Revista Ingeniería UC, Vol. 23, No. 2, Agosto 2016 116 - 121

Obtaining the matrix $P^q = kA$ by the superposition principle and use.

Alirio R. Martínez M.*, José A. Quintana

Departamento de Ingeniería Estructural, Escuela de Ingeniería Civil, Facultad de Ingeniería, Universidad de Carabobo, Valencia, Venezuela.

Abstract.-

In the matrix analysis of structures in the elastic range, it is common to use a procedure in which the matrices are obtained, k, K, A, F, y Q, for the generalized stresses P, then obtain total stresses, P^{Total} will call and then get diagrams bending moments and axial shear strength. However, the matrix analysis may be easier if we define a new matrix that call P^q, such that $P^q = kA$, from which you can get the stiffness matrix K. The matrix P^q can be defined conceptually as the transformation matrix generalized displacements q in generalized forces P, because $P = kAq$, so it follows that $P = P^q q$.

Keywords: matrix analysis of structures; structures; elastic range.

Obtención de la matriz $P^q = kA$ por el principio de superposición y su uso.

Resumen.-

En el análisis matricial de estructuras en el rango elástico, es común utilizar un procedimiento mediante el cuál, se obtienen las matrices, k, K, A, F, y Q, para obtener las solicitaciones generalizadas P, y luego obtener las solicitaciones totales, que llamaremos P^{Total}, para luego obtener los diagramas de momentos flectores, fuerza cortante y fuerza axial. Sin embargo, el análisis matricial puede resultar más sencillo si definimos una nueva matriz que llamaremos P^q, de tal forma que $P^q = kA$, a partir de la cual se puede obtener la matriz de rigidez K. La matriz P^q se puede definir conceptualmente, como la matriz de transformación de desplazamientos generalizados q, en fuerzas generalizadas P, debido a que $P = kAq$, por lo que resulta que $P = P^q q$.

Palabras clave: análisis matricial de estructuras; estructuras; rango elástico.

Recibido: Marzo 2016
Aceptado: Julio 2016

1. Introducción

El principio de superposición de efectos es aplicable al análisis estructural cuando las estructuras tienen un comportamiento elástico lineal.

Los métodos de análisis estructural que se usan considerando que hay linealidad estructural, hacen uso del principio de superposición, el cual consiste en aplicar un efecto a la vez para luego sumarlos todos. Esto permite definir matrices que hacen posible obtener la respuesta de las estructuras ante unas cargas externas.

A lo largo de la evolución del análisis estructural, se han venido definiendo las matrices como k , K , A , F , para establecer lo que se conoce como el método de los desplazamientos. Este a su vez, se deriva del método de las fuerzas [1], y requiere el uso de productos matriciales para obtener la respuesta de una estructura ante cargas externas. El objetivo principal de definir la matriz P , es reducir la cantidad de productos matriciales, de tal manera que, para la metodología

*Autor para correspondencia
Correo-e: aliriomartinezmartinez@gmail.com (Alirio R. Martínez M.)

ya conocida, el orden computacional de operación es de n^{10}, mientras que con el uso de P^q, resulta de orden n^6 . Esto desde el punto de vista manual y computacional, es una gran ventaja, debido a que se reducen significativamente los costos de operación, y tiempo, obteniendo los mismos resultados que con la metodología convencional.

2. Fundamentos teóricos

En el análisis matricial de estructuras, tenemos que $P = kp$ y $p = Aq$ [2], por lo tanto $P = kAq$, siendo k la matriz de rigidez elemental de la estructura, y como $q = FQ$, entonces tenemos que $P = kAFQ$. Por lo tanto, si se obtiene el producto matricial kA por superposición, podemos decir matricialmente que $[P] = [kA][F][Q]$, siendo P el vector de fuerzas generalizadas, F la matriz de flexibilidad de la estructura, y Q el vector de cargas generalizadas. Si decimos que $P^q= kA$, podemos escribir que $P = P^qFQ$.

