorte(:,3) = [];
anfis_output = evalfis([y_mas_1; y]', fismat2);
output = anfis_output';
error = u - output;
% Verificacion grafica
plot(k,u,'k',k,output,'k')
title('entrada de la planta y salida del ANFIS')
pause
plot(k,error,'k')
title('error del ANFIS')
pause
% Prueba de la calidad de seguimiento de una salida deseada
for i=1:100
    y_deseada(i)=0.6*sin((2*pi*i)/250) + 0.2*sin((2*pi*i)/50);
end
output_planta(1) = 0;
for i=1:99
    output_anfis(i) = evalfis([y_deseada(i+1); output_planta(i)]', fismat2);
    output_planta(i+1) = ...
        (output_planta(i)*output_anfis(i))/(1+output_planta(i)*output_planta(i))-tan(output_anfis(i));
end
error_anfis = y_deseada - output_planta;
% Presentacion grafica de los resultados
plot(k,y_deseada,'k',k,output_planta,'k')
title('salida deseada y salida real de la planta')
pause
plot(k,error_anfis,'k')
title('error')
```

Figura 4. Listado de instrucciones.

## 6. RESULTADOS DE LA INVESTIGACIÓN

En la Figura 5 se superponen las curvas correspondientes a la señal aleatoria empleada en el entrenamiento del sistema neurodifuso y la salida de éste, una vez completado su entrenamiento. Dado que a simple vista no se observa separación entre ambas gráficas, en la Figura 6 se procedió a presentar la diferencia entre ellas, la cual es satisfactoriamente pequeña (siempre menor a 0.0008).

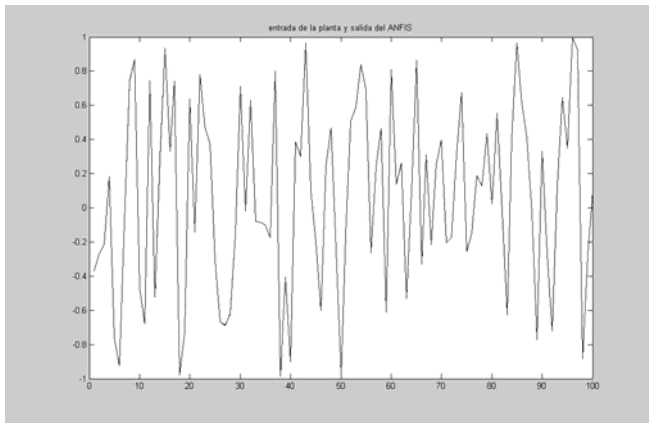


Figura 5. Seguimiento de la señal aleatoria  $u(k)$  por parte del Identificador ANFIS.

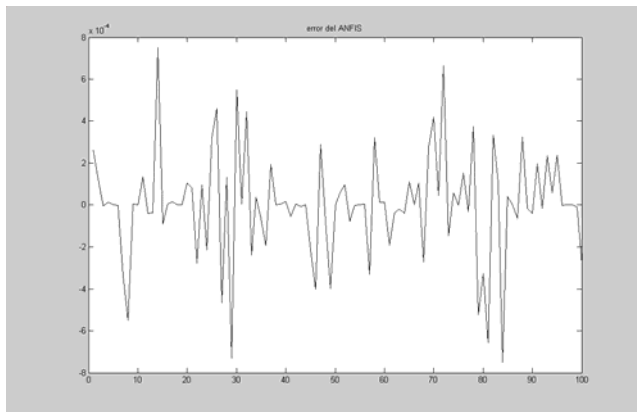


Figura 6. Error del identificador ANFIS.

Una vez entrenado el sistema ANFIS, se le probó como controlador de la planta identificada, haciéndole seguir a la entrada de referencia mencionada en la sección 4 del presente artículo. El resultado aparece en la figura 7.

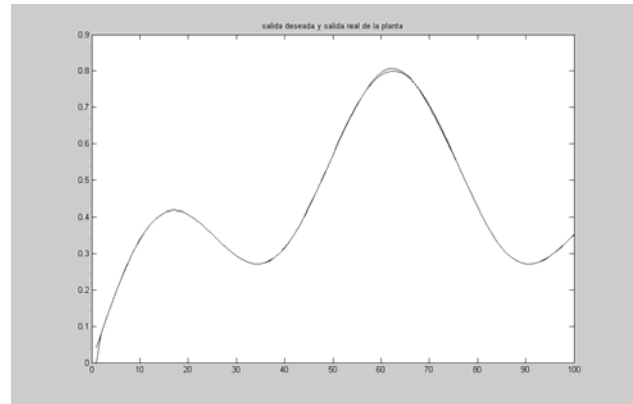


Figura 7. Seguimiento de la señal de referencia por parte de la planta controlada por el sistema neurodifuso.

Como se ve, la planta, controlada por el sistema neurodifuso sigue muy aproximadamente a la señal de referencia, demostrando la controlabilidad de la planta, para este caso en particular. El error de seguimiento se ha representado en la Figura 8.

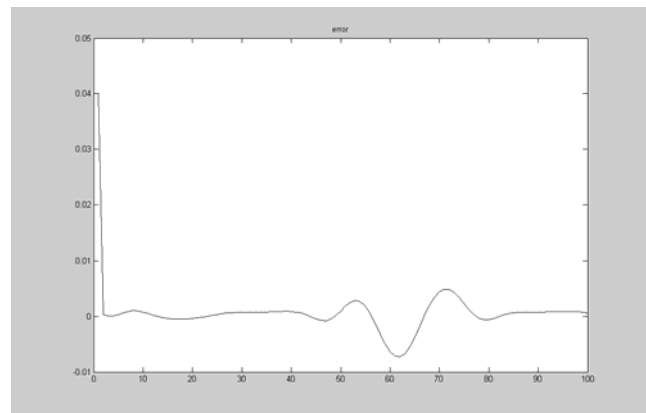


Figura 8. Error de seguimiento de la señal de referencia.

## 7. CONCLUSIONES

El método presentado permite verificar la controlabilidad de una planta de una manera aproximada, siempre que la señal de referencia haya sido previamente especificada. A pesar de que se ha utilizado un ejemplo particular para el desarrollo de la investigación, la técnica puede extenderse a cualquier otro caso, con tal de que el modelo matemático de la planta esté expresado en forma de ecuación de diferencias finitas y la entrada de la planta sea un escalar. Sin embargo, el método puede aplicarse también en aquellas situaciones en las cuales no se

disponga de un modelo matemático de la planta, sino de un conjunto de datos de entrada y salida de la misma.

## 8. BIBLIOGRAFIA

- [1] William Wolovich. Automatic Control Systems: Basic Analysis and Design. Saunders Collage Publishing, USA, 1994.
- [2] William S. Levine, editor. The Control Handbook. CRC Press, USA, 1996.
- [3] Benjamin Kuo. Sistemas de Control Automático, 7ma. edición. Prentice – Hall Hispanoamericana, Méjico, 1996.
- [4] Katsuhiko Ogata. Sistemas de Control en Tiempo Discreto, 2da. edición. Prentice – Hall Hispanoamericana, 1996.
- [5] Jean-Jacques Slotine y Weiping Li. Applied Nonlinear Control. Prentice – Hall, USA, 1991.
- [6] Jyh – Shing Roger Jang, Chuen – Tsai Sun y Eiji Mizutani. Neuro – Fuzzy and Soft Computing: A Computational Approach to Learning and Machine Intelligence. Prentice – Hall, USA, 1997.