Por otro lado, $P^q= kA$ (producto matricial de k por A), nos permite obtener la matriz rigidez K de la estructura, debido a que $K = A^TkA$ [3], y haciendo uso de la propiedad asociativa de matrices [4, 5], podemos decir que $[K] = [A^T][kA]$, y luego se puede reescribir que $K = A^TP^q$.

Para obtener P^q, sabiendo que $P = P^qq$, imponemos un desplazamiento generalizado unitario y obtenemos el vector de fuerzas generalizadas P. El vector P obtenido para cada desplazamiento generalizado unitario, será una columna de la matriz P^q.

3. Resumen de ecuaciones

Tenemos que $Q = Q^{ext} - Q^0$, siendo Q^{ext} el vector de cargas generalizadas externas aplicadas, y Q^0, el vector de cargas de empotramiento generalizadas.

Como $Q = Kq$ [2], obtenemos $q = K^{-1}Q$, y como $F = K^{-1}$ [2], $q = FQ$, siendo $P = P^qq$, obtenemos que $P = P^qFQ$.

Tenemos que $K = A^TP^q$, y $P^{Total}= P + P^0$, siendo P^0 el vector de fuerzas generalizadas de empotramiento.

En resumen tenemos las siguientes ecuaciones:

$$Q = Q^{ext} - Q^0 \tag{1}$$

$$K = A^TP^q \tag{2}$$

$$F = K^{-1} \tag{3}$$

$$P = P^qFQ \tag{4}$$

$$P^{Total} = P + P^0 \tag{5}$$

4. Pasos para obtener P^{Total} mediante el uso de la matriz P^q

A continuación se describen los pasos:

1. Definir el sistema P-p y Q-q de la estructura.
2. Hallar el vector de cargas generalizadas mediante la ecuación (1), mediante las fuerzas de empotramiento haciendo equilibrio de juntas para el caso en que están restringidos los desplazamientos generalizados, y el vector de cargas externas Q^{ext}.
3. Hallar la matriz A de la estructura, imponiendo desplazamientos generalizados unitarios q, y obteniendo las deformaciones p, de tal forma que por cada desplazamiento unitario q, el vector p obtenido, será una columna de la matriz A.
4. Hallar la matriz P^q de la estructura, imponiendo desplazamientos generalizados unitarios q, y obteniendo el vector P, de tal forma que por cada desplazamiento unitario q, el vector P obtenido, será una columna de la matriz P^q.
5. Hallar la matriz de rigidez de la estructura, mediante la ecuación (2), siendo A^T la transpuesta de la matriz A.
6. Hallar la matriz de flexibilidad de la estructura mediante la ecuación (3).
7. Aplicar la ecuación (4) para obtener P.
8. Aplicar la ecuación (5) para obtener las solicitaciones totales.

5. Ejemplo de cálculo de P^{Total} mediante el uso de P^q

Sea la estructura de la Figura 1, se pide hallar P^{Total}, sabiendo que la sección transversal es constante para los miembros AB y BC, y son cuadradas de 0,40 m de lado, y el módulo de elasticidad es el mismo para AB y BC.

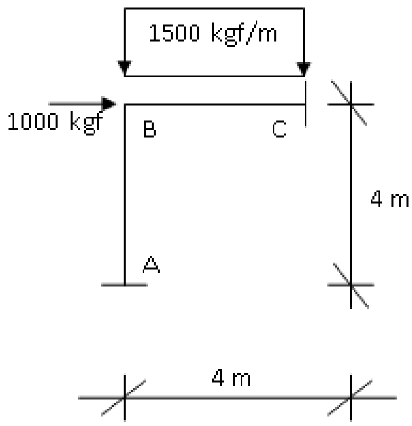

Figura 1: Estructura para el ejemplo de cálculo de P^{Total}.

Paso 1. Definimos el sistema Q-q y P-p de la estructura.

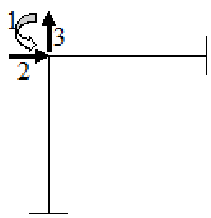

Figura 2: Sistema Q-q.

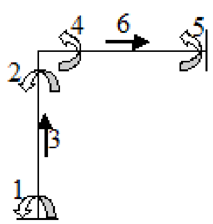

Figura 3: Sistema Q-q.

Paso 2. Hallamos Q.

Para hallar Q, consideramos restringidos los desplazamientos generalizados, como se puede ver en la siguiente Figura 4

De esta manera los miembros AB y BC, quedan empotrados-empotrados, entonces hallamos las fuerzas de empotramiento.

Veamos:

Miembro AB Figura 5.

$$M^0_{AB} = M^0_{BA} = P^0_1 = P^0_2 = 0$$

$$A^0_{AB} = P^0_3 = 0kgf$$

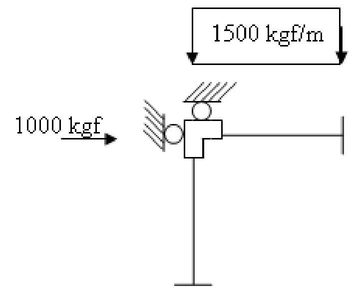

Figura 4: Sistema 0, donde se consideran restringidos los desplazamientos generalizados.

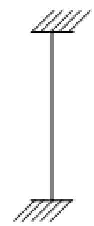

Figura 5: Fuerzas de empotramiento del miembro AB.

$$V^0_{AB} = V^0_{BA} = 0\,kgf$$

Miembro BC Figura 6.

Figura 6: Fuerzas de empotramiento del miembro BC.

$$M^0_{BC} = P^0_4 = 2000kgf - m$$

$$M^0_{CB} = P^0_5 = -2000kgf - m$$

$$V^0_{BC} = 3000kgf \qquad \uparrow\boxed{\text{V(+)}}\downarrow$$

$$V^0_{CB} = -3000kgf \qquad \uparrow\boxed{\text{V(+)}}\downarrow$$

$$A^0_{CB} = A^0_{BC} = P^0_6 = 0kgf$$

Haciendo equilibrio en la junta B, se obtiene el vector Q^o

$$Q^0_1 = 2000kgf$$

$$Q^0_2 = 0kgf$$

$$Q^0_3 = 3000kgf - m$$

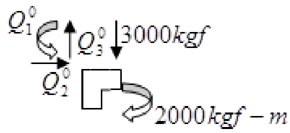

Figura 7: Equilibrio de la junta B.

Ahora $Q^0 = \begin{bmatrix} 2000 \\ 0 \\ 3000 \end{bmatrix}$, y $Q^{ext} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1000 \\ 0 \end{bmatrix}$, por lo que $Q = Q^{ext} - Q^0 = \begin{bmatrix} 2000 \\ 0 \\ 3000 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 1000 \\ 0 \end{bmatrix}$, y entonces $Q = \begin{bmatrix} 2000 \\ -1000 \\ 3000 \end{bmatrix}$. Por otro lado $P^0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 2000 \\ -2000 \\ 0 \end{bmatrix}$

Paso 3 y paso 4. Hallamos la matrices A y P^q.

Para hallar la matriz A y P^q, imponemos cada desplazamiento generalizado unitario y hallamos las deformaciones y fuerzas generalizadas respectivamente, definidas en el sistema P-p. Veamos: Para $q_1 = 1$, y $q_2 = q_3 = 0$

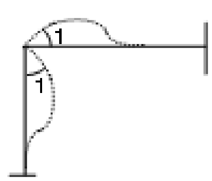

Figura 8: Imposición del desplazamiento unitario generalizado $q_1 = 1$.

Obtenemos la primera columna de A y P^q

$$A_1 = \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \\ p_5 \\ p_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$P_1^q = EI_0 \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ P_4 \\ P_5 \\ P_6 \end{bmatrix} = EI_0 \begin{bmatrix} 0,5 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0,5 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Para $q_2 = 1$, y $q_1 = q_3 = 0$

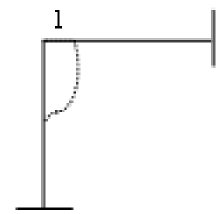

Figura 9: Imposición del desplazamiento unitario generalizado $q_2 = 1$.

Obtenemos la segunda columna de A y P^q

$$A_2 = \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \\ p_5 \\ p_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/4 \\ 1/4 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$P_2^q = EI_0 \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ P_4 \\ P_5 \\ P_6 \end{bmatrix} = EI_0 \begin{bmatrix} 0,375 \\ 0,375 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -18,75 \end{bmatrix}$$

Para $q_3 = 1$, y $q_1 = q_2 = 0$

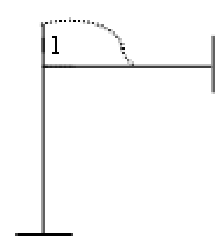

Figura 10: Imposición del desplazamiento unitario generalizado $q_3 = 1$.

Obtenemos la tercera columna de A y P^q

$$A_3 = \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \\ p_5 \\ p_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1/4 \\ 1/4 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$P_3^q = EI_0 \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ P_4 \\ P_5 \\ P_6 \end{bmatrix} = EI_0 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 18,75 \\ 0,375 \\ 0,375 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Ahora teniendo las columnas de las matrices A y P^q, armamos dichas matrices:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0,25 & 0 \\ 1 & 0,25 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0,25 \\ 0 & 0 & 0,25 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$P^q = EI_0 \begin{bmatrix} 0,5 & 0,375 & 0 \\ 1 & 0,375 & 0 \\ 0 & 0 & 18,75 \\ 1 & 0 & 0,375 \\ 0,5 & 0 & 0,375 \\ 0 & -18,75 & 0 \end{bmatrix}$$

Paso 5. Hallamos K, mediante la ecuación (2).

$$K = A^T P^q = EI_0 \begin{bmatrix} 2 & 0,375 & 0,375 \\ 0,375 & 18,9375 & 0 \\ 0,375 & 0 & 18,9375 \end{bmatrix}$$

Paso 6. Hallamos $F = K^{-1}$.

$$F = \frac{1}{EI_0} \begin{bmatrix} 0,5037 & -0,01 & -0,01 \\ -0,01 & 0,0530 & 0,0002 \\ -0,01 & 0,0002 & 0,0530 \end{bmatrix}$$

Paso 7. Hallamos P mediante la ecuación (4).

$$P = P^q F Q = \begin{bmatrix} 466,630454 \\ 960,39604 \\ 2603,63942 \\ 1039,60396 \\ 545,838374 \\ 1356,75662 \end{bmatrix}$$

Paso 8. Obtenemos P^{Total} de la ecuación (5).

$$P^{Total} = \begin{bmatrix} 466,630454 \\ 960,39604 \\ 2603,63942 \\ 3039,60396 \\ -1454,16163 \\ 1356,75662 \end{bmatrix}$$

6. Cálculo de P^{Total} del ejemplo anterior mediante el análisis matricial de forma convencional y comparación de resultados

En el análisis matricial convencional, la matriz de rigidez de la estructura se calcula según la expresión $K = A^T kA$, en donde k se construye a partir de las matrices de rigidez elementales de los miembros que conforman la estructura.

Entonces tenemos:

$$k_{AB} = \begin{bmatrix} \frac{4EI_0}{4} & \frac{2EI_0}{4} & 0 \\ \frac{2EI_0}{4} & \frac{4EI_0}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{A_0}{I_0}\frac{EI_0}{4} \end{bmatrix}$$

$$k_{AB} = k_{BC} = EI_0 \begin{bmatrix} 1 & 0,5 & 0 \\ 0,5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 18,75 \end{bmatrix}$$

Ahora armamos k, donde $k = \begin{bmatrix} k_{AB} & 0 \\ 0 & k_{BC} \end{bmatrix}$, entonces nos queda:

$$k = EI_0 \begin{bmatrix} 1 & 0,5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0,5 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 18,75 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0,5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 18,75 \end{bmatrix}$$

y aplicando $K = A^T kA$, obtenemos

$$K = EI_0 \begin{bmatrix} 2 & 0,375 & 0,375 \\ 0,375 & 18,9375 & 0 \\ 0,375 & 0 & 18,9375 \end{bmatrix}$$

que es idéntica a la que habíamos hallado.

Luego $F = K^{-1}$

$$F = \frac{1}{EI_0} \begin{bmatrix} 0,5037 & -0,01 & -0,01 \\ -0,01 & 0,0530 & 0,0002 \\ -0,01 & 0,0002 & 0,0530 \end{bmatrix}$$

Ahora $P = kAFQ$, donde $B = kAF$ (matriz de equilibrio de la estructura), de tal manera que $P = BQ$.

Entonces operando $B = kAF$, obtenemos la matriz de equilibrio B. De esta forma nos queda:

$$B = \begin{bmatrix} 0,248129676 & 0,014888521 & -0,004913459 \\ 0,5 & 0,00990099 & -0,00990099 \\ -0,187032419 & 0,003703612 & 0,993802622 \\ 0,5 & -0,00990099 & 0,00990099 \\ 0,248129676 & -0,004913459 & 0,014888521 \\ 0,187032419 & -0,993802622 & -0,003703612 \end{bmatrix}$$

Ahora operando $P = BQ$, obtenemos

$$P = \begin{bmatrix} 466,630454 \\ 960,39604 \\ 2603,63942 \\ 1039,60396 \\ 545,838374 \\ 1356,75662 \end{bmatrix}$$

y luego tenemos que $P^{Total} = P + P^0$

$$P^{Total} = \begin{bmatrix} 466,630454 \\ 960,39604 \\ 2603,63942 \\ 3039,60396 \\ -1454,16163 \\ 1356,75662 \end{bmatrix}$$

Como se pudo evidenciar, hallar las solicitaciones totales mediante el uso de P^q, da el mismo resultado que hacerlo mediante el análisis matricial convencional.

7. Conclusiones

Hemos definido una nueva matriz que hemos llamado P^q, que transforma desplazamientos q en fuerzas generalizadas P. Hasta ahora, se conoce que dicha matriz, puede ser usada para hallar las solicitaciones totales P^{Total} de una estructura según el sistema $P - p$ que haya definido, lo cual nos permitirá construir los diagramas de cortes, momentos flectores y fuerzas axiales, hallar la matriz de rigidez K de la estructura y el vector de fuerzas generalizadas P. El estudio de la matriz P^q puede conllevar a otros usos de la misma hasta ahora desconocidos.

A nivel comparativo, hacer el análisis matricial mediante el uso de P^q, da los mismos resultados que hacerlo mediante el análisis matricial convencional. Adicionalmente, usando P^q, permite que los cálculos sean de menor orden computacional con respecto al método convencional.

Referencias

[1] E. Blanco, M. Cervera y B. Suárez. *Análisis matricial de estructuras*. Centro Internacional de Métodos Numéricos en Ingeniería, 2015.

[2] Roberto Aguiar. *Análisis matricial de estructuras*. Departamento de Ciencias de la Tierra y la Construcción, Universidad de Fuerzas Armadas ESPE, 4ta edición, 2014.

[3] Yuan-Yu Hsieh. *Teoría elemental de estructuras*. Prentice-Hall International, México, 1ra edición, 1986.

[4] Jack McCormac y Rudolf Elling. *Análisis de estructuras. Métodos clásico y matricial*. Ediciones Alfaomega, S. A., 1994.

[5] Stanley Grossman. *Álgebra lineal*. Grupo Editorial Iberoamerica, S. A., México, 2da edición, 1987.